Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

А.Д.Нахман

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Учебное пособие

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2016

УДК 517.9 (075.8)

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий научно-исследовательской лабораторией "Механика интеллектуальных материалов и конструкций" ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» Г.М.Куликов;
заведующая кафедрой общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования» доцент Т.В.Мирзаева

Нахман А.Д. Случайные величины: учебное пособие / А.Д.Нахман. – «Инновации в образовании». Специальный выпуск. Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2016. –89 с.

Учебное пособие разработано в соответствии с требованиями актуализированных ФГОС к подготовке бакалавров и специалистов инженерных направлений подготовки и имеет целью формирование ряда общепрофессиональных компетенций, связанных с применением математических методов, и, в частности, метода математического моделирования, теоретического и экспериментального исследования. Предлагается материал по темам «Случайные события» и «Случайные величины», а также подборка задач практико-ориентированного характера.

Предназначено для студентов инженерных вузов и преподавателей математики.

ВВЕДЕНИЕ

Анализ многих реальных процессов и явлений связан с анализом тех или иных случайных величин, то есть числовых величин, значения которых непредсказуемы и зависят от случайных причин. Такими величинами могут быть, например,

-число избирателей, проголосовавших на выборах за данного кандидата в депутаты;

-количество секунд, требующееся для загрузки файла из Интернета;

- число клиентов, обратившихся в данное отделение банка в течение дня;

- денежная сумма, совокупно выданная данным банкоматом в течение суток;

- число месяцев безотказной работы купленного планшета и др.

Любое серия из $n \geq 2$ испытаний, уже порождает случайную величину X – число наступлений интересующего нас события. Любой контроль качества порождает случайную величину – число изделий, удовлетворяющих заданному критерию качества. Таким образом, осваивая любой вид профессиональной деятельности, студент должен в той или иной степени овладеть понятиями и фактами теории случайных величин.

С утверждением компетентностного подхода в профессиональном образовании актуализируется задача построения и анализа студентами моделей стохастических систем. В частности, необходимо уметь моделировать данное распределение случайной величины в виде ряда или функции (плотности) распределения, визуализировать распределение (строить многоугольники распределения, кривые распределения), находить числовые характеристики (среднее значение, дисперсию) и др. В свою очередь, здесь необходимо использовать ту или иную модель вероятности (классическую, статистическую, геометрическую). Следовательно, изучению случайных величин должно предшествовать изучение вероятностей случайных событий. Данное обстоятельство и определило структуру настоящего пособия: элементы комбинаторного анализа («обслуживающий материал»), случайные события (теоремы о вероятностях случайных событий) и собственно случайные величины. Каждая глава состоит из обучающего и контрольного модулей. Контрольный модуль содержит теоретические упражнения по материалу данной главы (такие упражнения призваны способствовать активному усвоению теоретических положений) и задачи для самостоятельного решения, которые могут быть использованы для организации и контроля самостоятельной работы студентов.

1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

Часто встречаются задачи, в которых требуется подсчитать число всех возможных способов расположения некоторых предметов или число всех возможных способов осуществления некоторого действия. Например, сколькими способами можно вычеркнуть 6 номеров в билете спортлото, или сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали в данном виде спорта на Олимпийских играх и т.д. Задачи такого типа называются *комбинаторными*.

Комбинаторикой называется раздел математики, изучающий задачи нахождения количества всевозможных конечных подмножеств данного множества, если эти подмножества обладают заданной характеристикой.

Комбинаторика приобрела важное значение в связи с приложениями в теории вероятностей, вычислительной технике, кибернетике и др. Комбинаторные задачи возникают также в химии (рассмотрение различных возможных типов связи атомов в молекулах), биологии (при изучении возможных последовательностей чередования аминокислот в белковых соединениях), в диспетчерской работе - при составлении графиков движения и др.

1.1. Кортежи. Прямые произведения

1.1.1. Пусть даны множества $G_1,...,G_n$. *Кортежем длины n,* составленным из элементов этих множеств, называется любая последовательность вида $g=(g_1,...,g_n)$, где $g_k \in G_k$, $1 \le k \le n$.

Кортежи длины 2, т.е. кортежи вида (g_1, g_2), называются *упорядоченными парами*; кортежи длины 3 - упорядоченными тройками и т.д.

Декартовым произведением $G_1 \times ... \times G_n$ *множеств* $G_1,...,G_n$ называется множество всех G кортежей вида $g=(g_1,...,g_n)$.

Например, декартово произведение множеств $G_1 \times G_2$ состоит из всевозможных упорядоченых пар (g_1, g_2), где $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$.

