К ВОПРОСУ О МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧАЩИХСЯ К ЕГЭ

Е.Н. Мироненко[1], Е.В. Иващенко[2]

1) студентка ФГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет», г. Армавир, Россия, Mln002@mail.ru
2) к.п.н., доцент ФГБОУ ВО «Армавирский государственный педагогический университет», г. Армавир, Россия, ivachenko_evgenia@mail.ru

Аннотация: В данной статье рассмотрены методы и краткое описание решения показательных неравенств, которые встречаются в заданиях ЕГЭ.

Ключевые слова: подготовка к ЕГЭ, неравенство, квадратное уравнение, показательные неравенства, методы решений неравенств.

TO THE QUESTION ABOUT THE METHODS OF SOLVING EXPONENTIAL INEQUALITIES IN PREPARING STUDENTS FOR THE EXAM

Elena N. Mironenko[1], Evgeniya V. Ivashchenko[2]

1) the student of Federal State Budgetary Institution of Higher Education “Armavir state pedagogical University”, city of Armavir, Russia, Mln002@mail.ru
2) Ph. D., associate Professor, of Federal State Budgetary Institution of Higher Education “Armavir state pedagogical University”, city of Armavir, Russia, ivachenko_evgenia@mail.ru

Abstract: This article describes the methods and a brief description of the solution of exponential inequalities that occur in the tasks of the exam.

Key words: preparation for the exam, inequality, square equation, exponential inequalities, methods of solving inequalities.

В школьном курсе математики важное место отводится решению показательных неравенств. Впервые учащиеся встречаются с показательными неравенствами в 10 классе, после того, как познакомятся с показательной функцией и ее свойствами, а с системами, содержащими показательные неравенства в 11 классе.

В школе им мало уделяется внимания, в учебниках практически нет заданий на эту тему. Однако, овладение методикой их решения очень полезно, потому что показательные неравенства часто встречаются в задании № 15 ЕГЭ. Поэтому изучению методов решения показательных неравенств должно быть уделено значительное внимание. И для того, чтобы решить правильно систему, нужно уметь правильно решать показательные неравенства.

Перед тем, как преступить к рассмотрению методов решения показательных неравенств, необходимо разобрать основные понятия и переходы.

Итак, начнем с определения.

Показательное неравенство - это любое неравенство переменной в показательной степени, содержащее в себе показательную функцию. Другими словами, его всегда можно свести к неравенству вида:

$$a^x = b$$

где в роли b может быть обычное число.

Как же решать показательные неравенства? Нужно стремиться свести неравенство к виду:

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$$

($\vee$ означает любой из знаков сравнения) – это позволяет избавиться от оснований и сделать переход к виду $f(x) \vee g(x)$. То есть, перед нами представлены показательные неравенства, водящиеся к простейшим.

Разберем несколько примеров.

Пример №1.

$$4^x \geq 32$$

Решение.

$$4^x \geq 32 \Rightarrow 2^{2x} \geq 2^5 \Rightarrow 2x \geq 5 \Rightarrow x \geq 2{,}5$$

Ответ: $x \in [2{,}5; +\infty)$

$$2x \geq 5$$

Пример №2.

$$(0{,}5)^{2x} > 0{,}125 \Rightarrow (0{,}5)^{2x} > (0{,}5)^3 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < 1{,}5$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1{,}5)$

Но есть одна важная тонкость в переходе в показательных неравенствах есть несколько вариантов решения:

$$a^{f(x)} \vee a^{g(x)}$$

где вместо знака «$\vee$» можно вставить один из знаков сравнения: $<$, $>$, $\geq$ или $\leq$

1 вариант – если основание степени $a > 1$, то в f(x) $\vee$ g(x) вместо знака «$\vee$» останется тот же знак сравнения (по мере роста показателя n число a^n тоже будет расти);

2 вариант – если основание степени $0 < a < 1$, то в f(x) ∨ g(x) вместо знака «∨», исходный знак меняется на противоположный (по мере роста показателя n число a^n будет убывать), например:

был < - стал >;
был > - стал <;
был ≤ - стал ≥;
был ≥ - стал ≤.

