

ISSN 2306-1561

**Automation and Control in Technical Systems (ACTS)**

2015, No 2, pp. 181-190.

DOI: 10.12731/2306-1561-2015-2-16

---



## Description of Matrix Composite Structures

### **Andrey Vladimirovich Ilukhin**

Russian Federation, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department of «Automation Industrial Process».

State Technical University – MADI, 125319, Russian Federation, Moscow, Leningradsky prospekt, 64. Tel.: +7 (499) 151-64-12. <http://www.madi.ru>. [aviluhin@mail.ru](mailto:aviluhin@mail.ru)

### **Vadim Israilevich Marsov**

Russian Federation, Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of «Automation Industrial Process».

State Technical University – MADI, 125319, Russian Federation, Moscow, Leningradsky prospekt, 64. Tel.: +7 (499) 151-64-12. <http://www.madi.ru>. [evmarsova@rambler.ru](mailto:evmarsova@rambler.ru)

### **Mikhail Alexandrovich Astafiev**

Russian Federation, Postgraduate Student, Department of «Automation Industrial Process».

State Technical University – MADI, 125319, Russian Federation, Moscow, Leningradsky prospekt, 64. Tel.: +7 (499) 151-64-12. <http://www.madi.ru>. [alex123456789.a@yandex.ru](mailto:alex123456789.a@yandex.ru)

### **Victor Sergeevich Seleznev**

Russian Federation, Postgraduate Student, Department of «Automation Industrial Process».

State Technical University – MADI, 125319, Russian Federation, Moscow, Leningradsky prospekt, 64. Tel.: +7 (499) 151-64-12. <http://www.madi.ru>. [unit.ussr@gmail.com](mailto:unit.ussr@gmail.com)

**Abstract.** The article discusses the problem of determining the dependence "Properties" from the composite volume concentration of filler in the state "Critical density", which corresponds to a dramatic, increase in the threshold properties of the composite, analytical description of which is possible only with the help of the theory proposed above "trickle down» (percolation), which allows to determine the average number of nodes in the cluster, cluster size distribution, the appearance of an infinite cluster and share entering into it open nodes.

**Keywords:** composite, volume concentration, critical concentration, theory of "trickle down", cluster, conductivity.

---

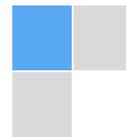
ISSN 2306-1561

**Автоматизация и управление в технических системах (АУТС)**

2015. – № 2. – С. 181-190.

DOI: 10.12731/2306-1561-2015-2-16

---



УДК 681.3

## **Описание матричных структур композитных материалов**

### **Илюхин Андрей Владимирович**

Российская Федерация, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Автоматизация производственных процессов».

ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», 125319, Российская Федерация, г. Москва, Ленинградский проспект, д.64, Тел.: +7 (499) 151-64-12, <http://www.madi.ru>. [aviluhin@mail.ru](mailto:aviluhin@mail.ru)

### **Марсов Вадим Израилевич**

Российская Федерация, доктор технических наук, профессор кафедры «Автоматизация производственных процессов».

ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», 125319, Российская Федерация, г. Москва, Ленинградский проспект, д.64, Тел.: +7 (499) 151-64-12, <http://www.madi.ru>. [evmarsova@rambler.ru](mailto:evmarsova@rambler.ru)

### **Астафьев Михаил Александрович**

Российская Федерация, аспирант кафедры «Автоматизация производственных процессов».

ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», 125319, Российская Федерация, г. Москва, Ленинградский проспект, д.64, Тел.: +7 (499) 151-64-12, <http://www.madi.ru>. [alex123456789.a@yandex.ru](mailto:alex123456789.a@yandex.ru)

### **Селезнёв Виктор Сергеевич**

Российская Федерация, аспирант кафедры «Автоматизация производственных процессов».

