

ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА В СИСТЕМАХ ТРАНСПОРТА

Агуров И. Е. Атлас Е. Е.

ГОУ ВПО «Тулский государственный университет»

Приведен анализ типов возникающего динамического поведения в некоторых диссипативных системах. Получение рассмотренных моделей относится к задачам автомобильного транспорта, однако показано, что некоторые решения могут интерпретироваться процессы, происходящие при транспорте в медико-биологических системах. Это служит основанием для исследования инвариантов (паттернов) поведения в транспортных системах различной природы. Приведены системы аттракторов, возникающих в моделях, показано, что некоторые формы аттракторов могут возникать в математически отличающихся моделях.

Ключевые слова: математическое моделирование, диссипативная система, обыкновенные дифференциальные уравнения, аттракторы.

Введение

Разнообразие методов синергетики являются следствием двух противоположно направленных тенденций. С одной стороны, растет количество фундаментальных и прикладных исследований, затрагивающих все большее разнообразие изучаемых систем и порождающих значительное число новых парадигм, теорий и методов. С другой стороны, постоянно предъявляемые требования научного сообщества к объединению результатов заставляют исследователей находить универсальные формы описания разнородных на первый взгляд систем. Исследования нелинейной науки изначально были междисциплинарными, таковыми они остаются и по сей день.

Существующие методы математических описаний исследуемых систем можно свести к формулировкам систем обыкновенных дифференциальных уравнений, систем в частных производных, интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям. В зависимости от дополнительных условий они могут содержать и стохастические функции. Иногда модель системы можно построить только для вероятностных характеристик, как это бывает для различных систем массового обслуживания. Как правило, модели отличаются значительным разнообразием размерности, могут быть непрерывными и дискретными.

Среди относительно новых парадигм, которые изначально в синергетике отсутствовали, но появились позднее на основе «классических» результатов, следует упомянуть отдельно понятия «русл и джокеров», «жесткой турбулентности», «переключающейся перемежаемости» [1, 2].

При этом безусловными, неизменными традициями нелинейной науки остаются представления о самоорганизации, режимах с обострением, диссипативных структурах, динамическом хаосе. Методы теории бифуркаций, нелинейных колебаний, асимптотического анализа по-прежнему находятся в арсенале исследователей.

Постепенно формируется сфера представлений о природе динамического хаоса в диссипативных системах. Расширяется описание сценариев перехода к хаосу. Каскад бифуркаций на основе сценария *Фейгенбаума* и порядка *Шарковского* получил дальнейшее развитие в виде так называемого гомоклинического каскада, разработанного *Н.А. Магницким* (сценарий ФШМ) [3]. В рамках теории ФШМ определено заявлено о том, что единственным универсальным способом, который можно рассматривать как сценарий, является каскад бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума, субгармонический каскад в соответствие с порядком Шарковского и далее гомоклинический каскад. Перемежаемость при этом рассматривается лишь как артефакт численного эксперимента, существующий при наличии нескольких неустойчивых решений. Другим результатом теории ФШМ является вывод о нефрактальной структуре нерегулярных (сингулярных) аттракторов. Претерпел существенные коррекции и классический сценарий возникновения аттрактора в системе Лоренца.

Среди нерешенных вопросов в теории ФШМ остается отсутствие сколь-нибудь общей теории, соответствующей бифуркациям за пределами гомоклинического каскада.

В работах [4-8] выполнялись численные исследования различных диссипативных

систем, полученных при моделировании некоторых транспортных процессов. Среди предварительных результатов можно отметить следующие. Во-первых, существенно расширяется представление о геометрии нерегулярных решений. Можно утверждать, что найдены неизвестные до сих пор формы нелинейных колебаний, которые требуют детального исследования. Во-вторых, среди полученных решений достаточно много таких, которые вполне могут использоваться в качестве модельных систем для описания эффектов типа «жесткой турбулентности» без привлечения аппарата «русл и джокеров». В-третьих, обнаруживаются некоторые признаки «периодичности» получаемых решений (паттернов поведения) в одной и той же исследуемой системе. Это означает, что аттракторы образуют последовательности топологически разных, но связанных между собой решений, которые иногда составляют симметричные группы. В-четвертых, в различных по структуре правых частей системах могут получаться топологически одинаковые решения (например, типа аттрактора Лоренца, Ресслера или других более сложных).

Цель работы. Исследование только диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полутора степенями свободы и с нелинейностью не выше второй степени, разработанных для различных модельных ситуаций, касающихся в основном, транспортных процессов, с выделением некоторых общих результатов.

Результаты и их обсуждение. Модель 1 (логистическая система). Рассмотрим вариант модели логистической системы (ЛС), которая может быть описана следующими переменными: x – число автомобилей в текущий момент времени, участвующих в транспортном процессе; y – уровень текущих запасов на складах розничной торговли; z – уровень текущих запасов на складе оптовой торговли. Таким образом, формулируем модель ЛС в виде $\dot{x} = F(x, \mu)$

или

$$\dot{x} = F(x, t, \mu), \quad (1)$$

где $x \in M \subset \Re^m$, $\mu \in L \subset \Re^k$, $t \in I \subset \Re$, k и m – размерности соответственно параметрического и фазового пространств.

