УДК 372.851

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МОДУЛЯ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ»

Н.К. Солопова[1], И.Ю.Иванова[2], А.М. Бобкова[3], А.Д.Нахман[4],

[1,2] ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»,Тамбов,
[3] МАОУ Лицей№29, Тамбов,
[4] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет», Тамбов,

e-mail: alextmb@mail.ru

Аннотация. Изучаются вопросы формирования практико-ориентированных знаний и умений учащихся средствами предметной области «Математика». Рассмотрены концепция математического моделирования и схема представления модели. На конкретных примерах продемонстрированы этапы формализации, исследования и интерпретации детерминированных и стохастических моделей. Обоснован тезис о том, что в свойстве универсальности математических моделей проявляется интегрирующая роль математики и ее методов.

Ключевые слова: математические модели, этапы моделирования, схема представления, универсальность.

CURRENT ISSUES OF TEACHING OF MODULE "MATHEMATICAL MODELS"

N.K. Solopova [1], I.Yu.Ivanova[2], A.M. Bobkova[3], A.D.Nakhman[4]

[1,2] Tambov Institute of improvement of professional skill,
[3] Lyceum №29, Tambov,
[4] Tambov State Technical University,
e-mail: alextmb@mail.ru

Abstract. We study the questions of formation of a practice-oriented knowledge and skills of pupils by means of domain "Mathematics". The concept of mathematical modeling and circuit of model representation are given. By specific examples are shown stages of formalization, study and interpretation of deterministic and stochastic models. Substantiated the thesis that the property of the universality of mathematical models shows the integrating role of mathematics and its methods.

Keywords: mathematical models, simulation steps, presentation scheme, versatility.

Формирование практико-ориентированных знаний и умений учащихся– одна из наиболее актуальных задач, стоящих перед системой математического образования. Так, Концепции развития российского математического образования [1] утверждает, что «…выбор содержания математического образования на всех уровнях образования продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни…». Именно в решении задачах прикладной и практической направленности заложен наибольший потенциал для роста мотивации учащихся к математической деятельности. Мотив рождается как следствие осознания учащимися возможностей математической науки в описании, исследовании, прогнозировании характера происходящих процессов и явлений, приобретения представлений о широком спектре применений математических знаний и умений.

1. Понятие модели на интуитивном уровне. С понятием модели и целями моделирования учащемуся на доступном уровне целесообразно познакомиться уже в курсе основной школы. Модель в его представлении должна ассоциироваться с неким образом реального объекта или процесса, моделирование – это путешествие в сказочную страну «Математика», где живут символы, формулы, графики, геометрические фигуры и др., в которые волшебным образом превратились предметы, взаимоотношения, действия, существующие в реальном мире. При этом задача учащегося – выполнить какие-либо действия и «разгадать», что кроется за итоговой формулой, тем или иным результатом, - словом, восстановить цепочку подлинных событий и фактов.

Ознакомление с «миром моделей» на более строгом уровне возможно в старшей школе.

2. Математическое моделирование: концепция и этапы. Моделирование традиционно понимается как замещение некоторого объекта A (оригинала) другим доступным объектом M (моделью) с целью изучения свойств оригинала. Имеющиеся в литературе подходы к соответствующему понятию позволяют нам выделить то общее, что присуще именно *математической* модели: математическая модель есть образ оригинала, выраженный с помощью математических символов (математическим языком) и позволяющий свойства объекта-прообраза, его параметры, внутренние и внешние связи описать в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций ([2]).

Другими словами, прикладная задача "переводится" на формальный математический язык, и решается средствами же математики; следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются затем на языке, принятом в данной предметной области.

Учащиеся должны четко представлять и уметь реализовывать (на доступном им уровне) три основные этапа процесса математического моделирования:

1.Содержательная модель (описание ситуации, процесса в терминах исходной предметной области). Формализация модели (формулировка математической задачи).

2.Исследование модели средствами математики (решение математической задачи).

3.Интерпретация модели: выводы в терминах исходной предметной области. Именно на этапе возвращения к исходной предметной области мы получаем требуемую информацию об исходном процессе (явлении), которую мы не могли получить другими средствами. В частности, если речь идет о процессе, то возникает возможность

- определить состояние процесса в определенные моменты времени, промежуточные между теми, в которые это состояние уже было известно;
- прогнозировать состояние процесса за рамками данного временного интервала.