ФГБОУ ВПО «Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ)», 125319, Российская Федерация, г. Москва, Ленинградский проспект, д.64, Тел.: +7 (499) 151-64-12, <http://www.madi.ru>. [unit.ussr@gmail.com](mailto:unit.ussr@gmail.com)

**Аннотация.** В статье рассматривается задача определения зависимости «свойства» композита от объёмной концентрации заполнителя в состоянии «критической концентрации», которому соответствует резкое, пороговое возрастание свойства композита, аналитическое описание которого возможно только с помощью предложенного выше аппарата теории «просачивания» (percolation), позволяющего

определять среднее число узлов в кластере, распределение кластеров по размерам, появление бесконечного кластера и доля входящих в него открытых узлов.

**Ключевые слова:** композит, объёмная концентрация, критическая концентрация, теория «просачивания», кластер, проводимость.

## 1. Введение

Большой вклад в изучение свойств гетерогенных материалов был сделан разработкой теории «эффективной среды» [1, 3, 4, 15], суть которой состоит в том, что каждый отдельный элемент гетерогенной системы считается помещённым в однородную «эффективную среду» с удельными свойствами, совпадающими с их истинными величинами для композиции в целом. В этом случае в результате расчетов получают «эффективные» значения различных характеристик материала, исходя из значений этих характеристик для отдельных компонентов. Если, например, речь идёт о прочности композита, то зная прочность скрепляющей фазы и заполнителя можно рассчитать некую среднюю (эффективную) прочность всего материала в зависимости от концентрации заполнителя.

## 2. Эффективные свойства композитного материала

В рамках теории «эффективной среды» было получено ряд соотношений, связывающих концентрацию заполнителя и свойство всего композита в целом, например, формула В.И. Оделевского:

$$C_{эф} = C_m \left( 1 + \frac{V_{кон}}{\frac{1 - V_{кон}}{3} - \frac{C_m}{C_z - C_m}} \right), \quad (1)$$

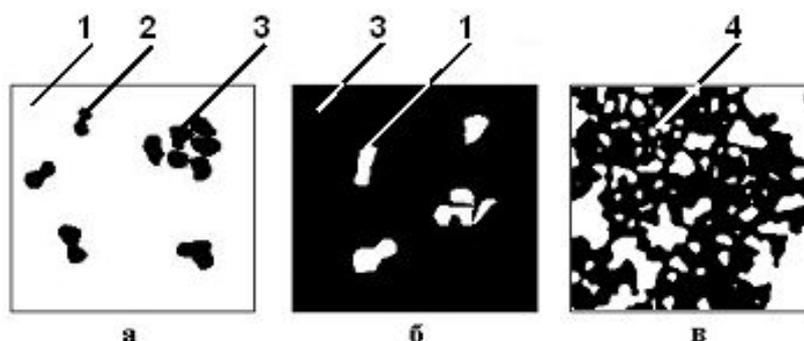
где  $C_m$  – свойство матрицы (скрепляющая фаза);  $C_z$  – свойство заполнителя;  $V_{кон}$  – объёмная концентрация заполнителя в материале.

Выражение (1) описывает гетерогенные материалы матричной структуры, позволяя рассчитать эффективные свойства композита в зависимости от объёмной концентрации заполнителя, его свойств и свойств скрепляющей фазы. Теория «эффективной среды» позволяет получить приемлемые результаты в случае небольшой концентрации заполнителя или относительной близости свойств заполнителя и скрепляющей фазы. Но когда объёмная концентрация заполнителя близка к оптимальной, результаты расчётов оказываются не соответствующими реальному описанию свойств материала [5 ... 14].

## 3. Общий вид структуры композитного материала

Рассмотрим общий вид структуры композитного материала с различной объёмной концентрацией заполнителя (рисунок 1). Предположим, что увеличение объёмной концентрации заполнителя приводит к улучшению какого-либо «свойства»