Представим правые части уравнений системы следующим образом.

$$1) \dot{x} = kz(Y - y). \quad (2)$$

Число автомобилей, участвующих в транспортном процессе, пропорционально запасам оптового склада и разнице ($Y - y$), представляющей собой объем вакантных мест для хранения запасов. Здесь Y – суммарная предельная вместимость складов розничной торговли.

$$2) \dot{y} = \sum_i y_i^+ + \sum_j y_j^-, \text{ где } \sum_i y_i^+ = ax(1 - y/Y), \\ \sum_j y_j^- = f(y). \quad (3)$$

Запасы на складах розничной торговли формулируются в виде балансового уравнения, в котором слагаемое $\sum_i y_i^+$

описывает скорость поступления материальных запасов, а слагаемое $\sum_j y_j^- = f(y)$ задает функцию (скорость) их расходования. Правая часть уравнения $\sum_i y_i^+ = ax(1 - y/Y)$ отражает факт

пропорциональности скорости поступления материальных запасов числу автомобилей. Параметр a при этом может иметь смысл грузоподъемности, «прибывающей» в единицу времени, а величина $(1 - y/Y)$, равная относительной незаполненности складских помещений, служит для отражения, например, коэффициента использования грузоподъемности и, в конечном итоге, для описания размера партии перевозимого груза. Функция расхода, в простейшем случае, может быть задана линейной в виде $f(y) = -by$, а в более сложном – в виде случайного процесса.

$$3) \dot{z} = \sum_i z_i^+ + \sum_j z_j^-, \text{ где } \sum_i z_i^+ = g(z); \\ \sum_j z_j^- = -dx(1 - y/Y). \quad (4)$$

Запасы на складе оптовой торговли формулируются в виде балансового уравнения, аналогичного (3), при этом слагаемое $\sum_i z_i^+ = g(z)$ характеризует внешнее «воздействие» на открытую ЛС – поток

материальных запасов от дистрибутора и/или производителя. Эта величина также может быть выражена в виде простейшей линейной зависимости $g(z)=c(1-z/Z)$ или в виде случайного процесса. Слагаемое $\sum_j z_j^-$

совпадает, с точностью до коэффициента, с величиной $\sum_i y_i^+$, что является логичным,

поскольку $d \neq a$ в общем случае, позволяющем учесть не только возвраты, потери и пр., но еще и поступление материальных запасов на розничные склады от иных поставщиков. Здесь Z – предельная вместимость складских помещений оптового склада.

Остановимся на смысле некоторых величин, используемых в формулах. Параметр b , имеющий размерность $[t]^{-1}$, обозначает интенсивность расходования запасов на складе розничной торговли (отнесенную, например, к одним суткам, если эта величина используется в качестве единицы измерения времени). Параметр c в этом случае будет обозначать суточную норму поступления запасов на склад оптовой торговли.

Таким образом, модель ЛС запишем окончательно в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 z - k_2 yz, \\ \dot{y} = k_3 x - k_4 y - k_5 xy, \\ \dot{z} = -k_6 x - k_7 z + k_8 xy + k_9. \end{cases} \quad (5)$$

Положительные коэффициенты системы (5) определяются по формулам: $k_1=kY$; $k_2=k$; $k_3=a$; $k_4=b$; $k_5=a/Y$; $k_6=d$; $k_7=c/Z$; $k_8=d/Y$; $k_9=c$. Очевидно, что девять коэффициентов k_1-k_9 выражаются через семь параметров модели: a , b , c , d , k , Y , Z . Это означает, что коэффициенты нельзя выбирать произвольно.

Модели рассматриваемого класса, относящиеся к диссипативным динамическим системам, выраженным в виде нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, позволяют на наш взгляд, учесть некоторые особенности транспортных систем:

1) сочетание детерминированных и стохастических факторов функционирования;

2) коллективный характер работы транспортной системы (большое число участников в виде совокупности транспортных средств; значительное количество происходящих событий – операций транспортного процесса);

3) неравновесное состояние открытой ЛС – постоянное присутствие потока материальных запасов.

Проиллюстрируем некоторые результаты численного моделирования системы (5).

Уравнения (5) совместно с начальными условиями и заданными значениями коэффициентов позволяют сформулировать задачу Коши.

Решение задачи выполнялось численно методом Рунге-Кутта 4-го порядка, с точностью $1 \cdot 10^{-6}$. Величина шага изменялась по алгоритму, обеспечивающему требуемую точность. Начальные условия выбирались таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$x_0 \in M_d \subset M,$$

где M_d – область диссипативности системы (5), определяемая из соотношения $x > -\frac{k_4 + k_7}{k_5}$,

вытекающего из условия диссипативности

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} < 0 \quad (6)$$

На рис. 1 приведены некоторые найденные в модели ЛС режимы, соответствующие аттракторам диссипативной системы. На графиках фазового портрета и проекций вертикальная ось соответствует переменной z . В первом столбце вправо вверх направлена ось y , а вправо вниз – ось x . Во втором столбце вправо направлена ось y , а в третьем – ось x . В таблице приведены пять вариантов решений, коэффициенты для которых представлены в табл. 1.

Как известно из теории хаотической динамики, в подобных системах могут наблюдаться состояния равновесия (устойчивые и неустойчивые), предельные циклы и нерегулярные колебания (аттракторы). С точки зрения практики все эти режимы работы ЛС могут представлять интерес. Так, устойчивые состояния равновесия, вычисленные в теоретической модели, построенной для конкретной ЛС, могут дать информацию о границах устойчивого поведения.

В модели (5) может быть от нуля до трех особых точек. Характер их устойчивости в зависимости от параметров в настоящей работе мы не рассматриваем. Вопросы, касающиеся стационарных состояний, более подробно изложены в работе [8].

Предельные циклы (периодические колебания) могут изучаться с точки зрения влияния амплитуд и периодов колебаний на затраты при изменении параметров модели. Хаотические колебания могут быть предметом исследований для выяснения наличия и доли детерминированных составляющих нерегулярного поведения в реальных ЛС. Конечно, невозможно ограничить моделирование ЛС только классом рассматриваемых в настоящей работе систем уравнений. Совершенно очевидно, что для более глубоких исследований требуется иметь дело со стохастическими дифференциальными уравнениями.

Модель 2 (логистическая система).

Более сложный и интересный вариант модели ЛС с точки зрения разнообразия решений может быть представлен в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = a[(X-x)+ky-mz](Z-z)-b(Y-y)(Z-z); \\ \dot{y} = c[(Y-y)+lx+nz]z-d(X-x)z; \\ \dot{z} = ex-fy+g. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь переменные имеют следующий смысл: x – автомобили, доставляющие груз; y – автомобили, развозящие груз; z – количество груза на складе. Параметры в уравнениях (7) обозначают: X – число автомобилей, участвующих в доставке груза; Y – число автомобилей, участвующих в развозе груза; Z – предельная (или наиболее вероятная) емкость склада; g – интенсивность восполнения груза другими видами транспорта.

