

### III. МАТЕМАТИКА В ОПИСАНИИ ХАОСА И СИНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

DOI: 10.127037/7654

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ОБЪЕКТА К ХАОТИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ НА ОСНОВЕ МЕТОДА СТРУКТУРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ РИСКА

М.И.ЗИМИН, Т.В. ГАВРИЛЕНКО, Д.К. БЕРЕСТИН, Н.А.ЧЕРНИКОВ

*ГБОУ ВПО «Сургутский государственный университет ХМАО - Югры»,  
пр. Ленина д.1, г. Сургут, Россия, 628412*

**Аннотация.** В статье предлагается методика определения принадлежности объекта к хаотическим системам на основе метода структурной минимизации риска. Представлены примеры, демонстрирующие эффективность методики на модельных данных. В основе методики лежит использование полиномов Чебышева, позволяющих сделать обоснованный выбор равномерного закона распределения или мотивировано предпочесть другую плотность вероятности. Основным признаком хаотических систем является наличие равномерного закона распределения, которое характерно для систем третьего типа – основы современной теории хаоса-самоорганизации. Существенно, что в теории хаоса-самоорганизации на коротких интервалах времени  $\tau$  всегда распределения будут неравномерные. Однако, невозможно удерживать системы долго в этом состоянии.

**Ключевые слова:** структурная минимизация риска, полиномы Чебышёва, хаотическая система.

#### DETERMINATION OF AN OBJECT AS CHAOTIC SYSTEM ON THE BASIS OF STRUCTURAL RISK MINIMIZATION

M.I. ZIMIN, T.V. GAVRILENKO, D.C. BERESTIN, N.A. CHERNIKOV

*Medical University "Surgut State University Khanty-Mansiysk - Ugra",  
pr. Lenina square, 1, Surgut, Russia, 628412*

**Abstract.** The paper proposes the method of determining the membership of the object to chaotic systems on the basis of structural risk minimization. It is presented examples that demonstrate the effectiveness of the methodology to model data. The methodology is based on Chebyshev polynomials that can make an informed choice of uniform distribution law or motivated to prefer a different probability density. The main feature of chaotic systems is the presence of a uniform law of distribution, which is typical for systems of the third type - the foundations of modern theory of chaos and self-organization. It is significant that in the theory of chaos and self-organization at short time intervals  $\tau$  always be uneven distribution. However, it is impossible to keep the system for a long time in this state.

**Key words:** structural risk minimization, Chebyshev polynomials, chaotic system.

**Введение.** В настоящее время проводится интенсивное изучение сложных биологических динамических систем, являющихся *системами третьего типа* (СТТ) с особыми пятью свойствами [5-13]. Тем не менее, методология соотнесения заданной

системы к хаотической, стохастической или детерминированной досконально не разработана [1-4,17-21]. Многое остаётся неясным и в оценке параметров хаоса, его идентификация, что неизбежно приводит к неопределённости [6-12]. Очевидно, что по-

добные разработки могут иметь существенное значение как для повышения эффективности работы естественных (природных) объектов такого рода, так и для создания их искусственных аналогов и комбинированных человеко-машинных комплексов, предназначенных для получения, анализа и обработки нечёткой информации. Особенно это необходимо для изучения СТТ, когда хаос отличен от детерминированного хаоса и модели таких систем весьма приближенны в рамках современной науки [12-16].

Традиционно считается, что для хаотических систем характерно равномерное распределение параметров, а для стохастических – отличающиеся от равномерного. Различать такие системы (СТТ) можно только с определённой погрешностью. При этом вполне возможна ситуация, когда доступны только малые выборки, работа с которыми в рамках классической статистики затруднена. Другим важным вопросом является определение зависимостей параметров вектора состояния системы от времени, что для СТТ сейчас крайне затруднено [5-13].

**1. Метод структурной минимизации риска.** Для решения задач моделирования СТТ представляется целесообразным применение метода структурной минимизации риска [1-3,14,15] и использование в качестве базисных функций полиномов Чебышева. Это обусловлено тем, что указанный метод предназначен именно для работы с малыми выборками, а использование полиномов Чебышева позволяет сделать обоснованный выбор равномерного закона распределения или мотивировано предпочесть другую плотность вероятности. Рассмотрим данный метод более детально.

Задача восстановления регрессии сводится к минимизации следующей величины [1,2,14,16]:  $J(k) = I_{\eta}(k)\Omega$ , (1) где  $J(k)$  – средний риск,  $I_{\eta}(k)$  – эмпирический риск,  $1 - \eta$  – вероятность, с которой справедлива оценка,  $k$  – параметр, определяющий конкретную функцию из класса функций,  $\Omega$  – некоторая переменная.

С ростом объёма выборки величина  $\Omega$  всегда стремится к единице [2], хотя в каждом конкретном случае её вид различен, но

если выборка мала, то она может существенно отличаться от (1). Тогда функция может не обеспечить величину небольшого среднего риска.

Существуют различные классы базисных функций. При этом полиномы Чебышева удобны именно в вычислительном отношении и позволяют решать широкий круг задач восстановления зависимостей. В данном случае они чётко выделяют равномерное распределение для СТТ (или его отсутствие). Кроме того, их применение минимизирует максимальную ошибку, что имеет важное значение при наличии больших погрешностей в исходных данных.

Напомним, что во многих случаях некоторая аппроксимирующая функция  $y(x)$  может отыскиваться в форме ряда:

$$y(x) = \sum_{i=0}^k \alpha_i Q_i(x), \quad (2)$$

где  $\alpha_i$  –  $i$ -ый коэффициент разложения,  $Q_i(x)$  – полином Чебышева степени  $i$ ,

Известно, что полиномы Чебышева имеют вид [1,2]:

$$Q_0 = 1, \quad (3)$$

$$Q_1 = x, \quad (4)$$

$$Q_2 = 2x^2 - 1, \quad (5)$$

$$Q_3 = 4x^3 - 3x, \quad (6)$$

$$Q_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad (7)$$

При таком представлении функционал эмпирического риска [2] определяется по формуле:

$$I_{\eta} = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \left[ y_j - \sum_{i=0}^k \alpha_i Q_i(x_j) \right]^2, \quad (8)$$

где  $l$  – объём выборки.

При фиксированной максимальной степени полинома коэффициенты  $\alpha_i$ , при которых эмпирический риск принимает минимальное значение, вычисляются путем решения системы линейных алгебраических уравнений [1]:  $\Phi^T \Phi [\alpha] = \Phi^T [\gamma]^T$ , (9) где  $\Phi$  – матрица значений полиномов Чебышева в экспериментальных точках,  $[\gamma]$  – матрица-строка значений переменной  $y$  в экспериментальных точках,  $[\alpha]$  – матрица-столбец коэффициентов  $\alpha_i$ .

Матрица  $\Phi$  имеет вид:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{10} & \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{20} & \varphi_{21} & \dots & \varphi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{l0} & \varphi_{l1} & \dots & \varphi_{lk} \end{pmatrix},$$

где  $\varphi_{ij}$  – значение  $j$ -ого полинома Чебышева в  $i$ -ой экспериментальной точке,  $k$  – максимальная степень используемых полиномов Чебышева,  $l$  – число экспериментальных точек.

