I International Scientific Practical Conference of graduate and postgraduate students, lecturers
«APPLIED ISSUES OF EXACT SCIENCES»
20-21 October 2017, Armavir

ЭКВИДИСТАНТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Н.В. Гриб[1], А.Д. Стриленко[2]

1) преподаватель УВО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», г. Минск, Беларусь, nikolay.grib@mail.ru
2) студент УВО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», г. Минск, Беларусь, riddik_54@mail.ru

Аннотация: В статье рассматриваются эквидистантные множества для точек, прямых и окружностей. С их использованием проводится решение задачи Аполлония о построении касательной окружности к трем данным окружностям.

Ключевые слова: эквидистантное множество, коническое сечение, задача Аполлония.

EQUIDISTANT SETS

N.V. Grib[1], A.D. Strilenko[2]

1) teacher of the Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, nikolay.grib@mail.ru
2) student of the Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, riddik_54@mail.ru

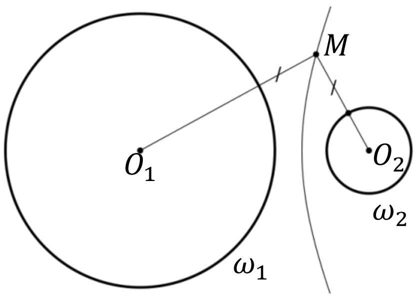
Abstract: In the article we consider equidistant sets for points, lines and circles. With their use, the Apollonius problem to construct a tangent circle to three given circles is solved.

Keywords: equidistant set, conic section, Apollonius problem.

Как известно, множество точек плоскости, равноудаленных от данных точек A и B – серединный перпендикуляр к отрезку AB. Заменим точки A и B на некоторые множества и рассмотрим множество точек, равноудаленных от A и B. При этом под расстоянием от точки M до множества A понимаем $d(M,A) \coloneqq \inf_{N\in A} MN$, где MN – обычное евклидово расстояние между точками M и N. Следуя работам [1] и [2], *серединным* или *эквидистантным* множеством для множеств A и B, или, для краткости, эквидистантой будем называть множество

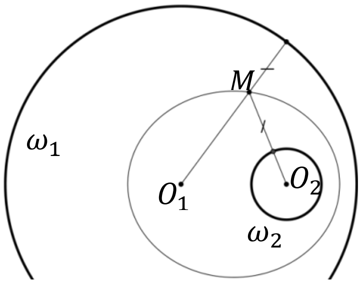
$$\{A = B\} := \{M | d(M,A) = d(M,B)\}.$$

Эквидистанты представляют не только теоретический интерес, но и естественным образом возникают в практической деятельности. Например, в Конвенции Организации Объединенных Наций по морскому праву говорится, что граница территориальных вод двух государств проходит по эквидистанте территорий этих государств. В работах [1] и [2] были изучены в основном топологические свойства эквидистант. Изучение метрических свойств осложняется тем, что аналитическое вычисление расстояния от точки до данного множества практически всегда невозможно. Рассмотрим простейшие случаи, когда множества A и B являются точкой, прямой или окружностью, тогда расстояние может быть найдено с помощью циркуля и линейки.



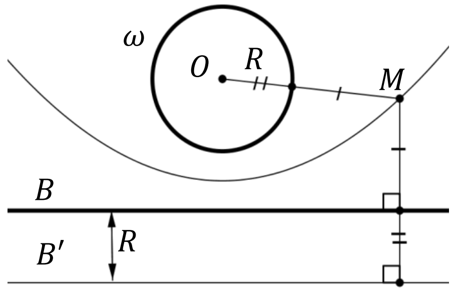
Через $\omega(O,R)$ условимся обозначать окружность с центром в точке O и радиусом R.

1. Пусть $A=\omega_1(O_1,R_1)$, $B=\omega_2(O_2,R_2)$, $R_1>R_2$, B лежит вне A. Тогда для любой точки M эквидистанты выполняется $MO_1-R_1=MO_2-R_2$, следовательно, $MO_1-MO_2=R_1-R_2$. Получили, что в любой точке эквидистанты разность расстояний до точек O_1 и O_2 постоянна. Как известно, множество точек, обладающее таким свойством – ветвь гиперболы с фокусами O_1 и O_2. Причем, если ω_2 вырождается в точку (R_2=0), то эквидистанта, очевидно, тоже гипербола с теми же фокусами.