Выражая систему (7) в явном виде относительно фазовых координат, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1x + k_2y + k_3z + k_4xz + k_5yz + k_6z^2 + k_7, \\ \dot{y} = k_8xz + k_9yz + k_{10}z^2 + k_{11}z, \\ \dot{z} = k_{12}x + k_{13}y + k_{14}. \end{cases} \quad (8)$$

При этом, если выбирать произвольно 14 параметров в системе (7), то из 14-ти коэффициентов в (8) независимыми будут только 12 из них. Таким образом, система (8) представляет собой более широкое множество моделей по сравнению с (7). Отметим, что в системе (8) имеется преобразование симметрии вида:

$$x \rightarrow A - \tilde{y} + \alpha \tilde{z}, \quad y \rightarrow \tilde{x} + \beta \tilde{z}, \quad z \rightarrow B - \tilde{z} \quad (9)$$

При формулировке модели (7), так же как и (5), использовалось представление о балансе

транспортных средств и груза (по аналогии с уравнением баланса массы в механике сплошной среды), а также были учтены основные причинно-следственные связи, приводящие к изменению поведения участников транспортной системы. Например, в первом уравнении учтено: чем больше груза на складе, тем больше автомобилей снимаются с маршрута ($-mz$); чем меньше запас z , тем интенсивнее будут поступать автомобили ($Z-z$); чем больше автомобилей стоит на погрузку, тем медленнее отбывают автомобили типа x (множитель $Y-y$); чем больше груза, тем сложнее разгрузиться (множитель $Z-z$) и т.д. Отсюда становится ясным смысл коэффициентов $a...f$, которые выражают интенсивность прироста или убывания переменных в результате действия соответствующих причин.

Анализ модели (7) в основном выполнялся при допущении, что все параметры положительны (некоторые в частных случаях принимаются равными нулю) и не зависят от времени. Исследование систем уравнений начиналось с определения точек стационарных состояний, их типа и устойчивости.

Система (7) диссипативна, если выполнено условие (6), при этом $z < \frac{aZ}{a-c}$, если $a>c$ и $z > \frac{aZ}{a-c}$, если $a < c$. Следовательно, возникает предположение о возможности существования сингулярных циклов и аттракторов, а также гетероклинических контуров, определяющих вид траекторий в фазовом пространстве.

Уравнения (7) исследовались численно методом Рунге-Кутта с переменным шагом и точностью $1 \cdot 10^{-6}$. Были найдены все основные виды решений, характерные для трехмерных автономных нелинейных систем: стационарное состояние, предельный цикл, странный (хаотический) аттрактор и другие типы циклов различной периодичности. Зафиксируем константы модели (7), как указано в табл. 2. Некоторые результаты исследований представлены на рис. 2. Найденные численные решения образуют два симметричных семейства, в соответствии с формулами (9). Для анализа рассмотрим нечетное семейство решений, которым были присвоены условные номера: 1, 3, ..., 13 (т.е.

семь типов). Решения, принадлежащие каждому типу, достаточно четко выделяются от иных. Между всеми решениями имеется тесная связь, которая заключается в том, что плавное изменение некоторых параметров может приводить от решений одного типа к решениям другого типа (в форме бифуркаций).

Исходными (базовыми) решениями в представленной цепи атTRACTоров можно считать сингулярные циклы и соответствующие им сингулярные атTRACTоры типа 1 и типа 7, находящиеся на противоположных концах. Они отличаются тем, что ведут происхождение от различных особых точек.

На рис. 2 (вариант 4, тип 13) приведена зависимость, которая свидетельствует о существовании в модели (7) так называемых «контрастных структур» и пограничного слоя [9]. На наш взгляд, подобные решения вполне могут использоваться в качестве модельных систем для описания эффектов типа «жесткой турбулентности» без привлечения аппарата «русл и джокеров». Зависимость $z(t)$ в этом варианте весьма напоминает при этом некоторую стратегию управления запасами, что придает модели (7) практическую привлекательность.

Модель 3 (пассажирская остановка).

Модель транспортного процесса перевозок пассажиров в населенном пункте может быть сформулирована в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелинейными правыми частями:

$$\begin{cases} \dot{x} = a[(X + ky - mz) - x]z - b(Y - y)(Z - z); \\ \dot{y} = -cxz + d(Y - y); \\ \dot{z} = -eyz + f(Z - z) + [gz - h(Y - y)]x. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь переменными являются: x – количество автобусов, находящихся на остановке; y – количество пассажиров, ожидающих посадку; z – число свободных мест в автобусах, находящихся на остановке. Остальные параметры имеют следующий смысл: X – среднее (нормативное) число автобусов, работающих на маршруте; Y – среднее количество пассажиров на остановке (условная «вместимость» остановки); Z – среднее число мест для пассажиров (вместимость автобуса). Коэффициенты модели: a – характеризует интенсивность

прибытия автобусов на остановку (имеет размерность $1/(мест\cdotмин)$); b – характеризует интенсивность отправления автобусов от остановки ($авт/(пасс\cdotмест\cdotмин)$); c – учитывает интенсивность посадки пассажиров в автобусы ($пасс/авт\cdotмест\cdotмин$)); d – отражает интенсивность прибытия пассажиров на остановку ($1/мин$); e – учитывает скорость уменьшения числа свободных мест вследствие посадки пассажиров ($1/(пасс\cdotмин)$); f – характеризует интенсивность увеличения числа свободных мест за счет высадки пассажиров ($1/мин$); g – характеризует скорость роста числа свободных мест, «прибывающих» вместе с автобусами ($1/авт\cdotмин$)); h – отражает интенсивность «кубирования» свободных мест, не занятых пассажирами до отправления автобуса ($1/пасс\cdotавт\cdotмин$)); k – описывает интенсивность выхода на линию автобусов сверх нормативного значения при увеличении числа пассажиров на остановках ($авт/пасс$); t – характеризует интенсивность «схода» автобусов с маршрутов вследствие роста числа свободных мест ($авт/мест$).

