

DOI: 10.12737/22116

**ПРИМЕНИМОСТЬ ТЕОРЕМЫ ТАКЕНСА ОБ ОБНАРУЖЕНИИ  
«СТРАННЫХ АТТРАКТОРОВ» ДЛЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

В.А. ГАЛКИН, Т.В. ГАВРИЛЕНКО, И.Н. ДЕВИЦЫН

*БУ ВО Ханты-Мансийского автономного округа – Югры «Сургутский государственный университет», г. Сургут, пр. Ленина, д. 1, г. Сургут, 628400, Россия*

**Аннотация.** Моделирование биологических систем и анализ медико-биологических данных является очень сложной задачей для исследователя. Кроме того, биологические системы зачастую бывает невозможно описать с помощью периодических законов, потому что при одинаковых внешних условиях и начальных параметрах они ведут себя непредсказуемо, что является одним из признаков хаотических динамических систем. Ф. Такенс показал способ, с помощью которого теоретически можно проверить наличие «странных аттракторов» в фазовом пространстве динамической системы. Дополнительным препятствием служит тот факт, что применение данной теоремы существенно ограничено высокой вычислительной сложностью. В данной работе не получили подтверждение того, что величины топологической энтропии и предельной ёмкости, рассчитанные по теореме Такенса отличаются для различных видов данных, в том числе и для систем с наличием «странных аттракторов».

**Ключевые слова:** теорема Такенса, странный аттрактор, моделирование.

**APPLICABILITY TAKENS THEOREM ABOUT THE DISCOVERY  
"STRANGE ATTRACTORS" FOR BIOLOGICAL SYSTEMS**

V.A. GALKIN, T.V. GAVRILENKO, I.N. DEVITSYN

*Surgut State University, Lenina pr., 1, Surgut, 628400, Russia*

**Abstract.** It was modeling biological systems and analysis of medical and biological data is a very difficult task for researchers. In addition, biological systems is often impossible to describe using the periodic law, because they behave differently under the same environmental conditions, and the initial parameters, which is one of the hallmarks of chaotic dynamical systems. F. Takens has shown the way in which it is theoretically possible to verify the existence of "strange attractors" in the phase space of a dynamical system. It was an additional obstacle is the fact that the use of this theorem essentially limited to high computational complexity. In this work we have not received confirmation of the fact that the values of the topological entropy and maximum capacity, calculated according to the Takens theorem are different for different types of data, including systems for the presence of "strange attractors".

**Key words:** Takens theorem, strange attractor, modeling.

Математическое моделирование биологических систем и анализ медико-биологических данных является очень сложной задачей для исследователя [11-18]. Это связано с обилием разнообразных физических процессов, протекающих в живых организмах, включая химические процессы синтеза и распада, процессы передачи электрических сигналов в нервной системе,

процессы энергетического обмена и т.д. Следовательно, полная и точная модель биологической системы будет обладать невероятной сложностью и требовать огромных затрат вычислительных ресурсов для расчётов. Кроме того, биологические системы зачастую бывает невозможно описать с помощью периодических законов, потому что при одинаковых внешних условиях и

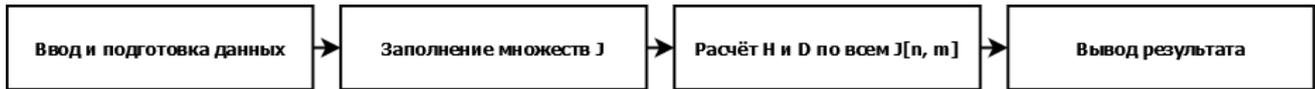


Рис.1. Схема расчёта

начальных параметрах они ведут себя по-разному, что является одним из признаков хаотических динамических систем [1-10]. Ф. Такенс в [20] показал способ, с помощью которого теоретически можно проверить наличие «странных аттракторов» в фазовом пространстве динамической системы. *Аттрактор* – это компактное подмножество фазового пространства динамической системы, траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при времени, стремящемуся к бесконечности. «Странные» аттракторы, в отличие от классических, обладают непериодической траекторией, неустойчивым режимом функционирования и характеризуются высокой чувствительностью к начальным условиям [19,21].

