ISSN 2306-1561
Automation and Control in Technical Systems (ACTS)
2015, No 1, pp. 139-149.
DOI: 10.12731/2306-1561-2015-1-16

Method of Equivalent Equations to Prove Fermat's Theorem

Aleksandr Sergeevich Korotkov

Russian Federation, Ph. D., Associate Professor, Department of «Automated Control Systems».

State Technical University – MADI, 125319, Russian Federation, Moscow, Leningradsky prospekt, 64. Tel.: +7 (499) 151-64-12. http://www.madi.ru. kac061141@yandex.ru

Anton Victorovich Gyliaev

Russian Federation, Bank Employee.

OJSC «FUNDSERVICEBANK», 125319, Russian Federation, Moscow, Butyrsky Val, 18, building 2, Tel.: +7 (495) 517-94-94, http://www.fundservice.ru. golub999@mail.ru

Vladimir Aleksandrovich Korotkov

Russian Federation, Leading Expert.

Ministry of Internal Affairs of the Moscow region, 125009, Russian Federation, Moscow Nikitskiy pereulok, 3, Tel.: +7 (495) 629-78-91, https://50.mvd.ru. v5890@mail.ru

Abstract. In this article we present a proof of Fermat's theorem for the special case n = 3, by considering the equivalent equations $x^3 = y^3 + \gamma^3$, $y^3 = x^3 - \gamma^3$, $\gamma^3 = x^3 - y^3$ and their research. The natural numbers are selected for the right sides of these equations sequentially: $(y,\gamma),(x,\gamma),(x,y)$ such that the remainder of the division of the first to the second is equal to zero, and explores their cubic sum or difference of the cube. It is shown that the left sides of these equations x, y, γ can not be natural numbers, this fact proves Fermat's theorem. Two types of cubic triangles are introduced on the basis of equivalent equations. In the first, the cube of the longest side is equal to the sum of the cubes of the other two sides, in the second, the difference between the largest cube side and one side is equal to the cube of the other side. Consider the possibility of creating a cube calculation, choose a cube as the unit of measurement, all calculations (division, multiplication, exponentiation, the cube root extraction, addition and subtraction of cubes) carried out without algebra with absolute precision, create geometric computer where conventional methods of algebraic calculations are unacceptable.

Keywords: Fermat's last theorem, equivalent equations, natural and rational numbers, decimals, infinite periodic (non-periodic) decimal cube amount, cube of a difference, cubic triangle cubic calculus, unit cube.

ISSN 2306-1561
Автоматизация и управление в технических системах (АУТС)
2015. – № 1. – С. 139-149.
DOI: 10.12731/2306-1561-2015-1-16

УДК 519.6

Метод эквивалентных уравнений для доказательства теоремы Ферма

Коротков Александр Сергеевич

Российская Федерация, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизированные системы управления».

ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», 125319, Российская Федерация, г. Москва, Ленинградский проспект, д.64, Тел.: +7 (499) 151-64-12, http://www.madi.ru. kac061141@yandex.ru

Гуляев Антон Викторович

Российская Федерация, служащий.

ОАО «Фондсервисбанк», 125319, Российская Федерация, г. Москва, ул. Бутырский Вал, д. 18, стр. 2, Тел.: +7 (495) 517-94-94, http://www.fundservice.ru. golub999@mail.ru

Коротков Владимир Александрович

Российская Федерация, ведущий эксперт.