Слагаемые в правых частях уравнений имеют следующий смысл. В первом уравнении (10) слагаемое с знаком «+» отражает поступление автобусов на остановку, зависящее от разности общего количества автобусов, находящихся на маршрутах, и числа автобусов на остановке. В этом слагаемом учитываются также выпуск автобусов на маршрут при росте числа пассажиров на остановке (например, в часы «пик»), а также «сход» с маршрута при увеличении числа свободных мест в автобусе. Это слагаемое пропорционально количеству свободных мест в автобусах на остановке (чем больше свободных мест, тем интенсивнее будут автобусы поступать на посадку с целью загрузки – или сходят с маршрута, о чем уже сказано). Слагаемое со знаком «–» отражает процесс отправления автобуса от остановки. Оно осуществляется быстрее, если, с одной стороны, на остановке мало пассажиров (становится короче по времени процесс посадки) или, с другой стороны, если мало свободных мест в самом автобусе (пассажиры отказываются от посадки). Таким образом, имеем произведение $b(Y-y)(Z-z)$.

Во втором уравнении слагаемое со знаком «+» описывает приход пассажиров на остановку: чем меньше занята остановка, тем выше вероятность увеличения числа пассажиров. Чем больше занята остановка (уменьшение разности ($Y-y$)), тем больше пассажиров будет ее покидать с целью поиска альтернативного способа передвижения. Чем больше пассажиров уже находится на остановке, тем меньше потенциальных пассажиров находится за ее пределами. Слагаемое со знаком «-» описывает процесс посадки пассажиров в автобусы: чем больше автобусов на остановке и чем больше на ней свободных мест, тем выше вероятность посадки.

В третьем уравнении слагаемое $f(Z-z)$ учитывает процесс увеличения числа свободных мест за счет высадки пассажиров (чем больше пассажиров в автобусе, тем вероятнее выход пассажиров на остановку). Второе слагаемое со знаком «+» учитывает «поступление» свободных мест с автобусами. Слагаемое со знаком «-» описывает процесс уменьшения свободных мест за счет посадки пассажиров. Это слагаемое пропорционально произведению yz : чем больше пассажиров на остановке и чем больше свободных мест, тем выше вероятность того, что свободные места будут заняты.

В целом, в уравнениях (10) отражены основные причинно-следственные связи, реально действующие в системе и учитывающие коллективный характер динамики пассажиров, транспортных средств и свободных мест. Последний фактор становится здесь своего рода управляющим параметром, влияющим на процесс принятия решений пассажирами и водителями автобусов. Следует ожидать, что построенная модель относится к целой совокупности остановок (метаостановке) и содержит решения, имеющие практический смысл. Отрицательные значения переменных x , y , z будут означать потребность в соответствующем виде компонента, т.е., мы специально не ограничиваем значения функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ множеством \Re_+ .

Система уравнений (10) решалась численно методами Рунге-Кутта с переменным шагом и точностью $1 \cdot 10^{-6}$. В модели были найдены все основные виды

устойчивых аттракторов (фокус, предельный цикл, нерегулярный аттрактор). В табл. 3 представлены значения параметров модели и начальные условия, которые принимались при изучении системы.

Практический интерес представляет решение системы, полученное приведенное в табл. 3 (вариант 6, рис. 3, е). Здесь имеет место циклический характер работы системы. Временная зависимость переменных x и y показывает изменение числа автобусов и пассажиров на метаостановке, напоминающее известные функции из теории управления запасами. В течение некоторого времени число автобусов на остановке плавно уменьшается, число пассажиров остается до определенного момента почти постоянным, затем их количество заметно уменьшается и практически мгновенно (в масштабе времени одного цикла) осуществляется интенсивный переходный процесс, связанный с накоплением пассажиров и автобусов до исходного уровня. Эти пилообразные кривые представляют своего рода временные структуры, показывающие согласованный характер работы всех элементов (остановок) системы (метаостановки), т.е. самоорганизацию.

Изучение подобных структур в реальных системах позволит сформулировать постановку задачи теории управления для создания требуемых типов временных структур в течение дня работы автобусного парка.

Модель 4 (конкуренция двух автомобильных перевозчиков). Известна динамическая модель конкуренции, предложенная в работе [10] и описывающая производство взаимозаменяемых товаров одинакового качества двумя фирмами. Фазовыми координатами являются в модели оборотные средства конкурентов.

Если в качестве переменных модели выбрать x – увеличение затрат перевозчика «1» на организацию и повышение качества перевозочного процесса (реклама, информация, маркетинговые исследования, техническое состояние подвижного состава и др.), y – то же, для перевозчика «2», z – увеличение количества груза, доставленного потребителю перевозчиком «1», то один из

возможных вариантов модели конкуренции может быть записан в виде системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = ay(Z - z) - bz(x - X) \\ \dot{y} = cxz - d(Z - z)(y - Y) \\ \dot{z} = e(x - y). \end{cases} \quad (11)$$

Система представляет собой выражение стратегий двух игроков рынка, записанное в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Каждое из них является уравнением динамического баланса типа $\dot{x} = P - R$, где в общем случае $P=P(t, x)$ – источник, а $R=R(t, x)$ – потери изучаемой величины x .

Первое слагаемое $ay(Z-z)$ выражает стремление игрока (перевозчика «1») увеличить затраты ресурсов (в итоге – увеличить объем своих рыночных предложений), если конкурент увеличивает свои. Поэтому слагаемое пропорционально переменной y . Множитель $(Z-z)$ выражает запас спроса на услуги со стороны потребителя. Коэффициент a учитывает степень информированности игрока «1» о стратегии игрока «2» и о спросе на услуги перевозчиков. Параметр Z следует понимать как максимальную величину спроса потребителя.