Рассмотрим конкретный пример, когда необходимо восстановить зависимость  $y=f(x)$  в виде:  $y(x) = \sum_{i=0}^1 \alpha_i Q_i(x)$  по двум экспериментальным точкам, в которых  $x_1=0,5, y_1=0,5, x_2=1, y_2=1$ .

Тогда:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[y] = (0,5 \quad 1),$$

$$[y]^T = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^T \Phi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1,5 \\ 1,5 & 1,25 \end{pmatrix},$$

$$\Phi^T [y]^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,25 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1,5 \\ 1,5 & 1,25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,25 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

что совпадает с точным решением.

Оценка качества приближения, справедливая для любой случайной выборки с вероятностью  $1 - \eta$ , что даётся [1] формулой (10):

$$J(k) = \frac{I_s}{1 - \sqrt{\frac{(k+1) \left[ \ln \left( \frac{l}{k+1} \right) + 1 \right] - \ln \eta}{l}}}. \quad (10)$$

Выражение (10) зависит от степени полинома  $k$ . Та степень, при которой  $J(k)$  принимает наименьшее значение, является

оптимальной степенью полиномиального приближения, а сама функция регрессии аппроксимируется полиномом этой степени, минимизирующим функционал эмпирического риска.

Поскольку полиномы Чебышева ортогональны на отрезке  $[-1, 1]$ , то, если значения независимой переменной заданы не на этом отрезке, их надо привести к нему по формуле [1]

$$x_i = \frac{(x_{gi} - c_1)}{c_2},$$

где  $x_i$  – значения независимой переменной, приведённые к отрезку  $[-1, 1]$ ,  $x_{gi}$  – исходные значения независимой переменной,

$$c_1 = \frac{(x_{g \max} + x_{g \min})}{2},$$

$$c_2 = \frac{(x_{g \max} - x_{g \min})}{2},$$

где  $x_{g \min}$  – минимальное из заданных значения независимой переменной,  $x_{g \max}$  – максимальное из заданных значение независимой переменной.

Для оценки плотности вероятности этот подход может быть использован без существенных изменений. Только в этом случае в качестве значений независимой переменной используются величины эмпирической функции распределения.

Неопределённость принадлежности объекта можно оценить по формуле:

$$v = 10^{1 - \left( \frac{J_{\max}}{J_{\min}} \right)^7}, \quad (11)$$

где  $v$  – неопределённость принадлежности объекта к хаотической или стохастической системе

$$J_{\max} = \max(J_{s \min}, J_h),$$

$$J_{\min} = \min(J_{s \min}, J_h),$$

где  $J_{s \min}$  – минимальное значение среднего риска при степени полинома, отличной от нуля,  $J_h$  – значение среднего риска при степени полинома, равной нулю.

В качестве примера можно привести восстановление плотности вероятности при следующих исходных данных: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. В этом случае  $v=0,0679$ . Весьма низкая

неопределённость соответствует исходным данным – данные представляют собой равномерное распределение.

Таблица 1

**Случайный поиск экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  по 15 реализациям**

№ точки	1	2	3	4	5
X	1,0000	1,4396	1,7320	1,7320	1,8810
Y	0,0000	0,6965	0,9182	0,9860	0,9596
№ точки	6	7	8	9	10
X	1,8865	2,0211	2,1494	2,1627	2,2042
Y	1,0017	0,9915	1,0128	0,9512	0,9722
№ точки	11	12	13	14	15
X	2,3589	2,4481	2,5208	2,5655	3,0000
Y	0,8708	0,8247	0,7085	0,7073	0,0000

Таблица 2

**Случайный поиск экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  по 25 реализациям**

№ точки	1	2	3	4	5
X	1,0000	1,3636	1,4030	1,4396	1,4489
Y	0,0000	0,6139	0,6256	0,7133	0,6765
№ точки	6	7	8	9	10
X	1,5385	1,7250	1,7320	1,7358	1,7631
Y	0,7956	0,9087	0,9584	0,9278	0,9466
№ точки	11	12	13	14	15
X	1,8547	1,8810	1,8865	2,0211	2,1478
Y	0,9453	1,0052	0,9783	1,0371	0,9539
№ точки	16	17	18	19	20
X	2,1494	2,1627	2,2042	2,3346	2,3589
Y	0,9884	0,9901	0,9923	0,8598	0,8983
№ точки	21	22	23	24	25
X	2,4481	2,5208	2,5655	2,7957	3,0000
Y	0,7820	0,7345	0,6710	0,3706	0,0000

**2. Некоторые контрольные примеры для апробации метода.** Программа восстановления функции методом структурной минимизации риска в классе полиномов Чебышева была опробована на ряде контрольных примеров. Одним из них является поиск максимума функции  $y=-(x-2)^2+1$  на отрезке [1,3] по различному числу реализаций, причем значения  $y(x)$  задавались со случайной помехой по формуле

$$y_i = y_i^* + 0,04y_i^*(-1)^i v, \quad (12)$$

где  $y_i^*$  – точное значение функции  $y$  в  $i$ -ой точке,  $v$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале [0, 1]. Значения  $x_i$  были случайным образом равномерно распределены на отрезке [1, 3].

При случайном выборе значений  $x_i$  и вычислении в этих точках величин  $y_i$  осуществляется простейший случайный поиск экстремума функции  $y(x)$ .

В табл. 1-6 приведены значения  $x_i$  и  $y_i$  для различного реализаций, а в табл. 7 и табл. 8 – погрешности определения точки экстремума случайным поиском и случайным поиском в сочетании с методом структурной минимизации риска в зависимости от числа реализаций.

Таблица 3

**Случайный поиск экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  по 30 реализациям**

№ точки	1	2	3	4	5	6
X	1,0000	1,0201	1,3636	1,4030	1,4396	1,4489
Y	0,0000	0,0405	0,5756	0,6475	0,6840	0,7201
№ точки	7	8	9	10	11	12
X	1,5385	1,7250	1,7320	1,7358	1,7631	1,8547
Y	0,7716	0,9327	0,8933	0,9533	0,9335	0,9812
№ точки	13	14	15	16	17	18
X	1,8811	1,8865	2,0211	2,1478	2,1494	2,1627
Y	0,0509	1,0185	0,9683	0,9992	0,9701	0,9866
№ точки	19	20	21	22	23	24
X	2,2042	2,3346	2,3589	2,3918	2,4212	2,4481
Y	0,9483	0,9070	0,8411	0,8592	0,8072	0,8135
№ точки	25	26	27	28	29	30
X	2,5208	2,5655	2,2955	2,7957	2,9912	3,0000
Y	0,7154	0,7003	0,6384	0,3814	0,0172	0,0000

Таблица 4

**Случайный поиск экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  по 40 реализациям**

№ точки	1	2	3	4	5
x	1,0000	1,0201	1,1284	1,1449	1,3636
y	0,0000	0,0406	0,2381	0,2788	0,5802
№ точки	6	7	8	9	10
x	1,4030	1,4396	1,4489	1,5385	1,6063
y	0,6506	0,6844	0,7210	0,7620	0,8714

