НЕСТАНДАРТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ

С.М. Форостов [1]***, К.В. Часов*** [2]

1) студент Армавирского механико–технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, stas.forostov@bk.ru .
2) к.п.н., доцент кафедры общенаучных дисциплин Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, chasov_kv@mail.ru .

Ключевые слова: глобальная непрерывность функции, счётная фундаментальная окрестность, система координат, инвертированная система координат, принцип топологической эквивалентности.

Аннотация: в статье рассматривается нестандартная дидактика ввода понятия глобальной непрерывности функции, равномерной непрерывности функции, с использованием принципа топологической эквивалентности. Приведены примеры на определение глобальной непрерывности функции.

NON-STANDARD DEFINITION OF CONTINUITY OF A FUNCTION

S.M. Forostov [1]***, K.V. Chasov*** [2]

1) the student Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, stas.forostov@bk.ru .
2) Ph. D., associate Professor, Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, chasov_kv@mail.ru.

Keywords: global continuity of functions, fundamental counting neighborhood, the coordinate system is inverted coordinate system, the principle of topological equivalence.

Abstract: the article deals with the non-standard didactics of the concept of global continuity of the function, uniform continuity of the function, using the principle of topological equivalence. Examples are given to determine the global continuity of the function.

При вводе нестандартных понятий, нестандартных дидактик сразу становится понятным, что традиционная (стандартная) теория в чём то не устраивает «реформатора». Так происходит и с нестандартной теорией непрерывности. Появление нестандартной теории непрерывности продиктовано желанием снизить интеллектуальный барьер между школой и вузом. Над созданием указанной теории работали Тульчий В.И. и Тульчий В.В. ([1], [2]). Выводы этих учёных нашли отражение в диссертационной работе одного из авторов настоящей статьи (Часов К.В.) [3]. Соавтор (Форостов С.М.) привёл несколько примеров, в решении которых использовал нестандартную теорию непрерывности и логико-речевую символику ([3], [4])

Рассмотрим указанную выше теорию и решение примеров.

• *Глобальная непрерывность функции*

Определение.

Действительная функция *n*-мерной точки $f\ (M)$ называется непрерывной *на множестве* E, если $f\ (M) \in C^o$(в $\forall$ точке $M \in E \subseteq$ dom$f$) или, короче, $f\ (M) \in C^o(E)$

$\Downarrow$
• C^o_u – символ *равномерной* непрерывности;

• ТЭ– принцип (принцип топологической эквивалентности).

• $G(f) \in C^o(E \subseteq D) \ \Leftrightarrow \ f(M) \in C^o(E \subseteq D)$,

• $f(M) \in C^o_u(E \subseteq D) \ \Leftrightarrow \ G(f) \in C^o_u(E \subseteq D)$,

(данное определение соответственно формулируется и для комплексных функций).

Нетрудно видеть, что $f\,(M \in \mathrm{E}) \equiv \mathrm{const} \overset{\mathrm{d}}{=} c \quad \Longrightarrow \quad c \in C^o(E \subseteq \boldsymbol{U})$ т.е. некоторая действительная или комплексная *постоянная* является непрерывной на множестве $E \subseteq \boldsymbol{U}$.

Примеры.

1. Нетрудно видеть, что если $y = f\,(x \in \boldsymbol{R}) \equiv x \quad \Longrightarrow \quad f\,(x) \equiv x \ \in C^o(\boldsymbol{R})$.
Действительно, т.к. $\Delta y = \Delta x \quad \Longrightarrow \quad (\Delta x \to 0 \ \Longrightarrow \ \Delta y \to 0)$,

т.е. $y \equiv x \ \in C^o(\boldsymbol{R})$.

По аналогии $w = f\,(z) \equiv z \ \in C^o(\boldsymbol{C})$ ▶

2. Нетрудно видеть, что $y = f\,(x) = a^x \ \in C^o(\boldsymbol{R})$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Рассмотрим $\underline{\forall}\, x_0 \in \boldsymbol{R}$ и некоторую seq $\{x_n :\ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_o,\ x_n \in \mathrm{R}\}$.

Получим несколько возможностей, которые и рассмотрим ниже.

а) *Случай* $a > 1$

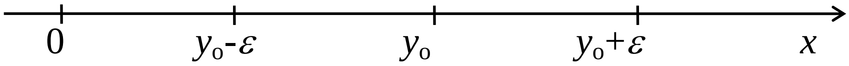
Как известно, при $a > 1$ имеют место следующие неравенства

$(0 < b < c < d) \quad \sim \quad \log_a b < \log_a c < \log_a d.$

$\Downarrow$

• нетрудно видеть, что

$$\left(a^{x_o} \overset{\mathrm{d}}{=} y_o \text{ и } \forall \varepsilon > 0 : y_o > \varepsilon \right) \Rightarrow 0 < y_o - \varepsilon < y_o < y_o + \varepsilon$$

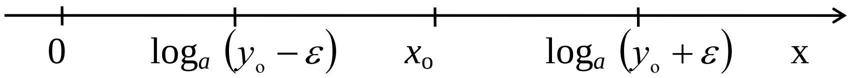


что для любого $\varepsilon > 0$ (например, $\varepsilon < y_o = a^{x_o}$) имеют место неравенства:

$$\log_a (y_o - \varepsilon) < \log_a y_o < \log_a (y_o + \varepsilon)$$

$\Downarrow$ • $\log_a y_o = x_o$.

