ВЫПОЛНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ПРИНЦИПУ БАЛАНСИРОВАНИЯ

Ю.Р. Шпилевая[1)], С.В. Стадник[2)]

1) студентка Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, lulek.romanovna@mail.ru
2) доцент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, svs2167@yandex.ru

Аннотация: в настоящей статье рассматривается задача об оптимизации процесса изменения ориентации космического аппарата по принципу балансирования.

Ключевые слова: балансирование, переориентация, движение, момент инерции, система координат.

IMPLEMENTATION OF OPTIMAL REORIENTATION OF SPACE APPARATUS BY THE PRINCIPLE OF BALANCING

Julia R. Shpilevaya[1)], Sergei V. Stadnik[2)]

1) the student Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education "Kuban State Technological University", city of Armavir, Russia lulek.romanovna@mail.ru
2) associate Professor of Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education "Kuban State Technological University", city of Armavir, Russia, svs2167@yandex.ru

Abstract: This article deals with the problem of optimizing the process of changing the orientation of a spacecraft on the principle of balancing.

Key words: balancing, reorientation, motion, moment of inertia, coordinate system.

Задача оптимальной по быстродействию переориентации космического аппарата (КА) в классе движений с одним поворотом рассматривались в [1-2] и других работах. В [1] анализ переориентации КА проводился по принципу оптимальности В.Ф. Кротова, а в [2] — по принципу максимума Л.С. Понтрягина.

И настоящей статье также решается задача оптимальной переориентации в классе движений с одним поворотом по принципу балансирования [3]. Управление осуществляется в классе функций C^{Γ}.

Показано, что при незначительном увеличении (на 10 %) времени энергетические затраты на управление процессом переориентации КА по принципу балансирования в 2 раза меньше, чем при управлении по принципу Л. С. Понтрягина.

Рассмотрим движение КА относительно его центра масс. Полагаем, что движение КА описывается динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = M_x, \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = M_y, \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = M_z, \end{aligned} \qquad (1)$$

где A, B, C — главные моменты инерции массы КА относительно центральных осей связанной системы координат $Oxyz$;

M_x, M_y, M_z — проекции реактивного момента КА на координатные оси связанной системы координат $Oxyz$;

p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости КА на координатные оси связанной системы координат $Oxyz$.

Изменениями моментов инерции КА за счет уменьшения рабочего тела (топлива), движения его объектов при реализации во внутренней программе пренебрегаем [3].

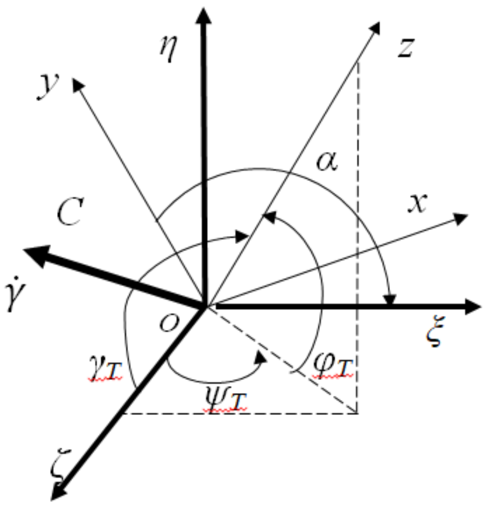

Рисунок 1 – Система координат

Пусть система координат $Oxyz$ в начальный момент времени (t=0) совпадает также с центральной системой Oξηζ, координатные оси которой имеют постоянные направления. КА в этот момент находится в покое. Задача состоит в переориентации КА за фиксированное время *T,* желательно за минимально возможное при наименьшей затрате энергии, чтобы ось Oz заняла наперед заданное положение, определяемое углами φ_T, ψ_T относительно системы координат Oξηζ, представленной на рисунке 1. Для этого будем вращать КА около оси OC с угловой скоростью $\dot{\gamma}$.

Как известно [2], ось OC лежит в координатной плоскости Oξη и определяется углом

$$\sin\alpha = \frac{\cos\varphi_{\text{Т}}\sin\psi_{\text{Т}}}{\sqrt{\sin^2\varphi_{\text{Т}}+\cos^2\psi_{\text{Т}}}}. \quad (2)$$

Угол конечного поворота КА γ можно вычислить по формуле:

$$\sin\gamma_{\text{Т}} = \sqrt{sin^2\varphi_{\text{Т}} + cos^2\varphi_{\text{Т}} sin^2\psi_{\text{Т}}}, \quad (3)$$

а проекции мгновенной угловой скорости КА соответственно равны:

$$p = \dot{\gamma}\cos\alpha,\ q = \dot{\gamma}\sin\alpha,\ r = 0. \quad (4)$$

Тогда динамические уравнения Эйлера (1) принимают вид:

$$\mathrm{A}\ddot{\gamma}\cos\alpha = \mathrm{M_x},\ \mathrm{B}\ddot{\gamma}\sin\alpha = \mathrm{M_y},\ (\mathrm{B}-\mathrm{A})\dot{\gamma}^2\sin\alpha\cos\alpha = \mathrm{M_z}. \quad (5)$$