Продолжение таблицы 4

№ точки	11	12	13	14	15
x	1,7250	1,7320	1,7358	1,7631	1,8469
y	0,9045	0,9354	0,9177	0,9537	1,9557
№ точки	16	17	18	19	20
x	1,8547	1,8811	1,8865	2,0211	2,1478
y	1,0127	0,9711	1,0057	0,9816	0,9962
№ точки	21	22	23	24	25
x	2,1494	2,1627	2,2042	2,3346	2,3589
y	0,9488	0,9841	0,9203	0,9060	0,8674
№ точки	26	27	28	29	30
x	2,3918	2,4212	2,4481	2,5208	2,5655
y	0,8494	0,8046	0,8046	0,7242	0,6887
№ точки	31	32	33	34	35
x	2,5955	2,6251	2,7957	2,9912	3,0000
y	0,6340	0,6298	0,3658	0,0181	0,0000
№ точки	36	37	38	39	40
x	2,5955	2,6251	2,7957	2,9912	3,0000
y	0,6340	0,6298	0,3658	0,0181	0,0000

Таблица 5

**Случайный поиск экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  по 50 реализациям (реализации 1 – 40)**

№ точки	1	2	3	4	5
x	1,0000	1,0201	1,1175	1,1284	1,1449
y	0,0000	0,0405	0,2171	0,2446	0,2638
№ точки	6	7	8	9	10
x	1,3636	1,3907	1,4030	1,4396	1,4482
y	0,6125	0,6219	0,6691	0,6721	0,6974
№ точки	11	12	13	14	15
x	1,4489	1,5206	1,5385	1,5479	1,6063
y	0,6939	0,7871	0,8006	0,8344	0,9087
№ точки	16	17	18	19	20
x	1,6727	1,7250	1,7320	1,7358	1,7631
y	0,9183	0,8933	0,9308	0,8982	0,9637
№ точки	21	22	23	24	25
x	1,8469	1,8547	1,8811	1,8865	1,9784
y	0,9603	1,0092	0,9504	0,9774	1,0129
№ точки	26	27	28	29	30
x	2,0211	2,0689	2,0746	2,1478	2,1494
y	1,0126	0,9562	1,0323	0,9434	1,0077
№ точки	31	32	33	34	35
x	2,1627	2,2042	2,2411	2,3346	2,3589
y	0,8522	0,8667	0,8152	0,7994	0,6999
№ точки	36	37	38	39	40
x	2,3918	2,4212	2,4481	2,5208	2,5619
y	0,9667	0,8152	0,7994	0,6998	0,7092

Таблица 6

**Случайный поиск экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  по 50 реализациям (реализации 41 – 50)**

№ точки	41	42	43	44	45
x	2,5655	2,5885	2,5955	2,6251	2,7137
y	0,6659	0,6783	0,6209	0,6142	0,4776
№ точки	46	47	48	49	50
x	2,7744	2,7957	2,8756	2,9912	3,0000
y	0,4038	0,3628	0,2362	0,0170	0,0000

Таблица 7

**Зависимость точности определения экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  от числа реализаций при использовании случайного поиска**

Число реализаций N	15	25	30	35	50
x в точке экстремума	2,1494	2,0211	1,8865	1,8547	2,0747
y в точке экстремума	1,0128	1,0371	1,0185	1,0127	1,0323
Погрешность определения независимой переменной (x) в точке экстремума ( $\delta_1$ ), %	7,47	1,06	5,68	7,27	3,74

Таблица 8

**Зависимость точности определения экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  от числа реализаций при использовании случайного поиска в сочетании с методом структурной минимизации риска**

Число реализаций N	15	25	30	35	50
x в точке экстремума	2,0021	1,9991	2,0014	1,9998	1,9997
y в точке экстремума	1,0026	1,0025	0,9979	0,9988	0,9982
Погрешность определения независимой переменной (x) в точке экстремума ( $\delta_2$ ), %	0,105	0,045	0,070	0,010	0,015

Зависимости  $\delta_1(N)$  и  $\delta_2(N)$ , т.е. от числа реализаций N, иллюстрируются рис. 1 и рис. 2.

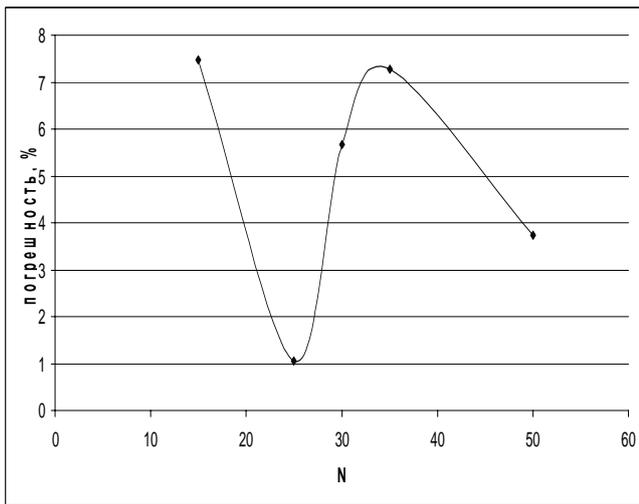


Рис. 1. Зависимость погрешности определения точки экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  от числа реализаций при случайном поиске

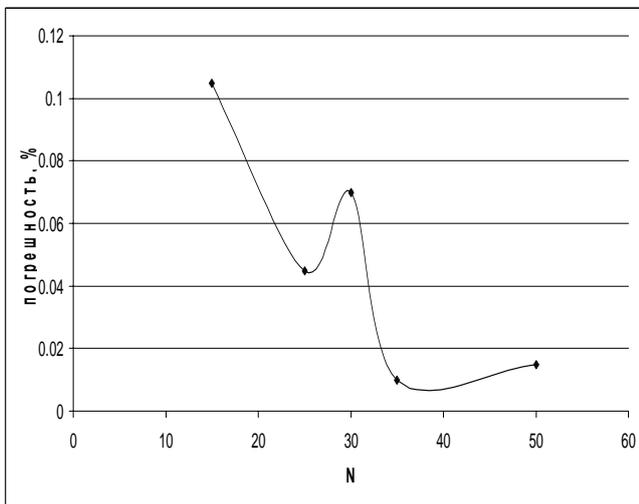


Рис. 2. Зависимость погрешности определения точки экстремума функции  $y=-(x-2)^2+1$  от числа реализаций при расчёте по предлагаемой методике

Другим примером может быть поиск максимума функции  $y = \sin x$  на отрезке  $[0, 3]$ , зашумлённой по формуле:

$$y_i = y_i^* + 0,2y_i^* (-1)^i v, \quad (13)$$

где  $y_i^*$  – точное значение функции  $y$  в  $i$ -ой точке,  $v$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $[0, 1]$ . Значения  $x_i$  были случайным образом равномерно распределены в интервале  $[0, 3]$ .

Результаты расчёта для этого случая иллюстрируются табл. 9-15.

