УДК 681.3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ПРОЦЕССОМ СУШИЛЬНОГО БАРАБАНА

Илюхин А.В., Колбасин А.М., Сарычев И.Ю., Курилин А.В.

Расчетная схема сушильного барабана и структурная схема тепловых потоков представлена на рисунке 1.

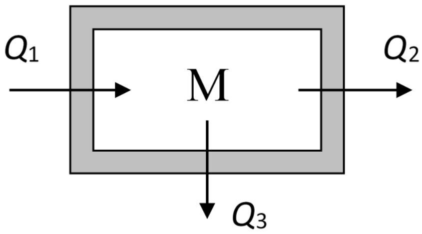

Рисунок 1 -Модель сушильного барабана

Здесь приняты следующие обозначения: $Q_1=cGt$ – тепловой поток, подводимый теплоносителем; $Q_2=cGt_1$ – тепловой поток, уходящий с отработавшим теплоносителем; $Q_3=FK(t_1-t_{\text{ос}})$; $M=cmt_1$ – запас тепла во внутренней среде сушилки; c – удельная теплоемкость теплоносителя; G расход теплоносителя; t – температура теплоносителя; t_1 – температура внутренней среды сушилки; F – площадь внутренней поверхности сушилки; m – масса внутренней среды сушилки; K – коэффициент теплопередачи от внутренней среды сушилки к окружающей среде; $t_{\text{ос}}$ – температура окружающей среды.

В соответствие со структурной схемой сушильного барабана тепловой баланс может быть представлен дифференциальным уравнением:

$$\frac{dM}{d\tau}=Q_1-Q_2-Q_3$$

или

$$cm\frac{dt_1}{d\tau}=cGt-cGt_1-FKt_1+Fk_{\text{ос}}. \qquad (1)$$

Если за начало отсчета принять постоянную температуру $t_{\text{ос}}$ окружающей среды, то уравнение (1) при постоянстве температуры t теплоносителя примет вид:

$$\frac{dx}{d\tau}=ax+(ex+f)u,$$

где $x = t_1-t_{\text{ос}}$; $a = -FK/cm$; $u = G$; $e = -1/m$; $f = t/m$.

Если положить $(ex+f)=b(x)$, то уравнение примет вид $dx/d\tau=ax+b(x)u$.

В данном случае критерий энергетической эффективности представляется функционалом:

$$J = \int_0^T [ax + b(x)u]^2 \, d\tau . \tag{2}$$

Тогда задача оптимального управления может быть сформулирована следующим образом:

$$min\, J = \int_0^T [ax + b(x)u]^2 \, d\tau \tag{3}$$

при ограничениях: $dx/d\tau = ax + b(x)u$, $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$.

Вспомогательный функционал определяется выражением:

$$H = [ax + b(x)u]^2 / 2 + [ax + b(x)u]\lambda . \tag{4}$$

Решение задачи (4) проводится методом Понтрягина:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = b(x)[ax + b(x)u + \lambda]; \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{d\lambda}{d\tau} = \{\partial[ax + b(x)u]/\partial x\} \cdot [ax + b(x)u + a\lambda]; \tag{6}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{dx}{d\tau} = ax + b(x)u . \tag{7}$$

Уравнение (5) после алгебраических преобразований примет вид:

$$b(x)[ax + b(x)u + \lambda] = 0 . \tag{8}$$

Поскольку $b(x) \neq 0$, уравнения (7) и (8) записываются следующим образом:

$$[ax + b(x)u + \lambda] = 0 ; \tag{9}$$

$$[ax + b(x)u] - \frac{dx}{d\tau} = 0 . \tag{10}$$

Из уравнений (9) и (10) следует, что $dx/d\tau = -\lambda$.

