АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

А.И. Вахрушев [1], Г.А. Алексанян[2]

1) студент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, lec.go@mail.ru
2) к.п.н., доцент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, arm-jork@mail.ru

Аннотация: в данной статье рассматривалось значение и особенности аппроксимации, и ее основные функции.

Ключевые слова: Аппроксимация, количественная зависимость, метод конечных элементов, метод конечных разностей, интерполяция, экстраполяция.

APPROXIMATION OF FUNCTIONS

A.I. Vakhrouchev[1] G.A. Aleksanyan[2]

1) student of Armavir mechanical-technological Institute (branch) of fsbei HE "Kuban state technological University", Armavir, Russia, lec.go@mail.ru
2) Ph. D., associate Professor of Armavir mechanics and technology Institute (branch) OF fsbei HE "Kuban state technological University", Armavir, Russia, arm-jork@mail.ru

Abstract: this article discusses the value and features of the approximation, and its main functions.

Keywords: Approximation, quantitative dependence, finite element method, finite difference method, interpolation, extrapolation.

Аппроксимация – замещение одних материальных объектов другими (например, функций или чисел) наиболее простыми, более удобными в применении или просто более известными. Кроме того, аппроксимация помогает в научных исследованиях и применяется для анализа, описания, обобщения и дальнейшего использования эмпирических результатов.

В начале второй половины 19 века классическая теория аппроксимации берет свое начало с работ П.Л. Чебышева, и, как оказалось, многие задачи теории приближений могут быть интерпретированы как задачи оптимального восстановления. Уже ближе к середине 20 века, были сформированы те задачи, которыми интересовались и продолжают интересоваться специалисты по теории приближений. В 60-е годы прошлого века возникла новая задача об оптимальном восстановлении линейного функционала (а затем и оператора) на классе элементов по неточной информации о самих элементах. Эта задача была предложена советским математиком А.Н. Колмогоровым, и гласит о том, что класс элементов идеологически тесно связан с понятием поперечника класса функций, но имеет явно выраженный информационный характер.

Как известно, между величинами возможно осуществить точную (функциональную) связь, когда одному значению аргумента соответствует одно определенное значение, и менее точная (корреляционная) связь, когда одному конкретному значению аргумента соответствует приближенное значение или некоторое множество значений функции, в той или иной степени близких друг к другу. При обработке результатов наблюдения, ведении научных исследований или эксперимента часто приходится сталкиваться со вторым вариантом. В ходе исследования возможных показателей, количественных зависимостей, значения которых определяются эмпирически, как правило, имеется в виду некая их вариабельность. Зачастую она задается неоднородностью самих исследуемых объектов в неживой и, в особенности, живой природы, частично обуславливается погрешностью наблюдения и количественной обработке материалов. Заключительную составляющую не всегда получается исключить полностью, возможно только минимизировать ее тщательным подбором адекватного метода исследования и аккуратностью работы. Поэтому возникает проблема при выполнении каждой научно-исследовательской работы, в раскрытии подлинного характера зависимости изучаемых показателей, данной или иной степени замаскированных, неучтенных вариабельности значений. Для таких моментов и применяется аппроксимация - максимально приблизительное описание корреляционной зависимости переменных подходящим уравнением функциональной зависимости, передающим основную тенденцию зависимости (или ее линейный путь).

Исходя из конкретной задачи исследования, нужно сделать выбор аппроксимации. Как правило, чем более упрощенное уравнение применяется для аппроксимации, тем более приблизительно получаемое описание зависимости. Поэтому важно учитывать, насколько существенны и чем обусловлены отклонения конкретных значений от получаемого тренда. При описании зависимости эмпирически определенных значений можно добиться и гораздо лучшей точности, применяя какое-либо более сложное, многопараметрическое уравнение. Однако, нет практически никакого смысла стараться и стремиться с максимальной точностью передать случайные отклонения величин в определенных рядах эмпирических данных. Гораздо важнее уловить общую закономерность, которая в данном случае наиболее логично и с приемлемой точностью выражается именно двухпараметрическим уравнением степенной функции. Таким образом, подбирая вид аппроксимации, исследователь во многих случаях должен идти на компромисс: решает, в какой степени в данном случае целесообразно и рационально «пожертвовать» элементами и, соответственно, насколько обобщенно нужно выразить зависимость сопоставляемых переменных. Наряду с выявлением закономерностей, замаскированных случайными отклонениями эмпирических данных от общей закономерности, аппроксимация дает возможность также решать немало других важных задач: формализовать найденную зависимость; находить неизвестные значения зависимой переменной путем интерполяции или, если это допустимо, экстраполяции.