Таблица 9

**Случайный поиск экстремума функции  $y=\sin x$  по 15 реализациям**

№ точки	1	2	3	4	5
x	0,0872	0,1681	0,3174	0,7111	1,2568
y	0,0833	0,1594	0,3546	0,6442	1,0637
№ точки	6	7	8	9	10
x	1,3714	1,5844	1,8990	2,1720	2,1883
y	0,9928	0,9584	1,0728	0,8293	0,7535
№ точки	11	12	13	14	15
x	2,2039	2,3107	2,3804	2,5488	2,6228
y	0,7914	0,6334	0,6558	0,6297	0,5033

Таблица 10

**Случайный поиск экстремума функции  $y=\sin x$  по 20 реализациям**

№ точки	1	2	3	4	5
x	0,0783	0,2704	0,3417	0,4294	0,4363
y	0,0752	0,3132	0,2927	0,3710	0,4218
№ точки	6	7	8	9	10
x	0,5268	0,9478	1,1529	1,4643	1,7137
y	0,4994	0,7199	1,0406	1,0516	0,8156
№ точки	11	12	13	14	15
x	1,8275	1,9724	2,2631	2,3181	2,3542
y	1,1249	0,9872	0,7231	0,7959	0,6168
№ точки	16	17	18	19	20
x	2,4696	2,5457	2,6010	2,6069	2,6412
y	0,7158	0,6594	0,5377	0,5484	0,3996

Таблица 11

**Случайный поиск экстремума функции  $y=\sin x$  по 30 реализациям**

№ точки	1	2	3	4	5
x	0,0713	0,1351	0,1462	0,1678	0,3838
y	0,0756	0,1581	0,1311	0,1711	0,3276
№ точки	6	7	8	9	10
x	0,5339	0,5541	0,7348	0,8817	1,0497
y	0,5255	0,5338	0,7501	0,7261	0,8766
№ точки	11	12	13	14	15
x	1,1336	1,1429	1,3122	1,4018	1,4175
y	1,0039	1,0896	1,0642	0,9709	1,1742
№ точки	16	17	18	19	20
x	1,4552	1,6277	1,6605	1,7843	1,7872
y	0,8398	1,0065	0,8001	0,8940	0,9365
№ точки	21	22	23	24	25
x	1,8230	1,8578	1,9129	1,9513	2,4572
y	1,0889	0,9228	0,9352	0,8374	0,7229
№ точки	26	27	28	29	30
x	2,5624	2,5855	2,6519	2,7886	2,9602
y	0,5173	0,4272	0,5367	0,3007	0,1493

Таблица 12

**Случайный поиск экстремума функции  $y=\sin x$  по 40 реализациям**

№ точки	1	2	3	4	5
x	0,0037	0,0347	0,0991	0,1156	0,3442
y	0,0044	0,0386	0,0809	0,1267	0,3045
№ точки	6	7	8	9	10
x	0,3534	0,3921	0,4641	0,5013	0,5068
y	0,3416	0,4469	0,4889	0,3874	0,3999
№ точки	11	12	13	14	15
x	0,5071	0,5258	0,5293	0,6936	0,8095
y	0,5233	0,4277	0,5509	0,6066	0,8372
№ точки	16	17	18	19	20
x	0,8230	0,9139	0,9597	0,9810	0,9838
y	0,6313	0,8192	0,9198	0,8960	0,6918
№ точки	21	22	23	24	25
x	1,0397	1,0801	1,1211	1,1501	1,2661
y	0,8169	0,7787	0,8241	1,0296	0,8216
№ точки	26	27	28	29	30
x	1,3515	1,5006	1,6306	1,7652	1,9536
y	0,9243	0,8605	0,7991	1,0710	0,8588
№ точки	31	32	33	34	35
x	2,1051	2,1090	2,4417	2,5823	2,6704
y	0,8679	0,7841	0,7034	0,4497	0,3733
№ точки	36	37	38	39	40
x	2,6817	2,6852	2,7124	2,9442	2,9783
y	0,5067	0,5100	0,4173	0,1997	0,1806

Таблица 13

**Случайный поиск экстремума функции  $y=\sin x$  по 50 реализациям (реализации 1 – 40)**

№ точки	1	2	3	4	5
x	0,0783	0,1747	0,3086	0,3527	0,3648
y	0,0677	0,1460	0,2548	0,3037	0,3266
№ точки	6	7	8	9	10
x	0,4150	0,4383	0,5804	0,6441	0,6818
y	0,3942	0,4639	0,6108	0,6486	0,7469
№ точки	11	12	13	14	15
x	0,7343	0,7423	0,7694	0,8435	0,9010
y	0,6664	0,6931	0,7538	0,8641	0,8750
№ точки	16	17	18	19	20
x	0,9657	0,9830	1,0981	1,1161	1,2567
y	0,8440	0,9386	0,7453	0,8669	0,8661
№ точки	21	22	23	24	25
x	1,2631	1,2874	1,3898	1,4069	1,4437
y	0,9938	0,9239	0,8542	0,9631	0,8136
№ точки	26	27	28	29	30
x	1,5508	1,5826	1,6411	1,7191	1,7636
y	1,0632	1,1196	0,8626	1,0150	0,8977
№ точки	31	32	33	34	35
x	1,9084	1,9272	1,9998	2,0740	2,0808
y	0,9311	1,0762	0,9911	0,7121	0,9157
№ точки	36	37	38	39	40
x	2,1471	2,1590	2,2922	2,2978	2,3345
y	0,9446	0,8689	0,7977	0,7850	0,6999
№ точки	41	42	43	44	45
x	2,3542	2,5074	2,5295	2,5423	2,5876
y	0,6860	0,7087	0,6307	0,5179	0,4868
№ точки	46	47	48	49	50
x	2,6436	2,6921	2,7084	2,9536	2,9865
y	0,4612	0,4405	0,4904	0,1809	0,1316

Таблица 14

**Зависимость точности определения экстремума функции  $y=\sin x$  от числа реализаций при использовании случайного поиска**

Число реализаций N	15	20	30	40	50
x в точке экстремума	1,2568	1,8275	1,4175	1,7652	1,5826
y в точке экстремума	1,0637	1,1249	1,1742	1,0710	1,1196
Погрешность определения независимой переменной (x) в точке экстремума ( $\delta_1$ ), %	20,0	16,3	9,76	12,4	0,75

Таблица 15

**Зависимость точности определения экстремума функции  $y=\sin x$  от числа реализаций при использовании случайного поиска в сочетании с методом структурной минимизации риска**

Число реализаций N	15	20	30	40	50
x в точке экстремума	1,5346	1,5708	1,5436	1,5719	1,5718
y в точке экстремума	1,0096	1,0023	0,9944	0,9338	0,9871
Погрешность определения независимой переменной (x) в точке экстремума ( $\delta_2$ ), %	2,30	$2,34 \cdot 10^{-4}$	1,73	0,070	0,064

Зависимость погрешности определения точки экстремума функции  $y=\sin x$  от числа реализаций в условиях зашумления при использовании случайного поиска показана на рис. 3.

Зависимость погрешности определения точки экстремума функции  $y=\sin x$  от числа реализаций в условиях зашумления при применении предлагаемой методики иллюстрируется рис. 4.

Следующим примером является поиск экстремума функции  $z=\sin(x)\sin(y)$  при  $0 \leq x \leq 3$  и  $0 \leq y \leq 3$ . Использовалась одна начальная точка, и осуществлялся один проход по каждой координате. Зашумление проводилось по формуле  $z_i = z_i^* + 0,2z_i^* (-1)^i v$ , (14) где  $z_i^*$  – точное значение функции z в i-ой

точке,  $v$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $[0, 1]$ . Значения  $x_i$  и  $y_i$  были случайным образом равномерно распределены в интервале  $[0, 3]$ .