Согласно теореме Ф. Такенса, временной ряд  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  может быть представлен гладкой детерминированной моделью, если  $\frac{\ln C_{n,\epsilon}}{n}$  равномерно ограничена при  $n \rightarrow \infty$ . Для такого ряда может быть рассчитана топологическая энтропия

$$H = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln C_{n,\epsilon}}{n} \right) \right) \quad (1)$$

и предельная ёмкость

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf \left( \frac{\ln C_{n,\epsilon}}{-\ln \epsilon} \right) \right), \quad (2)$$

где  $C_{n,\epsilon}$  – число элементов множества  $J_{n,\epsilon} \subset N_0$ .  $J_{n,\epsilon}$  определено следующим образом:  $0 \in J_{n,\epsilon}, i > 0, i \in J_{n,\epsilon} \Leftrightarrow$  для всех  $0 \leq j \leq i, j \in J_{n,\epsilon}, \max(|x_i - x_j|, |x_{i+1} - x_{j+1}|, \dots, |x_{i+n} - x_{j+n}|) \geq \epsilon$ .

Можно говорить о наличии «странных аттракторов» в  $\{x_i\}$ , если топологическая энтропия  $\{x_i\}$  положительна, а предельная ёмкость стремится к нецелому значению.

Для расчёта энтропии и предельной ёмкости конечной последовательности данных  $\{x_i\}_{i=1}^N$  Такенс предлагает поступать следующим образом:

1) для всех  $n + m \leq N$  множества  $J_{n,\epsilon,m} \subset N_0$  определить так:

$$0 \in J_{n,\epsilon,m}, i > 0, \quad (3)$$

2)  $i \in J_{n,\epsilon,m}$ , если одновременно выполняются:

a)  $i \leq m$  и

b) для всех

$$j < i, j \in J_{n,\epsilon,m}, \max_{0 \leq k \leq n} |x_{i+k} - x_{j+k}| \geq \epsilon,$$

используя при расчётах предельной ёмкости и энтропии  $C_{n,\epsilon,m}$  – число элементов множества  $J_{n,\epsilon,m}$  – как аппроксимацию  $C_{n,\epsilon}$  [1].

На основе данной теоремы была разработана схема расчёта.

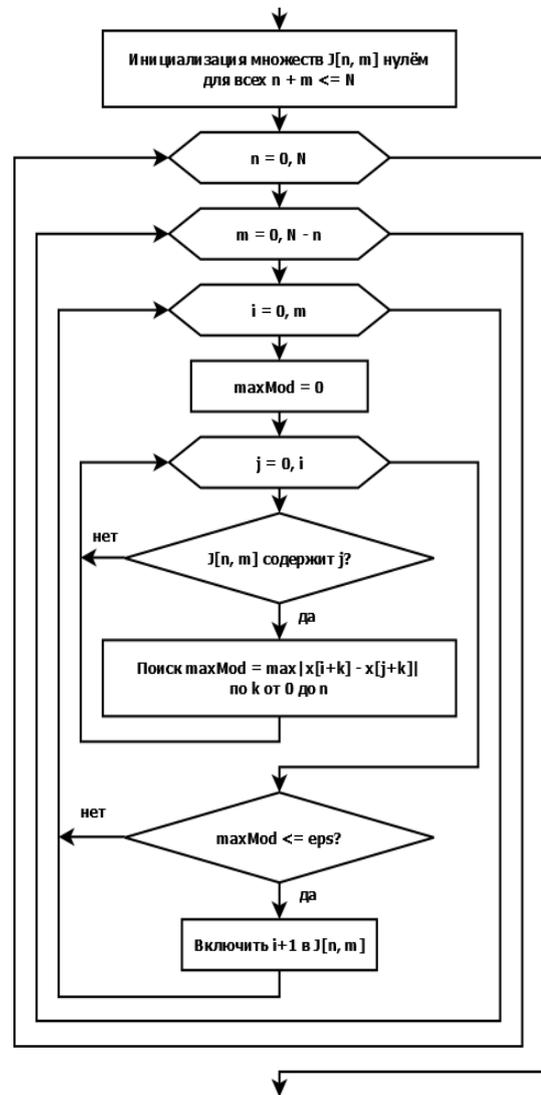


Рис. 2. Алгоритм заполнения множеств  $J_{n,\epsilon,m}$

Ключевым моментом является заполнение множеств согласно условиям (3), после чего производится расчёт предельной ёмкости и топологической энтропии по формулам (2) и (1) соответственно. Этап заполнения множеств более подробно изображён на рис. 2.