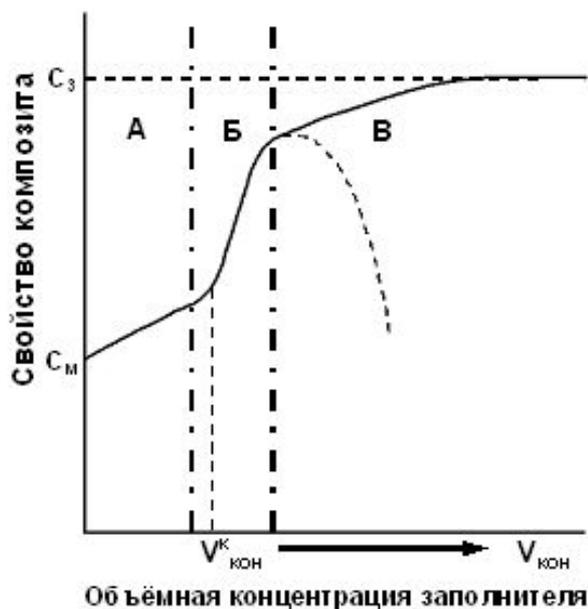
композитного материала. Так, по мере роста количества заполнителя, обладающего прочностью выше, чем прочность самого цементного камня, прочность бетона возрастает.



**Рисунок 1 – Схематическое изображение структуры композитного материала:**

**1 – связующая матрица; 2 – заполнитель; 3 – кластер; 4 – бесконечный кластер**

На рисунке 2 показана качественная зависимость «свойства» композита от объёмной концентрации заполнителя.



**Рисунок 2 – Зависимость «свойства» композита от объёмной концентрации заполнителя**

При малых объёмных концентрациях заполнителя его частицы образуют изолированные островки или группы островков (кластеры) в связующей матрице (рисунок 1а). Свойство такого материала близко к свойству связующей матрицы и постепенно возрастает с ростом концентрации заполнителя (зона «А» на рисунке 2).

При относительной объёмной концентрации заполнителя, близкой к единице, островки и кластеры уже образуют связующую матрицу (рисунок 1б). Свойство такого

композита будет близко к свойству чистого заполнителя, стабилизируясь у этого значения (сплошная линия в зоне «В» на рисунке 2). Необходимо отметить, что существование такой структуры возможно либо теоретически, поскольку для придания композиту минимальной прочности необходимо, чтобы связующая матрица скрепляла отдельные частицы заполнителя, либо тогда, когда фазы заполнителя и связующей матрицы идентичны с точки зрения скрепления компонентов в единое целое. Но в последнем случае получается композит со структурой типа статистической смеси, для описания свойств которой необходимо использовать специфический математический аппарат. В реальности, когда объёмная концентрация заполнителя становится такой, что материал связующей матрицы уже не в состоянии скреплять частицы заполнителя, говорить о свойствах композита не имеет смысла, поскольку сам композит не может существовать. Вид пунктирной линия в зоне «В» на рисунке 2 показывает, что в этом случае происходит резкое падение прочности из-за разрушения композита даже без приложения внешней силы.

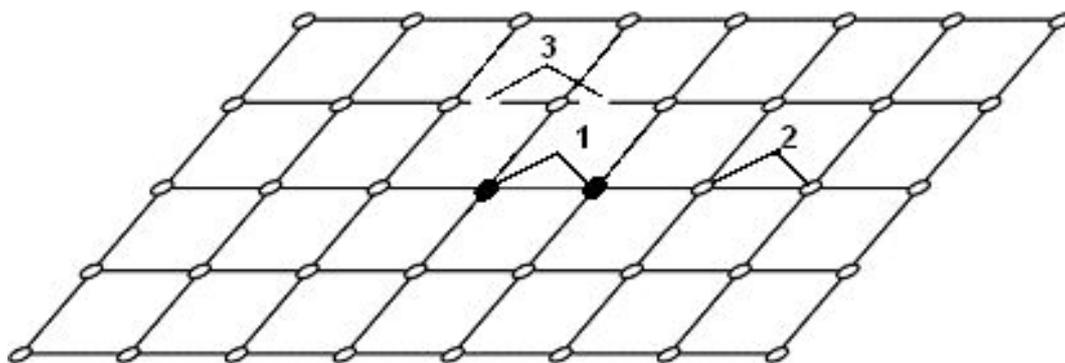
В промежуточном варианте существования объёмных концентраций заполнителя при некоторой концентрации заполнителя начинает образовываться и развиваться бесконечный кластер (рисунок 1в). Этой концентрации соответствует резкое, пороговое возрастание свойства композита (зона «Б» на рисунке 2), а сама такая концентрация заполнителя называется «критической концентрацией»  $V_{\text{ккон}}$ . Феноменологически это обстоятельство объясняется тем, что при определённой концентрации заполнитель образует опорный скелет композита.