Таблица 16

Случайный поиск экстремума функции  $z=\sin(x)\sin(y)$  по 30 реализациям при  $y=0,6110$

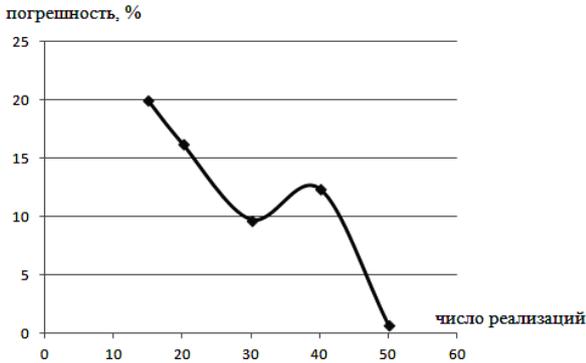


Рис. 3. Зависимость погрешности определения точки экстремума функции  $y=\sin x$  от числа реализаций в условиях зашумления при использовании случайного поиска

№ точки	1	2	3	4	5
x	0,0119	0,0675	0,1713	0,3682	0,5538
z	0,0056	0,0393	0,1073	0,2356	0,3355
№ точки	6	7	8	9	10
x	0,5719	0,6779	0,6805	0,7750	1,0739
z	0,3517	0,3192	0,4274	0,3893	0,4790
№ точки	11	12	13	14	15
x	1,0914	1,1038	1,1545	1,1889	1,3093
z	0,5013	0,4712	0,5224	0,5373	0,4798
№ точки	16	17	18	19	20
x	1,4463	1,5069	1,5604	1,7363	1,8443
z	0,5799	0,5981	0,6681	0,4546	0,5457
№ точки	21	22	23	24	25
x	1,9968	2,1817	2,2014	2,3450	2,4254
z	0,4712	0,5393	0,4252	0,4530	0,3039
№ точки	26	27	28	29	30
x	2,5606	2,6758	2,6922	2,1765	2,7915
z	0,3659	0,2686	0,2173	0,2725	0,1603

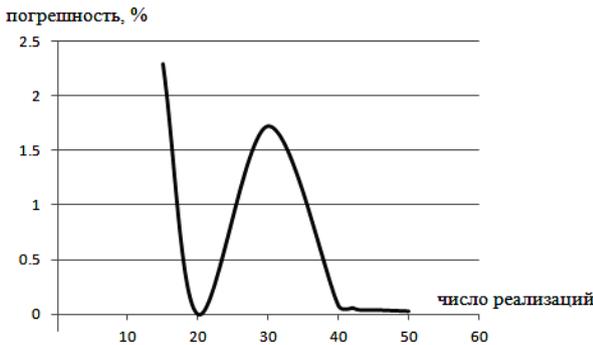


Рис. 4. Зависимость погрешности определения точки экстремума функции  $y=\sin x$  от числа реализаций в условиях зашумления при применении предлагаемой методики

Таблица 17

Случайный поиск экстремума функции  $z=\sin(x)\sin(y)$  по 30 реализациям при  $x=1,5502$

№ точки	1	2	3	4	5
y	0,1576	0,1789	0,1850	0,1065	0,2394
z	0,1837	0,1706	0,1762	0,2038	0,1979
№ точки	6	7	8	9	10
y	0,4103	0,4158	0,5901	0,9149	0,9373
z	0,4221	0,3773	0,4678	0,7632	0,8223
№ точки	11	12	13	14	15
y	0,9577	0,9801	1,0979	1,1394	1,1443
z	0,7712	0,6803	0,7274	0,9580	1,0839
№ точки	16	17	18	19	20
y	1,2755	1,3430	1,6474	1,6739	1,8948
z	1,1406	1,0430	0,8741	1,1178	0,8457
№ точки	21	22	23	24	25
y	1,1248	2,3296	2,5461	2,5686	2,6138
z	0,9703	0,6394	0,5636	0,4676	0,5989
№ точки	26	27	28	29	30
y	2,6723	2,7803	2,7934	2,8401	2,9060
z	0,5004	0,3387	0,3523	0,2499	0,2603

В табл. 16 приведены результаты случайного поиска экстремума функции  $z$  в сечении при случайно выбранной величине  $y=0,6110$ .

После восстановления одномерной зависимости в одномерном сечении было определено, что функция принимает максимальное значение при  $x=1,5502$ . Это значение было зафиксировано, и поиск экстремума выполнялся в сечении по  $y$ , это иллюстрируется табл. 17.

Восстановленная зависимость  $z(y)$  имеет максимум при  $y=1,5712$ . Результаты поиска экстремума функции  $z=\sin(x)\sin(y)$  иллюстрируются табл. 18.

Таблица 18

**Результаты поиска экстремума функции  $z = \sin(x)\sin(y)$ , значения которой зашумлены по формуле (14)**

Методика \ Результаты	Простейший случай-ный поиск в одно-мерных сече-ниях	Предлагаемая методика
Значение $x$ в точке экстре-мума	1,5604	1,5502
Погрешность определения $x$ в точке экстре-мума, %	0,662	1,31
Значение $y$ в точке экстре-мума	1,2755	1,5712
Погрешность определения $y$ в точке экстре-мума, %	18,8	0,0257

Как видно из табл. 18, погрешности определения координаты  $x$  в точке экстремума сопоставимы, а погрешность определения координаты  $y$  в точке экстремума на три порядка ниже у предлагаемой методики по сравнению со случайным поиском в одномерных сечениях.

Следующим примером является восстановление зависимости в том случае, когда значения  $y$  являются случайной величиной, равномерно распределённой в интервале  $[0,17; 0,23]$ . Поскольку они не зависят от  $x$ , то оптимальная степень полинома должна быть равна нулю. Исходные данные для этого примера приведены в табл. 19.

Таблица 19

**Исходные данные для восстановления зависимости, когда значения  $y$  являются случайной величиной, равномерно распределённой в интервале  $[0,17; 0,23]$**

№	1	2	3	4	5	6
$x$	1	2	3	4	5	6
$y$	0,1745	0,2202	0,2177	0,1949	0,2012	0,2082
№	7	8	9	10	11	12
$x$	7	8	9	10	11	12
$y$	0,1717	0,1749	0,2251	0,1883	0,2288	0,1923

Для повышения чувствительности распознавания к возможной связи между переменными значения зависимой пере-

менной приводились к интервалу  $[0; 1]$  по формуле:

$$y_{i01} = \frac{y_i - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}, \quad (15)$$

где  $y_{i01}$  –  $i$ -ое значение зависимой переменной, приведённое к интервалу  $[0; 1]$ ;  $y_i$  –  $i$ -ое значение зависимой переменной до приведения к интервалу  $[0; 1]$ ;  $y_{\min}$  – минимальное значение зависимой переменной до приведения к интервалу  $[0; 1]$ ;  $y_{\max}$  – максимальное значение зависимой переменной до приведения к интервалу  $[0; 1]$ .

Модифицированная по формуле (15) выборка приведена в табл. 20.