Предполагается, что проекции реактивного момента ограничены по модулю и удовлетворяют неравенствам

$$|\mathrm{M_x}| \le \mathrm{m_1}, |\mathrm{M_y}| \le \mathrm{m_2}, |\mathrm{M_z}| \le \mathrm{m_3}. \quad (6)$$

Принимаются следующие условия для угла поворота и угловой скорости КА:

при $t = 0 \quad \gamma = \gamma_0 = 0,\ \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 = 0;$
(7)

при $t = T \quad \gamma = \gamma_T,\ \dot{\gamma} = \dot{\gamma}_T = 0.$
(8)

Из первых двух уравнений системы (5) следуют равенства

$$\ddot{\gamma} = \frac{M_x}{A\cos\alpha} = \frac{M_y}{B\sin\alpha} = u, \quad (9)$$

где ***u*** - новое управление, модуль которого удовлетворяет неравенству

$$|u| \le m, \quad (10)$$

а величина ***m*** выбирается из условия

$$m = min\left\{\frac{m_1}{A\,|\cos\alpha|}, \frac{m_2}{B\,|\sin\alpha|}\right\}. \quad (11)$$

В новых переменных $x_1=\gamma$ $x_2=\dot{\gamma}$ первые два уравнения системы (5) перепишутся в фазовых координатах следующим образом:

$$\dot{\mathrm{x}}_1 = \mathrm{x}_2,\ \dot{\mathrm{x}}_2 = \mathrm{x}_3\ , \quad (12)$$

где управление $u=x_3$ принято за фазовую координату объекта управления, т. е. верхнего уровня иерархии.

В соответствии с принципом балансирования [3] система уравнений (12) замыкается балансировочным уравнением [7-10]

$$x_3 = \omega^2(x_1 + b) \tag{13}$$

где $\omega^2 = a^{-1}$, b — весовые коэффициенты динамической системы и внешнего силового поля.

Таким образом, уравнения (12), (13) образуют замкнутую систему при определении всех фазовых координат двухуровневой дефектной иерархической динамической системы.

Условия (7), (8) для уравнений в фазовых координатах перепишутся следующим образом:

при $t = 0$ $x_1 = x_{10} = 0,\ x_2 = x_{20} = 0;$
(14)

при $t = T$ $x_1 = x_4 = \gamma_T,\ x_2 = x_{21} = 0.$
(15)

Проинтегрируем полученную систему уравнений и проанализируем поведение двухуровневой дефектной иерархической динамической системы.

В [4] и других работах было показано, что решение уравнений (12) зависит от выбора значения весового коэффициента a. Оно выражается через показательные функции при a<0, через тригонометрические при $a = \frac{1}{\omega^2}$<0 и параболические при ω=0. В зависимости от выбора начальных и конечных условий они позволяют реализовать движение КА или по всем этим законам, или только по некоторым из них. В принятых условиях (14) (15) реализация программы переориентации КА возможна для решений в тригонометрической и параболической формах. Приведем результаты интегрирования системы уравнений (12) с учетом балансировочного уравнения (13) и условий (14), (15) только при a>0.

Общее решение системы (12) имеет вид

$$x_1 = \frac{1}{\omega}(C\sin\omega t - D\cos\omega t) - b, \tag{16}$$

$$x_2 = C\cos\omega t + D\sin\omega t, \tag{17}$$

$$x_3 = -\omega(C\sin\omega t - D\cos\omega t), \tag{18}$$

а постоянные интегрирования и коэффициенты динамической системы при фиксированном времени $\boldsymbol{T}$ определяются по формулам:

$$C = 0, \quad D = \frac{1}{2}\omega\gamma_T, \tag{19}$$

$$\omega = \frac{\pi}{T}, \qquad b = -\frac{1}{2}\gamma_T \tag{20}$$

Таким образом, процесс в двухуровневой дефектной иерархической динамической системе, т. е. процесс переориентации КА, описывается следующими законами:

$$x_1 = \frac{\gamma_T}{2}\left(1 - \cos\frac{\pi t}{T}\right), \qquad (21)$$

$$x_2 = \frac{\pi\gamma_T}{2T}\sin\frac{\pi t}{T}, \qquad (22)$$

$$x_3 = \frac{\pi^2\gamma_T}{2T^2}\cos\frac{\pi t}{T}. \qquad (23)$$

Условие (10) приводит к неравенству

$$max|u| = \frac{\pi^2\gamma_T}{2T^2} \le m. \qquad (24)$$

Из него находим минимальное время переориентации КА:

$$T_{min} = \pi\sqrt{\frac{\gamma_T}{2m}} \qquad (25)$$

которое превосходит минимально возможное время [2] на 10 % при управлении этим процессом по принципу максимума Понтрягина.

