ПРОЦЕСС ИЗМЕНЕНИЯ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА КАК РЕШЕНИЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А.Ю. Габрелян[1], С.В. Стадник[2]

1) студент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, Gabrelyan1999@mail.ru
2) доцент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, svs2167@yandex.ru

Аннотация: в настоящей статье рассматривается задача перемещения космического аппарата между двумя компланарными круговыми орбитами с использованием идеальной двухуровневой иерархической динамической системы.
Ключевые слова: движение, дифференциальные уравнения, материальная точка, орбита, центр инерции.

THE PROCESS OF CHANGING THE ORBIT OF SPACE APPARATUS AS A SOLUTION OF A TWO-LEVEL DYNAMIC SYSTEM

Artem Y. Gabrelyan [1], Sergei V. Stadnik[2]

1) the student Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education “Kuban State Technological University”, city of Armavir, Russia, Gabrelyan1999@mail.ru
2) associate Professor of Armavir Institute of Mechanics and Technology (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education “Kuban State Technological University”, city of Armavir, Russia, svs2167@yandex.ru

Abstract: this article deals with the problem of moving a spacecraft between two complanar circular orbits using an ideal two-level hierarchical dynamic system.
Key words: motion, differential equations, material point, orbit, center of inertia.

В работе [1] рассмотрен межорбитальный перелет космического аппарата как процесс в дефектной двухуровневой динамической системе. Дифференциальные уравнения объекта (аппарат - материальная точка) нижнего уровня дефектной иерархической динамической системы замыкались по принципу балансирования [2] балансировочными уравнениями объекта (элемент системы управления) верхнего уровня иерархии [3]. В зависимости от знака весового коэффициента динамической системы перелет космического аппарата может совершаться по показательному, тригонометрическому или параболическому законам.

В данной работе решается та же задача, но в соответствии с моделью идеальной двухуровневой иерархической динамической системы. Для описания процесса используются канонические уравнения [4].

Исходная и конечная орбиты компланарные круговые. Рассматривается процесс перемещения космического аппарата между ними. Движение аппарата описывается уравнениями

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2} + w, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = cu^2 , \tag{2}$$

где $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{\varphi}$ -полярные координаты центра инерции космического аппарата, $\boldsymbol{\mu}$ - постоянная Гаусса, $\boldsymbol{w}$ - управление, а величины $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{c}$ определяются по формулам

$$u = \frac{1}{r} , \;\; c = r_0 v_0 \sin(\overline{r_0}, \overline{v_0}), \tag{3}$$

$\boldsymbol{r_0}$, $\boldsymbol{v_0}$ — начальные радиус-вектор и скорость центра инерции аппарата, $\boldsymbol{c}$ —постоянная площадей.

К системе (1) - (2) присоединяются условия:

$$\text{при} \quad t = 0 \qquad \varphi = \varphi_0 = 0, \;\; r = r_0, \;\; \dot{r} = \dot{r}_0, \;\; \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0; \tag{4}$$

$$\text{при} \qquad t = T, \;\; \varphi = \varphi_1, \;\; r = r_1. \tag{5}$$

Процесс в идеальной двухуровневой иерархической динамической системе будет описываться [1, 4], дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx_1}{d\varphi} = x_2, \tag{6}$$

$$\frac{dx_2}{d\varphi} = x_3, \tag{7}$$

$$\frac{dx_3}{d\varphi} = x_4, \tag{8}$$

$$\frac{dx_4}{d\varphi} = x_1 + ax_2 + b , \tag{9}$$

где под управляющей функцией $\boldsymbol{x_3}$ понимается выражение

$$x_3 = \frac{\mu}{c^2} + w - x_1 \tag{10}$$

и введены обозначения

$$x_1 = u, \;\;\; x_2 = \dot{u}, \tag{11}$$

постоянные $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — соответственно весовые коэффициенты динамической системы и внешнего «силового» поля.