Главное управление МВД России по Московской области, 125009, Российская Федерация, г. Москва, Никитский переулок, д. 3, Тел.: +7 (495) 629-78-91, https://50.mvd.ru. v5890@mail.ru

Аннотация. В статье приводится доказательство теоремы Ферма для частного случая n=3 с помощью рассмотрения эквивалентных уравнений $x^3 = y^3 + \gamma^3$, $y^3 = x^3 - \gamma^3$, $\gamma^3 = x^3 - y^3$ и их исследования. Последовательно выбираются для правых частей этих уравнений натуральные числа: $(y,\gamma),(x,\gamma),(x,y)$ такие, что остаток от деления первого на второе был равен нулю и исследуется их куб суммы или куб разности. Показано, что левые части этих уравнений x, y, γ не могут быть натуральными числами, этот факт и доказывает теорему Ферма. На основании эквивалентных уравнений вводятся два вида кубических треугольников. В первом, куб наибольшей стороны равен сумме кубов двух других сторон, во втором, куб разности наибольшей стороны и одной из сторон равен кубу другой стороны. Рассматривается возможность создания кубического исчисления, за единицу измерения выбрать куб, все вычисления (деление, умножение, возведение в степень, извлечение кубического корня, сложение и вычитание кубов) проводить без

алгебры с абсолютной точностью, создать геометрическую ЭВМ, где обычные методы алгебраических вычислений неприемлемы.

Ключевые слова: теорема Ферма, эквивалентные уравнения, натуральные и рациональные числа, десятичная дробь, бесконечная периодическая (непериодическая) десятичная дробь, куб суммы, куб разности, кубический треугольник, кубическое исчисление, единица измерения куб.

1. Введение

Проблема поиска натуральных решений x, y, z уравнения $x^n + y^n = z^n, n > 2$ была впервые сформулирована французом Пьером де Ферма в виде замечаний на полях «Арифметики» Диофанта, которая навела его на мысль о его великой теореме [1, 5, 6, 9, 11, 12]. С помощью метода бесконечного спуска Ферма нашёл доказательство для n=3. В данной статье приведено доказательство этой теоремы для частного случая n=3 с помощью рассмотрения эквивалентных уравнений: $x^3 = y^3 + \gamma^3, y^3 = x^3 - \gamma^3$, $\gamma^3 = x^3 - y^3$ и их исследования. Исследуются правые части этих уравнений и доказывается, что они не могут выражаться натуральными числами. Так как в этих уравнениях стоит знак равенства, то делается вывод, что левая часть этих уравнений x, y, γ не может быть выражена натуральным числом.

2. Теорема Ферма для натурального n=3

Кубическое уравнение (1) не разрешимо в натуральных числах x, y, γ.

$$x^3 = y^3 + \gamma^3. \tag{1}$$

Доказательство

2.1. Пусть, y, γ натуральные числа [2,3]. Возведя каждое из них в куб и сложив их, получим натуральное число r. Обозначим через $r = x^3$. Извлечём $\sqrt[3]{\ }$ из r получим $\delta = \sqrt[3]{r}$. Докажем что δ не натуральное число. Извлечем из обеих частей равенства (1) кубический корень

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{y^3 + \gamma^3}. \tag{2}$$

Преобразуем (1) к виду

$$x^3 = \gamma^3 \cdot \left(\frac{y^3}{\gamma^3} + 1 \right). \tag{3}$$

Извлечем из обеих частей равенства (3) кубический корень, тогда

$$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{\gamma^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{y^3}{\gamma^3} + 1}. \qquad (4)$$

Рассмотрим в (4) отдельно сомножители в правой части. Так, первый сомножитель $\sqrt[3]{\gamma^3}$, по условию γ является натуральным числом, то γ^3 также натуральное число и к тому же кубическое, следовательно $\sqrt[3]{\gamma^3} = \gamma$. Второй сомножитель $\sqrt[3]{\frac{y^3}{\gamma^3} + 1}$ является ли натуральным числом? Возьмём подкоренное выражение $\frac{y^3}{\gamma^3} + 1$. Рассмотрим отдельно рациональное кубическое число $\frac{y^3}{\gamma^3}$, которое может быть больше единицы (десятичным числом, бесконечной периодической или непериодической десятичной дробью) , меньше единицы (десятичным числом, бесконечной периодической или непериодической десятичной дробью), или натуральным числом (в данном случае – кубическим)[4, 10]. Рассмотрим только вариант, когда дробь является натуральным числом, т.е. y делится без остатка на γ (обозначим его, через z^3). Тогда при сложении этого натурального числа z^3 с единицей получим натуральное число, но не кубическое $z^3 + 1$. Почему? Ближайшее последующее кубическое число к натуральному числу $z^3 + 1$ такое $(z+1)^3$. Тогда