Таблица 20

**Модифицированные по формуле (15) данные (исходные значения  $y$ , равномерно распределённые в интервале  $[0,17; 0,23]$ )**

№	1	2	3	4	5	6
$x$	1	2	3	4	5	6
$y$	0,0490	0,8494	0,8056	0,4063	0,5166	0,6392
№	7	8	9	10	11	12
$x$	7	8	9	10	11	12
$y$	0,0000	0,0560	0,9352	0,2907	1,0000	0,3608

Зависимости эмпирического и среднего рисков от степени аппроксимирующего полинома представлены в табл. 21.

Таблица 21

**Зависимости эмпирического и среднего рисков от степени аппроксимирующего полинома, когда значения  $y$  являются случайной величиной, равномерно распределённой в интервале  $[0,17; 0,23]$**

Степень полинома	0	1	2	3
Эмпирический риск	0,1164	0,1159	0,1154	0,1085
Средний риск	0,4393	0,7512	1,4446	4,2463

Исходная выборка и аппроксимирующая зависимость иллюстрируются на рис. 5. Таким образом, оптимальная степень полинома равна нулю и связь между  $x$  и  $y$  отсутствует.

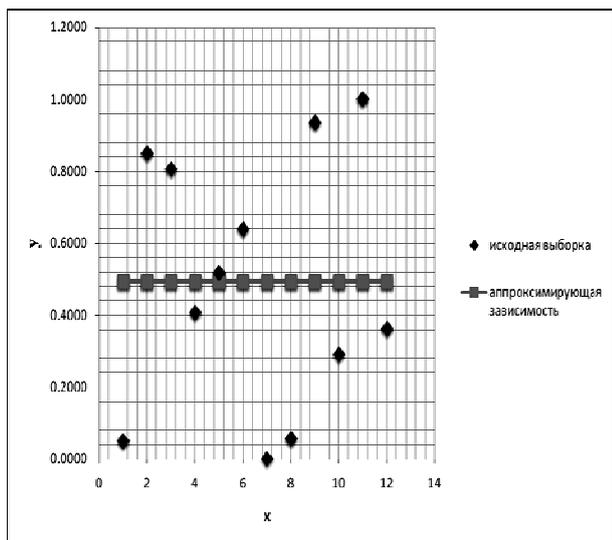


Рис. 5. Исходная выборка и аппроксимирующая зависимость

В тоже время зашумлённая зависимость также хорошо распознаётся. Одна из них была выбрана в виде:  $y = x + \xi$ , где  $x=1,2,\dots,12$ ; а  $\xi$  принимает значения  $y_i$  табл. 22.

Данные для восстановления регрессии во втором случае представлены в табл. 22, а зависимости эмпирического и среднего рисков от степени аппроксимирующего полинома иллюстрируются табл. 23.

Таблица 22

**Данные для восстановления зашумлённой линейной зависимости**

№	1	2	3	4	5	6
x	1	2	3	4	5	6
y	1,0490	2,8494	3,8056	4,4063	5,5166	6,6392
№	7	8	9	10	11	12
x	7	8	9	10	11	12
y	7,0000	8,0560	9,9352	10,2907	11,0000	12,3608

Таблица 23

**Зависимости эмпирического и среднего рисков от степени аппроксимирующего полинома при восстановлении зашумлённой линейной зависимости**

Степень полинома	0	1	2	3
Эмпирический риск	11,4252	0,1006	0,09862	0,08957
Средний риск	43,1343	0,6522	1,2342	3,5044

Как следует из результатов анализа, оптимальная степень полинома в этом случае равна единице, то есть зависимость

восстановлена правильно и приведена на рис. 6.

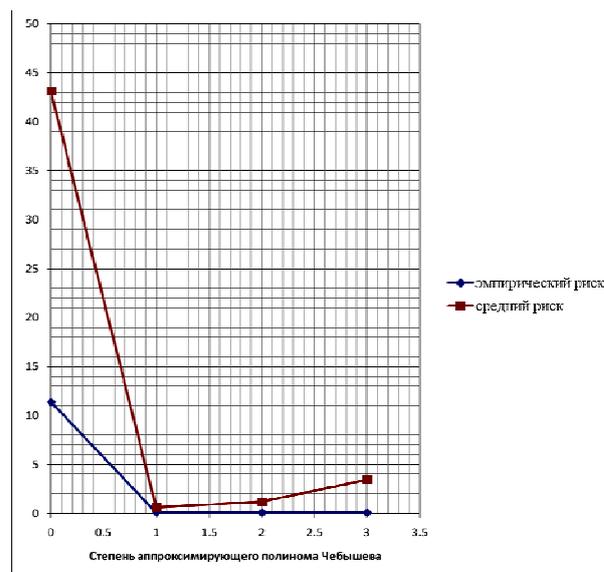


Рис. 6. Зависимость эмпирического и среднего риска от степени аппроксимирующего полинома, при восстановлении зашумлённой линейной зависимости

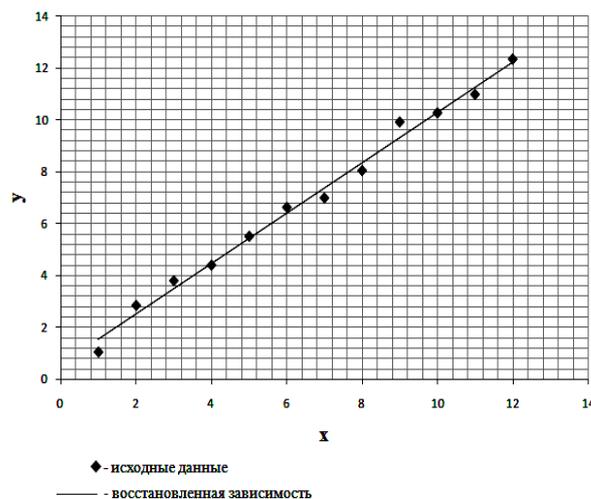


Рис. 7. Исходные данные и восстановленная линейная зависимость

Описанная методика была опробована также на решении системы трансцендентных уравнений:

$$\begin{cases} -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin z = 1 \\ -\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin y - \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \\ \sin x - \left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (15)$$

Решение системы (16) можно свести к нахождению минимума суммы квадратов невязок. Точное решение –  $x=y=z=\pi/2$ , полученное –  $x=1,56$ ;  $y=1,59$ ;  $z=1,55$ . Использовались 3 начальных точки и 30 точек в одномерных сечениях. Случайный поиск по 270 реализациям привёл к весьма посредственным результатам –  $x=1,05$ ;  $y=0,89$ ;  $z=1,16$ .

Приведённые примеры показывают, что метод структурной минимизации риска хорошо распознаёт зашумлённые зависимости, а точность определения экстремума функции с помощью предлагаемого метода действительно может быть на порядки выше, чем точность случайного поиска.

**3. Соотношение между детерминизмом, стохастикой и хаосом.** Взаимовлияние и организация элементов системы может привести к качественному изменению объекта – из хаотического он может превратиться в стохастический или даже в детерминированный. Это очень важно, так как хаотическая прогностическая система в состоянии дать только средние значения и пределы изменения рассчитываемых величин. Её трансформация в стохастическую или детерминированную систему повышает точность анализа и показывает эффективность осуществлённой организации её элементов и внешних управляющих воздействий. Даже если она осталась хаотической, но размеры аттрактора сократились, то эффективность анализа тоже повышается за счёт уменьшения разброса результатов.

