ГЛОБАЛЬНАЯ И ЛОКАЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ МНОЖЕСТВ

О.И. Фисенко [1], К.В. Часов [2]

1) студент Армавирского механико–технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, olezhka_fisenko273@mail.ru.
2) к.п.н., доцент кафедры общенаучных дисциплин Армавирского механико-технологического института (филиала) ФГБОУ ВО «Кубанский государственный технологический университет», г. Армавир, Россия, chasov_kv@mail.ru .

Ключевые слова: предел абстрактного множества, локальная и глобальная непрерывность множества, Хаусдорфов топологический универсум, принцип топологической эквивалентности.

Аннотация: в статье рассматриваются вопросы нестандартного математического анализа: локальная и глобальная непрерывность множества, принцип предельного перехода, принцип топологической эквивалентности. Изучение Н-анализа призвано сократить время изучения основных тем стандартного анализа за счёт нестандартной дидактики.

GLOBAL AND LOCAL CONTINUITY OF SETS

O.I. Fisenko [1], K.V. Chasov [2]

1) the student Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, olezhka_fisenko273@mail.ru
2) Ph. D., associate Professor, Armavir mechanics-technological Institute (branch) Kuban state technological University, city of Armavir, Russia, chasov_kv@mail.ru.

Keywords: abstract set limit, local and global continuity of the set, Hausdorff topological universe, principle of topological equivalence.

Abstract: The article deals with the issues of non-standard mathematical analysis: local and global continuity of the set, the limit transition principle, the principle of topological equivalence. The study of H-analysis is intended to reduce the time for studying the main topics of standard analysis due to non-standard didactics.

Математический анализ – основополагающий курс математики. Среди вопросов, которые изучаются в рамках указанного раздела математики – одни из важнейших: теория предела и непрерывности. Нестандартная дидактика изучения указанных вопросов может поспособствовать снижению интеллектуального барьера между школой и вузом. Рассмотрим некоторые положения ([1], [2]) приведённой выше нестандартной дидактики.

1. Локальная и глобальная непрерывность множества

Используя понятия предела абстрактного множества

$E = \{a\} \subset \mathbf{U}$ (Хаусдорфов топологический универсум),

дадим определение *непрерывности* множества в некоторой точке $a_o \in \mathbf{U}$,

(так называемая *локальная* непрерывность множества),

или символически $E \in \mathrm{C}^{\mathrm{o}}(a_{\mathrm{o}})$.

(читается «множество E принадлежит классу непрерывных множеств в точке a_{o}»).

1.1. *Локальная непрерывность множества*

В нестандартном анализе (Н-анализе) имеет место следующее *определение.*

Def. Множество $E \in \mathrm{C}^{\mathrm{o}}(a_{\mathrm{o}})$ если $\lim E = \{a_{\mathrm{o}}\}$ и $a_{\mathrm{o}} \in E$.

Принцип предельного перехода (LP-принцип), все теоремы о пределах абстрактных (а также функциональных) множеств, рассматриваемые в [1], остаются в силе и для локальной непрерывности множеств, если мы будем предполагать, что

- *во-первых,* элемент $a_{\mathrm{o}} \in E$ (в случае абстрактных множеств)
- во-*вторых,* точка $M_{\mathrm{o}} \in \mathrm{dom}f$ и $\lim\limits_{B(M_{\mathrm{o}})} f(M) = a_{\mathrm{o}} = f(M_{\mathrm{o}}) =$

$= \left[f\left(\lim\limits_{M \to M_{\mathrm{o}}} M \right) \right] \in \mathrm{ran}f$ (для функциональных множеств).

Или короче:

функция $f(M) \in \mathrm{C}^{\mathrm{o}}(M_{\mathrm{o}})$, если её предел при $M \to M_{\mathrm{o}}$ равен $f(M_{\mathrm{o}})$,

т.е. $\lim\limits_{B} f(M) = f(M_{\mathrm{o}})$,

иными словами

функция $f(M) \in \mathrm{C}^{\mathrm{o}}(M_{\mathrm{o}})$, если предел функции равен функции от предела точки, т.е.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f\left(\lim_{M \to M_0} M \right).$$

В теоретических исследованиях свойств непрерывных функций наиболее широко используется именно последняя формулировка.

Можем сформцлировать *определение* локальной непрерывности по Картану, Коши и Гейне.

1. *По Картану*
$f(M) \in C^o(M_o)$, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists$ element $B_\delta \in B$ такой, что образ $f(B_\delta) \subset \varepsilon - \operatorname{sur} f(M_o)$.
2. *По Коши*
$f(M) \in C^o(M_o)$, если для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такое, что $\operatorname{dist}\big(f(M), f(M_o)\big) = \|f(M) - f(M_o)\| < \varepsilon$ когда $0 \le \operatorname{dist}(M_o, M) < \delta$.
3. *По Гейне*
$f(M) \in C^o(M_o)$ если для $\forall$ seq $\{M_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} M_o \in \operatorname{dom} f$ соответствующая seq $\{f(M_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(M_o)$.

Читателю представляется возможность самостоятельно ответить на вопрос: «Какое различие между приведёнными выше определениями и соответствующими определениями пределов?»