$$z^3 + 1 < (z+1)^3. \qquad (5)$$

Извлечём из обеих частей неравенства (5) $\sqrt[3]{\ }$ получим $\sqrt[3]{z^3+1} < \sqrt[3]{(z+1)^3}$. Окончательно

$$\sqrt[3]{z^3+1} < Z + 1. \qquad (5а)$$

Так как $\sqrt[3]{z^3} = z < \sqrt[3]{z^3+1}$, то с учётом (5а) получим $z < \sqrt[3]{z^3+1} < Z + 1$. Следовательно, $\sqrt[3]{z^3+1}$ не является натуральным числом. Произведение $\sqrt[3]{\gamma^3} \cdot \sqrt[3]{z^3+1}$ не натуральное число. Поэтому $\delta = \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{x^3}$ не натуральное число, так как в (4) выполняется равенство, в противном случае равенство (4) не выполняется. Так как $\delta^3 = r$, $r = x^3$, то $\delta^3 = x^3$. Извлекая, из обеих частей равенства $\sqrt[3]{\ }$ следует что $\delta = x$ - не натуральное число. Следовательно, x - не натуральное число. Равенство (2) эквивалентно равенству (4) поэтому можно применить выводы по равенству (4) к равенству (2). Следовательно, $\sqrt[3]{y^3 + \gamma^3}$ не является натуральным числом. Поэтому

$\delta = \sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{x^3}$ не является натуральным числом. Так как $\delta^3 = r$, $r = x^3$ то $\delta^3 = x^3$. Извлекая, из обеих частей равенства $\sqrt[3]{\ }$ следует что $\delta = x$ – не натуральное число. Следовательно, x – не натуральное число.

2.2. Преобразуем уравнение (1) в уравнение $x^3 - \gamma^3 = y^3$ и, поменяв местами обе части равенства, получим

$$y^3 = x^3 - \gamma^3. \tag{6}$$

Пусть x, γ выражены натуральными числами. Возведя каждое из них в куб и взяв их разность, получим натуральное число f .Обозначим через $f = y^3$. Извлечём $\sqrt[3]{\ }$ из f получим $\varphi = \sqrt[3]{f}$. Докажем что φ не натуральное число. Извлечем из обеих частей равенства (6) кубический корень

$$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{x^3 - \gamma^3}. \tag{7}$$

Преобразуем (6) к виду

$$y^3 = \gamma^3 \cdot \left(\frac{x^3}{\gamma^3} - 1 \right). \tag{8}$$

Извлечем из обеих частей равенства (8) кубический корень, тогда

$$\sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{\gamma^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3}{\gamma^3} - 1}. \tag{9}$$

Рассмотрим в (9) отдельно сомножители в правой части. Так, первый сомножитель $\sqrt[3]{\gamma^3}$, по условию γ является натуральным числом, то γ^3 также натуральное число и к тому же кубическое, следовательно $\sqrt[3]{\gamma^3} = \gamma$. Второй сомножитель $\sqrt[3]{\frac{x^3}{\gamma^3} - 1}$ является ли натуральным числом? Возьмём подкоренное выражение $\frac{x^3}{\gamma^3} - 1$. Рассмотрим отдельно рациональное кубическое число $\frac{x^3}{\gamma^3}$, которое может быть больше единицы (десятичным числом, бесконечной периодической или непериодической десятичной дробью), или натуральным числом (в данном случае - кубическим). Рассмотрим только вариант, когда дробь является натуральным числом т.е. x делится без остатка на γ (обозначим его, через s^3). Тогда при вычитании из этого натурального числа s^3 единицы получим натуральное число, но не кубическое