Уравнение (6) можно заменить выражением

$$-\frac{d\lambda}{d\tau} = \{\partial[ax + b(x)u]/\partial x\} \cdot 0 . \tag{11}$$

Из уравнения (11) можно заключить, что

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 0 . \tag{12}$$

Тогда вектор сопряженных переменных имеет постоянные координаты и, следовательно, вектор

$$\frac{dx}{d\tau} = const . \tag{13}$$

На основе соотношений (12) и (13), а также ограничений исходной задачи (3), можно определить аналитические выражения оптимальной траектории:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^0 = [x_T - x_0]/T; \tag{14}$$

$$x^0(\tau) = x_0 + \tau[x_T - x_0]/T; \tag{15}$$

и управления

$$u^0(x) = [x_T - x_0]/[Tb(x)] - a\,x/b(x); \tag{16}$$

$$u^0(\tau) = [(x_T - x_0)(1 - a\tau)/T - ax_0]/[e(x_0 + \tau[x_T - x_0]/T) + f]. \tag{17}$$

Задача (17) должна решаться с учетом ограничений на управление $[u^0(\tau) \le u_{max}]$ в два приема: сначала задача решается аналитически без учета ограничений на управление, а затем путем изменения длительности интервала управления или граничных условий добиться необходимой точности значения x_T при $u^0 = u_{max}$ и $\tau = T$.

Известно, что соотношение ($S = T/T_0$) инерционности объекта T_0 и длительности интервала управления T влияет на закон оптимального управления и на оптимальную траекторию движения системы. Причем это влияние сильно меняется при соотношении S близком к единице.

Наиболее объективной оценкой, по мнению многих исследователей, следует считать соотношение ($S_0 = A_п/A_з$) полезной работы системы $A_п$ к затратам энергии на выполнение этой работы $A_з$.

Применительно к тепловым процессам критерий «энергетической эффективности» весьма близок к оценке S_0. Тогда задача оптимального управления может быть сформулирована как задача математического программирования в следующем виде:

$$J_0 = A_п / A_з \to max,$$

при ограничениях физических:

$$-dx(\tau)/d\tau = ax(\tau) + bu(\tau);$$

и технологических:

$x(0) = 0$; $x(T) = x_T$; $x_T > 0$; $u(\tau) \le u_{max}$.

Однако задача не имеет аналитического решения при выбранном критерии оптимальности J_0, поэтому необходимо сначала решить задачу оптимального управления по критерию «энергетической эффективности» $J = A_п^2$, обеспечивающего выход системы в состояние $x(\tau) = = x_T$ за время $\tau = T$, а затем сравнить эффективность полученного решения с помощью критерия $J_0 = A_п / A_з$ при изменении соотношения $S = T/T_0$ от 0 до ∞.

Если полезной работой системы $A_п$ считать повышение ее потенциала с x_0 до x_T, то она может быть определена из выражения:

$$A_п = \int_0^T [dx(\tau)/d\tau]d\tau = \int_0^T [ax(\tau) + bu(\tau)]d\tau.$$

В этом случае критерий «энергетической эффективности» можно представить в виде:

$$J = A_{\text{п}}^2 = \int_0^T \left[ax(\tau) + bu(\tau)\right]^2 d\tau .$$

Для критерия энергетической эффективности задача оптимального управления как задача математического программирования имеет вид:

$$max(J) = \int_0^T \left[a^2 x(\tau)^2 + 2abx(\tau)u(\tau) + u(\tau)^2\right] d\tau , \qquad (18)$$

при ограничениях физических:

$$-dx(\tau)/d\tau = ax(\tau) + bu(\tau)$$

и технологических:

$x(0) = 0$; $x(T) = x_T$; $x_T > 0$; $u(\tau) \leq u_{max}$.

Здесь, как и выше, относительно мощности управления $u(\tau)$ следует заметить, что оно не должно превышать допустимое u_{max}, но обеспечивать переход системы из 0 в x_T точно в конце интервала управления T. Вначале поставленная задача решается без ограничений, а затем рассматривается вопрос достижимости цели управления, то есть $u^0 \leq u_{max}$.

На практике величина u_{max} должна быть предусмотрена при проектировании объекта управления.

Вспомогательный функционал в данном случае примет вид:

$$H = a^2 x(\tau)^2 + 2abx(\tau)u(\tau) + b^2 u(\tau)^2 + 2\lambda(\tau)ax(\tau) + 2\lambda(\tau)bu(\tau), \qquad (19)$$

где $\lambda(\tau)$ – множитель Лагранжа.