Условия (4), (5) для системы (6) — (9) перепишутся следующим образом:

при $t = 0 \quad x_1 = x_{10} = 0,\ x_2 = x_{20},\ x_3 = x_{30},\ x_4 = x_{40}$; (12)

при $t = T,\ x_1 = x_{11},\ x_2 = x_{21}$. (13)

Последовательным исключением искомых функции x_1 x_2 система (6) - (9) сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4x_3}{d\varphi^4} + a\frac{d^2x_3}{d\varphi^2} - x_4 = 0. \tag{14}$$

Пусть коэффициент $\boldsymbol{a}$ равен нулю. Тогда общее решение системы (6) - (9) будет

$$x_1 = Ae^{\varphi} + Be^{-\varphi} - (C\cos\varphi + D\sin\varphi) - b, \tag{15}$$

$$x_2 = Ae^{\varphi} - Be^{-\varphi} + (C\sin\varphi - D\cos\varphi), \tag{16}$$

$$x_3 = Ae^{\varphi} + Be^{-\varphi} + (C\cos\varphi + D\sin\varphi), \tag{17}$$

$$x_4 = Ae^{\varphi} - Be^{-\varphi} - (C\sin\varphi + D\cos\varphi). \tag{18}$$

Постоянные интегрирования находим, учитывая условия (12) по формулам

$$A = \frac{1}{4}(x_{10} + x_{20} + x_{30} + x_{40} + b), \quad B = \frac{1}{4}(x_{10} - x_{20} + x_{30} - x_{40} + b),$$

$$C = \frac{1}{2}(-x_{10} + x_{30} - b), \quad D = \frac{1}{2}(-x_{20} + x_{40}), \tag{19}$$

а постоянные параметры $\boldsymbol{x_{40}}$, $\boldsymbol{b}$ определяются из условий (13) с помощью равенств

$$x_{40} = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad b = -\frac{b_1a_{21} - b_2a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{20}$$

Коэффициенты $\boldsymbol{a_{ik}}$, $\boldsymbol{b_i}$ имеют значения:

$$a_{11} = e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1} - 2\sin\varphi_1, \quad a_{12} = e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1} + 2\cos\varphi_1 - 4,$$

$$a_{21} = e^{\varphi_1} + e^{-\varphi_1} - 2\cos\varphi_1, \quad a_{22} = e^{\varphi_1} - e^{-\varphi_1} - 2\sin\varphi_1,$$

$$b_1 = 4h - (x_{20} + x_{30})e^{\varphi_1} - (x_{30} - x_{20})e^{-\varphi_1} - 2(x_{30}\cos\varphi_1 - x_{20}\sin\varphi_1),$$

$$b_2 = -(x_{20} + x_{30})e^{\varphi_1} + (x_{30} - x_{20})e^{-\varphi_1} - 2(x_{20}\cos\varphi_1 + x_{30}\sin\varphi_1). \tag{21}$$

Интегрируя уравнение (2), получим текущее время перелета космического аппарата функцией полярного угла:

$$t = \frac{1}{c}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{x_1^2(\varphi)}. \tag{22}$$

Исходное управление $\boldsymbol{w}$ системы уравнений (1), (2) находим, используя (10), по формуле

$$w = 2(Ae^{\varphi} + Be^{-\varphi}) - \frac{\mu}{c^2} - b. \tag{23}$$

Управление изменяется по показательному закону.

Таким образом, процесс перелета космического аппарата между круговыми орбитами под действием управляющего воздействия (23) описывается по закону (15), (18), (22).