Второе слагаемое $bz(x-X)$ выражает стремление игрока «1» использовать свои ресурсы с максимально допустимой отдачей. Величина X есть ее предел. Если $x < X$ (есть возможность наращивать объем предложения), слагаемое в целом имеет знак «+» и смысл источника величины x . Если x становится больше X , игрок вынужден сокращать использование ресурсов. Слагаемое пропорционально z , т.к. при высоком уровне z игрок «1» может позволить себе интенсивнее сокращать использование ресурсов на увеличение предложения. Коэффициент b отражает представление игрока «1» о необходимости такого снижения.

Аналогично интерпретируется запись второго уравнения (11). Смысл третьего уравнения очевиден.

Условие диссипативности системы (11) представляет собой неравенство

$$\operatorname{div} F(x, y, z) = z(d-b) - dZ < 0 \quad (12)$$

Таким образом, рассматриваемая система, подобно исследованной в [3] модели Ресслера,

не является всюду диссипативной в фазовом пространстве.

Перепишем уравнения (11) в каноническом виде

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 y + k_2 z - k_3 xz - k_4 yz \\ \dot{y} = -k_5 y - k_6 z + k_7 xz + k_8 yz + k_9 \\ \dot{z} = k_{10} x - k_{11} y. \end{cases} \quad (13)$$

Здесь $k_1=aZ$; $k_2=bX$; $k_3=b$; $k_4=a$; $k_5=dZ$; $k_6=dY$; $k_7=c$; $k_8=d$; $k_9=dYZ$; $k_{10}=k_{11}=e$

Исследование системы (11), как и ранее, выполнялось численно методом Рунге-Кутта 4-го порядка с точностью $1 \cdot 10^{-6}$. Отметим, что вследствие высокой размерности параметрического пространства ($k=8$) в настоящее время говорить о законченном исследовании системы не представляется возможным.

Рассмотрим вариант 1 системы (11), приняв параметры в соответствии с табл. 4.

Здесь наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода, если в качестве параметра выбрать коэффициент a . Например, при $a=4$ имеем устойчивый предельный цикл (окно периодичности $a \in (4,00025; 3, 798)$), при $a \in (3,798; 2,1067)$ – цикл периода 2, при $a \in (2,1067; 1,894)$ – цикл периода 4 и т.д. Последующий субгармонический каскад бифуркаций аттрактора Фейгенбаума приводит при $a=1,36060606$ к циклу периода 3. Дальнейшее уменьшение a ведет к гомоклиническому каскаду (по терминологии Н.А. Магницкого [3]). При $a \approx 0,8233\dots$ «глаз» аттрактора закрывается и структура аттрактора изменяется (рис. 4, $a-2$). Отметим, что аттрактор подобного вида существует и при бесконечном числе других сочетаний параметров (например, вариант 2, табл. 4). Отмеченное выше изменение структуры аттрактора выражается в усложнении траектории, выходящей из «глаза» и совершающей затухающие колебания вокруг некоторой осевой линии (рис. 4, 2).

Если параметры системы выбрать согласно варианта 3 (табл. 4), то получим аттрактор, обладающей симметрией по отношению к аттрактору 1-го варианта и являющийся результатом аналогичной последовательности бифуркаций.

Обратим внимание, что эволюция аттракторов в этом случае может быть более развитой и приводить к решениям, которые

подходят под понятие «контрастных структур», примеры которых приведены в работе [9]. Каскад бифуркаций проходит всю последовательность, начиная от удвоения периода предельного цикла, субгармонический и гомоклинический каскады, а далее – более сложную последовательность бифуркаций, приводящую к «контрастным структурам».

Заключение

Результаты выполненных исследований диссипативных систем обыкновенных дифференциальных уравнений показывают, что универсальным способом, который можно рассматривать как сценарий перехода к хаотическому поведению, является каскад бифуркаций удвоения периода Фейгенбаума, субгармонический каскад в соответствие с порядком Шарковского и далее гомоклинический каскад Магницкого (теория ФШМ).

Среди полученных решений достаточно много таких, которые вполне могут использоваться в качестве модельных систем для описания эффектов типа «жесткой турбулентности» без привлечения аппарата «русл и джокеров». В некоторых моделях (например, модель 3 и модель 4) обнаруживается некоторые признаки «периодичности» получаемых решений (паттернов поведения). Это означает, что атTRACTоры образуют последовательности топологически разных, но связанных между собой решений, которые иногда составляют симметричные группы. В различных по структуре правых частей системах могут получаться топологически одинаковые решения (например, типа атTRACTора Лоренца в модели 1, Ресслера в модели 2 или других более сложных).

Литература

1. Зульпукarov М.-Г.М. Жесткая турбулентность. Моделирование с помощью русел и джокеров // Нелинейность в современном естествознании / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – С. 159-187.
2. Малинецкий Г.Г. Простота нелинейного мира // Нелинейность в современном естествознании / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – С. 10-19.
3. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 320 с.
4. Агуреев И.Е. Нелинейная динамика в теории автомобильных транспортных систем // Изв. ТулГУ. Сер. «Автомобильный транспорт». Вып. 9. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. – С. 3-13.
5. Агуреев И.Е. Нелинейные модели транспортных процессов и систем // Изв. ТулГУ. Сер. «Автомобильный транспорт». Вып. 10. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. – С. 3-11.
6. Агуреев И.Е., Тропина В.М. Модель конкуренции двух автомобильных перевозчиков // Изв. ТулГУ. Техн. науки. Вып.1, 2007.
7. Агуреев И.Е. Применение теории Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого для анализа модели конкуренции двух автомобильных перевозчиков // Труды Института системного анализа Российской академии наук. Динамика неоднородных систем / Под ред. С.В. Емельянова. Т. 33. – Вып. 12. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – С. 159-175.
8. Агуреев И.Е., Тропина В. М. Динамика логистической системы в транспортных цепях поставок // Изв. ТулГУ. Техн. науки. Вып.4, 2011. – С. 158-167.
9. Неймарк Ю.И., Смирнова В.Н. Конtrастные структуры, предельная динамика и парадокс Пэнлеве // Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37. № 11. – С. 1507-1515.
10. Чернавский Д.С., Щербаков А.В., Зульпукarov М.-Г.М. Модель конкуренции. Препринт № 64 ИПМ имени М.В. Келдыша. М., 2006. – 22 с.

