УДК 681.3

МОДЕЛЬ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА

Марсов В.И., Колбасин А.М., Сарычев И.Ю., Курилин А.В.

Наиболее энергоемкими на асфальтобетонных заводах являются операции тепловой обработки минеральных составляющих асфальтобетонной смеси. в сушильном барабане Новые тенденции технического и технологического перевооружения строительной отрасли в изменившейся экономической ситуации, ужесточение технических условий и норм на выпуск готового продукта, необходимость резкого снижения затрат по всем переделам, заставляют искать резервы, обеспечивающие улучшение наиболее значимых показателей производства. Поэтому, задача поддержания оптимальной температуры при минимуме энергопотребления на нагрев минеральных составляющих асфальтобетонной смеси является актуальной и должна решаться на практике с помощью систем автоматического управления, опираясь на модельное представление объекта автоматизации.

Ставится задача практического, решения задачи теплопроводности для вращающейся печи нагрева материала, представляющей собой однородное цилиндрическое тело, при заданных и имеющих определенный вид начальных и граничных условиях методом разделения переменных Фурье.

В качестве модели взято цилиндрическое тело радиуса *R*, причем r $(0 \le r \le R)$ – расстояние любой его точки от оси цилиндра, *t* – время, *T(r,t)* – температура тела в произвольной его точке.

Используем известное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = a\left[\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}\right], \qquad (1)$$

где *a* – постоянный коэффициент теплопроводности однородного тела при начальных и граничных условиях

$$T(r,0) \equiv const = T_0,\ (0 \le r \le R), \qquad (2)$$

$$T(R,t) \equiv const = T_C,\ (0 \le t < \infty),$$

где T_0, T_C – начальное и конечное значения температуры *T*.

Кроме того, должны выполняться некоторые естественные условия на оси цилиндрического тела (при r=0)

$$T(0,t) \ne \infty,\ \frac{\partial T(0,t)}{\partial r} \equiv 0,\ 0 \le \tau < \infty.$$

Очевидно, что в случае (2) должно выполняться конечное условие:

$$T(r,\infty) = \lim_{t\to\infty} T(r,t) \equiv T_C,\ 0 \le r \le R. \qquad (3)$$

Введем вместо r безразмерную величину

$$\rho = \frac{r}{R}. \qquad (4)$$

Тогда $T(r,t) = T(R\rho,t)$. Это выражение запишем просто как $T(\rho,t)$, где T будет лишь обозначением температуры тела, а не вида зависимости от тех или иных величин.

С учетом (4)

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial \rho}\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial \rho},\ \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial \rho}\right),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial T}{\partial \rho}\right) = \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)\frac{d\rho}{dr}\right] = \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}.$$

В результате перехода от r к ρ уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial T(\rho,t)}{\partial t} = \frac{a}{R^2}\left[\frac{\partial^2 T(\rho,t)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T(\rho,t)}{\partial \rho}\right]. \qquad (5)$$

Введем новое безразмерное время $\tau = \frac{t}{\tilde{t}}$. Тогда $T(\rho,t) = T(\rho,\tilde{t}\tau)$, где правая часть сохраняет за символом T лишь обозначение температуры.

Используя зависимость $t = \tilde{t}\tau$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t}\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\tilde{t}}\frac{\partial T}{\partial \tau}. \qquad (6)$$

Подстановка (6) в (5) дает

$$\frac{\partial T(\rho,\tau)}{\partial \tau} = \frac{a\tilde{t}}{R^2}\left[\frac{\partial^2 T(\rho,\tau)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T(\rho,\tau)}{\partial \rho}\right] \qquad (7)$$

с безразмерным коэффициентом перед квадратными скобками.