Теория «эффективной среды» достаточно хорошо объясняет ход кривой изменения свойства композитов в зонах «А» и «В», но не позволяет получить пороговый характер изменения свойств в зоне «Б» (рисунок 2).

#### **4. Исследование свойств композитного материала**

Изменение свойств композитного материала в зоне «Б», объясняет теория «просачивания» (percolation), названная так в связи с тем, что первая постановка задачи этой теории была связана с исследованием распространения жидкости или газа в случайной среде С.Р. Бродбентом и Д.М. Хаммерсли. Эта теория является разделом теории вероятностей, в котором изучаются свойства связанных компонент случайных графов. Термин «просачивание» связан с интерпретацией рёбер случайного графа, как каналов, по которым распространяется жидкость, вытекающая из фиксированной вершины-источника. В настоящее время наиболее важной областью применения теории просачивания является теория неупорядоченных систем. Несмотря на то, что сами постановки задач теории просачивания чрезвычайно просты, строгие ее доказательства были получены лишь для немногих утверждений [1].

Представляя среду в виде дискретной решетки (рисунок 3), в рамках теории просачивания, формулируются два простейших типа задач.



**Рисунок 3 – К постановке задач теории просачивания:**

**1 – открытые узлы; 2 – закрытые узлы; 3 – закрытые связи**

Если выборочно, случайным образом, открывать узлы решетки, считая долю открытых узлов  $V_{\text{кон}}$  основным независимым параметром и полагать, что два открытых узла, принадлежат одному кластеру, то определение среднего числа узлов в кластере, распределение кластеров по размерам, появление бесконечного кластера и доля входящих в него открытых узлов, будет составлять содержание задачи узлов. Можно также выборочно открывать связи между соседними узлами и считать, что одному кластеру принадлежат узлы, соединенные цепочками открытых связей. Тогда те же самые вопросы о среднем числе узлов в кластере и т.д., будут составлять содержание задачи связей.

Когда все узлы или все связи закрыты, решетка является моделью среды, через которую невозможно просачивание жидкости. Когда связи все открыты и по ним через открытые узлы может протекать жидкость, то решетка моделирует среду, через которую жидкость просачивается свободно. При каком-то критическом значении  $V_{\text{кон}}=V_{\text{ккон}}$  произойдет перколяционный переход, резко меняющий свойство среды от полностью не просачиваемой до просачиваемой. Теория просачивания важна для описания среды именно в окрестности критических объёмных концентраций. Вдали от этих концентраций достаточно использования метода аппроксимации эффективной среды.

Рассмотрим кубическую решетку размерности  $d$ , у которой все узлы соединены с ближайшими соседями связями с электрическими проводимостями  $\sigma_{KL}$ , независимыми друг от друга.

На рисунке 4 изображена квадратная решетка  $d=2$ .

Необходимо по известной дисперсии значений  $\sigma_{KL}$  вычислить среднее значение  $\sigma_m$ , определяющее удельную проводимость сетки  $\sigma = \sigma_m a^{2-d}$ .