Со всего предыдущего, используя понятие приращения функции

$$\Delta f = f(M) - f(M_o), \qquad \text{следует}$$
$$\boldsymbol{f(M) \in C^o(M_o)}, \text{ если } \lim_{B(M_o)} \Delta f = 0.$$

Предыдущие строки могут быть записаны символически:

$\Downarrow$
- $f(M) - f(M_o) \overset{\mathrm{d}}{=} \Delta f(M_o) \overset{\mathrm{d}}{=} \Delta f$ (для краткости)
(так называемое приращение функции $f(M)$ в точке M_o)

$\boldsymbol{f(M) \in C^o(M_o)}$, если $\lim_{B(M_o)} \Delta f = 0$ – читается «функция $f(M)$ непрерывна в точке M_o, если предел её приращения Δf в точке M_o равен 0».

Как известно, запись базы окрестности точки $M_o \in D$ в частных случаях функциональных зависимостей имеет вид

$$\bullet\ B(M_o) \sim \begin{cases} (M \to M_o) \sim (\operatorname{dist}(M, M_o) \to 0) \sim \left(\|M - M_o\| \overset{\mathrm{d}}{=} \|\Delta M\| \to 0\right) \\ (z \to z_o) \quad \sim (\operatorname{dist}(z, z_o) \to 0) \sim \left(z - z_o \overset{\mathrm{d}}{=} \Delta z \to 0\right) \end{cases}$$

и определение непрерывности в этих случаях имеет вид:

- для действительной функции n-мерной точки

$$\boldsymbol{f(M) \in C^o(M_o)} \ \sim \ \big((\|\Delta M\| \to 0) \ \Longrightarrow \ (\Delta f \to 0)\big),$$

в частности, для функции одной действительной переменной $y = f(x)$

$$\boldsymbol{f(x) \in C^o(x_o)} \ \sim \ \left((x - x_o \overset{\mathrm{d}}{=} \Delta x \to 0) \ \Longrightarrow \ (y - y_o \overset{\mathrm{d}}{=} \Delta y \to 0)\right)$$

- для комплексной функции $w = f(z)$

$$\boldsymbol{f(z) \in C^o(z_o)} \ \sim \ \left((\Delta z \to 0) \ \Longrightarrow \ (w - w_o \overset{\mathrm{d}}{=} \Delta w \to 0)\right)$$

Далее, так как $|f(M) - f(M_o)| = \big|\,|f(M)| - |f(M_o)|\,\big|$, то из определения непрерывности по Коши следует

$$\boldsymbol{f(z) \in C^o(z_o) \quad \Rightarrow \quad |f(M)| \in C^o(z_o)}$$

$\Downarrow$

- grap $G(f)=\{(..)P(M,f(M)): \ M \in \mathrm{dom} f\}$,
- relief $R(f)=\{(..)Q(M,|f(M)|): \ M \in \mathrm{dom} f\}$.
- $z = x + iy$ – affix (•) $M(x,y) \in \mathrm{R}^2$

- $\boldsymbol{G(f) \in C^o(P_o) \quad \Rightarrow \quad R(f) \in C^o(q_o)}$
- $\boldsymbol{f(z) \in C^o(z_o) \quad \Rightarrow \quad R(f) \in C^o(z_o)}$

(для некоторой комплексной функции $f(z)$).

Наконец, по определению

• *открытое* множество называется *непрерывным*;

• *замкнутое* множество, или *компакт*, называется *равномерно непрерывным*,

и имеет место принцип *топологической эквивалентности* или эквивалентности свойств, связанных с понятием окрестности (предел, непрерывность, гладкость):

• **Функция и её график топологически эквивалентны.**

Изложение достаточно строгое с математической точки зрения и вполне понятное не только для студентов первого курса вузов, но и для учащихся 10-х и 11-х классов школы, что показал педагогический эксперимент одного из авторов статьи (Часов К.В.) ([3]). Таким образом, разрыв в уровнях изложения теоретического материала между школой и вузом можно снизить, не умаляя строгости изложения важных и достаточно сложных математических понятий. В приведённом материале статьи использовалась логико-речевая символика, описанная в источниках [3], [4].

Список использованных источников:

1. Тульчий В.И., Тульчий В.В. Основы нестандартного математического анализа (учебно-методическое пособие для студентов).- Армавир.- 1998.- 281 с.
2. Тульчий В.В. Некоторые концепции нестандартного математического анализа и связанные с ними дидактические минициклогрммы.- // Материалы VI международной конференции “Циклы природы и общества”.- Ч.I.- Ставрополь, 1998.- С. 174-176
3. Часов К.В. Элементы нестандартного анализа и логико-речевая символика – как средства повышения математической культуры учащихся средней школы: дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 - Теория и методика

обучения и воспитания (по областям и уровням образования) / Дагестанский гос. пед. ун-т. Махачкала, 2000. 176 с.

4. Тульчий В.И., Тульчий В.В. Обобщённая математическая символика в сочетании с телевидением, видеозаписью и ЭВМ – эффективное средство интенсификации процесса самообучения студентов.- М.: Деп. В НИИПВШ, № 267-90, 1981