Стохастическая прогностическая система позволяет уже строить плотности вероятности прогнозируемых параметров. Появляется возможность оценки состояния объекта.

Если случайный разброс мал и им можно пренебречь, то система становится детерминированной. Она даёт однозначный прогноз или диагноз реального состояния анализируемой системы.

Следует также отметить, что объект допустимо считать детерминированным и в том случае, когда размеры зон, в пределах которых параметры хаотически флуктуируют, малы и этим с достаточной для практики точностью можно пренебречь [5-13].

Таким образом, классификация прогностической системы позволяет оценить насколько качественно выполнен её синтез и принять обоснованное решение о возможности её внедрения в практическую деятельность.

Прежде всего необходимо оценить является ли распределение случайной величины равномерным. Поскольку не всегда большая выборка может быть получена, то представляется целесообразным применение метода структурной минимизации риска [1]. Для решения такой задачи случайным образом отбираются и фиксируются все прогностические параметры, кроме одного. Далее случайным образом выбираются величины незафиксированного параметра, для которых вычисляется функция принадлежности к опасной ситуации. После этого в классе полиномов Чебышева методом структурной минимизации риска восстанавливается зависимость  $s(x)$ , где  $s$  – функция принадлежности к опасной ситуации,  $x$  – незафиксированный параметр. Эта операция повторяется для всех независимых переменных.

Так как характерной чертой СТГ на больших интервалах времени измерения  $T$  [5-13] является равномерное распределение параметров в пределах аттракторов [2], то оптимальная максимальная степень полиномов  $s(x)$ , равна нулю. Это иллюстрируется рис. 8.

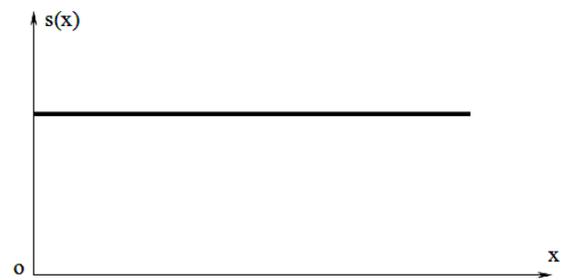


Рис. 8. Зависимость  $s(x)$  при оптимальной максимальной степени полинома  $s(x)$ , равной нулю

Кроме того, представляет интерес исследование зависимостей параметров распределений, например, их математических ожиданий, от времени. Это позволяет, по крайней мере приближённо, ответить на

вопрос: эволюционирует ли исследуемая СТТ с течением времени, или ответить на вопрос: уменьшаются ли размеры аттракторов и повышается ли точность прогнозирования. Ввиду того, что осуществляется только оценка принадлежности распределения к равномерному, восстановление плотности вероятности осуществляется весьма упрощенно, а значения функции распределения вычисляются в точках элементов исходной выборки.

Для решения этих задач используются полиномы Чебышева, так как при линейной функции распределения имеет место плотность вероятности в виде равномерной зависимости (показано на рис. 8).

При реализации таких процедур в соответствии с [1] сначала по выборке оценивается функция распределения. Для этого на оси ( $ot$ ), содержащей точки случайной выборки  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , где  $n$  – объем выборки, выбирается совокупность точек  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , координаты которых рассчитываются по формуле:

$$\omega_i = t_{\min} + \frac{t_{\max} - t_{\min}}{n - 1} \cdot (i - 1), \quad (17)$$

где  $i$  – номер точки.

Функция распределения в точках  $\omega_i$  вычисляется следующим образом [1]:

$$F_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathcal{G}(\omega_i - t_j), \quad (18)$$

где

$$\mathcal{G}(\omega_i - t_j) = \begin{cases} 1 & \text{при } (\omega_i - t_j) \geq 0 \\ 1 & \text{при } (\omega_i - t_j) < 0 \end{cases}. \quad (19)$$

Далее методом структурной минимизации риска в классе полиномов Чебышева восстанавливается зависимость  $F(\omega)$ . Если её оптимальная степень равна 1, то это говорит о том, что значения  $t$  распределены по закону, близкому к равномерному.

**Заключение.** Представленный метод показывает свою эффективность для решения задач по определению принадлежности объекта к хаотическим системам на основе метода структурной минимизации риска при использовании в качестве базисных функций полиномов Чебышева. Метод демонстрирует свою эффективность с малыми выборками, а использование полиномов

Чебышева позволяет сделать обоснованный выбор равномерного закона распределения или мотивировано предпочесть другую плотность вероятности. Программа для определения принадлежности объекта к системе третьего типа была опробована на ряде медицинских и биологических примеров, что будет продемонстрировано в следующем сообщении.

### Литература

1. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука, 1979. – 220 с.
2. Вапник В.Н., Глазкова Т.Г., Кошечев В.А., Михальский А.И., Червоненкис А.Я. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. – М.: Наука, 1984. – 816 с.
3. Вахмина Ю.В. Модели сложных систем с позиций физики и теории хаоса-самоорганизации // Сложность. Разум. Постнеклассика. – 2013. – №1. – С.51–59.
4. Ведясова О.А., Еськов В.М., Живогляд Р.Н. Соотношение между детерминистскими и стохастическими подходами в моделировании синергизма и устойчивости работы дыхательного центра млекопитающих // Вестник новых медицинских технологий. – 2005. – Т. 12, № 2. – С. 23–24.
5. Гавриленко Т.В., Еськов В.М., Хадарцев А.А. Новые методы для геронтологии в прогнозах долгожительства коренного населения Югры // Успехи геронтологии. – 2014. – Т. 27, № 1. – С. 30–36.
6. Еськов В.М., Филатова О.Е., Папшев В.А. Сканирование движущихся поверхностей биологических объектов // Измерительная техника. – 1996. – № 5. С. 66.
7. Еськов В.М., Зилов В.Г., Хадарцева А.А. Новые подходы в теоретической биологии и медицине на базе теории хаоса и синергетики // Системный анализ и управление в биомедицинских системах. – 2006. – Т. 5, № 3. – С. 617–622.
8. Еськов В.М., Назин А.Г., Русак С.Н. Системный анализ и синтез влияния динамики климатоэкологических факторов на заболеваемость населения Севера РФ // Вестник новых медицинских технологий. – 2008. – Т. 15, № 1. – С. 26–29.

9. Еськов В.М., Еськов В.В., Филатова О.Е. Особенности измерений и моделирования биосистем в фазовых пространствах состояний // Измерительная техник.– 2010.– № 12.– С. 53–57.

10. Еськов В.М., Филатова О.Е., Хадарцев А.А., Хадарцева К.А. Фрактальная динамика поведения человекомерных систем // Вестник новых медицинских технологий.– 2011.– Т. 18, № 3.– С. 330–331.

11. Еськов В.М., Еськов В.В., Филатова О.Е. Особые свойства биосистем и их моделирование // Вестник новых медицинских технологий.– 2011.– Т. 18, № 3.– С. 331–332.