s^3-1. Почему? Ближайшее предыдущее кубическое число к натуральному числу s^3-1 такое $(s-1)^3$. Тогда

$$s^3-1 > (s-1)^3. \tag{10}$$

Извлечём из обеих частей неравенства (10) $\sqrt[3]{\ }$ получим $\sqrt[3]{s^3-1} > \sqrt[3]{(s-1)^3}$. Окончательно

$$\sqrt[3]{s^3-1} > s-1. \tag{10a}$$

Так как $\sqrt[3]{s^3} = s > \sqrt[3]{s^3-1}$, то учётом (10a) получим $s > \sqrt[3]{s^3-1} > s-1$. Следовательно, $\sqrt[3]{s^3-1}$ не является натуральным числом. Произведение $\sqrt[3]{\gamma^3} \cdot \sqrt[3]{s^3-1}$ не натуральное число. Поэтому $\varphi = \sqrt[3]{f} = \sqrt[3]{y^3}$ не натуральное число, так как в (9) выполняется равенство, в противном случае равенство (9) не выполняется. Так как $\varphi^3 = f$, $f = y^3$, то $\varphi^3 = y^3$. Извлекая, из обеих частей $\sqrt[3]{\ }$ следует что $\varphi = y$ – не натуральное число. Следовательно, y – не натуральное число. Равенство (7) эквивалентно равенству (9), поэтому можно применить выводы по равенству (9) к равенству (7). Следовательно, $\sqrt[3]{y^3-\gamma^3}$ не является натуральным числом. Поэтому $\varphi = \sqrt[3]{f} = \sqrt[3]{y^3}$ не является натуральным числом. Так как $\varphi^3 = f$, $f = y^3$ то $\varphi^3 = y^3$. Извлекая, из обеих частей равенства $\sqrt[3]{\ }$ следует что $\varphi = y$ – не натуральное число. Следовательно, y – не натуральное число.

2.3. Преобразуем уравнение (1) в уравнение $x^3 - y^3 = \gamma^3$ и, поменяв местами обе части равенства, получим

$$\gamma^3 = x^3 - y^3. \tag{11}$$

Пусть x, y выражены натуральными числами. Возведя каждое из них в куб и взяв их разность, получим натуральное число g. Обозначим через $g = \gamma^3$. Извлечём $\sqrt[3]{\ }$ из g получим $\lambda = \sqrt[3]{g}$. Докажем что g не натуральное число. Извлечем из обеих частей равенства (11) кубический корень

$$\sqrt[3]{\gamma^3} = \sqrt[3]{x^3 - y^3}. \tag{12}$$

Преобразуем (11) к виду

$$\gamma^3 = y^3 \cdot \left(\frac{x^3}{y^3} - 1 \right). \tag{13}$$

Извлечем из обеих частей равенства (13) кубический корень, тогда

$$\sqrt[3]{\gamma^3} = \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3} - 1}. \tag{14}$$

Рассмотрим в (14) отдельно сомножители в правой части. Так, первый сомножитель $\sqrt[3]{y^3}$, по условию y является натуральным числом, то y^3 также натуральное число и к тому же кубическое, следовательно $\sqrt[3]{y^3} = y$. Второй сомножитель $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^3} - 1}$ является ли натуральным числом? Возьмём подкоренное выражение $\frac{x^3}{y^3} - 1$. Рассмотрим отдельно рациональное кубическое число $\frac{x^3}{y^3}$, которое может быть больше единицы (десятичным числом, бесконечной периодической или непериодической десятичной дробью) , или натуральным числом (в данном случае - кубическим). Рассмотрим только вариант, когда дробь является натуральным числом т.е. x делится без остатка на y ((обозначим его, через t^3). Тогда при вычитании из этого натурального числа t^3 единицы получим натуральное число, но не кубическое $t^3 - 1$. Почему? Ближайшее предыдущее кубическое число к натуральному числу $t^3 - 1$ такое $(t-1)^3$. Тогда