Таблица 1

**Результаты расчёта энтропии  $H$  и предельной ёмкости  $D$**

Исх. данные / Параметры	Треморограмма	Цифры числа $\pi$	Циклическая послед-ть	Случайные числа
$N=100, \epsilon=0,01$	$H=0,04631$ $D=0,99561$	$H=0,04652$ $D=1,00000$	$H=0,04652$ $D=1,00000$	$H=0,04642$ $D=0,99782$
$N=100, \epsilon=0,001$	$H=0,04642$ $D=0,66521$	$H=0,04652$ $D=0,66667$	$H=0,04652$ $D=0,66667$	$H=0,04652$ $D=0,66667$
$N=200, \epsilon=0,01$	$H=0,02657$ $D=1,14833$	$H=0,02662$ $D=1,15051$	$H=0,02662$ $D=1,15051$	$H=0,02662$ $D=1,15051$
$N=500, \epsilon=0,01$	$H=0,01245$ $D=1,34861$	$H=0,01245$ $D=1,34949$	$H=0,01245$ $D=1,34949$	$H=0,01245$ $D=1,34949$

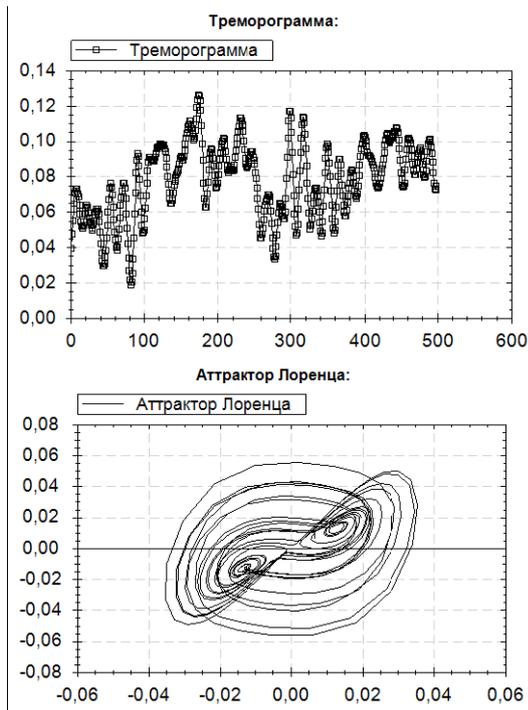


Рис. 3. Примеры исходных данных

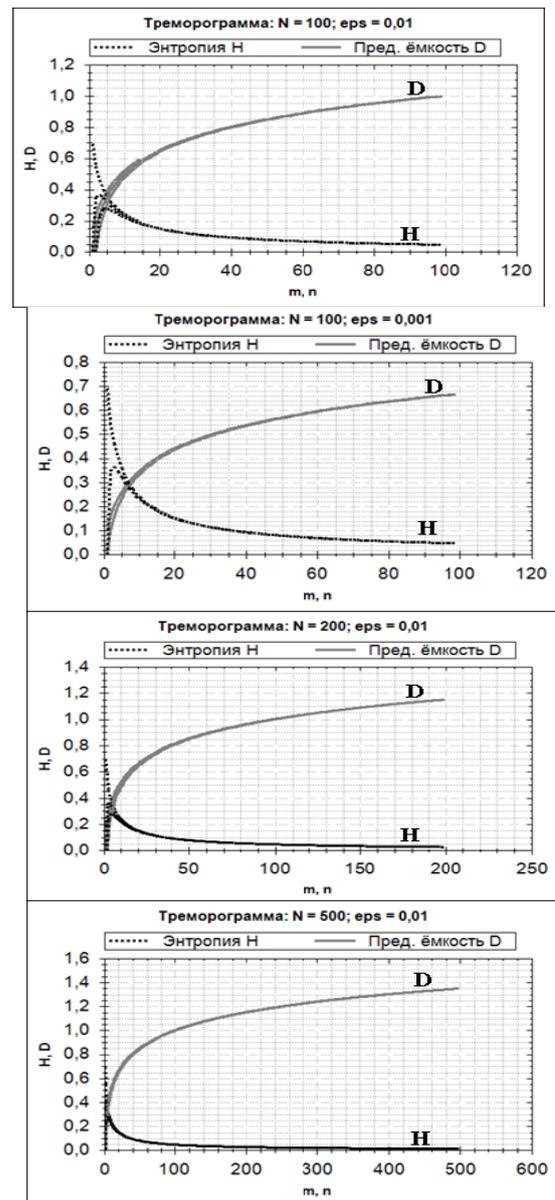


Рис. 4. Результаты расчёта для треморограммы

Для тестирования данного алгоритма были выбраны несколько различных наборов исходных данных: треморограмма (рис. 3), цифры числа  $\pi$ , циклическая последовательность  $\{1, 3, 5, 7, 9, 1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$  и последовательность случайных чисел на отрезке  $[0; 0,1]$ . Для корректного сравнения результатов все данные были нормированы. Результаты расчёта приведены в табл. 1 и на рис. 4.