Если коэффициент $\boldsymbol{a}$ отличен от нуля, то общее решение системы (6), (9) имеет вид

$$x_1 = (\lambda^2 - a)\left(Ae^{\lambda\varphi} + Be^{-\lambda\varphi}\right) - (\omega^2 + a)(C\cos\omega\varphi + D\sin\omega\varphi) - b, \tag{24}$$

$$x_2 = \lambda(\lambda^2 - a)\left(Ae^{\lambda\varphi} - Be^{-\lambda\varphi}\right) + \omega(\omega^2 + a)(C\sin\omega\varphi - D\cos\omega\varphi), \tag{25}$$

$$x_3 = Ae^{\lambda\varphi} + Be^{-\lambda\varphi} + C\cos\omega t + D\sin\omega t, \tag{26}$$

$$x_4 = \lambda\left(Ae^{\lambda\varphi} - Be^{-\lambda\varphi}\right) - \omega(C\sin\omega\varphi - D\cos\omega\varphi), \qquad (27)$$

где корни характеристического уравнения $\boldsymbol{\lambda_{1,2}}$, $\boldsymbol{\omega_{3,4}}$ определяются по формулам

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{4+a^2}}{2}}, \qquad \lambda\omega_{3,4} = \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{4+a^2}-a}{2}}, \qquad (28)$$

а постоянные интегрирования — по формулам

$$A = \frac{[x_{10}+b-(\omega^2+a)x_{30}]\lambda+[x_{20}+(\omega^2+a)x_{40}]}{2\lambda(\omega^2+\lambda^2)}, \quad B = \frac{[x_{10}+b-(\omega^2+a)x_{30}]\lambda-[x_{20}+(\omega^2+a)x_{40}]}{2\lambda(\omega^2+\lambda^2)},$$

$$C = x_{30} - (A+B), \qquad \omega D = x_{40} - \lambda(A-B). \qquad (29)$$

Уравнение (24) при $\boldsymbol{\varphi=\varphi_1}$ будет линейным относительно коэффициента $\boldsymbol{b}$. Исключая $\boldsymbol{b}$ из выражения

$$\Phi\Psi = \mathrm{AB}, \qquad (30)$$

где

$$\Phi = \frac{\lambda(x_{11}+b)+(\omega^2+a)[(\lambda C+\omega D)\cos\omega\varphi_{1+}(\lambda D-\omega C)\sin\omega\varphi_1]+x_{21}}{2\lambda(\lambda^2-a)},$$

$$\Psi = \frac{\lambda(h+b)+(\omega^2+a)[(\lambda C-\omega D)\cos\omega\varphi_{1+}(\lambda D+\omega C)\sin\omega\varphi_1]-x_{21}}{2\lambda(\lambda^2-a)}, \qquad (31)$$

получим трансцендентное уравнение относительно $\boldsymbol{a}$. Корни $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\omega}$ характеристического уравнения следует выразить через $\boldsymbol{a}$ по формулам (28).

Текущее время процесса в зависимости от полярного угла $\boldsymbol{\varphi}$ определяется по формуле

$$t = \frac{1}{c}\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{x_1^2(\varphi)}. \qquad (32)$$

Управление $\boldsymbol{w}$ выражается равенством

$$w = (\lambda^2 - a + 1)(Ae^{\omega\varphi} + Be^{-\omega\varphi}) - (\omega^2 + a - 1)(C\cos\omega\varphi + D\sin\omega\varphi). \qquad (33)$$

Таким образом, решение задачи перехода космического аппарата с одной орбиты на другую по модели идеальной двухуровневой иерархической динамической системы получено в замкнутом виде.

Список использованных источников:

1. Верещагина С.И. К динамике оптимальных перелетов космических аппаратов Сб. «Проблемы механики управляемого движения. Иерархические механические системы», изд. Пермского университета, 1976.

2. Верещагин И.Ф. Принцип балансирования. Сб. «Проблемы механики управляемого движения. Иерархические механические системы», изд. Пермского университета, 1976.

3. Верещагин И.Ф. К оценке качества теории управляемых

динамических систем. Сб. «Проблемы механики управляемого движения» вып. 2, изд. Пермского университета, 1972.

4. Верещагин И.Ф. Преобразование уравнений движения тела переменной массы к каноническому виду. Сб. «Проблемы механики управляемого движения» вып. 7, изд. Пермского университета, 1975.