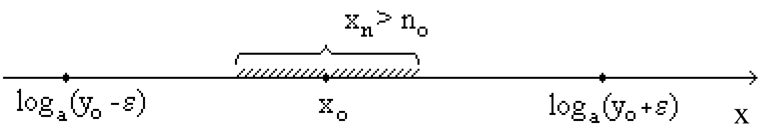
$\log_a (y_o - \varepsilon) < x_o < \log_a (y_o + \varepsilon)$ или геометрически,



$\Downarrow$

• как известно из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o \quad \Rightarrow \quad \exists\, n_1, n_2 \in \mathrm{N} : \begin{cases} x_{n>n_1} > \log_a (y_o + \varepsilon), \\ x_{n>n_2} < \log_a (y_o + \varepsilon). \end{cases}$

• $\max\{n_1, n_2\} \overset{\mathrm{d}}{=} n_o$, т.е.



для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_o \in \mathbf{N}$, такое, что для любого $n > n_o$:

$$\log_a (y_o - \varepsilon) < x_n < \log_a (y_o + \varepsilon)$$

или

$$a^{\log_a (y_o - \varepsilon)} < a^{x_n} < a^{\log_a (y_o + \varepsilon)}.$$

$\Downarrow$ • как известно $a^c = b \quad \sim \quad \log_a b = c$, т.е. $a^{\log_a (y_o \mp \varepsilon)} \sim y_o \mp \varepsilon$.

$y_o - \varepsilon < a^{x_n} < y_o + \varepsilon$ т.е. существует $\mathrm{H}-\lim\limits_{x_n \to x_o} a^{x_n} = a^{x_o} = y_o$.

$\Downarrow$

• $\mathrm{H}-\lim\limits_{B^*(x_o)} f(x) = \mathrm{C}-\lim\limits_{B(x_o)} f(x)$

откуда $B^*(x_o)$ счётная фундаментальная окрестность точки x_o.

$$\lim_{B(x_o)} a^x = a^{x_o}, \quad x \in \boldsymbol{R} \qquad a > 1 .$$

что и требовалось доказать. ►

b) ***Случай* 0<*a*<1**

Как известно, $a^x = \dfrac{1}{\left(a^{-1}\right)^x}$.

$\Downarrow$ • $a^{-1} = \dfrac{1}{a} > 1.$

$$\lim_{B(x_o)} a^x = \frac{1}{\lim\limits_{B(x_o)} \left(a^{-1}\right)^x} = \frac{1}{a^{-x_o}} = a^{x_o}.$$

Со всего предыдущего следует **$a^x \in C^o(R)$, если $a > 0$, $a \neq 1$.**
Таким образом предположение этого примера доказано. ►

В частности,

$$f(x) = e^x \stackrel{d}{=} \exp x \quad \in C^o(\boldsymbol{R}).$$

(так называемая экспонента от x).

$\Downarrow$
• graf $G(f) \equiv G(f^{-1})$ в инвертированной системе координат,

• TE-principle (принцип топологической эквивалентности).

Относительно $f(x) = \begin{cases} a^x \\ e^x \end{cases}$, обратная функция $f^{-1}(x) = \begin{cases} \log_a x \\ \ln x \end{cases} \in C^o\left(R^+\right)$. ►

3. Нетрудно видеть, что $f(x) = \sin x \in C^o(\boldsymbol{R})$

Действительно, для $\forall\, x_o \in \boldsymbol{R}$ **:**

$$\Delta f = f(x) - f(x_o) = \sin x - \sin x_o = 2\cos\frac{x + x_o}{2} \cdot \sin\frac{x - x_o}{2} \leq$$

$$\leq 2\sin\frac{x - x_o}{2} \underset{x \to x_o}{\sim} (x - x_o) = \Delta x.$$

$$\Downarrow$$

$(\Delta x \to 0) \implies (\Delta f \to 0)$, т.е. $\sin x \in C^o\left(\forall x_o \in R\right)$ или **$\sin x \in C^o(\boldsymbol{R})$**. ►

Учитывая, что

$$\cos x - \cos x_o = -2\sin\frac{x + x_o}{2} \cdot \sin\frac{x - x_o}{2},$$

аналогично вышеизложенному можно доказать:

4. $f(x) = \cos x \in C^o(\boldsymbol{R})$ (предлагается решить самостоятельно).

Успешная работа с подобными серьёзными текстами способствует формированию и дальнейшему развитию творческого мышления студента, мотивирует его к дальнейшей учебно-исследовательской и научно-исследовательской работе.

Список использованных источников:

1. Тульчий В.И., Тульчий В.В. Основы нестандартного математического анализа (учебно-методическое пособие для студентов).- Армавир.- 1998.- 281 с.
2. Тульчий В.В. Некоторые концепции нестандартного математического анализа и связанные с ними дидактические минициклогрммы.- // Материалы VI международной конференции “Циклы природы и общества”.- Ч.I.- Ставрополь, 1998.- с. 174-176
3. Часов К.В. Элементы нестандартного анализа и логико-речевая символика – как средства повышения математической культуры учащихся средней школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 - Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования) / Дагестанский гос. пед. ун-т. Махачкала, 2000. 176 с.
4. Тульчий В.И., Тульчий В.В. Обобщённая математическая символика в сочетании с телевидением, видеозаписью и ЭВМ – эффективное средство интенсификации процесса самообучения студентов.- М.: Деп. В НИИПВШ, № 267-90, 1981