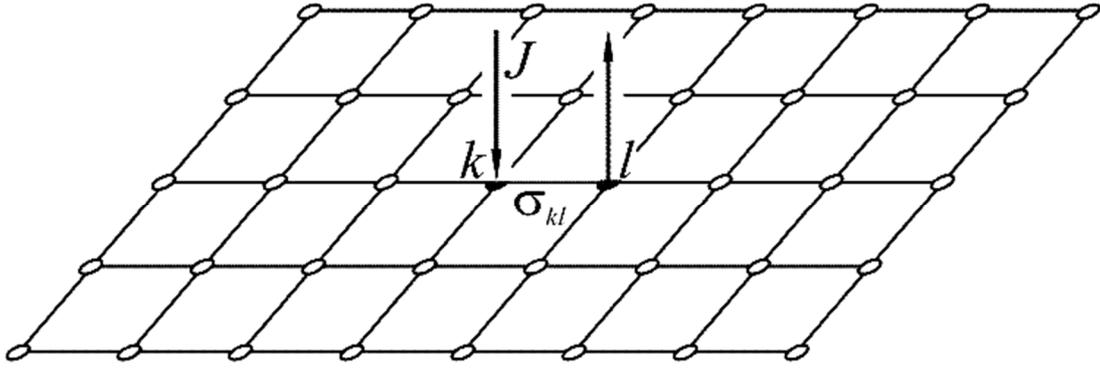


Рисунок 4 – Аппроксимация эффективной среды

Сначала предположим, что все  $\sigma_{KL}$  одинаковы,  $\sigma_{kl} = \sigma_m$ . Подведем два электрода к двум соседним узлам решетки  $k$  и  $l$  и пропустим через них ток  $J$ . Чтобы вычислить ток через связь  $\sigma_{KL}$ , отнесем электрод  $l$  в бесконечность. Тогда ток  $J$ , втекающий через электрод  $k$ , растечется равномерно по  $z$  связям, подходящим к узлу  $k$ , так что через каждую связь пойдет ток  $J/k$ . На квадратной решетке (рисунок 4)  $z=4$ , а на трехмерной кубической решетке  $z=6$ . Если удалить в бесконечность электрод  $k$ , а ток  $J$  вывести через возвращенный на место электрод  $l$ , то к узлу  $l$  этот ток будет стекаться равномерно через все связи. Суперпозиция двух рассмотренных конфигураций даст следующее распределение токов: токи  $J$  и  $-J$  через электроды  $k$  и  $l$ , а ток  $J=0$  на бесконечности. При этом ток через связь  $\sigma_{KL}$ :

$$i_{kl} = 2J/z. \quad (2)$$

Из закона Ома следует, что

$$\frac{2J}{z\sigma_m} = \frac{J}{\sigma_m + \sigma_{shunt}}, \quad (3)$$

В знаменателе правой части равенства (2) находится сумма проводимости самой  $k_l$ -связи  $\sigma_{kl} = \sigma_m$  и шунтирующей ее всей остальной сетки  $\sigma_{shunt}$ , которую можно определить из соотношения:

$$\sigma_{shunt} = \sigma_m \left( \frac{z}{2} - 1 \right). \quad (4)$$

Соотношения (1 ... 4) определяют распределение тока между непосредственной связью, соединяющей узлы  $k$  и  $l$ , и ее окружением. Удельная же проводимость определяется величиной  $\sigma_m$  через соотношение (1). Если принять, что все  $\sigma_{kl}$  различны, то из закона Ома для любой пары соседних узлов  $k, l$ , будет:

$$\frac{i_{kl}}{\sigma_{kl}} = \frac{J - i_{kl}}{\sigma_{shunt}}, \quad i_{kl} = J \frac{\sigma_{kl}}{\sigma_{kl} + \sigma_{shunt}}. \quad (5)$$

Это выражение нужно усреднить по всем возможным парам. Такая схема усреднения называется аппроксимацией эффективной среды, в которой делаются два предположения:

- в системе со случайными  $\sigma_{kl}$  по-прежнему справедливо соотношение (3)
- для величины  $\sigma_{shunt}$ , поскольку шунтирование осуществляется большим числом связей, по которым происходит усреднение. При этом входящая в (3) величина  $\sigma_m$  по-прежнему определяет удельную проводимость в соответствии с соотношением (1);
- если подводить электроды последовательно к большому количеству пар узлов, то среднее значение тока  $i_{kl}$  определяется выведенным для однородного случая выражением (2):

$$i_{kl} = 2J / z. \quad (6)$$

Воспользовавшись при усреднении выражения (5) этими двумя предположениями, получим окончательное выражение