Судя по результатам расчёта, можно сделать вывод о том, что величина топологической энтропии и предельной ёмкости практически не зависит от исходных данных, а определяется величиной  $\epsilon$  и объёмом выборки данных  $N$ .

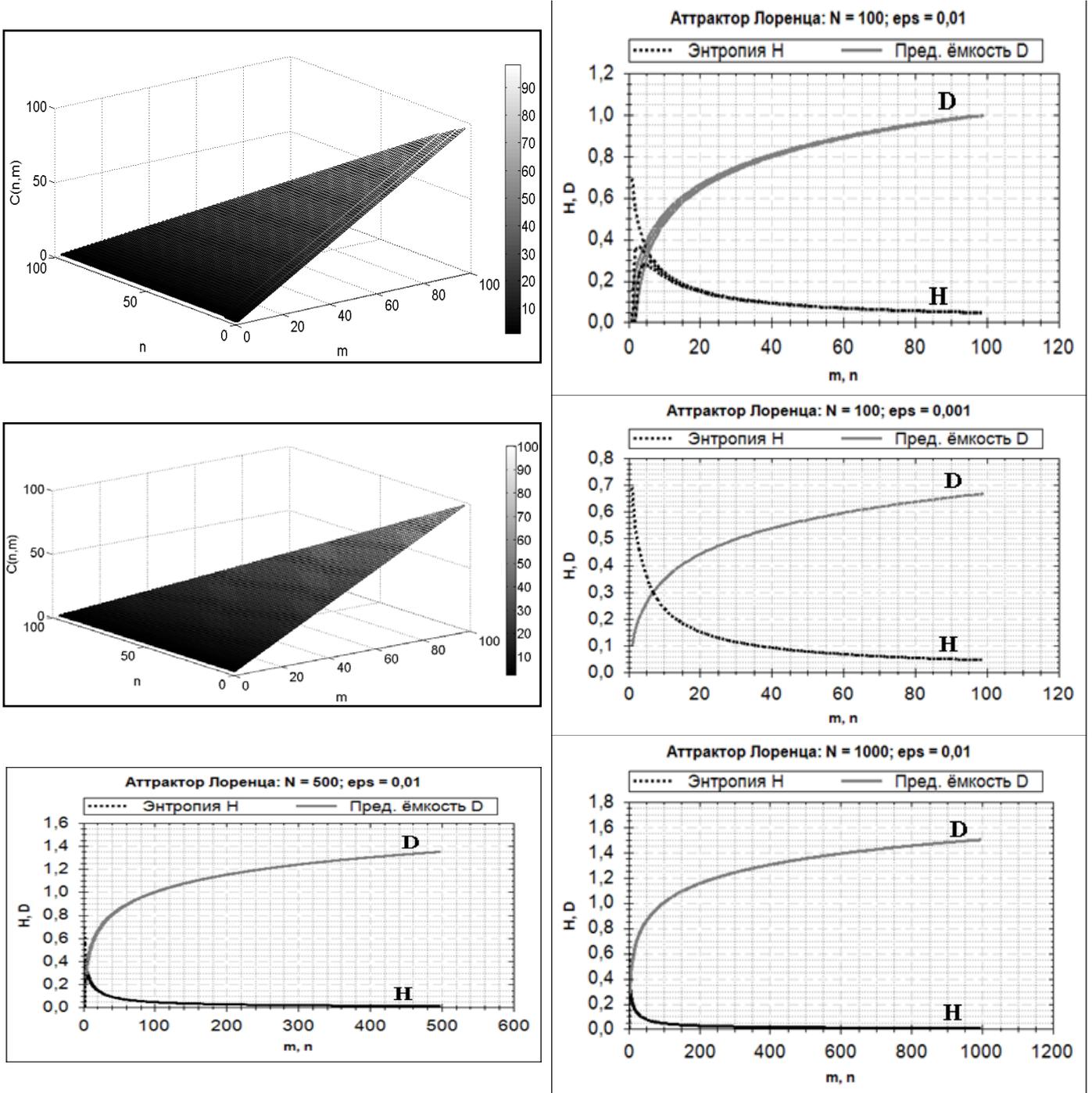


Рис. 5. Графики заполнения множеств  $J_{n,\epsilon,m}$  и результаты расчёта для решения системы Лоренца