Переходя от ненулевых (2) к нулевым начальным условиям: $T(\rho,\tau) = T_C + \tilde{T}(\rho,\tau)$ и принимая $\frac{a\tilde{t}}{R^2}$ равным единице, запишем уравнение теплопроводности (7) в окончательном виде

$$\frac{\partial \tilde{T}(\rho,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{T}(\rho,\tau)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{T}(\rho,\tau)}{\partial \rho} \qquad (8)$$

с новыми трансформированными начальными, граничными и конечными условиями

$$\tilde{T}(\rho,0) \equiv const = T_0 - T_C,\ (0 \le \rho \le 1);\ \tilde{T}(1,\tau) \equiv const = 0,\ (0 \le \tau \le \infty); \qquad (9)$$

$$\tilde{T}(0,\tau) \ne \infty,\ \frac{\partial \tilde{T}(0,\tau)}{\partial \rho} \equiv 0,\ (0 \le \tau < \infty);\ \tilde{T}(\rho_1,\infty) = lim\tilde{T}(\rho_1,\tau) \equiv 0,\ 0 \le \rho \le 1). \qquad (10)$$

Уравнение (8) является линейным относительно искомой функции $\tilde{T}$. Поэтому сумма двух его решений и произведения любого решения на какое угодно число снова будут решениями. Отсюда следует, что любая конечная комбинация решений опять будет решением. То же будет верным в пределе и для бесконечного сходящегося ряда решений уравнения (8).

В соответствии с идеей разделения переменных будем искать отличные от тождественных нулю отдельные решения уравнения (8) в форме

$$\tilde{T}(\rho,\tau) = U(\rho)V(\tau). \tag{11}$$

Подставляя после отыскания частных производных выражение (11) в уравнение (8), получим

$$U(\rho)V'(\tau) = U''(\rho)V(\tau) + \frac{1}{\rho}U'(\rho)V(\tau),$$

или после деления всех членов на $U(\rho)V(\tau) \neq 0$

$$\frac{V'(\tau)}{V(\tau)} + \frac{U''(\rho) + \frac{1}{\rho}U'(\rho)}{U(\rho)} \equiv const = \lambda^2,\ \lambda > 0. \tag{12}$$

Для функции $U(\rho)$ из (12) будем иметь уравнение

$$U''(\rho) + \frac{1}{\rho}U'(\rho) + \lambda^2 U(\rho) = 0,\ \lambda = 0,\ 0 \le \rho \le 1. \tag{13}$$

Одним из нетривиальных решений (13) при $0 \le \rho < \infty$ и, в частности, при $0 \le \rho \le 1$ является функция Бесселя первого рода нулевого порядка, представимая степенным рядом

$$J_0(x) = \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K \frac{(x/2)^{2K}}{(K!)^2}. \tag{14}$$

Таким образом, решение (13) имеет вид

$$U(\rho) = J_0(\lambda\rho).$$

В результате при каждом $\lambda > 0$ нетривиальное решение вида (10) уравнения (8) будет

$$\tilde{T}(\rho,\tau) = J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda^2\tau},\ \lambda > 0,\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \tau < \infty. \tag{15}$$

Каждая функция семейства (15), зависящая от одного параметра $\lambda > 0$, удовлетворяет по построению уравнению (8) и дополнительным условиям (9), (10). Эти же свойства будет, очевидно, иметь и любая конечная линейная комбинация функций вида (15) и, даже любой сходящийся ряд функций этого вида с соответствующим набором коэффициентов при условии, что множество значений параметров $\lambda > 0$ будет хотя и бесконечным, но счетным (в частности – дискретным)

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_K < \ldots < \infty. \tag{16}$$

Таким образом, решение задачи (8) ищется в виде

$$\tilde{T}(\rho,\tau)=\alpha_1 J_0(\lambda_1\rho)e^{-\lambda_1^2\tau}+\alpha_2 J_0(\lambda_2\rho)e^{-\lambda_2^2\tau}+\ldots+\alpha_K J_0(\lambda_K\rho)e^{-\lambda_K^2\tau}+\ldots=$$
$$=\sum_{K=1}^{\infty}\alpha_K J_0(\lambda_K\rho)e^{-\lambda_K^2\tau}=\sum_{K=1}^{\infty}\alpha_K\tilde{T}_K(\rho,\tau)\,, \quad (17)$$

где α_1, α_2,…, α_K,…- некоторые числовые коэффициенты.