Первая возможность называется *интерполяцией*, вторая – *экстраполяцией.*

Пример 1. Я решил «прикольным образом» покрасить пол в моей комнате в два разных цвета, разделив его по диагонали. Хватит ли мне литровой банки зеленой краски на половину комнаты, если размеры комнаты таковы: длина 5 м, ширина 3 м., а расход краски составляет 1 л. на 10 м^2

Мама разрешит мне осуществить этот план, если я запишу формулу для расчета расхода краски в виде зависимости ее количества (в литрах) от площади окрашиваемой поверхности (в м^2). Какова должна быть эта формула?

Решение.

1. Содержательная модель: общий расход краски прямо пропорционален площади окрашиваемой поверхности, то есть надо найти площадь половины комнаты, перемножить с расходом краски на 1 м^2, и сравнить результат с 1 литром краски в банке.

Формализация задачи:

$c = \frac{1}{10}$ л. - расход краски на 1 м^2 ,

S - площадь комнаты (подлежит нахождению);

V - общий расход краски (требуется по условию задачи).

2. Математическая модель:

$V = c \cdot S$, где площадь $S = \frac{1}{2} x \cdot y$ найдена как половина площади прямоугольника, x - длина, y - ширина комнаты.

Итак, математическая постановка задачи: провести вычисления по формуле $V = \frac{1}{2} cxy$ (формула, которую просила получить мама). Имеем $V = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot 5 \cdot 3 = 0{,}75$

3. Интерпретация модели в данном случае состоит из сравнения результата с объемом банки 1 л.; имеем $0{,}75 < 1$, то есть краски хватит и еще четверть банки останется.

3. Схема представления модели. Полезно ознакомить учащихся со следующей общей схемой представления модели: $X \to W \to Y$. Здесь X – вектор входных переменных, Y – вектор выходных переменных (исходы модели); W – так называемый оператор модели, обеспечивающий преобразование информации (X преобразуется в Y) в соответствие с задачей, решаемой на модели. Имеются следующие три варианта упомянутых задач:

1) *прямая задача*: известны X и W, необходимо найти Y;

2) *обратная задача* 1: известны Y и W, необходимо найти X;

3) *обратная задача* 2: известны X и Y, необходимо найти W.

В последней задаче случае возможны случаи «черного ящика» – оператор модели полностью неизвестен, и «серого ящика» – при известной структуре оператора неизвестны значения параметров.

Так, например, в учебных задачах, относящихся к моделированию физических процессов, в качестве вектора входных переменных X обычно выбирается набор физических характеристик объектов, подверженных, например, механическим колебаниям (струна, стержень), совокупность теплофизических характеристик материалов, в которых происходит теплообмен; в задачах экономики вектор X определяется набором исходных данных, подлежащих анализу (объем выпускаемой продукции, цены, показатели спроса и др.) и т.д. В основе построения оператора модели лежит некоторый физический закон, закономерности рынка и т.п. Формализовав изучаемую закономерность, мы приходим к соответствующей математической задаче, которая, собственно, и служит оператором модели (уравнения или их системы, задача минимизации функционала и др.). На следующем, втором этапе моделирования, решается полученная математическая задача. Итоговый результат (число или набор чисел, функция или совокупность функций, функциональный ряд и др.) и порождает компоненты вектора Y выходных переменных.

Здесь следует подчеркнуть, что поиск оператора модели часто есть составная часть процесса моделирования.

Пример 2. Известно, что в условиях данного опыта температура нагревающейся жидкости растет по линейному закону. В начальный момент температура была равна 20^0 С, а через 40 секунд она поднялась до 25^0. Определить, какая температура жидкости была через 25 секунды с момента начала нагрева.

Данная задача относится к числу интерполяционных: найти промежуточное состояние процесса. Если считать , что вектор входных переменных имеет компонентами заданные моменты времени, т.е. X={0, 24, 40}, а Y={20, y, 24}- вектор выходных переменных, т.е. наблюдаемых «на выходе» температур, то нахождению подлежит значение y=y(25). При этом, по условию задачи, оператор модели W имеет линейную структуру $y = kx + b$, т.е. представляет собою «серый ящик». Нахождению подлежат значения параметров k и b. Имеем

$\begin{cases} 20 = k \cdot 0 + b \\ 24 = k \cdot 40 + b \end{cases}$, откуда b=20, k=0,1.

Итак, оператор модели $y = 0{,}1x + 20.$ Теперь $y = 0{,}1 \cdot 25 + 20$ или $y = 22{,}5^0$.