Для проверки данного предположения в качестве исходных данных было выбрано классическое решение системы Лоренца (4) с параметрами  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  и  $\beta = 8/3$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z \end{cases} \quad (4)$$

По результатам расчётов (табл. 2, рис. 6) можно видеть, что значения топологической энтропии для решения системы Лоренца практически не отличаются от соответствующих значений для прочих тестовых данных.

Ф. Такенс в [1] после доказательства своей теоремы приводит важное указание на то, каким образом нужно производить

расчёты для конечных последовательностей данных (3), при этом отмечая, что  $C_{n,\varepsilon,m}$  можно использовать как аппроксимацию  $C_{n,\varepsilon}$  при условии что разница между величинами  $C_{n,\varepsilon,m}$  и  $C_{n,\varepsilon,\frac{m}{2}}$  должна быть не существенной, а именно порядка 1-2%. Тем не менее, нам при расчётах не удалось получить характер заполнения множеств  $J_{n,\varepsilon,m}$  отличный от линейного при достаточно малых  $\varepsilon$  (рис. 5).

Дополнительным препятствием служит тот факт, что применение данной теоремы существенно ограничено высокой вычислительной сложностью. Оценка вычислительной сложности используемого алгоритма заполнения множеств  $J_{n,\varepsilon,m}$  составляет  $O(N^4)$ , этим обусловлен очень быстрый рост времени расчёта в зависимости от объёма выборки исходных данных.

Таблица 2

### Результаты расчёта для решения системы Лоренца

Параметры	$N=100$ $\varepsilon=0,01$	$N=100$ $\varepsilon=0,001$	$N=200$ $\varepsilon=0,01$	$N=500$ $\varepsilon=0,01$	$N=1000$ $\varepsilon=0,01$
Решение системы Лоренца	$H=0,0$ 4631 $D=0,9$ 9561	$H=0,0$ 4652 $D=0,6$ 6667	$H=0,0$ 2657 $D=1,1$ 4833	$H=0,0$ 1245 $D=1,3$ 4861	$H=0,0$ 0693 $D=1,4$ 9957

Таким образом, в данной работе мы не получили подтверждение того, что величины топологической энтропии и предельной ёмкости, рассчитанные по теореме Такенса отличаются для систем с наличием или отсутствием «странных аттракторов».

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (15-41-00059 p\_урал\_a, 14-01-00478 А)*

### Литература

### References

1. Веракса А.Н., Горбунов Д.В., Шадрин Г.А., Стрельцова Т.В. Эффект Еськова-Зинченко в оценке параметров теппинга методами теории хаоса-самоорганизации и энтропии // Сложность. Разум. Постнеклассика. 2016. №1. С. 17–24.
  2. Галкин В. А. Анализ математических моделей: системы законов сохранения, уравнения Больцмана и Смолуховского. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 408 с.
  3. Григоренко В.В., Еськов В.М. Анализ временных рядов в исследовании процессов хаотической динамики // Естественные и технические науки. 2016. №7. С.92–98.
  4. Еськов В.В., Еськов В.М., Карпин В.А., Филатов М.А. Синергетика как третья парадигма, или понятие парадигмы в философии и науке // Философия науки. 2011. №4(51). С. 126–128.
  5. Еськов В.М., Еськов В. В., Добрынин Ю. В., Гришаева Ю. Е. Системный анализ параметров квазиаттракторов кардиореспираторной системы больных, постоянно проживающих в условиях Севера РФ, в стадии обострения хронических заболеваний в зависимости от пола и возраста // Вестник медицинских технологий. 2010. Т. 17, № 1. С. 19–21.
- Veraksa AN, Gorbunov DV, Shadrin GA, Strel'tsova TV. Effekt Es'kova-Zinchenko v otsenke parametrov teppinga metodami teorii khaosa-samoorganizatsii i entropii. Slozhnost'. Razum. Postneklassika. 2016;1:17-24. Russian.
- Galkin VA. Analiz matematicheskikh modeley: sistemy zakonov sokhraneniya, uravneniya Bol'tsmana i Smolukhovskogo. Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy; 2009. Russian.
- Grigorenko VV, Es'kov VM. Analiz vremennykh ryadov v issledovanii protsessov khaos-ticheskoy dinamiki. Estestvennye i tekhnicheskie nauki. 2016;7:92-8. Russian.
- Es'kov VV, Es'kov VM, Karpin VA, Filatov MA. Sinergetika kak tret'ya paradigma, ili ponyatie paradigmy v filosofii i nauke. Filosofiya nauki. 2011;4(51):126-8. Russian.
- Es'kov VM, Es'kov VV, Dobrynin YV, Grishaeva YE. Sistemnyy analiz parametrov kvaziattraktorov kardiorespiratornoy sistemy bol'nykh, postoyanno prozhivayushchikh v usloviyakh Severa RF, v stadii obostreniya khronicheskikh zabolevaniy v zavisimosti ot pola i vozrasta. Vestnik meditsinskikh tekhnologii. 2010;17(1):19-21. Russian.

