РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ПРОГРАММЫ ПОИСКА РЕШЕНИЙ В УРАВНЕНИЯХ С ОДНИМ И ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Г.А. Алексанян[2)], А.А. Козырев[1)]

1) студент Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, mr.kolin.199@mail.ru
2) к.п.н., доцент Армавирского механико−технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, arm-jork@mail.ru

Аннотация: В данном проекте рассматривается возможность программного решения таких не простых математических задач, как уравнения с одним и двумя неизвестными.

Ключевые слова: Уравнение, неизвестное, коэффициент, решение, целые числа.

DEVELOP SOFTWARE ALGORITHM SOLUTIONS IN EQUATIONS WITH ONE AND TWO UNKNOWNS

G.A. Aleksanyan[2)], A.A. Kozyrev[1)]

1) student of Armavir Mechanical-Technological Institute (branch) of Federal State Budgetary Institution of Higher Education "Kuban State Technological University", Armavir, Russia, mr.kolin.199@mail.ru
2) Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of Armavir Mechanical and Technological Institute (Branch) of FSBEI HE "Kuban State Technological University", Armavir, Russia, arm-jork@mail.ru

Annotation: This project considers the possibility of software solutions to such non-simple mathematical problems as equations with one and two unknowns.

Keywords: Equation, unknown, coefficient, solution, integers.

Уравнение $ax = b$, где x – неизвестное, a и b – числа, называется уравнением с одним неизвестным, или **линейным уравнением**.

Число a называется **коэффициентом** неизвестного, а число b – **свободным** коэффициентом**.**

Уравнение, имеющее вид «ax + by = c», где «x» и «y» – неизвестные переменные, тогда как «a», «b» и «c» – коэффициенты, являющиеся действительными числами, называется линейным уравнением с двумя неизвестными.

Например, уравнения:

$2x + 3 = 7 - 0{,}5x$; $0{,}3x = 0$; $x/2 + 3 = 1/2\,(x - 2)$ – с одним неизвестным

$5x + 2y = 10$; $x2 + y2 = 20$; $x2 + 5y2 = 0$ – с двумя неизвестными

Если в уравнении $ax = b$ коэффициент ($a \neq 0$), то разделив обе части уравнения на a, получим $x = \frac{b}{a}$. Значит уравнение $ax = b$, в котором $a \neq 0$, имеет единственный корень $\frac{b}{a}$.

Если в уравнении $ax = b$ коэффициент равен нулю ($a = 0$), а свободный член не равен нулю ($b \neq 0$), то уравнение не имеет корней, так как равенство $0x = b$, где $b \neq 0$, не является верным ни при каком значении x.

Если в уравнении $ax = b$ и коэффициент и свободный член ($a = 0$ и $b = 0$), то уравнение имеет бесконечное множество корней, так как равенство $0x = 0$ верно при любом значении x.

Начнем с рассмотрения уравнения первой степени с одним неизвестным

$$a_1x + a_0 = 0 \; (2.2)$$

Пусть коэффициенты уравнения a_1 и a_0 - целые числа. Ясно, что решение этого уравнения

$$x = -\frac{a_0}{a_1}$$

будет целым числом только тогда, когда a_0 нацело делится на a_1 . Следовательно, уравнение (2.2) не всегда разрешимо в целых числах; например, из двух уравнений $3x - 27 = 0$ и $5x + 21 = 0$ первое имеет целое решение $x = 9$, а второе в целых числах неразрешимо.

С тем же обстоятельством мы встречаемся и в уравнениях, степень неизвестного в которых выше первой: квадратное уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ имеет целые решения $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; уравнение $x^2 + x - 2 = 0$ в целых числах неразрешимо, так как его корни $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ иррациональны.

Также имеет смысл разобрать алгоритм позволяющий использовать в решении уравнения других степеней помимо первой.