4. Детерминированные и стохастические модели. Существует несколько классификаций, определяемых теми признаками, которые кладут в основу рассмотрения. Среди моделей, изучаемых в школьном курсе мы выделяем

1) **детерминированные модели**; здесь исследователь исходит из предположения отсутствия всяких случайных воздействий; элементы модели (переменные, математические связи) достаточно точно установлены, поведение объекта или процесса можно точно определить. Используемый математический аппарат: алгебра, геометрия, математический анализ.

2) **стохастические модели**, которые описывают случайный характер процессов в исследуемых объектах и системах; используемый математический аппарат: теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов.

4.1. Пример детерминированной модели (задача оптимизации). На двух заводах за t^2 часов производится, соответственно, $2t$ единиц и $5t$ единиц продукции. Заказ на 580 единиц продукции надо распределить между этими заводами так, чтобы уплатить минимум зарплаты работникам. Каков будет объем выплаченной при этом зарплаты, если за 1 час работы на каждом заводе выплачивается зарплата 500 руб.?

Обсуждение. По видимому, работодателю выгоднее большую часть заказа передать второму заводу, на котором, судя по условию задачи, производительность труда намного выше. Следовательно, время выполнения заказа на каждом заводе будет различаться.

Решение.

Формализация модели. Пусть первый завод работает x^2 часов и производит при этом $2x$ единиц продукции, тогда как за y^2 часов на втором заводе производится $5y$ единиц продукции.
Следовательно,

$$2x+5y=580. \qquad (1)$$

При этом будет выплачена зарплата $U=500x^2+500y^2$. Требуется, таким образом определить наименьшее значение функции U при условии (1).

Решение «внутри модели». Перейдем к рассмотрению U как функции одного переменного. Это можно сделать, выразив, например, x из уравнения (1): $x = 290 - 2{,}5y$. Имеем

$$U=500\,((290-2{,}5y)^2 + y^2). \qquad (2)$$

Наибольшее значение этой функции определится при $y \geq 0$ с помощью стандартных средств математического анализа:
1)находим производную

$$U' = 500\,(2(290-2{,}5y)(-2{,}5)+2y).$$

2) находим стационарные точки:

$$2(290-2{,}5y)(-2{,}5)+2y=0, \text{ откуда } y=100.$$

3) определив знаки производной левее и правее точки $y=100$, мы видим, что производная меняет свой знак с минуса на плюс; значит, при $y=100$ функция U меняет убывание на возрастание, то есть ее значение в точке $y=100$ является наименьшим. Это значение получаем, подставив в (2) $y=100$:

$$U(100)=5800000.$$

Ответ: 5800000 руб.

Замечание: Можно интерпретировать модель с большей полнотой:
-продукция между заводами распределена в количестве 80 и 500 единиц продукции, соответственно;
- фонд зарплаты на первом заводе составил 800000 руб., на втором -5000000 руб.

4.2. Примеры стохастических моделей.

Пример 1 (*относительная частота, статистическая вероятность события*). Понаблюдайте на улице с не слишком интенсивным движением транспорта в течение 2 – 5 минут транспортный поток и запишите, сколько проехало мимо автомобилей, сколько среди них иномарок, сколько всего легковых автомобилей, сколько – такси . Найти относительную частоту

а)числа легковых автомобилей в транспортном потоке;

б)такси в транспортном потоке;

в)такси – среди легковых автомобилей;

г)иномарок – в транспортном потоке.

С какой вероятностью вы можете прогнозировать, что в ближайшее время первой среди проезжающих мимо машин окажется такси ?

На основе результатов наблюдения и свойства устойчивости относительной частоты определите, каким приблизительно может оказаться процент иномарок в составе городского транспорта.

Пример 2 (*статистические методы обработки выборки*). В течение 20 биржевых торгов курс доллара составил следующие значения (в рублях):

65,75; 65,8; 65,7; 65,7; 65,6; 65,65; 65,6; 65,65; 65,65; 65,7; 65,8; 65,8; 65,8; 65,7; 65,7; 65,7; 65,7; 65,6; 65,5; 65,65

Построить вариационный ряд данного распределения выборки и полигон частот.

Найти: а) моду статистического распределения Mo; б)медиану Me ; в)размах варьирования R ; г)средний курс доллара.

Если основные тенденции колебаний курса валюты будут сохраняться, то какова прогнозируемая вероятность того, что курс доллара превысит 65, 7 рубля ?

В обоих примерах строится стохастическая модель процесса (события обнаружения того или иного вида автомобиля в транспортном потоке - случайное, характер колебаний курса валюты – случайный. Аппарат исследования – методы математической статистики; прогнозируемая вероятность (в силу закона больших чисел) может быть принята равной относительной частоте соответствующего события.