6. Еськов В.М., Еськов В.В., Филатова О.Е., Хадарцев А.А. Особые свойства биосистем и их моделирование // Вестник новых медицинских технологий. 2011. Т. 18, № 3. С. 331–332. Es'kov VM, Es'kov VV, Filatova OE, Khadartsev AA. Osobyie svoystva biosistem i ikh modelirovanie. Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy. 2011;18(3):331-2. Russian.
7. Еськов В.М., Хадарцев А.А., Каменев Л.И. Новые биоинформационные подходы в развитии медицины с позиций третьей парадигмы (персонифицированная медицина - реализация законов третьей парадигмы в медицине) // Вестник новых медицинских технологий. 2012. Т. 19, №3. С. 25–28. Es'kov VM, Khadartsev AA, Kamenev LI. Novye bioinformatsionnye podkhody v razvitii meditsiny s pozitsiy tret'ey paradigmy (personifitsirovannaya meditsina - realizatsiya zakonov tret'ey paradigmy v meditsine). Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy. 2012;19(3):25-8. Russian.
8. Еськов В.М., Хадарцев А.А., Козлова В.В., Филатова О.Е. Использование статистических методов и методов многомерных фазовых пространств при оценке хаотической динамики параметров нервно-мышечной системы человека в условиях акустических воздействий // Вестник новых медицинских технологий. 2014. Т. 21, № 2. С. 6–10. Es'kov VM, Khadartsev AA, Kozlova VV, Filatova OE. Ispol'zovanie statisticheskikh metodov i metodov mnogomernykh fazovykh prostranstv pri otsenke khaoticheskoy dinamiki parametrov nervno-myshechnoy sistemy cheloveka v usloviyakh akusticheskikh vozdeystviy. Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy. 2014;21(2):6-10. Russian.
9. Еськов В.М., Филатова О.Е., Хадарцева К.А., Еськов В.В. Универсальность понятия «гомеостаза» // Клиническая медицина и фармакология. 2015. №4(4). С. 29–33. Es'kov VM, Filatova OE, Khadartseva KA, Es'kov VV. Universal'nost' ponyatiya «gomeostaza». Klinicheskaya meditsina i farmakologiya. 2015;4(4):29-33. Russian.
10. Еськов В.М., Зинченко Ю.П., Филатов М.А., Поскина Т.Ю. Эффект Н.А. Бернштейна в оценке параметров тремора при различных акустических воздействиях // Национальный психологический журнал. 2015. № 4(20). С. 66–73. Es'kov VM, Zinchenko YP, Filatov MA, Poskina TY. Effekt N.A. Bernshteyna v otsenke parametrov tremora pri razlichnykh akusticheskikh vozdeystviyakh. Natsional'nyy psikhologicheskiy zhurnal. 2015;4(20):66-73. Russian.
11. Еськов В.М., Хадарцев А.А., Еськов В.В., Вохмина Ю.В. Хаотическая динамика кардиоинтервалов трёх возрастных групп представителей коренного и пришлого населения Югры // Успехи геронтологии. 2016. Т. 29, № 1. С. 44–51. Es'kov VM, Khadartsev AA, Es'kov VV, Vokhmina YV. Khaoticheskaya dinamika kar-diointervalov trekh vozrastnykh grupp predstaviteley korenno go i prishlogo naseleniya Yugry. Uspekhi gerontologii. 2016;29(1):44-51. Russian.
12. Еськов В.М., Газя Г.В., Майстренко Е.В., Болтаев А.В. Влияние промышленных электромагнитных полей на параметры сердечнососудистой системы работников нефтегазовой отрасли // Экология и промышленность России. 2016. № 1. С. 59–63. Es'kov VM, Gazya GV, Maystrenko EV, Boltaev AV. Vliyanie promyshlennykh elek-tromagnitnykh poley na parametry serdechnosudistoy sistemy rabotnikov neftegazovoy otrasli. Ekologiya i promyshlennost' Rossii. 2016;1:59-63. Russian.
13. Еськов В.М., Зинченко Ю.П., Филатов М.А., Стрельцова Т.В. Стресс-реакция на холод: энтропийная и хаотическая оценка // Национальный психологический журнал. 2016. № 1(21). С. 45–52. Es'kov VM, Zinchenko YP, Filatov MA, Strel'tsova TV. Stress-reaktsiya na kholod: entropiynaya i khaoticheskaya otsenka. Natsional'nyy psikhologicheskiy zhurnal. 2016;1(21):45-52. Russian.
14. Крянев А.В., Лукин Г.В., Удумян Д.К. Метрический анализ и обработка данных. М.: Физматлит, 2012. 308 с. Kryanev AV, Lukin GV, Udumyan DK. Metricheskii analiz i obrabotka dannykh. Moscow: Fizmatlit; 2012. Russian.
15. Фудин Н.А., Еськов В.М., Белых Е.В., Троицкий А.С., Борисова О.Н. Избранные медицинские технологии в работе спортивного тренера (по материалам тульской и сургутской научных школ) // Клиническая медицина и фармакология. 2015. № 3 (3). С. Fudin NA, Es'kov VM, Belykh EV, Troitskiy AS, Borisova ON. Izbrannye meditsinskie tekhnologii v rabote sportivnogo trenera (po materialam tul'skoy i surgutskoy nauchnykh shkol). Klinicheskaya meditsina i farmakologiya. 2015;3 (3):56-61. Russian.