Суммируя эти факты, мы получаем самое главное утверждение, на котором и основано всё решение показательных неравенств:

Если $a > 1$, то неравенство $a^x > a^n$ равносильно неравенству $x > n$. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^x > a^n$ равносильно неравенству $x < n$

Другими словами, если основание больше единицы, его можно просто убрать — знак неравенства при этом не поменяется. А если основание меньше единицы, то его тоже можно убрать, но при этом придётся поменять и знак неравенства.

Если говорить простыми словами, есть показательная функция a^x, ее с чем-то сравнивают, а затем просят найти x. В некоторых случаях, вместо переменной x могут вставить какую-нибудь функцию f(x) и тем самым чуть-чуть усложнить неравенство.

Например:

$$2^{x+1} \geq 2^3 \Rightarrow x + 1 \geq 3$$

Или

$$0{,}5^{4x+3} \leq 0{,}5^{6x-1} \Rightarrow 4x + 3 \geq 6x - 1$$

Важно! Есть два требования для перехода в показательных неравенствах:

- число в основании степени слева и справа должно быть одинаковым;

- степени слева и справа должны быть «чистыми», то есть не должно быть никаких коэффициентов, умножений, делений и т.д.

Например:

1) $3^{x+2} \geq 5^{8-x}$ Переход к $\mathrm{x} + 2 > 8 - \mathrm{x}$ невозможен, так как в основаниях разные числа;
2) $7^x + 7^x < 7^{2x}$ Переход к $\mathrm{x} + 3\mathrm{x} < 2x$ невозможен, так как степени не «чистые» (слева есть сумма);
3) $5^{5-x} \geq -2^{7x}$ Переход к $5 - x \geq 7$ невозможен, так как степени не «чистые» (перед степенью справа стоит минус).

Конечно, в некоторых случаях неравенство может выглядеть более сложнее, например:

$$9^x + 8 > 3^{x+2}$$

или

$$5 \cdot 4^x + 2 \cdot 25^X > 7 \cdot 10^x$$

В целом, сложность таких неравенств может быть самой разной, но в итоге они всё равно сводятся к простой конструкции $a^x > b$.

В рассмотренных выше примерах, мы не рассматривали варианты $a = 1$ или $a \leq 0$, так как в этих случаях возникает неопределённость.

Допустим, как решить неравенство вида $1^X > 3$? Единица в любой степени снова даст единицу — мы никогда не получим тройку или больше. т.е. решений нет.

С отрицательными основаниями всё ещё интереснее. Рассмотрим для примера вот такое неравенство:

$$(-2)^x > 4$$

На первый взгляд, всё просто:

$$4 = 2^2 \Rightarrow (-2)^x > 2^2 \Rightarrow \mathrm{x} > 2$$

Правильно? А вот и нет! Достаточно подставить вместо x парочку чётных и парочку нечётных чисел, чтобы убедиться что решение неверно.

Например:

$$x = 4 \Rightarrow (-2)^4 = 16 > 4;$$
$$x = 5 \Rightarrow (-2)^5 = -32 < 4;$$
$$x = 6 \Rightarrow (-2)^6 = 64 > 4;$$
$$x = 7 \Rightarrow (-2)^7 = -128 < 4;$$

Необходимо отметить, что знаки чередуются. Помимо обычных степеней, есть еще и дробные и многие другие. Есть ли решение, например, у $(-2)^{\sqrt{7}}$? Нет!

Поэтому для определённости полагают, что во всех показательных неравенствах (и в уравнениях тоже) $1 \neq a$. Тогда и решается все просто:

$$a^x > a^n \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > n \ (a > 1) \\ x < n \ (0 < a < 1) \end{array}\right.$$

Итак, рассмотрим самое главное правило: если основание в показательном уравнении больше единицы, его можно просто убрать; а если основание меньше единицы, его тоже можно убрать, но при этом поменяется знак неравенства.

Рассмотри еще один пример.

Пример №3.

$$0{,}1^{1-\mathrm{x}} < 0{,}01$$

Решение.