Данные задание может служить примером так называемого кейс-задания. Как правило, метод математического моделирования применяют для получения максимального объёма информации, нескольких ее видов. С этой целью в процессе обучения математическим моделям целесообразно использовать именно кейс-метод, как метод ситуационного анализа. Кейсы основываются на реальном фактическом материале или же приближены к таковому. Кейс-метод требует умения оперировать понятиями и фактами, выстраивать логические схемы решения проблемы, аргументировать свое мнение. Кейс-метод интегрирует в себе такие методы познания: как анализ, синтез, описание, эксперимент, классификации и др., способствует оптимальному сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся.

Так, например, к выявлению причинно-следственных связей, и в частности, закономерностей стохастического характера, учащийся школы приходит в пределах его небольшого личного опыта, а само знание приобретается им не ради установлений связей и отношений между предметами и явлениями, а ввиду интереса к соответствующим объектам окружающей действительности.

Наконец, решение кейс-заданий влечет за собою рефлексию соответствующей математической деятельности, проявляющуюся, в частности, в анализе собственной работы, развитии самостоятельности, выработке навыков самоконтроля, умении находить причину затруднения и пути его преодоления и др.

5. Универсальность. Свойство *универсальности* математических моделей проявляется в возможности применения одной и той же модели к объектам (системам) принципиально различной природы, подчиняющимся разным фундаментальным законам. Универсальность математических моделей объясняется, с одной стороны, как единством проявления физических свойств окружающего мира, так и абстрактностью математических теорий, их отвлеченностью от объекта исследования с другой стороны. «Математика - это искусство давать разным вещам одно наименование» [3].

Примером простейшей универсальной математической модели является функциональная зависимость $y = kx$. При соответствующем «наполнении» данное уравнение может описывать совершенно разные закономерности (закон Ома $V = IR$, размер уплачиваемого налога при постоянном проценте отчисления и др.)

Такая зависимость действует в следующих задачах.

1. Задачи на движение: линейная зависимость между переменными S (длина пути, пройденного прямолинейно движущимся телом), v (скорость равномерного движения) и t (время движения).
2. Задачи на тему «Работа»: линейная зависимость между объемом работы A, производительностью v и временем выполнения работы t.
3. Задачи на тему «Смеси, сплавы»: линейная зависимость между массой смеси (сплава) M, концентрацией вещества c и массой «чистого» вещества m.

Оператор модели в этих случаях – это «аддитивный закон» (закон сложения):

1. Встречное движение: расстояние между пунктами равно сумме отрезков пути, пройденных участниками движения до их встречи.
2. Совместная работа: весь ее объем складывается из долей, выполненных участниками.
3. Смеси, сплавы: масса M всей смеси (сплава) складывается из масс ее (его) компонент; масса чистого вещества m в смеси (сплаве) складывается из масс чистого вещества в каждом компоненте.

Переменные	Линейная зависимость	Аддитивный закон (оператор модели)
Равномерное движение: S, v, t –путь, скорость, время	$S=vt$	Встречное движение: $S = S_1 + S_2$
Работа: A, v, t – работа, производительность, время	$A=vt$	Совместная работа: $A = A_1 + A_2 + \dots$
Смеси: M, m, c (с - отношение массы растворённого вещества m к массе раствора M)	$M=cm$	Смеси, сплавы: $M = M_1 + M_2 + \dots$ $m = m_1 + m_2 + \dots$

Решение полученной математической задачи есть решение уравнения или системы уравнений, определяемых оператором модели.

Другим примером служит линейное дифференциальное уравнение второго порядка $x'' = -\lambda^2 x$ с постоянным коэффициентом $-\lambda^2$, описывающее процесс (процессную систему) свободных механических колебаний и электромагнитных колебаний. В приведенных и других примерах универсальных математических моделей одним и тем же символам следует дать соответствующую данной системе интерпретацию. Таким образом, *в универсальности математических моделей проявляется интегрирующая роль математики и ее методов.*

Список литературы

1. Концепция развития российского математического образования. Основное содержание [Электронный ресурс]. - Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения: 20.08.16).
2. Нахман А.Д. Формирование компетенции математического моделирования в условиях реализации Концепции развития математического образования //Международный журнал экспериментального образования. - 2016.- №2.- С. 282-286.
3. Пуанкаре А. О науке / М.: Наука. -1990. - 736с.