56–61.

16. Хадарцев А.А., Еськов В.М., Хадарцев В.А., Иванов Д.В. Клеточные технологии с позиций синергетики // Вестник новых медицинских технологий. 2009. Т. 16. № 4. С. 7–9. Khadartsev AA, Es'kov VM, Khadartsev VA, Ivanov DV. Kletochnye tekhnologii s pozitsiy sinergetiki. Vestnik novykh meditsinskikh tekhnologiy. 2009;16(4):7-9. Russian.
17. Хадарцев А.А., Еськов В.М., Козырев К.М., Гонтарев С.Н. Медико-биологическая теория и практика. Тула, 2011. Khadartsev AA, Es'kov VM, Kozyrev KM, Gontarev SN. Mediko-biologicheskaya teoriya i praktika. Tula; 2011. Russian.
18. Хадарцев А.А., Еськов В.М., Винокуров Б.Л., Морозов В.Н., Кидалов В.Н., Филатова О.Е., Гонтарев С.Н., Хадарцева К.А., Цогоев А.С., Наумова Э.М., Крюкова С.В., Митрофанов И.В., Валентинов Б.Г., Седова О.А. Восстановительная медицина. Тула, 2010. Том I. Khadartsev AA, Es'kov VM, Vinokurov BL, Morozov VN, Kidalov VN, Filatova OE, Gontarev SN, Khadartseva KA, Tsogoev AS, Naumova EM, Kryukova SV, Mitrofanov IV, Valentinov BG, Sedova OA. Vosstanovitel'naya meditsina. Tula; 2010. Tom I. Russian.
19. Шустер Г. Детерминированный хаос: введение. М.: Мир, 1988. 253 с. Shuster G. Determinirovanny khaos: vvedenie. Moscow: Mir; 1988. Russian.
20. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence / In Rand D.A. and Young L.S. // Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics. 1981. V. 898. P. 366–381. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. In Rand DA. and Young LS. Dynamical Systems and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics. 1981;898:366-81.
21. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Comm. Math. Phys. 1971. №20. P. 167–192. Ruelle D, Takens F. On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. 1971;20:167-92.