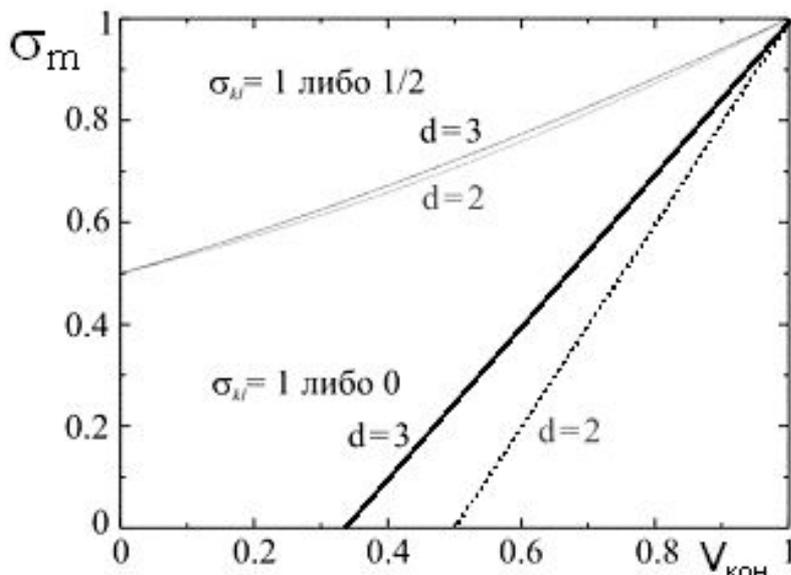
$$\frac{2}{z} = \left\langle \frac{\sigma_{kl}}{\sigma_{kl} + \sigma_m \left( \frac{z}{2} - 1 \right)} \right\rangle. \quad (7)$$

Для решения конкретной задачи необходимо подставить в соотношение (7) функцию распределения для величины  $\sigma_{kl}$ . Если  $\sigma_{kl}=1$  с вероятностью  $V_{кон}$  и  $\sigma_{kl}=0$  с вероятностью  $1-V_{кон}$ , то ответ получается в виде прямой линии с наклоном, зависящим от числа  $z$ :

$$\frac{2}{z} = V_{кон} \frac{1}{1 + \sigma_m \left( \frac{z}{2} - 1 \right)}, \quad \sigma_m = \frac{V_{кон} - 2/z}{1 - 2/z}. \quad (8)$$

На рисунке 5 приведены расчётные зависимости для квадратной ( $d=2, z=4$ ) и кубической ( $d=3, z=6$ ) решеток. Обращение функции  $\sigma_m(V_{кон})$  в ноль означает наступление перколяционного перехода, а критическое значение  $V_{кон}$  называется перколяционным порогом или критической концентрацией. Но именно в окрестности этого перехода аппроксимация эффективной среды не возможна, потому что не работают оба предположения, лежащие в основе аппроксимации.

На рисунке 5 приведены так же графики функции  $\sigma_m(V_{кон})$  для случая, когда  $\sigma_{kl}$  с вероятностью  $1-V_{кон}$  меняет свое значение с 1 на  $1/2$ . При таких значениях  $\sigma_{kl}$  перколяционного перехода нет, и аппроксимация эффективной среды применима во всем интервале изменения  $V_{кон}$ .



**Рисунок 5 – Зависимость удельной проводимости решётки от объёмной концентрации открытых узлов и связей**

Как видно, по структуре выражение (8) близко к выражению (1), а также в значительной степени соответствует результатам, полученным в [2].

## 5. Заключение

Можно констатировать, что при некоторой концентрации заполнителя начинает образовываться и развиваться бесконечный кластер. Этой «критической концентрации» соответствует резкое, пороговое возрастание свойства композита, аналитическое описание которого возможно только с помощью предложенного выше аппарата теории «просачивания» (percolation). Аналитические результаты исследований изменения свойства композитов в зоне «критической концентрации» в значительной степени соответствует результатам, полученным в других исследованиях опытным путем [2].