В любых выражениях со степенями следует избавляться от десятичных дробей — зачастую только так можно увидеть быстрое и простое решение.

$$0{,}1 = \frac{1}{10}\ ;\ 0{,}01 = \frac{1}{100} = (\frac{1}{10})^2;$$

$$0{,}1^{1-x} < 0{,}01 \Rightarrow (\frac{1}{10})^{1-x} < (\frac{1}{10})^2.$$

Перешли к простейшему неравенству с основанием $\frac{1}{10}$, т.е меньшим единицы. Убираем основания, меняем знак с «<» на «>», и получаем:

$$1 - x > 2 \Rightarrow -x > 2 - 1 \Rightarrow -x > 1 \Rightarrow x < -1.$$

Получили окончательный ответ: $x \in (-\infty; -1)$.

Замечание. Данное неравенство можно было решить и по-другому - путём приведения обеих частей к степени с основанием, большим единицы.

$$\frac{1}{10} = 10^{-1} \Rightarrow (10^{-1})^{1-x} < (10^{-1})^2 \Rightarrow 10^{-1(1-x)} < 10^{-1\cdot 2}$$

После такого преобразования мы вновь получим показательное неравенство, но с основанием $10 > 1$, а это значит, что 10 можно просто зачеркнуть и знак при этом не изменится. Получим следующее решение:

$$-1 \cdot (1 - x) < -1 \cdot 2;$$
$$x - 1 < -2;$$
$$x < -2 + 1 = -1;$$
$$x < -1$$

Получили один и тот же ответ.

Рассмотрим еще один пример.

Пример №4.

$$2^{x^2-7x+14} < 16$$

Решение

Чтобы ни находилось в показателях, технология решения самого неравенства остаётся прежней. Поэтому заметим для начала, что $16 = 4^2$. Перепишем исходное неравенство с учётом этого факта:

$$2^{x^2-7x+14} < 4^2 \Rightarrow x^2 - 7x + 14 < 4 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 < 0$$

Мы получили обычное квадратное неравенство! Знак нигде не менялся, поскольку в основании стоит двойка — число, большее единицы.

Далее можно воспользоваться теоремой Виета, либо просто решить уравнение $x^2 - 7x + 10 = 0$ через дискриминант. В любом случае корни будут $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$. Отметим эти корни на числовой прямой (см. рис.1).

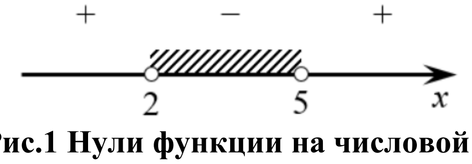

Рис.1 Нули функции на числовой прямой

Расставляем знаки функции $f(x) = x^2 - 7x + 10$ - очевидно, её графиком будет парабола ветвями вверх, поэтому по бокам будут «плюсы». Нас интересует та область, где функция меньше нуля, т.е. $x \in (2; 5)$ – это и есть ответ к исходной задаче.

Помимо приведенных методов решения показательных неравенств, существую и остальные:

- Метод рационализации
- Переход к другому основанию
- Выделение устойчивого выражения и замена переменной
- Однородные показательные неравенства
- Показательные неравенства, сводящиеся к рациональным
- Неравенства, решаемые графическим методом

Таким образом, решение нестандартных неравенств в заданиях ЕГЭ требует постоянной тренировки и решений. В этом нелегком деле учащимся могут помочь различные методические пособия, задачники по элементарной математике, сборники конкурсных задач, занятия по математике в школе.

Список использованных источников:

1. Коропец З.Л. Нестандартные методы решения неравенств и их систем: учебное пособие для слушателей подготовительных курсов / З.Л. Коропец, А.А. Коропец, Т.А. Алексеева. – Орел, 2012. – 125 с.
2. Шарыгин И.Ф. Математика. Для поступающих в ВУЗы: Учебное пособие. – 6-е изд. –М.: 2006 — 479с.
3. Горовенко Л.А., Часов К.В., Мельников А.Р. База данных электронно-методического комплекса "Фонд оценочных средств по дисциплине "Математика". Свидетельство о регистрации базы данных RUS 2017620593 13.04.2017. https://elibrary.ru/item.asp?id=35615996
4. Гунькин В.Ю., Часов К.В. Стандартное и нестандартное решение систем линейных уравнений в интерактивной обучающей среде // Международный студенческий научный вестник. 2017. № 4-6. С. 830-833.
5. Иноземцев С.А., Дублинский Я.В., Часов К.В. Нестандартная теория числовых множеств в интерактивном обучающем документе // Международный студенческий научный вестник. 2017. № 4-7. С. 1010-1013.