В практике известны 3 способа задания функции:

- Аналитический;
- Графический;
- Табличный;

В практике наиболее распространен случай, когда вид связи между параметрами X и Y неизвестен, т.е. нельзя выразить данную связь в виде некоторой зависимости $y = f(x)$. Как правило, даже при известной зависимости $y = f(x)$, она настолько громоздка, что ее использование в практических расчетах затруднительно. В большинстве случаев эта связь представляется в виде таблицы, т.е. дискретному множеству значений аргумента $\{xi\}$ поставлено в соответствие множество значений функции $\{yi\}(i = 1, 2, .., п)$. Эти значения – либо результаты расчетов, либо экспериментальные данные. В практике нам могут потребоваться значения величины y и в иных точках, отличных от узлов xi. Зачастую данные значения можно получить лишь путем сложных расчетов, либо проведением дорогостоящих экспериментов. Таким образом, необходимо использовать имеющиеся табличные данные для приближенного вычисления искомого параметра y при любом значении (из некоторой области) определяющего параметра x, поскольку точная связь $y = f(x)$ неизвестна. Задачи исследования в большинстве случаев требуют установить определенный вид функциональной зависимости между характеристиками изучаемого явления. Этой цели и служит задача о приближении функции. Т.е. задача о приближении (аппроксимации) функции состоит в том, чтобы данную функцию $f(x)$ приближенно заменить (аппроксимировать) некоторой функцией $\varphi(x)$, значения которой в заданной области мало отличались от опытных данных – $f(x) \approx \varphi(x)$.

Методы решения такой задачи относятся к категории численных методов или методов вычислительной математики.

Интерполяция – Один из существующих способов аппроксимации функций. Он используется только в тех случаях, когда основная информация о приближаемой функции дается в виде таблицы ее значений. В результате решения задачи интерполяции линия, соответствующая интерполирующей функции, будет обязательно проходить через все точки исходных данных. В этом случае точки являются узлами интерполяции.

Единственное требование при интерполяции, чтобы оно имело ту же таблицу значений, что и приближаемая функция:

$$\varphi(xi) = f(xi),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Это условие называется условием интерполяции. Функция, которая соотвествует условиям интерполяции, называется интерполяционной, а точки x0, x1, x2, …, xп узлами интерполяции. В большинстве случаев в качестве интерполяционных функций выбирают алгебраические многочлены, так как их значения вычисляются проще всего. Таким образом, решается следующая задача определяется алгебраический многочлен n-й степени:

$$Рп(xi) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

удовлетворяющий условиям интерполяции:

$$Рп(xi) = f(xi),\ i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Алгебраический многочлен, который соответствует этим условиям, называют интерполяционным многочленом. Геометрический смысл интерполяции состоит в том, что графики функции y = f(x) и интерполяционного многочлена y = Рп(x) должны проходить через все табличные точки (xi, yi), i = 0, 1, 2, …, n.

Кроме построения интерполяционных зависимостей, можно использовать более общий вариант приближения функции – построение аппроксимирующих зависимостей на основе различных функциональных взаимосвязей между двумя рассматриваемыми величинами. Приближенная функциональная зависимость, полученная на основании экспериментальных данных, называется аппроксимирующей функцией или эмпирической формулой.

Построение эмпирической формулы состоит из 2-х этапов:

1. Выбор общего вида формулы. В некоторых случаях он известен из физических соображений. Если характер зависимости неизвестен, то первоначально его выбирают геометрически: экспериментальные точки наносятся на график и примерно угадывается общий вид зависимости путем сравнения полученной кривой с графиками известных функций (многочлена, логарифмической, показательной функций и т.п.). Выбор

вида эмпирической зависимости – наиболее сложная часть решения задачи, ибо класс известных аналитических зависимостей необъятен.

Практические опыты показывают, что достаточно ограничиться довольно узким кругом функций: линейные, степенные и показательные при выборе аналитической зависимости.

2. Определение значений параметров аппроксимирующей функции.

В заключении хочется подчеркнуть полезность аппроксимации в решении многих задач. Аппроксимация дает возможность изучить числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению наиболее удобных или более простых объектов (например, свойства которых уже известны или характеристики которых можно легко вычислить).

Список использованных источников:

1. Зинченко О.И., Манин М.П., Горовенко Л.А. Разработка прототипа конфигуратора параметров целевой функции для задач моделирования энергосбережения // Прикладные вопросы точных наук: Материалы I Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей.- Армавир: ООО «Типография имени Г. Скорины», 2017. – С.220-226. https://elibrary.ru/item.asp?id=30494063

2. Стадник В.С., Горовенко Л.А. Многокритериальные задачи принятия решений в процессе технологической подготовки производста // Прикладные вопросы точных наук: Материалы I Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов, преподавателей.- Армавир: ООО «Типография имени Г. Скорины», 2017. – С. 72-78. https://elibrary.ru/item.asp?id=30491386

3. Горовенко Л.А., Мельников А. Р. Применение математического аппарата решения оптимизационных задач графическим методом // Сборник докладов победителей и лауреатов XXII студенческой научной конференции АМТИ. Армавир: ООО «Редакция газеты «Армавирский собеседник», подразделение Армавирская типография», 2016. □ С. 87□90. https://elibrary.ru/item.asp?id=27639386