Таблица 1

Параметры модели ЛС

Вариант	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9
1	4	3	14	2	2,4	17	0,1	3	6
2	2	0,3	1	0,9	9	11,4	4	0,2	5
3	1	2	24	2	3	12	1	4	5
4	2	15	6	7	1	28	1	6	3
5	0,8	12	5	6	1	0,3	2	12	4

Таблица 2

Параметры модели (7)

Вариант	a	b	c	d	e	f	g
1	3	8	2	25	1	5	180
2	3	5	6	2	1	4	2
3	5	0,6	3	1	0,4	2	9
4	1	7	4	5	0,9	2	2,1
5	1,5	2	1	0,4	7	9	-15
6	2,1	1	4	0,7	0,1	4	0,1
7	1	0,5	2,8	5,5	0,5	2	3
8	2	1	0,5	4	2,11	7	5
Вариант	k	l	m	n	X	Y	Z
1	0,2	4	1,7	10	50	20	150
2	3	2	1	3	4	5	1
3	7	0,7	4	2	1	0,5	2
4	0,3	6	0,1	2	5	10	0,4
5	0,1	5	2	4	1	2	1
6	2	1	9	3	2	1	4
7	1	0,4	9	0,4	0,1	2	5
8	0,5	2	1	9	0,6	3	2

Таблица 3

Параметры модели (10)

Вариант	a	b	c	d	e	f	g
1	0,5	5	2	1	12	2	0,2
2	0,5	0,95	1,6	0,2	1	5	8
3	5	2	0,4	4	0,5	9	1
4	0,2	6	3	5	1	0,5	4
5	2,5	0,2	15	0,5	7	50	2
6	6	20	0,6	1	0,5	2	14
7	0,3	0,1	0,3	0,8	2	5	15
Вариант	h	k	m	X	Y	Z	-
1	3	15	6	2	0,3	25	-
2	0,2	0,5	0,3	20	10	14	-
3	0,8	10	7	15	12	3	-
4	9	2	0,2	20	10	60	-
5	1,5	1	0,5	50	25	20	-
6	48	5	2	12	24	10	-
7	5	5	12	6	36	15	-

Таблица 4

Параметры модели (11)

№ вар.	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>E</i>	<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
1	4	8	2	2,5	8	1,5	14	7
2	5	11	13	7	8	0,5	4	1,5
3	0,8	3	9	2,5	15	14	2	18

