УДК 681.3

МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕЗОНАНСНОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ СИСТЕМЫ СО СРЕДОЙ

Колбасин А.М., Марсов В.И., Гришин А.А., Цепкин П.А.

На рисунке 1 представлена стержневая система с распределенными постоянными, нагруженная на конце сопротивлением Zн0. В начале системы приложена внешняя (возбуждающая) сила.

Эквивалентная схема этой системы (рисунок 2) в виде совокупности элементарных звеньев (ячеек), состоит из сосредоточенных постоянных. Очевидно, что количество элементарных систем, эквивалентных реальной системе с распределенными параметрами может быть бесконечно большим Каждая элементарная ячейка включает в себя элементы массы (m), упругости (C) и трения (R) с бесконечно малыми значениями. Такой способ рассмотрения стержневой системы позволяет вскрывать связь между её первичными и вторичными постоянными.

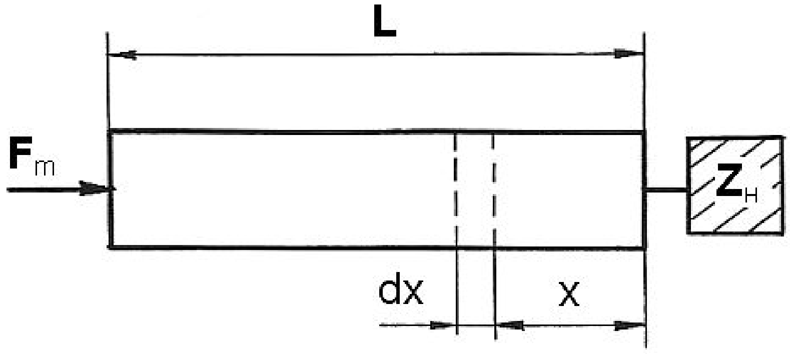
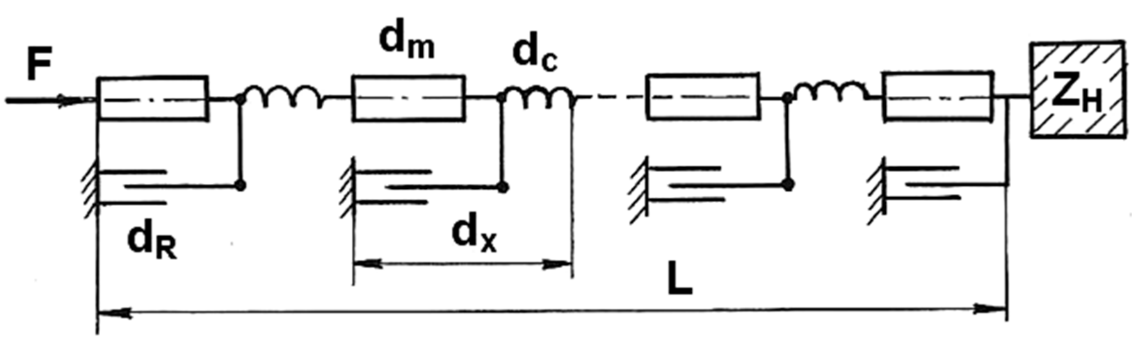


Рисунок 1 - Стержневая система с нагрузкой на конце стержня



$$dm = \frac{m}{l}dx;\ \mathrm{dc} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{l}}dx;\ \mathrm{dR} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{l}}dx.$$

Рисунок 2 - Эквивалентная схема стержневой системы

Волновое уравнение, описывающее распространение продольных колебаний в системе с распределенными постоянными, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial X^2}, \quad (1)$$

где Y=Y(X,t) - обобщенная координата, характеризующая параметры колебательного движения.

Решение этого уравнения:

$$Y = A_1 F \cdot \left(t - \frac{X}{C} \right) + A_2 F \left(t + \frac{X}{C} \right), \quad (2)$$

где A1, A2 - постоянные интегрирования.

Вид функции (2) зависит от формы колебаний, создаваемых источником, воздействующим на систему, и граничными условиями. В частности, такие условия формируются характером нагрузки Zн, присоединенной к стержневой системе.

Ограничимся рассмотрением установившегося режима и только гармонической формой приложенной силы, так как рассматриваемый тип вибровозбудителя эффективно работает именно в этих условиях.

Тогда решение (2) в показательной форме имеет вид:

$$Y = A_1 e^{i\omega(t - x/c)} + A_2 e^{i\omega(t + x/c)} \quad (3)$$

или в тригонометрической форме:

$$Y = A_1 \cos\omega(t - X/C) + iA_2 \cos\omega(t + X/C) \quad (4)$$

где $\omega(t \pm X/C)$ - фаза колебаний.

Координата Y, характеризующая параметры колебательного движения, зависит от смещения, скорости, силы, напряжения, возникающими при распространении волны. Будем оперировать в основном амплитудными значениями колебательной силы (Fm) и скорости (Vm).

Тогда уравнение (4) запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} F_{ma} = F_{me} \cdot \cos kX + iV_{me} W_0 \sin kX \\ V_{me} \cos kX + i \dfrac{F_{me}}{W_0} \sin kX \end{cases} \quad (5)$$

где Fme, Vme - значение силы и скорости на конце системы, в точке контакта с нагрузкой, при X = 0; W0 = ρCS - волновое сопротивление стержневой колебательной системы с поперечным сечением S.