$$t^3 - 1 > (t-1)^3. \tag{15}$$

Извлечём из обеих частей неравенства (15) $\sqrt[3]{\ }$ получим $\sqrt[3]{t^3 - 1} > \sqrt[3]{(t-1)^3}$. Окончательно

$$\sqrt[3]{t^3 - 1} > t - 1. \tag{15a}$$

Так как $\sqrt[3]{t^3} = t > \sqrt[3]{t^3 - 1}$, то с учётом (15а) получим $t > \sqrt[3]{t^3 - 1} > t - 1$. Следовательно, $\sqrt[3]{t^3 - 1}$ не является натуральным числом. Произведение $\sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{t^3 - 1}$ не натуральное число. Поэтому $\lambda = \sqrt[3]{g} = \sqrt[3]{\gamma^3}$ не натуральное число, так как в (14) выполняется равенство, в противном случае равенство (14) не выполняется. Так как $\lambda^3 = g$, $g = \gamma^3$, то $\lambda^3 = \gamma^3$. Извлекая, из обеих частей $\sqrt[3]{\ }$ следует что $\lambda = \gamma$ – не натуральное число. Следовательно, γ – не натуральное число. Равенство (12) эквивалентно равенству (14) поэтому можно применить выводы по равенству (14) к равенству (12). Следовательно, $\sqrt[3]{x^3 - y^3}$ не является натуральным числом. Поэтому

$\lambda=\sqrt[3]{g}=\sqrt[3]{\gamma^3}$ не является натуральным числом. Так как $\varphi^3=f$, $f=y^3$ то $\lambda^3=\gamma^3$. Извлекая, из обеих частей равенства $\sqrt[3]{\ }$ следует что $\lambda=\gamma$ – не натуральное число. Следовательно, γ – не натуральное число.

2.4. Рассмотрим уравнение (1). Пусть

$$x=\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \tag{16}$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}. \tag{17}$$

Найдем γ. Тогда

$$x^3-y^3=\gamma^3. \tag{18}$$

Подставив в левую часть равенства (18) значения x и y получим $\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{21}}{2}\right)^3=16$. Таким образом $\gamma^3=16$. Извлекая из обеих частей $\sqrt[3]{\ }$, получим

$$\gamma=2\cdot\sqrt[3]{2}. \tag{19}$$

Следовательно, x,y,γ не натуральные (иррациональные) числа.

2.5. Так как уравнения (1), (6) и (11) эквивалентны друг другу, в которых последовательно выбираются для правых частей этих уравнений натуральные числа: $(y,\gamma),(x,\gamma),(x,y)$ такие, что остаток от деления первого на второе был бы равен нулю, исследуется их куб суммы, куб разности, и доказывается, что правые части этих уравнений не являются натуральным числами. Поскольку в уравнениях выполняется равенство, делается вывод, что левые части этих уравнений x,y,γ не могут быть натуральными числами, этот факт и доказывает теорему Ферма для $n=3$.

3. Кубический треугольник

Рассмотрим три эквивалентных кубических уравнений:

$$x^3=y^3+\gamma^3, \tag{20}$$

$$y^3=x^3-\gamma^3, \tag{21}$$

$$\gamma^3=x^3-y^3. \tag{22}$$

Ставим в соответствие уравнениям (20), (21), (22) кубические треугольники. Из приведенных уравнений видно, что наибольшая сторона обозначена x. Две другие стороны y,γ. Геометрические эквиваленты сторон в кубическом треугольнике, можно интерпретировать ребром другой геометрической фигуры – куба. Например, объём куба с ребром y будет равен $-y^3$, с ребром γ - γ^3. Сложив эти два объёма куба, получим куб, объёмом $-\ y^3+\gamma^3$ сторона которого $\sqrt[3]{y^3+\gamma^3}$ не является натуральным числом, как показано выше. Если $y = \gamma$, тогда сложив объём куба с ребром y и объём куба с ребром γ получим объём удвоенного куба с ребром $\sqrt[3]{y^3+y^3} = y\cdot\sqrt[3]{2}$. Используя результаты численного примера 2.4 можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. В Кубическом треугольнике (не прямоугольном) куб наибольшей стороны равен сумме кубов двух других его сторон, т.е.