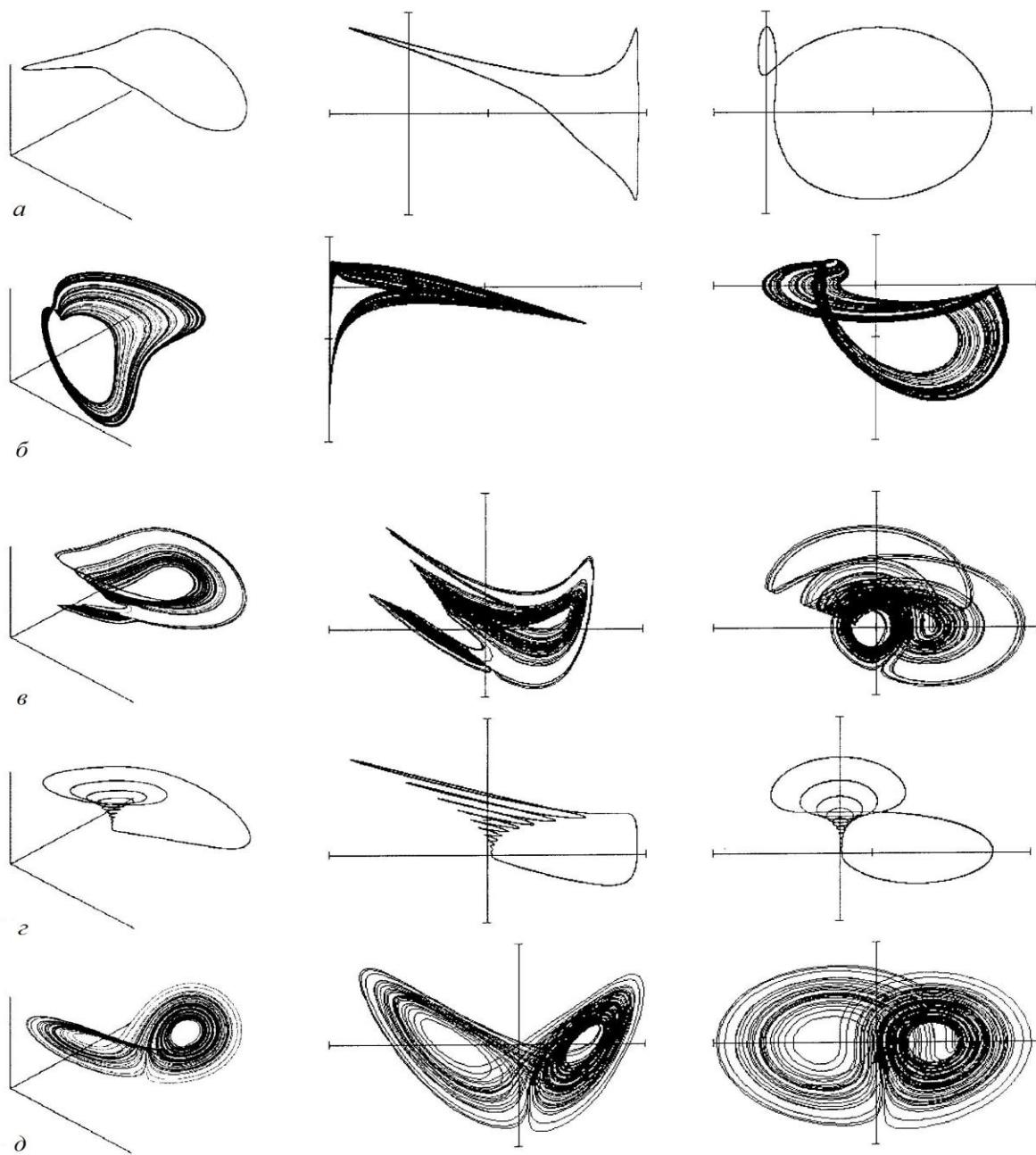


Рис. 1. Варианты динамического поведения в модели (5)

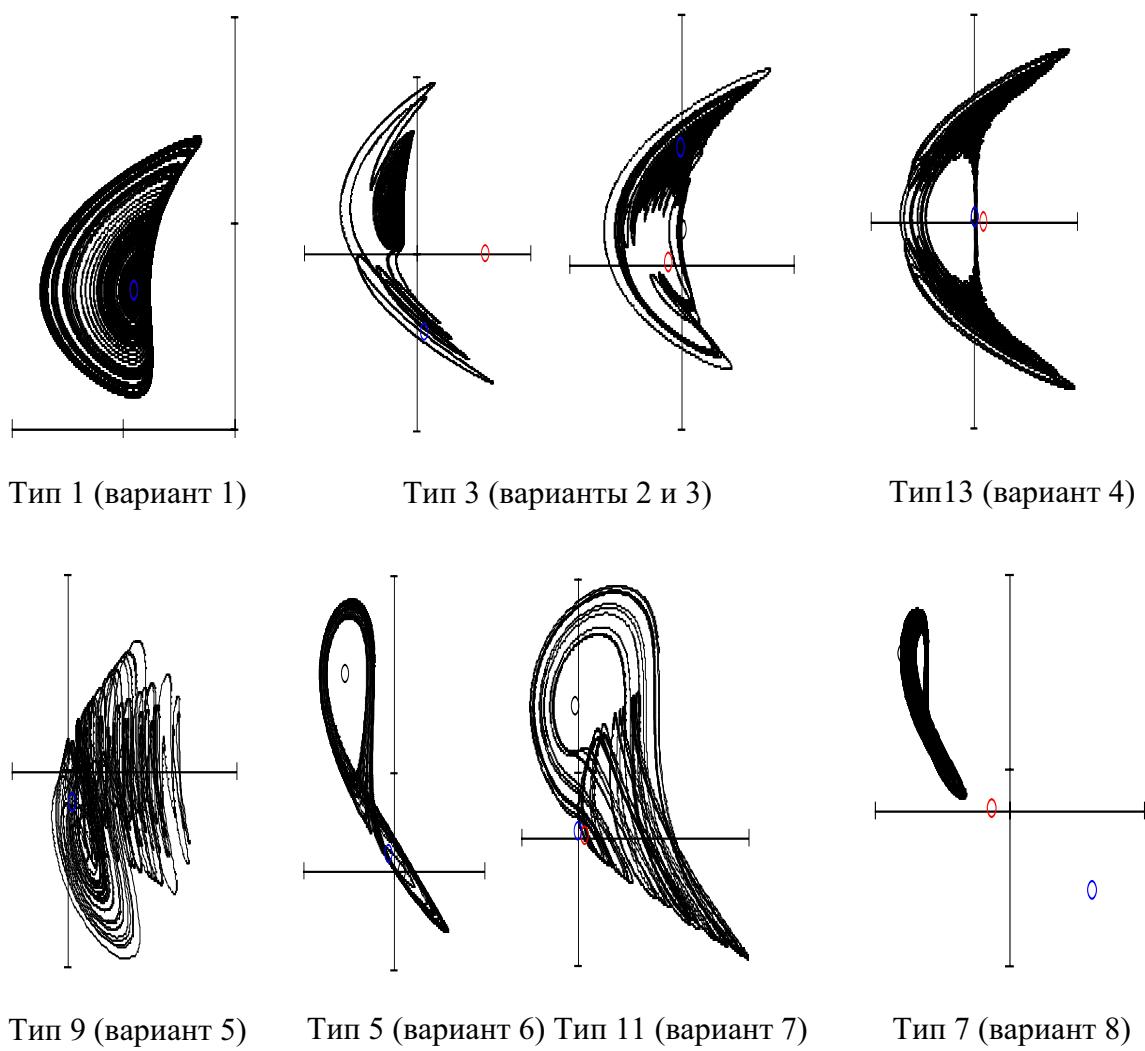


Рис. 2. Система аттракторов в модели (7)