Для уравнения первого порядка не составит проблем написать программу позволяющую найти нужный ответ. Проект рассматривает уравнения одной неизвестной не только первой степени. Тогда проще будет проверить являются ли полученные корни четными или целочисленными. Так как вопрос о нахождении целых корней уравнения n-й степени с целыми коэффициентами

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \ (n \geq 1) \quad (2.3)$$

решается легко. Следовательно, пусть x =a - целый корень этого уравнения, тогда

$$a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0 = 0;$$
$$a_0 = -a(a_n a^{n-1} + a_{n-1}a^{n-2} + \cdots + a_1).$$

Из последнего равенства доступно, что a_0делится на а без остатка; следовательно, каждый целый корень уравнения (2.3) является делителем свободного члена уравнения. Для нахождения целых корней уравнения надо выбрать те из делителей a_0, которые при подстановке в уравнение обращают его в тождество. Таким образом, например, из чисел 1, - 1, 2 и - 2, представляющих собой все делители свободного члена уравнения

$$x^{10} + x^7 + 2x^3 + 2 = 0$$

только -1 является корнем. Таким образом, это уравнение имеет единственный целый корень $x = -1$. Тем же методом легко продемонстрировать, что уравнение

$$x^6 - x^5 + 3x^4 + x^2 - x + 3 = 0$$

в целых числах неразрешимо.

Куда больший интерес представляет решение в целых числах уравнений с многими неизвестными.

Теперь рассмотрим уравнение первой степени с двумя неизвестными

$$ax + by + c = 0, \quad (2.4)$$

где a и b - целые числа, отличные от нуля, а с - произвольное целое. Возьмем за данное, что коэффициенты а и b не имеют общих делителей, кроме единицы. Действительно, если общий наибольший делитель этих коэффициентов d = (a, b) отличен от единицы, то справедливы равенства

$$a = a_1 d,\ b = b_1 d;$$

тогда уравнение (2.4) принимает вид

$$(a_1 x + b_1 y)d + c = 0 \quad (2.5)$$

и может иметь целые решения только в том случае, когда c делится на d. Следовательно, в случае $(a, b) = d \neq 1$ - все коэффициенты уравнения (2.5) должны делиться нацело на d, и, тогда сокращая на d, придем к уравнению

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \ (c1 = \frac{c}{d}), \quad (2.6)$$

коэффициенты которого a_1 и b_1 взаимно просты.

Рассмотрим сначала случай, когда с = 0. Уравнение (2.6) в таком случае перепишется следующим образом:

$$ax + by = 0.$$

Решая это уравнение относительно х, получим

$$x = -\frac{b}{a}y.$$

Ясно, что x будет принимать целые значения тогда и только тогда, когда y делится на a без остатка. Но всякое целое y, кратное a, можно записать в виде

$$y = at,$$

где t принимает произвольные целые значения (t =0, ± 1, ±2, ...). Подставим это значение y в предыдущее уравнение, тогда

$$x = -\frac{b}{a}at = -bt$$

получим формулы, содержащие все целые решения уравнения:

$$x = -bt,\ y = at \text{ (t= 0, ±1, ±2, ...).}$$

Таким образом мы плавно подходим к постройке алгоритма программы, решающей поставленную задачу. При этом повышать степень уравнения мы не будем. В таком случае мы можем получить в ответе все корни нашего уравнения.

Список используемых источников:

1. РихтерД. CLR via C#. Программирование на платформе Microsoft .NET Framework 4.5 на языке C#. 4-е изд.
2. Свободная интернет энциклопедия Википедия https://ru.wikipedia.org/wiki/Уравнение
3. Савельев А.Я. Основы информатики: Учеб. Для вузов. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Е. Баумана, 2015. -328 с.
4. Бекаревич А. Б. Уравнения в школьном курсе математики. - Минск: Нар.асвета, 1968. — 152 с.
5. Маркушевич Л. А.Уравнения и неравенства в заключительном повторении курса алгебры средней школы / Л.А.Маркушевич, Р.С.Черкасов. / Математика в школе. - 2004. - № 1.
6. История математики. Т. II. Математика XVII столетия / Под редакцией А. П. Юшкевича. — М.: Наука, 1970. — 301 с.
7. Энциклопедия элементарной математики (в 5 томах). - М.: Физматгиз, 1951. — Т. 1. — С. 160—168. — 448 с.
8. Горовенко Л.А. Математические методы компьютерного моделирования физических процессов// Международный журнал экспериментального образования. Пенза: ИД «Академия естествознания», 2017. - №2. - с. 92-93. https://elibrary.ru/item.asp?id=28394703
9. Часов К.В. Математический анализ. Часть 1. Введение в математический анализ // Международный журнал экспериментального образования. 2017. № 4-1. С. 75-76.