$$x^3 = y^3 + \gamma^3. \tag{23}$$

Доказательство. Подставив значения сторон треугольника(16), (17), (19) в уравнение (23) получим

$$\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^3 = \left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)^3 + (2\cdot\sqrt{2})^3.$$

Проведя вычисления, получим тождество (24)

$$\frac{1^3+3\cdot 1^2\cdot\sqrt{21}+3\cdot 1\cdot 21+21\cdot\sqrt{21}}{8} = \frac{-1^3+3\cdot(-1)^2\cdot\sqrt{21}-3\cdot 1\cdot 21+21\cdot\sqrt{21}}{8}+16$$

$$\frac{1+3\cdot\sqrt{21}+63+21\cdot\sqrt{21}}{8} = \frac{-1+3\cdot\sqrt{21}-63+21\cdot\sqrt{21}}{8}+16 \tag{24}$$

$$\frac{24\cdot\sqrt{21}+64}{8} \equiv \frac{24\cdot\sqrt{21}+64}{8}$$

и теорема доказана.

4. Анализ результатов

Дальнейшее направление исследований состоит в том, что с помощью кубического (не прямоугольного) треугольника можно точно определить ребро удвоенного, утроенного куба и т.д., перейти к геометрическому способу вычислений, создать кубическое исчисление. За единицу измерения выбрать куб, все вычисления (деление, умножение, возведения в степень, извлечения кубического корня, сложение и вычитание кубов) проводить без алгебры для решения прикладных задач в различных областях науки и техники, где обычные методы неприемлемы [13 – 27]. На основе кубического исчисления создать геометрическую ЭВМ, а результаты вычислений получать с абсолютной точностью.

5. Заключение

Предложенную систему доказательств можно применить для любого натурального числа $n > 3$. Притягательность же фразы Ферма, которой он сопроводил формулировку своей теоремы, стала очень известной в истории математики: «Я нашёл этому поистине чудесное доказательство, но поля книги слишком узки для него», просто бесконечна и будет волновать исследователей и любителей математики ещё многие годы. В заключении была сформулирована и доказана теорема о соотношении сторон в кубическом треугольнике.

Список информационных источников

[1] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика ? М.: Просвещение,1967.
[2] Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.
[3] Виноградов И.М. Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.
[4] Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
[5] Башмакова И.Г. Диофант и диофантовые уравнения. М.:Наука,1972.
[6] Серпинский В.О. О решении уравнений в целых числах. М.: Физматлит, 1984.
[7] Клейн Ф.Элементарная математика с точки зрения высшей, пер. с нем., М. – Л., Гозтехиздат,1934.
[8] Радемахер Г.и Теплиц О.Числа и фигуры, пер. с нем., М.: «Наука», 1966.
[9] Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Наука, 1966 .
[10] Берман Г.Н. Число и наука о нём. М.: Физматгиз, 1960.
[11] Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. М. – Л., Гозтехиздат,1952.
[12] Гельфонд А.О. Трасцендентные и алгебраические числа. М.: Физматгиз, 1952.
[13] Остроух А.В. Ввод и обработка цифровой информации: учебник для нач. проф. образования / А.В. Остроух. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 288 с. – ISBN 978-5-7695-9457-1.
[14] Остроух А.В. Основы информационных технологий: учебник для сред. проф. образования / А.В. Остроух. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 208 с. – ISBN 978-5-4468-0588-4.
[15] Остроух А.В. Автоматизация управления автотранспортными предприятиями. Новый подход на основе интеллектуальных мультиагентных систем / А.В. Остроух, А.В. Воробьева, Н.Е. Суркова. – Saarbrucken, Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 117 p. – ISBN 978-3-659-47576-4.
[16] Остроух А.В. Основы построения систем искусственного интеллекта для промышленных и строительных предприятий: монография / А.В. Остроух. – М.: ООО «Техполиграфцентр», 2008. – 280 с. – ISBN 978-5-94385-033-2.
[17] Остроух А.В. Интеллектуальные системы в науке и производстве / А.В. Остроух, А.Б. Николаев. – Saarbrucken, Germany: Palmarium Academic Publishing, 2012. – 312 p. – ISBN 978-3-659-98006-0.
[18] Остроух А.В. Системы искусственного интеллекта в промышленности, робототехнике и транспортном комплексе: монография / А.В. Остроух – Красноярск: Научно-инновационный центр, 2013. – 326 с. – ISBN 978-5-906314-10-9.