Пример. Брошены два игральных кубика. Найти количество всевозможных вариантов (всевозможных пар) очков на выпавших гранях.

Решение. Следует найти количество всех упорядоченных пар (g_1, g_2), где g_k - число очков, выпавших на k-ой игрального кубика, $k = 1,2$. Значение g_1 - любое из чисел $1,2,...,6$. В паре с фиксированным (выбранным) g_1 может оказаться любое $g_2 \in \{1,2,...,6\}$, т.е. таких пар будет 6, соответственно количеству возможных значений g_2. Учитывая, что выбор g_1 возможен тоже шестью способами, имеем все упорядоченные пары в количестве $6 \cdot 6 = 36$.

1.1.2. Обозначим через $\nu(M)$ количество элементов конечного множества M .

Теорема ("принцип умножения"). Имеет место равенство

$$\nu(G_1 \times G_2) = \nu(G_1) \cdot \nu(G_2).$$

То есть, *чтобы найти количество всевозможных упорядоченных пар элементов, взятых по одному из множеств* G_1 *и* G_2, *надо перемножить количество всех элементов во множестве* G_1 *с количеством элементов во множестве* G_2.

Для доказательства следует повторить рассуждения, приведенные при решении примера п. 1.1.1.

Используя результат теоремы 1 и метод математической индукции, получаем следующее утверждение:

$$\nu(G_1 \times ... \times G_n) = \nu(G_1) \cdot ... \cdot \nu(G_n)$$

(читатель, не владеющий методом математической индукции, может повторить указанные рассуждения применительно к количеству элементов в декартовом произведении трех, четырех,…, *n* множеств).

1.1.3. В частности, если имеется k *экземпляров одного и того же* *множества* G и требуется найти число кортежей длины k в которые входит *по одному* (и только одному) элементу из каждого экземпляра, то такие кортежи называются *размещениями с повторениями*; другими словами размещения с повторениями - это кортежи вида $g = (g_1,...,g_n) \in G \times ... \times G$. Число таких кортежей, согласно принципу умножения, очевидно, есть

$$\nu(G^k) = m^k .$$

Пример. Какое максимальное число шестизначных телефонных номеров может быть в городской телефонной сети ?

Решение. Имеем кортежи длины k=6 , в которых каждый элемент принадлежит множеству G={0,1,2,...,9}, содержащему m=10 элементов. Следовательно, число таких кортежей $\nu(G^6) = 10^6$. Однако телефонного номера, состоящего сплошь из нулей, обычно не бывает. Следовательно, искомое число номеров равно $10^6 - 1$=999999.

1.2. Размещения, перестановки, сочетания

1.2.1. Если строить *кортежи длины k из элементов* одного и того же множества G так, чтобы *элементы в кортеже не повторялись*, то такие кортежи называются *размещениями без повторений* (ср.1.1.3).

Теорема. Количество размещений (из m элементов по k элементов) есть число

$$A_m^k = m(m-1)...(m-k+1).$$

Доказательство теоремы вытекает из принципа умножения (п. 1.1.2). А именно, с выбором каждого элемента количество оставшихся во множестве элементов уменьшается на один; так, имеем $m(m-1)$ всевозможных пар, $m(m-1)(m-2)$ всевозможных троек и т.д.

Если использовать обозначение $m! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (m-1)m$, считая 0!=1!=1, то легко проверить, что

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} .$$

Замечание. Модель размещений без повторений может быть, очевидно, и такой: имеется k экземпляров одного и того же множества G и требуется найти число кортежей длины k, в которые входит по одному (и только одному) элементу из каждого экземпляра G с единственным условием, чтобы *элементы в кортеже не повторялись* (ср.1.1.3).

Пример. На заседании Думы из 6 возможных кандидатов выбирают председателя комитета , его первого и второго заместителя. Сколько существует способов формирования руководящего состава этого комитета?

Решение. Имеем кортежи длиной в 3 элемента (упорядоченные тройки), составленные из элементов множества G , для которого $\nu(G) = 6$. Следовательно, ищем количество размещений A_6^3:

$$A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{3!\cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 120$$

1.2.2. В частности, размещения из m по m элементов называют *перестановками*; число всевозможных перестановок из m элементов есть

$$P_m = m!\,.$$

Пример 1. Сколькими способами можно разложить в ряд на витрине магазина пять DVD-дисков?