2. Пусть $A=\omega_1(O_1,R_1)$, $B=\omega_2(O_2,R_2)$, $R_1>R_2$ и B лежит внутри A. Тогда $MO_2-R_2=R_1-MO_1$, следовательно, $MO_1+MO_2=R_1+R_2$.

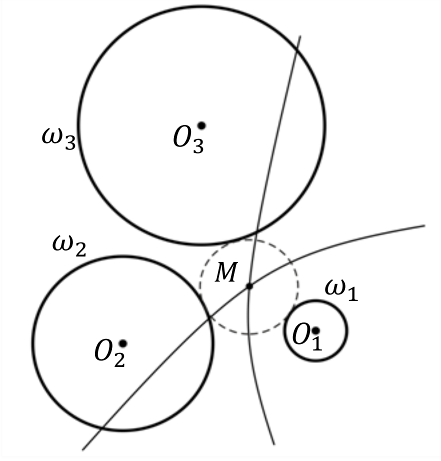
Таким образом, в любой точке эквидистанты сумма расстояний до точек O_1 и O_2 постоянна и равна $R_1 + R_2$. Множество точек, удовлетворяющих этому свойству – эллипс с фокусами O_1, O_2 и большой осью $R_1 + R_2$. Понятно, что если ω_2 заменить точкой, то эквидистанта – эллипс с теми же фокусами.



3. Пусть $A = \omega(O, R)$, B – прямая, A и B не пересекаются. Обозначим через B' прямую, проведенную параллельно B на расстоянии R. Для точки M эквидистанты выполняется $MO - R = d(M, B)$, отсюда $MO = d(M, B) + R = d(M, B')$. Расстояния от точки эквидистанты до точки O и до прямой B' равны, значит, по определению параболы эквидистанта – парабола с фокусом O и директрисой B'.

Ограничимся рассмотрением этих трех случаев, но отметим важный факт: если множества A и B являются точкой, прямой или окружностью, то их эквидистанта является либо прямой, либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой, либо комбинацией двух этих линий.

С помощью эквидистант можно получить оригинальное решение известной задачи Аполлония: *построить с помощью циркуля и линейки окружность, касающуюся трех данных окружностей*. Эта задача впервые была сформулирована и решена в III столетии до н.э. известным греческим геометром Аполлонием Пергским. К сожалению, решение Аполлония не сохранилось.



Кратко изложим идею решения. Пусть $\omega_1(O_1, R_1)$, $\omega_2(O_2, R_2)$, $\omega_3(O_3, R_3)$ – данные окружности. Решение задачи может быть сведено к нахождению точки M, равноудаленной от всех окружностей. Так как M равноудалена от ω_1 и ω_2, то она лежит на эквидистанте $\{\omega_1 = \omega_2\}$, то есть на ветке гиперболы с фокусами O_1 и O_2. С другой стороны, точка M равноудалена от ω_1 и ω_3, поэтому она лежит на ветке гиперболы с фокусами O_1 и O_3. Следовательно, M – точка пересечения двух гипербол. Для построения точки M будем использовать директориальное свойство конических сечений: для любой точки конического сечения отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы есть величина постоянная (эксцентриситет конического сечения). Фокусы гипербол известны, директрисы и эксцентриситет находятся с помощью известных формул аналитической геометрии. Директориальное свойство позволяет сначала свести задачу построения точки пересечения гипербол к нахождению пересечения гиперболы и некоторой прямой, в свою очередь эта задача решается с помощью гомотетии.

Любопытно, что данное решение задачи Аполлония использует конические сечения, сочинением о которых и прославился Аполлоний. Тем не менее, его решение почти наверняка было отлично от приведенного, так как директориальное свойство не встречается ни в одной из дошедших до нас книг "Конических сечений" Аполлония.

Список использованных источников:

1. Loveland, L. D. When midsets are manifolds / L. D. Loveland // Proceedings of Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol.61., No.2. – P. 353–360.

2. Ponce, M. On Equidistant Sets and Generalized Conics: The Old and the New / M. Ponce, P. Santibáñez// The Amer. Math. Monthly. – 2014. – Vol.121. – P. 18–32.