Полученные результаты справедливы при выполнении ограничения (6) на максимальное значение модуля проекции M_z реактивного момента, т. е.

$$\max|\mathrm{M_z}| = \frac{1}{2}|(\mathrm{B}-\mathrm{A})\sin 2\alpha|\max\gamma^2 = \frac{1}{8}|(\mathrm{B}-\mathrm{A})\sin 2\alpha|\frac{\pi^2\gamma_\mathrm{T}^2}{\mathrm{T}} \le \mathrm{m_3}. \qquad (26)$$

Последнее неравенство можно рассматривать при заданном ***T*** как ограничение на угол $\gamma_т$ поворота КА. Тогда максимально допустимый угол поворота $\gamma_{т\,max}$ определится из равенства

$$\gamma_{T\,max} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{Tm_3}{d}}, \qquad (27)$$

где $2\mathrm{d} = |(\mathrm{B}-\mathrm{A})\sin 2\alpha|$,
или можно воспользоваться этим неравенством для нахождения

$$\bar{T} = \frac{\pi\gamma_T}{2}\sqrt{\frac{d}{m_3}}. \qquad (28)$$

Маневр переориентации КА за время ***T*** можно осуществить при ограничениях (6), (10) на проекции реактивного момента, если будут соблюдены следующие условия:

$$T \le T_{min} \le \bar{T}. \qquad (29)$$

Вторая часть неравенства (29) имеет место, если между величинами m, m_3, $\gamma_т$, d выполняется соотношение

$$\mathrm{m}\gamma_\mathrm{T}\mathrm{d} \ge 2\mathrm{m_3}. \qquad (30)$$

Определим время ***T*** процесса переориентации КА. Выполнив стандартные операции, получим закон процесса переориентации КА:

$$\mathrm{x}_1 = \frac{\gamma_T}{2}(1 - \cos\omega t), \qquad (31)$$

$$x_2 = \frac{\omega\gamma_T}{2}\sin\omega t, \qquad (32)$$

$$x_3 = x_{30}\cos\omega t, \qquad (33)$$

где $\boldsymbol{x_{30}}$ — начальное значение фазовой координаты $\boldsymbol{x_3}$, т.е. управления $\boldsymbol{u}$.

Длительность процесса переориентации КА и значение весовых коэффициентов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{\omega}$ вычисляем по формулам:

$$d = -\frac{x_{30}}{\omega_1^2}, \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{2|x_{30}|}{\gamma_T}}, \qquad \omega_2 = 0. \tag{34}$$

$$T = \frac{\pi}{\omega}. \tag{35}$$

При условии (10) время $\boldsymbol{T}$ (33) переориентации КА принимает минимальное значение (25). Выполнение же условия (6) для проекции M_z реактивного момента КА приводится к неравенству (30).

В случае второго значения ω_2=0, как следует из (13) и значения коэффициента b (34), оптимальное управление выражается законом

$$u_{\text{оп}}(t) = \begin{cases} m, & 0 \le t \le t_1 \\ 0, & t_1 \le t \le T - t_1 \\ -m, & T - t \le t \le T \end{cases} \tag{36}$$

где $t_1 = \frac{1}{2}\left(T - \sqrt{T^2 - \frac{\gamma_T^2}{m}}\right)$ - момент первого переключения управления КА. Второй участок движения пассивен.

Анализ оптимального управления процессом переориентации КА по закону (36) приведен в работе [2].

Таким образом, в последнем случае управление (36) переориентацией КА по принципу балансирования в классе кусочно-непрерывных функций совпадает с управлением процесса по принципу максимума Л.С. Понтрягина. В классе этих функций оптимальным управлением процессом переориентации КА будет и показательный закон по принципу балансирования [4].

Проведем оценку энергоемкости процесса переориентации КА при управлении (23) по принципу балансирования И.Ф. Верещагина и при управлении (36) по принципу максимума Л.С. Понтрягина.

Работы по переориентации КА на угол $\gamma_т$

$$A = \int_0^{Tmin} |u|\, \dot{\gamma} dt \tag{37}$$

при управлении по этим принципам соответственно равны:

$$A_\delta = \frac{m\gamma_T}{2}, \qquad A_\mu = m\gamma_T \tag{38}$$

т.е. при управлении по принципу максимума Л.С. Понтрягина работа по переориентации КА будет в два раза больше. В силу этого последнее управление с энергетической точки зрения нерационально. Если еще учесть трудность реализации такого управления из-за двух переключений, то совершенно очевидно преимущество управления (23) процессом переориентации КА по принципу балансирования.

Список использованных источников:

1. Соловьев В.П. Об оптимальном развороте космического аппарата вокруг произвольной неподвижной оси // Космические исследования, 1969. – Т.7. – Вып.1. – С. 42-50.
2. Лоскутов Е.М. К задаче оптимальной переориентации космического аппарата // Космические исследования, 1973. – Т.11. - № 2. – С. 180-187.
3. Верещагин И.Ф. Принцип балансирования. Сб. «Проблемы механики управляемого движения. Иерархические механические системы», изд. Пермского университета, 1976.
4. Верещагин И.Ф. Анализ задачи быстродействия методом балансировочных уравнений. Сб. «Проблемы механики управляемого движения» вып. 7, изд. Пермского университета, 1975.