Решение. Имеем кортежи длиной в 5 элементов, составленные из элементов множества G , для которого $\nu(G) = 5$. Следовательно, ищем количество перестановок из 5 элементов

$$P_5 = 5! = 120.$$

Пример 2. Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг, если

а) две определенные книги должны всегда стоять рядом,

б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение. а) Пару книг, которые должны стоять рядом, условимся пока рассматривать как одну книгу. Тогда нужно расставить 5 книг по пяти местам, что можно сделать $P_5 = 5!$ способами. Учитывая теперь порядок расположения тех двух книг, которые мы посчитали за одну, имеем P_2 перестановок между ними Согласно принципу умножения, получаем окончательно число способов $P_5 \times P_2 = 120 \times 2 = 240$.

б) Способов переставить 6 книг существует $P_6=720$, но из них, как установлено в п.а) существует 240 способов поставить определенные книги вместе. Следовательно, число способов поставить книги так, чтобы 2 заданные книги не стояли, равно разности 720-240=480.

1.2.3. Если теперь строить из элементов множества G , для которого $\nu(G) = m$, *неупорядоченные* подмножества по k элементов, то такие подмножества называют *сочетаниями из m по k элементов.*

Теорема . Количество всевозможных сочетаний из m по k элементов может быть вычислено по формуле

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k}. \qquad (1.2.1)$$

Доказательство. Чтобы получить всевозможные *размещения* из m по k элементов, можно сначала «организовать» всевозможные сочетания (неупорядоченные подмножества из m по k) в количестве C_m^k, а затем в каждом таком подмножестве произвести всевозможные упорядочения, т.е. произвести всевозможные перестановки в количестве P_k. Рассуждая как в п. 1.1.2, получаем тогда $A_m^k = C_m^k P_k$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

1.2.4. Имеют место равенства

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \qquad (1.2.2)$$

$$C_m^k = C_m^{m-k}, \qquad (1.2.3)$$

$$C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k. \qquad (1.2.4)$$

Соотношение (1.2.2) вытекает из (1.2.1) и формулы для вычисления числа размещений; соотношения (1.2.3) и (1.2.4) нетрудно проверить, если воспользоваться представлением (1.2.2).

Пример 1. Имеется 10 различных игрушек, из которых формируют комплекты подарков по три игрушки в каждом. Сколько таких различных комплектов можно сформировать?

Решение. Имеем всевозможные неупорядоченные подмножества по 3 элемента из 10. Согласно п.п. 1.2.3 ищем количество сочетаний, т.е.

$$C_{10}^{3}=\frac{10!}{3!(10-3)!.}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{3!7!}=120.$$

Итак, можно сформировать 120 различных комплектов подарков.

Пример 2. Найти n из уравнения $C_{n+3}^{n}-C_{n+2}^{n-1}=15n+C_{15}^{1}$.

Решение. Воспользовавшись формулой (1.2.2), запишем уравнение в виде

$$\frac{(n+3)!}{n!(n+3-n)!)}-\frac{(n+2)!}{(n-1)!(n+2-n+1)!)}=15n+\frac{15!}{1!14!}$$

или

$$\frac{n!(n+1)(n+2)(n+3)}{n!3!}-\frac{(n-1)!\,n(n+1)(n+2)}{(n-1)!3!}=15(n+1)$$

Сокращая дроби, а затем сокращая обе части уравнения на $n+1$, имеем

$(n+2)(n+3)–n(n+2)= 15\cdot 3!$, откуда $3(n+2)=90$, т.е. $n=28$.

1.2.5. Размещения, перестановки, сочетания можно интерпретировать как всевозможные *выборки* заданного количества элементов из некоторой совокупности, содержащей m элементов. При этом выборки-размещения могут различаться как самими элементами, так и их порядком; выборки-сочетания разнятся только составом самих элементов (порядок их следования несущественен), выборки перестановки из m элементов друг от друга отличаются лишь порядком следования элементов. Именно такие признаки обычно используются для распознавания вида выборок в теории вероятностей.

Пример. В микроавтобусе 11 мест. Сколькими способами 11 человек могут расположиться в этой машине, если занять место водителя могут только трое из них, имеющие доверенность на право управления этой машиной?

Решение. На место водителя можно посадить только одного из трех человек, т.е. существуют 3 способа занять первое место. Остальные 10 мест могут быт заняты любым из оставшихся десяти пассажиров числом способов $P_{10} = 10!$ (эти выборки различаются лишь порядком следования элементов, т.е. являются перестановками из 10 элементов). Используя принцип умножения, получаем произведение $3 \times 10! = 3628800$.