Рассмотрим граничные условия задачи (9). Условию (9) можно удовлетворить при любых α_K, K = 1,2,…, если потребовать, чтобы

$$\tilde{T}_K(1,\tau)\equiv 0\,,\ K=1,2,..., \quad (18)$$

то есть

$$J_0(\lambda_K)e^{-\lambda_K^2\tau}\equiv 0\,,\ K=1,2,...,$$

то в силу $e^{-\lambda_K^2\tau}>0$ сводится к

$$J_0(\lambda_K)=0\,,\ K=1,2,...$$

Последнее означает, что в качестве совокупности значений (16) параметра $\lambda > 0$, называемых собственными значениями задачи, следует выбрать в соответствии с (18) бесконечное, но счетное множество положительных нулей функции Бесселя $J_0(x)$

$$\lambda_K=\mu_K\,,\ K=1,2,... \quad (19)$$

Подставляя известные значения (19) в ряд (17), получаем решение уравнения (8) в виде

$$\tilde{T}(\rho,\tau)=\sum_{K=1}^{\infty}\alpha_K\tilde{T}_K(\rho,\tau)=\sum_{K=1}^{\infty}\alpha_K J_0(\mu_K\rho)e^{-\mu_K^2\tau}=$$
$$=\alpha_1 J_0(\mu_1\rho)e^{-\mu_1^2\tau}+\alpha_2 J_0(\mu_2\rho)e^{-\mu_2^2\tau}+\ldots+\alpha_K J_0(\mu_K\rho)e^{-\mu_K^2\tau}+\ldots\ , \quad (20)$$
$$0\le\rho\le 1,\quad 0\le\tau<\infty\,.$$

В частности, в соответствии с (20) и (9) при $\tau = 0$ должно быть

$$\tilde{T}(\rho,0)\equiv T_0-T_C=\sum_{K=1}^{\infty}\alpha_K J_0(\mu_K\rho)\,,\ 0\le\rho<1, \quad (21)$$

откуда и должны быть найдены коэффициенты α_K, K=1,2,…

Воспользуемся задачей о разложении функции – константы $f(x)\equiv const$, отличной от нуля, в ряд Фурье по ортогональной системе функций $\{J_0(\mu_K x)\}$

$$f(x)=2\left[\frac{J_0(\mu_1 x)}{\mu_1 J_1(\mu_1)}+\frac{J_0(\mu_2 x)}{\mu_2 J_1(\mu_2)}+\ldots+\frac{J_0(\mu_k x)}{\mu_k J_1(\mu_k)}+\ldots\right],\ 0\le x<1,$$

где $J_1(\mu_k)$ - функция Бесселя первого рода первого порядка.

Отсюда очевидно, что:

$$\alpha_K=\frac{2(T_0-T_C)}{\mu_K J_1(\mu_K)}\,,\ K=1,2,...\quad , \quad (22)$$

Исходя из (20), (22), получим решение задачи (8-10) в виде

$$\tilde{T}(\rho,\tau)=\sum_{K=1}^{\infty}\alpha_K J_0(\mu_K\rho)e^{-\mu_K^2\tau}=(T_0-T_C)\sum_{K=1}^{\infty}\beta_K J_0(\mu_K\rho)e^{-\mu_K^2\tau}=$$

$$=2(T_0-T_C)\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_K J_1(\mu_K)}J_0(\mu_K\rho)e^{-\mu_K^2\tau}\ , \qquad (23)$$

$$0\le\rho\le 1,\quad 0\le\tau<\infty .$$

Отметим, что в отличие от $T(\rho,\tau)$, величина $\tilde{T}(\rho,\tau)$ является температурой тела, отсчитываемой от уровня, задаваемого постоянной T_C. После нахождения $\tilde{T}(\rho,\tau)$ необходимо вернуться к $T(\rho,\tau)$.

Для рассмотренной задачи получено практическое решение. Несмотря на наличие некоторых общих черт, присущих методу Фурье, предложенный способ решения определился индивидуальными особенностями данной задачи, конкретным видом начальных и граничных условий. Возможности моделирования решения (23) на ПЭВМ, позволяют изменять параметры теплоносителя, обеспечивающего с помощью автоматизированной системы управления оптимальную температуру минеральных составляющих асфальтобетонной смеси в условиях изменяющейся температуры внешней среды.

Список информационных источников

[1] Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1997. - 344 с.

[2] Кальгин А.А., Манушакян К.Г., Белобородов А.Ф. Системы автоматизации асфальтосмсительных установок непрерывного действия // Сб. науч. тр. «Электронные системы автоматического управления на транспорте и в строительстве» - М., МАДИ, 2001, с. 47-51.