В выражении (5) не учитываются потери, поскольку исследуются только условия поддержания резонансного режима. С достаточной для практики точностью резонансные частоты систем с потерями могут быть определены при использовании выражений, взятых для идеальной системы, т.е. для рассматриваемой реальной системы, но при пренебрежении потерями. Это связано с тем, что для реальных систем, работающих вблизи резонанса, активное сопротивление мало влияет на резонансные частоты.

Полное сопротивление среды излучению является отношением силы реакции среды к колебательному воздействию излучателя и скорости колебаний в зоне контакта:

$$Z = \frac{F_{me}}{V_{me}} \tag{6}$$

Подставив (5) в (6) и после преобразований, получим

$$\begin{cases} F_m = F_{me}\left(\cos kX + i\dfrac{W_0}{Z_н}\sin kX\right); \\ V_m = V_{me}\left(\cos kX + i\dfrac{Z_н}{W_0}\sin kX\right). \end{cases} \tag{7}$$

В рассматриваемом случае колебательная система связана с источником колебаний и является для него механическим сопротивлением. Это входное сопротивление, в общем случае может быть комплексным, а его величина Zвх зависит от параметров стержневой системы: длины, вида сечения, нагрузки Zн на конце и частоты.

Из определения сопротивления следует, что

$$Z_{вх} = \frac{F_{m0}}{V_{m0}}, \tag{8}$$

где Fm0, Vm0 - амплитуды силы и скорости в начале системы.

Определение значения величины Zвх, дает возможность нахождения всех колебательных величин (при известной колебательной силе, развиваемой источником колебаний). По мнимой части Zвх, можно определить резонансные частоты системы или условия, обеспечивающие настройку системы в резонанс.

Из выражения (7) при X =0 после преобразований, получаем

$$Z_{вх} = W_0 \frac{\cos kL + i\dfrac{W_0}{Z_н}\cdot\sin kL}{\dfrac{W_0}{Z_н}\cos kL + i\sin kL}, \tag{9}$$

где $Z_н = R_н + iX_н$ - комплексная нагрузка на конце системы:

$$K_б = \frac{W_0}{Z_н} \tag{10}$$

После преобразования комплексного числа $Z_{\text{вх}}$ с выделением в нем вещественной и мнимой частей и, учитывая сопротивление стержневой колебательной системы, получим:

$$Z_{вх} = \frac{F_{m0}}{V_{m0}} = R_{вх} + iX_{вх}, \tag{11}$$

$$R_{вх} = \frac{W_0 \cdot K_\delta}{K_\delta^2 \cos^2 k\left(L - \frac{\varphi}{k}\right) + \sin^2 \alpha\left(L - \frac{\varphi}{k}\right)}; \tag{12}$$

$$X_{вх} = -iW_0 \frac{\left(1 - K_\delta^2\right) \cdot \sin 2k\left(L - \frac{\varphi}{k}\right)}{2\left[K_\delta^2 \cdot \cos^2 k\left(L - \frac{\varphi}{k}\right) + \sin^2 k\left(L - \frac{\varphi}{k}\right)\right]}, \tag{13}$$

здесь φ определяется как:

$$tg 2\varphi = \frac{2W_0 X_н}{R_н^2 + X_н^2 - W_0^2}. \tag{14}$$

Выражения (9), (12), (13) позволяют заменить систему с распределенными параметрами, эквивалентной колебательной цепью, с активным и реактивным сопротивлениями Rвх и Xвх. Такая замена полностью не отражает все особенности реальной системы. Однако для определения резонансных частот замена системы эквивалентной не только удобна, но и сохраняет полностью исследуемые резонансные свойства.

Резонансные свойства колебательных систем определяются условиями, при которых в ее входном сопротивлении отсутствует реактивная составляющая, а частоты, обращающие в ноль уравнение (13), будут резонансными.

Учитывая условие (5), воспользуемся уравнением (3), выделив в нем мнимую часть и опустив постоянные, не равные нулю, множители:

$$\frac{\left(1 - K_\delta^2\right) \cdot \sin 2k\left(L - \frac{\varphi}{k}\right)}{K_\delta^2 \cdot \cos^2 k\left(L - \frac{\varphi}{k}\right) + \sin^2 k\left(L - \frac{\varphi}{k}\right)} = 0. \tag{15}$$

Это выражение может равняться нулю для $K_\delta > 1$ при условии, что

$$k\left(L - \frac{\varphi}{k}\right) = \pi n.$$

Отсюда, условия резонанса будут:

$$\frac{\omega}{c}L - arctg\,\frac{2W_0 X_н}{R_н^2 + X_н^2 - W_0^2} = \pi n, \qquad (16)$$

где n = 1, 2, 3,... - число полуволн, укладывающихся в стержневой системе.

Если ω задана и определяется величина L, то задача решается непосредственно с помощью (17). Для определения резонансной частоты ω, из-за трансцендентности уравнение (17), решение ищется численным методом.

Параметры прошедшей в материальную среду волны достигают максимального значения при равенстве сопротивлений колебательной системы и присоединенной среды. Эти сопротивления, как правило, не равны, поэтому одна часть энергии падающей волны отражается и возвращается к источнику, а другая поглощается средой, что влечет за собой изменение собственной частоты и нарушение резонансного режима колебаний системы

Список информационных источников

[1] Пейн Г. Физика колебаний и волн. Москва: Мир, 1979, 389с.
[2] Румынская И.А. Основы гидроакустики. Л.: Судостроение, 1979, 114с.
[3] Теумин И.И. Ультразвуковые колебательные системы. М.: Машгиз, 1959, 331с.