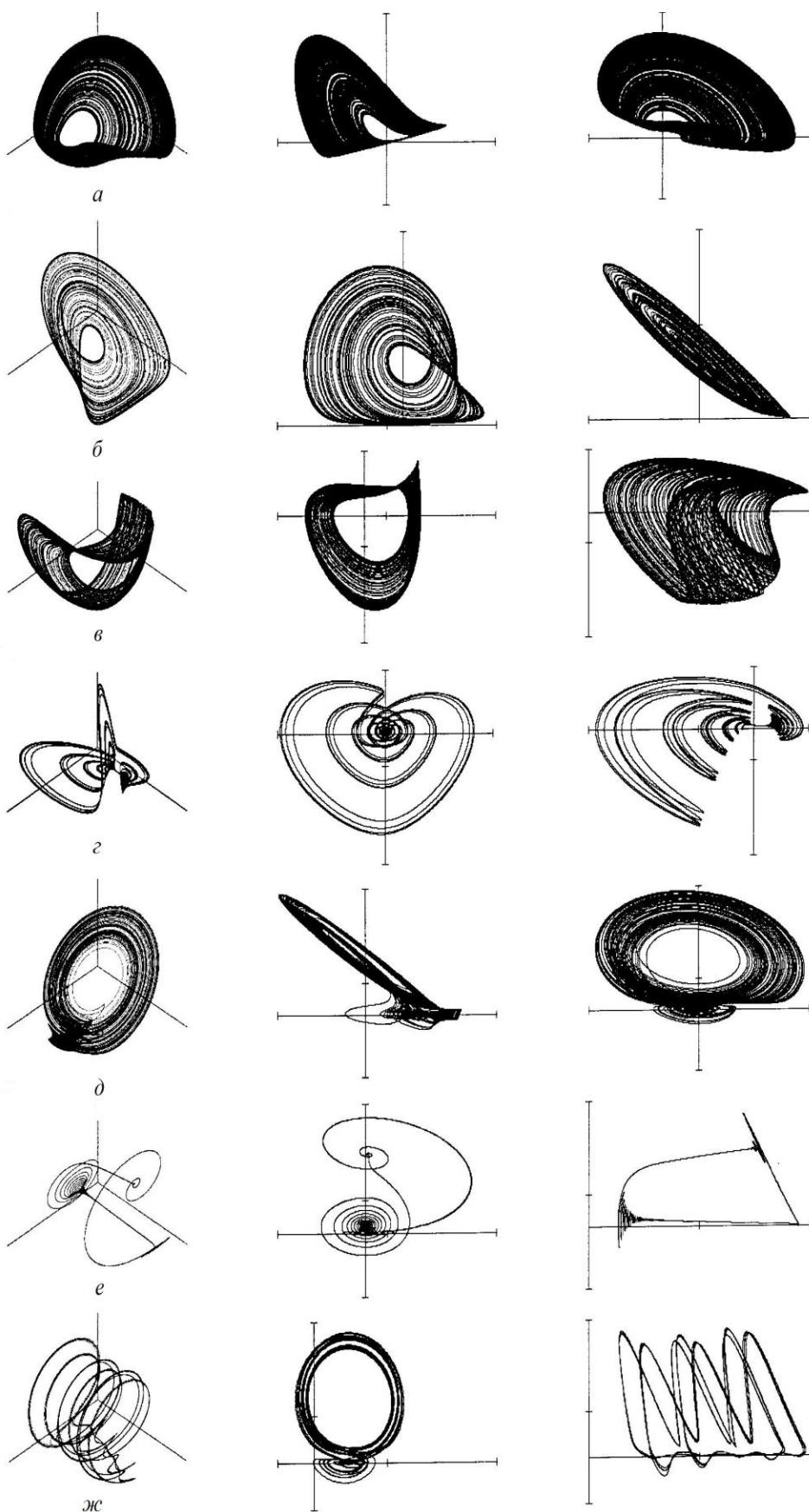


Рис. 3. Примеры аттракторов в модели (10)

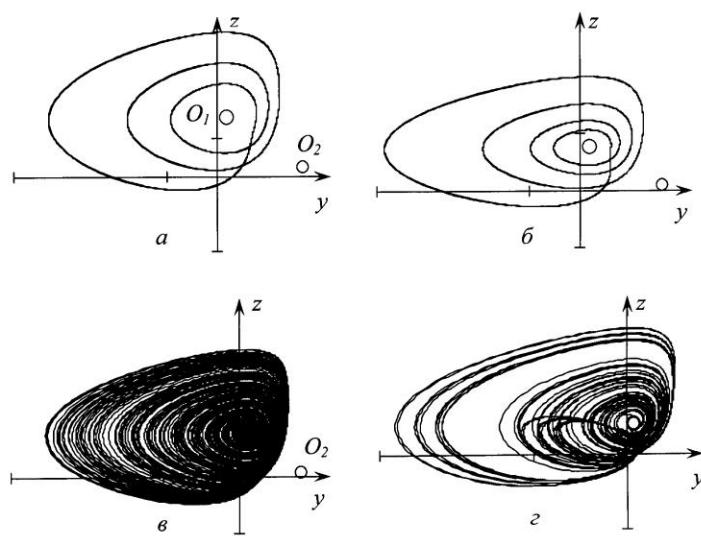


Рис. 4. Проекции аттрактора системы (1) на плоскость (y-z):

а) $a = 1,36060606$; б) $a = 1,1111\dots$; в) $a = 0,82333\dots$; г) $b = 31$ (вариант 2)

На рис. 5. приведен полный набор проекций полученного для варианта 2 решения.

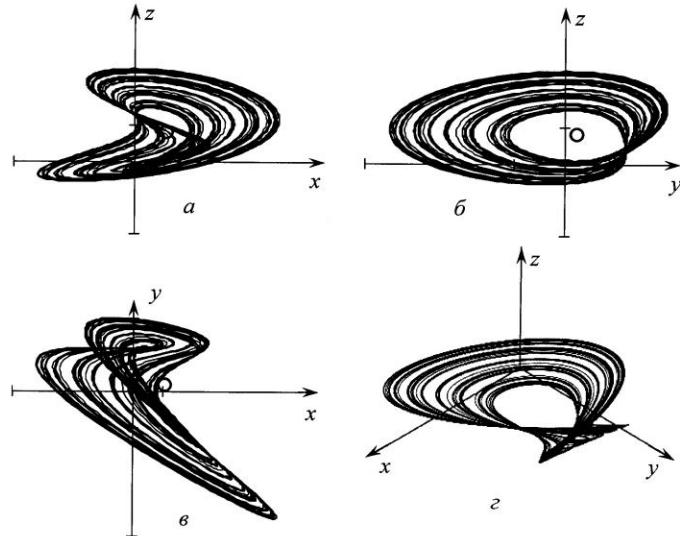


Рис. 5. Проекции решения (вариант 2) на фазовые плоскости