12. Еськов В.М., Гавриленко Т.В., Козлова В.В., Филатов М.А. Измерение параметров динамики микрохаоса в поведении реальных биосистем // Метрология.– 2012.– №7.– С. 39–48.

13. Еськов В.М., Еськов В.В., Гавриленко Т.В., Зимин М.И. Неопределенность в квантовой механике и биофизике сложных систем // ВМУ. Серия 3. ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ.– 2014.– № 5.– С. 41–46.

14. Зимин М.И. Метод структурной минимизации риска в задачах строительной механики // Тезисы докладов пятнадцатой республиканской научно-технической конференции по проблемам строительства и машиностроения.– Нальчик, Кабардино-Балкарский государственный университет, 1988.– С. 3-4.

15. Зимин М.И., Вахмина Ю.В., Гавриленко Т.В. Модели сложных систем с позиций физики и теории хаоса-самоорганизации // Сложность. Разум. Постнеклассика.– 2013.– № 1.– С. 51–59.

16. Карпин В.А., Филатова О.Е., Солтыс Т.А., Соколова А.А., Башкатова Ю.В., Гудков А.Б. Сравнительный анализ и синтез показателей сердечно-сосудистой системы у представителей арктического и высокогорного адаптивных типов // Экология человека.– 2013.– № 7.– С. 3–9.

17. Eskov V.M. Models of hierarchical respiratory neuron networks // Neurocomputing.– 1996.– V. 11, № 2-4.– С. 203–226.

18. Eskov V.M., Filatova O.E. Respiratory rhythm generation in rats: the importance

of inhibition // Neurophysiology.– 1993.– V. 25, № 6.– P. 420.

19. Eskov V.M., Kulaev S.V., Popov Yu.M., Filatova O.E. Computer technology for measurement of instability origin in stationary regimes of biological dynamic system // Measurement techniques.– 2006.– № 1.– P. 40–45.

20. Eskov V.M., Eskov V.V., Filatova O.E. Medical and biological measurements: characteristic features of measurements and modeling for biosystems in phase spaces of states // Measurement techniques.– 2011.– V. 53, № 12.– P. 1404–1410.

21. Eskov V.M., Eskov V.V., Filatova O.E., Filatov M.A. Two types of systems and three types of paradigms in systems philosophy and system science // Journal of Biomedical Science and Engineering.– 2012.– V. 5, № 10.– P. 602.

#### References

1. Vapnik VN. Vosstanovlenie zavisimostey po empiricheskim dannym. Moscow: Nauka; 1979. Russian.

2. Vapnik VN, Glazkova TG, Koshcheev VA, Mikhal'skiy AI, Chervonenkis AY. Algoritmy i programmy vosstanovleniya zavisimostey. Moscow: Nauka; 1984. Russian.

3. Vakhmina YuV. Modeli slozhnykh sistem s pozitsiy fiziki i teorii khaosamoorganizatsii. Slozhnost'. Razum. Postneklassika. 2013;1:51-9. Russian.

4. Vedyasova OA, Es'kov VM, Zhivoglyad RN. Sootnoshenie mezhdue deterministskimi i stokhasticheskimi podkhodami v modelirovanii sinergizma i ustoychivosti raboty dykhatel'nogo tsentra mlekopitayushchikh. Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy. 2005;12(2):23-4. Russian.

5. Gavrilenko TV, Es'kov VM, Khadartsev AA. Novye metody dlya gerontologii v prognozakh dolgozhitel'stva koren'nogo naseleniya Yugry. Uspekhi gerontologii. 2014;27(1):30-6. Russian.

6. Es'kov VM, Filatova OE, Papshev VA. Skanirovanie dvizhushchikhsya po-verkhnostey biologicheskikh ob'ektov. Izmeritel'naya tekhnika. 1996;5:66. Russian.

7. Es'kov VM, Zilov VG, Khadartseva AA. Novye podkhody v teoreticheskoy biologii i meditsine na baze teorii khaosa i sinergetiki. Sistemnyy analiz i upravlenie v biomeditsinskikh sistemakh. 2006;5(3):617-22. Russian.
8. Es'kov VM, Nazin AG, Rusak SN. Sistemnyy analiz i sintez vliyaniya dinamiki klimatoekologicheskikh faktorov na zabolevaemost' naseleniya Severa RF. Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy. 2008; 15(1):26-9. Russian.
9. Es'kov VM, Es'kov VV, Filatova OE. Osobennosti izmereniy i modelirovaniya biosistem v fazovykh prostranstvakh sostoyaniy. Izmeritel'naya tekhnika. 2010;12:53-7. Russian.
10. Es'kov VM, Filatova OE, Khadartseva AA, Khadartseva KA. Fraktal'naya dinamika povedeniya chelovekomernykh sistem. Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy. 2011;18(3):330-1. Russian.
11. Es'kov VM, Es'kov VV, Filatova OE. Osobyie svoystva biosistem i ikh modelirovaniye. Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy. 2011;18(3):331-2. Russian.
12. Es'kov VM, Gavrilenko TV, Kozlova VV, Filatov MA. Izmerenie parametrov dinamiki mikrokhosa v povedenii real'nykh biosistem. Metrologiya. 2012;7:39-48. Russian.
13. Es'kov VM, Es'kov VV, Gavrilenko TV, Zimin MI. Neopredelennost' v kvantovoy mekhanike i biofizike slozhnykh sistem. VMU. Seriya 3. FIZIKA. ASTRONOMIYA. 2014;5:41-6. Russian.
14. Zimin MI. Metod strukturnoy minimizatsii riska v zadachakh stroitel'noy mekhaniki. Tezisy dokladov pyatnadtsatoy respublikanskoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii po problemam stroitel'stva i mashinostroyeniya. Nal'chik, Kabardino-Balkarskiy gosudarstvennyy universitet; 1988. Russian.
15. Zimin MI, Vakhmina YuV, Gavrilenko TV. Modeli slozhnykh sistem s pozitsiy fiziki i teorii khaosa-samoorganizatsii. Slozhnost'. Razum. Postneklassika. 2013;1:51-9. Russian.
16. Karpin VA, Filatova OE, Soltys TA, Sokolova AA, Bashkatova YuV, Gudkov AB. Sravnitel'nyy analiz i sintez pokazateley serdechno-sosudistoy sistemy u predstaviteley arkticheskogo i vysokogornogo adaptivnykh tipov. Ekologiya cheloveka. 2013;7:3-9. Russian.
17. Eskov VM. Models of hierarchical respiratory neuron networks. Neurocomputing. 1996;11(2-4):203-26.
18. Eskov VM, Filatova OE. Respiratory rhythm generation in rats: the importance of inhibition. Neurophysiology. 1993;25(6):420.
19. Eskov VM, Kulaev SV, Popov YuM, Filatova OE. Computer technology for measurement of instability origin in stationary regimes of biological dynamic system. Measurement techniques. 2006;1:40-5.
20. Eskov VM, Eskov VV, Filatova OE. Medical and biological measurements: characteristic features of measurements and modeling for biosystems in phase spaces of states. Measurement techniques. 2011;53(12): 1404-10.
21. Eskov VM, Eskov VV, Filatova OE, Filatov MA. Two types of systems and three types of paradigms in systems philosophy and system science. Journal of Biomedical Science and Engineering. 2012;5(10):602.