ПОЛИЭЛЛИПС КАК ОБОБЩЕНИЕ КОНИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

А.Ю. Петкевич[1], Н.В. Гриб[2]

1) учитель ГУО «Средняя школа №6 г. Минска», г. Минск, Беларусь, anya.petkevich.30@mail.ru
2) преподаватель УВО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», г. Минск, Беларусь, nikolay.grib@mail.ru

Аннотация: Рассматриваются полиэллипсы как обобщение обычных эллипсов на случай произвольного числа фокусов. Указан способ построения касательных и нормалей к полиэллипсу, а также получена формула для вычисления кривизны в данной точке полиэллипса.
Ключевые слова: полиэллипс, выпуклая кривая, касательная и нормаль кривой, кривизна.

POLYELLIPSE AS A GENERALIZATION OF THE CONIC SECTION

A.Y. Petkevich[1], N.V. Grib[2]

1) teacher of the secondary school No. 6 in Minsk, Minsk, Belarus, anya.petkevich.30@mail.ru .
2) teacher of the Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus, nikolay.grib@mail.ru .

Abstract: We consider polyellipses as a generalization of ordinary ellipses to the case of an arbitrary number of foci. A method for constructing tangents and normals to a polyellipse is given, and a formula for computing the curvature at a given point of a polyellipse is obtained.
Keywords: polyellipse, convex curve, tangent and normal to a curve, curvature.

Обобщенным коническим сечением (обобщенной коникой) в математике обычно называется геометрический объект, определяемый свойством, которое является обобщением некоторого определяющего свойства классической коники. Наиболее широко используемым подходом является определение ее как обобщение эллипса.

Пусть F_1 и F_2 – фиксированные точки на евклидовой плоскости. Из аналитической геометрии известно, что множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до F_1 и F_2 есть величина постоянная, представляет эллипс. В 1638 году Декарт в частном письме к Ферма предлагает ему рассмотреть кривые, сумма расстояний от любой точки которой до произвольного числа заданных точек, называемых фокусами, постоянна,

$$\gamma_a = \{M \mid \sum_{i=1}^{n} MF_i = a = const\}. \qquad (1)$$

Такие кривые естественно назвать мультифокусными эллипсами, полиэллипсами или *n*–эллипсами. Ферма не исследует эти кривые, однако формулирует родственную с определением 3-эллипса известную задачу о минимизации суммы расстояний до тех данных точек плоскости. В середине XIX века выходит несколько работ Максвелла, посвященных изучению некоторых свойств полиэллипсов, а также способам их построения с помощью нити и булавок. Интерес к мультифокусным эллипсам возрастает с конца XIX века, когда были найдены их приложения к экономической теории, много работ по различным обобщениям эллипсов и их приложениям выходит и в наши дни (см., например, [1]-[3]).

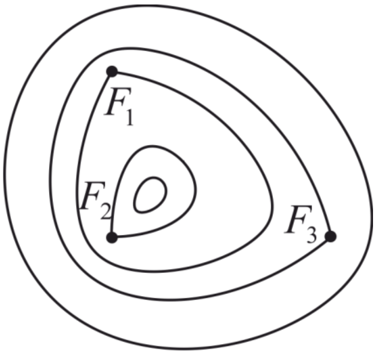

Рис. 1.

Как показано в [1] и [2], каждый n-эллипс – строго выпуклая кусочно гладкая замкнутая алгебраическая кривая степени не выше 2^n. Причем гладкость нарушается лишь в точках, совпадающих с фокусами. Эти свойства полиэллипса характеризуют его глобальное поведение. Для изучения локальных свойств, к наиболее важным из которых относятся направление кривой, определяемое касательной, и кривизна, воспользуемся дифференциальной геометрией.

Пусть $\vec{r_i}(s)$ – вектор-функция натурального параметра с началом в точке F_i, определяющая полиэллипс. Тогда, согласно (1),

$$\sum_{i=1}^{n} |\vec{r_i}(s)| = a. \qquad (2)$$

Непосредственно вычисляя производную, легко проверить, что если точка M не совпадает с то $|\vec{r_i}(s)|' = \cos\varphi_i$, где φ_i – угол между фокальным радиусом $\overline{F_i M}$ и касательной к γ_a в точке M. Дифференцируя обе части (2), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\varphi_i = 0. \tag{3}$$

Но косинус угла между двумя векторами можно рассматривать как длину проекции единичного вектора, сонаправленного с одним из этих векторов, на другой вектор.

Пусть $\vec{n}(s) = \sum_{i=1}^{n}(\vec{r_i}(s)/|\vec{r_i}(s)|)$ – вектор, который равен сумме единичных векторов, сонаправленных с $\vec{r_i}$. Так как проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов, то $\sum_{i=1}^{n}\cos\varphi_i$ – длина проекции $\vec{n}$ на касательную, и из (3) следует, что вектор $\vec{n}$ перпендикулярен касательной и является вектором нормали кривой γ_a в точке M.

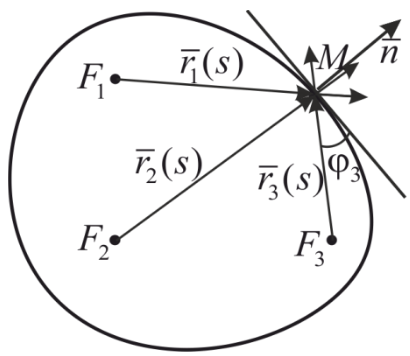

Рис. 2.

Таким образом, для построения нормали к полиэллипсу в точке M достаточно отложить от точки M единичные векторы, сонаправленные с $\overrightarrow{F_iM}$, их сумма $\vec{n}$ – вектор нормали кривой. Прямая, перпендикулярная $\vec{n}$, – касательная к γ_a.

Далее определим кривизну кривой γ_a в точке M Повторное дифференцирование равенства (3) приводит к соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\ddot{\vec{r_i}}(s)|\cdot|\vec{r_i}(s)|\cdot\cos\alpha_i + \cos^2\alpha_i}{|\vec{r_i}(s)|} = 0, \tag{4}$$

где α_i – угол между фокальным радиусом $\vec{r_i}$ и нормалью к γ_a. Так как длина второй производной вектор-функции натурального параметра равна кривизне соответствующей кривой, $k(s) = |\ddot{\bar{r}}(s)|$, то, выражая из (4) кривизну, получим

$$k(s) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\cos^2\alpha_i}{|\vec{r_i}(s)|} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i.$$

С помощью рассуждений, аналогичных проводимым выше, нетрудно убедится, что $\sum_{i=1}^{n}\cos\alpha_i = -|\vec{n}|$, с учетом этого будем иметь

$$k = \frac{1}{|\vec{n}|}\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos^2\alpha_i}{F_iM}.$$

В заключение отметим, что различного рода обобщения коник широко используются на сегодняшний день в теории исследования операций, теории аппроксимации, дифференциальной и финслеровой геометрии, а также в экономической географии, архитектуре, геометрической томографии и многих других областях современного знания.

Список использованных источников:

1. Sekino, J. n-ellipses and the minimum distance sum problem / J. Sekino // Amer. Math. Monthly. – 1999. – Vol. 106., No.3. – P. 193–202.

2. Nie, J. Semidefnite representation of the k-ellipse. / J. Nie, P. A. Parrilo, B. Sturmfels // Algorithms in algebraic geometry. – 2008. – Vol. 146. – P.117–132.

3. Melzak, Z.A. Polyconics 1. Polyellipses and optimization / Z.A. Melzak, J.S. Forsyth // Quart. Appl. Math. – 1977. – Vol.35., No.2. – P. 239–255.