[19] Васюгова С.А. Исследование перспектив и проблем интеграции человека с компьютером: искусственный интеллект, робототехника, технологическая сингулярность и виртуальная реальность / С.А. Васюгова, А.В. Остроух, М.Н. Краснянский, А. Самаратунга // Перспективы науки. – Тамбов: «ТМБПринт», 2011. – № 4(19). – С. 109-112.
[20] Белоусова А.И. Подход к формированию многоуровневой модели мультиагентной системы с использованием миваров / А.И. Белоусова, О.О. Варламов, М.Н. Краснянский, А.В. Остроух // Перспективы науки. – Тамбов: «ТМБПринт», 2011. – № 5(20). – С. 57-61.
[21] Варламов О.О. Анализ возможностей миварного подхода для систем искусственного интеллекта и современной робототехники / О.О. Варламов, А.В. Остроух, М.Н. Краснянский, Т.Л. Давыдова // Вестник ТГТУ. – 2011. – Т.17. – № 3. – С.687-694.
[22] Омар М., Омар Ф., Исмоилов М.И., Остроух А.В. Применение систем распознавания образов в различных предметных областях // Автоматизация и управление в технических системах. – 2014. – №4 (12). – С. 32-47. DOI: 10.12731/2306-1561-2014-4-4.
[23] Омар М., Омар Ф., Исмоилов М.И., Остроух А.В. Анализ современного состояния развития интеллектуальных роботов // Автоматизация и управление в технических системах. – 2014. – №4 (12). – С. 48-54. DOI: 10.12731/2306-1561-2014-4-5.
[24] Ле К.Х., Суркова Н.Е., Остроух А.В. Генетические алгоритмы в задачах рациональной организации информационно-вычислительных процессов сетей // Автоматизация и управление в технических системах. – 2014. – №4 (12). – С. 82-99. DOI: 10.12731/2306-1561-2014-4-9.
[25] A. Ostroukh, V. Nikonov, I. Ivanova, T. Morozova, V. Strakhov. Distributed System of Real Time Head Gesture Recognition in Development of Contactless Interfaces // Middle East Journal of Scientific Research. 2014. Vol. 20 (12). pp. 2177-2183. DOI: 10.5829/idosi.mejsr.2014.20.12.21105.
[26] A. Ostroukh, V. Nikonov, I. Ivanova, T. Morozova, K. Sumkin, D. Akimov. Development of Contactless Integrated Interface of Complex Production Lines // Journal of Artificial Intelligence (JAI). 2014. Vol. 7, No 1. pp. 1-12. DOI: 10.3923/jai.2014.1.12.
[27] Morozova T., Sumkin K., Akimov D., Ostroukh A. Contactless integrated interface of production lines // International Journal of Advanced Studies (iJAS). 2014. Vol. 4, Issue 1, pp. 32-38. DOI: 10.12731/2227-930X-2014-1-6.