## Список информационных источников

- [1] Борбышев А.Н., Козомазов В.Н., Бабин Л.О., Соломатов В.И. Синергетика композитных материалов. – Липецк: НПО ОРИУС, 1994. – 296 с.
- [2] Духин С.С., Шилов В.М. Диэлектрические явления и двойной слой в дисперсных структурах и полиэлектrolитах. – Киев: Наукова думка, 1972. – 207 с.
- [3] Илюхин А.В., Колбасин А.М., Марсов В.И. Формирование оптимальной структуры асфальтобетонной смеси с пуассоновским распределением частиц // Строительные материалы. – 2012. – Вып. 9. – С.47-50.
- [4] Марсов В.И., Колбасин А.М., Сарычев И.Ю., Курилин А.В. МОДЕЛЬ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ СТРОИТЕЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА // Автоматизация и управление в технических системах. – 2013. – № 3(5). – С. 7-11.
- [5] Колбасин А.М., Марсов В.И., Абдулханова М.Ю., Курилин А.В. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОВОЙ ОБРАБОТКИ

- КОМПОНЕНТОВ БЕТОННОЙ СМЕСИ // Автоматизация и управление в технических системах. – 2014. – № 2. – С. 123-131. DOI: 10.12731/2306-1561-2014-2-12.
- [6] Марсов В.И., Колбасин А.М., Цепкин П.А., Гришин А.А. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕЗОНАНСНОЙ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ СИСТЕМЫ СО СРЕДОЙ // Автоматизация и управление в технических системах. – 2013. – № 2(4). – С. 106-110.
- [7] Марсов В.И., Колбасин А.М., Цепкин П.А., Гришин А.А. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ РАССОГЛАСОВАНИЯ РЕЗОНАНСНОГО ВИБРАТОРА ПРИ НАГРУЖЕНИИ // Автоматизация и управление в технических системах. – 2013. – № 2(4). – С. 110-115.
- [8] Остроух А.В., Вэй П., Мью Л.А., Суркова Н.Е. Имитационное моделирование неоднородности строительной смеси в горизонтальном барабанном смесителе // В мире научных открытий. – 2014. – №12.2 (60). – С. 766-778.
- [9] Остроух А.В., Вэй П.А. Оптимизация параметров процесса смешивания сухих строительных смесей в горизонтальном барабанном смесителе непрерывного действия методом имитационного моделирования // Автоматизация и управление в технических системах. – 2014. – №2 (10). – С. 21-28. DOI: 10.12731/2306-1561-2014-2-3.
- [10] Кабир М.Р., Исмоилов М.И., Остроух А.В. Системный подход к проектированию АСУ ТП процессом приготовления бетонной смеси // Автоматизация и управление в технических системах. – 2014. – № 3 (11). – С. 191-200. DOI: 10.12731/2306-1561-2014-3-18.
- [11] Остроух А.В., Айсарина А.А. Разработка автоматизированной системы управления бетоносмесительной установкой с двухвальным смесителем // Автоматизация и управление в технических системах. – 2015. – № 1. – С. 51-59. DOI: 10.12731/2306-1561-2015-1-7.
- [12] Malygin E.N., Karpushkin S.V., Krasnyanskiy M.N., Ostroukh A.V. Technical Equipment Configuration and Functioning Mode Optimizing for Chemical-engineering Systems of Multi-product Plants // American-Eurasian Journal of Agricultural & Environmental Sciences. 2015. Vol. 15. No. 3. pp. 447-453, DOI: 10.5829/idosi.aejaes.2015.15.3.12559.
- [13] Ostroukh A.V., Wai Ph.A. Optimization of parameters dry construction mixtures in the horizontal drum mixer // International Journal of Advanced Studies (iJAS). 2014. Vol. 4. No 2. pp. 38-44. DOI: 10.12731/2227-930X-2014-2-2.
- [14] Wai Ph.A., Ostroukh A.V. Development of simulation model mixed system in the AnyLogic software // International Journal of Advanced Studies (iJAS). 2014. Vol. 4. No 4. pp. 48-53. DOI: 10.12731/2227-930X-2014-4-2.
- [15] Ostroukh A.V., Ilukhin A.V., Kolbasin A.M., Dinh An Ninh. Control Algorithms Connected Dosing Multicomponent Ceramic Mixtures // Global Journal of Pure and Applied Mathematics (GJPAM). 2015. Vol. 11. No 3. pp. 1379-1386.