Оптимальные управление u^0 и траектория x^0 находятся из системы уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H}{\partial u} = 2abx(\tau) + 2b^2 u(\tau) + 2b\lambda(\tau) = 0 \\ &-\frac{\partial H}{\partial x} = 2a^2 x(\tau) + 2abu(\tau) + 2a\lambda(\tau) = 2\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}; \\ &\frac{\partial H}{\partial \lambda} = ax(\tau) + bu(\tau) = \frac{dx(\tau)}{d\tau}. \end{aligned} \qquad (20)$$

После алгебраических упрощений эта система может быть записана:

$$\begin{aligned} &ax(\tau) + bu(\tau) + \lambda(\tau) = 0; \\ &ax(\tau) + bu(\tau) + \lambda(\tau) = -\frac{d\lambda(\tau)}{d\tau}; \\ &ax(\tau) + bu(\tau) = \frac{dx(\tau)}{d\tau}. \end{aligned} \qquad (21)$$

Сравнение уравнений (21) позволяет утверждать, что $d\lambda(\tau)/d\tau = 0$, откуда следует, что $\lambda(\tau) = const = -c$. Тогда из уравнения (21) в явном виде выражается оптимальное управление:

$$u^0(\tau) = -[a/b]x(\tau) + c/b\,, \qquad (22)$$

и с учетом (21) определяется уравнение оптимальной траектории:

$$dx(\tau)/d\tau = c\,, \qquad (23)$$

где $c = [x(T) - x(0)]/T = x_T / T$ - постоянная скорость движения системы, которая обеспечивает ее переход из $x(0)$ в $x(T)$ за время T.

Из уравнения (23) можно сделать вывод о том, что оптимальное движение системы должно происходить с постоянной скоростью. В этом случае оптимальная траектория определяется зависимостью:

$$x^0(\tau) = c\tau = x_T\ \tau/T\,. \qquad (24)$$

С учетом (22) и (24) оптимальное управление может быть выражено как функция времени:

$$u^0(\tau) = -[a/bT]x_T\tau + x_T/[bT] = x_T[1 - a\tau]/[bT]. \qquad (25)$$

Затраты энергии управления на перевод системы из $x(0)$ в $x(T)$ за время T составляют:

$$A_{з} = \int_0^T \{x_T[1 - a\tau]/[bT]\}d\tau = x_T[2 - a\tau]/[2b]. \qquad (26)$$

Полезна работа в этом случае остается неизменной $A_{п} = x_T$.

Тогда соотношение S_0 принимает вид:

$$S_0 = A_{п}/A_{з} = [2b]/[2 - aT]. \qquad (27)$$

Если уравнение объекта управления записать в канонической форме, то оно примет вид:

$$T_0\, dx(\tau)/d\tau = -x(\tau) + E_0 u(\tau),$$

где $a = -1/T_0$; $b = K_0/T_0$.

Теперь выражение (27) может быть записано в форме, удобной для оценки влияния соотношения постоянной времени системы и длительности интервала управления на эффективность управления, синтезированного по различным критериям оптимальности:

$$S_0 = 2K_0/[(2 + T/T_0)T]. \qquad (28)$$

Из выражения (28) видно, что с увеличением длительности интервала управления T при неизменном значении T_0 (инерционности) числитель останется неизменным, а знаменатель возрастает линейно. Можно сделать вывод о том, что с ростом T S_0 убывает.

Положив $f = T/T_0$, получим:

$$S_0(f) = 2(K_0/T_0)/(2 + f) = 2b/(2 + f). \qquad (29)$$

Исследование функции $S_0(f)$ при изменении f от 0 до ∞ показывает, что эффективность управления (оптимального по критерию «энергетической эффективности») более заметна при соизмеримых длительностях интервала управления и постоянной времени системы.

Предложенный метод управления сушильным агрегатом и полученные результаты носят универсальный характер для энергоемких тепловых объектов, к которым относятся и к сушильным агрегатам асфальтобетонных заводов. Поэтому, настройку регулятора температуры сушильного агрегата, необходимо осуществлять по изложенной методике.

Список информационных источников

[1] Манушакян К.Г., Кашляк М.И., Зиоуд А. Оценка эффективности оптимального управления тепловыми объектами // Сб. науч. тр. «Моделирование и информационное технологии в автомобильно-дорожном комплексе» - М., МАДИ, 2002, с. 4-7.