1.2.6 *Формула Стирлинга.* Вычисление $n!$ при достаточно больших n бывает затруднительным. Если абсолютная точность не требуется, для вычисления факториала при n≥10 можно использовать приближённую формулу Стирлинга:

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

1.3. Перестановки и сочетания с повторениями

1.3.1. Выше рассмотрены перестановки из n различных элементов, которые определялись как всевозможные кортежи, различавшиеся лишь порядком следования элементов. Однако, встречаются ситуации перестановок из n элементов, среди которых могут встретиться одинаковые: первый элемент повторяется n_1 раз, второй — n_2 раз, третий — n_3 раз,…, k-й — n_k раз, так что различных элементов всего k штук и $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. В этом случае говорят о *перестановках с повторениями*.

Итак, перестановки с повторениями – это всевозможные последовательности (кортежи) длины n, в которых различных элементов всего лишь k $(1 \le k \le n-1)$.

Пример. Дан набор из четырех букв *aabc*. Найти число всех перестановок с повторениями из этих букв.

Решение. Такие перестановки можно просто указать: *abac*, *baac*, *aabc*, *aacb*, *abca*, *baca*, *acba*, *acab*, *bcaa*,*cbaa*, *caba*, *caab*. Их число равно 12.

Результат был вполне ожидаем: число таких перестановок меньше, чем число различных перестановок из 6 (по числу букв) элементов в в 2! раз , поскольку перестановок из 2-х одинаковых букв *аа* будет 2!.

Рассуждения, приведенные в данном комментарии лежат в основе доказательства следующей общей формулы.

1.3.2. Обозначим через $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ число перестановок с повторениями длины n из k разных элементов, взятых соответственно по $n_1, n_2, \ldots, n_k$ раз каждый. Имеет место равенство

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!} \qquad (1.3.1)$$

Доказательство. Если бы все n элементов были различными, то число всевозможных перестановок равнялось бы n!. Согласно теореме п. 1.1.2 оно бы получалось перемножением числа $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ с произведением количеств всевозможных перестановок внутри групп из n_1, n_2, … n_k элементов:

$$n! = P(n_1, n_2, \ldots n_k)\cdot n_1!\,n_2!\ldots n_k!\,,$$

откуда и вытекает утверждение (1.3.1).

В рассмотренном выше примере, букв *a* в исходном наборе две, а букв *b* и с – по одной. Следовательно, количество всех перестановок с повторениями из 4 элементов и составом букв 2, 1, 1 равно $P(2, 1, 1) = 4! / (2!\ 1!\ 1!) = 12$, что и было ранее найдено непосредственным перебором вариантов.

1.3.3. Задача *о числе сочетаний с повторениями* ставится следующим образом: имеются n различных множеств $G_1, G_2, \ldots, G_n$, *в каждом из которых элементы однотипны* (неразличимы). Сколькими способами можно получить неупорядоченные комбинации (множества) из k элементов (выбираемых из данных множеств G_i)), если элементы (предметы) одного типа могут повторяться? Такие комбинации называют сочетаниями с повторениями из n элементов по k.

Другими словами, пусть имеются предметы n различных типов (можно считать, что количество предметов каждого типа – неограниченно). Сколькими способами можно получить из них комбинацию из k элементов, если порядок элементов в комбинации не важен, при этом предметы одного типа могут повторяться?

Обозначим через $\tilde{C}_n^k$ *число сочетаний с повторениями* из n по k. Можно доказать, что

$$\tilde{C}_n^k = C_{k+n-1}^k$$

Пример. В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и картошка. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение. Имеем, очевидно, сочетания с повторениями (ведь можно покупать и одинаковые пирожные!) из 4 по 7. Следовательно, искомое число способов

$$\tilde{C}_4^7 = C_{7+4-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = 120 .$$

1.4. Число элементов в объединении множеств

1.4.1. Напомним, что *объединением множеств* A и B называется множество $A \cup B$, каждый элемент которого содержится хотя бы в одном из множеств A или B, т.е. содержится или в A, или в B , или в обоих этих множествах. Общая же часть $A \cap B$ этих множеств называется их *пересечением*.

Теорема 1. Если конечные множества A и B имеют пустое пересечение, то количество элементов

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Теорема 2. Если конечные множества A и B имеют непустое пересечение, то

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Утверждения теорем становятся достаточно очевидными, если их проиллюстрировать диаграммами Эйлера-Венна (объединения непересекающихся и пересекающихся множеств).

1.4.2. Пример. Все акционеры данного акционерного общества переводят дивиденды на счета в банках. При этом известно, что 4 акционера имеют счета в банке А, 6 человек – в банке В, но из них двое имеют также счета и в банке А. Сколько всего акционеров в данном ЗАО?

Решение. Пусть A – множество акционеров, имеющих счета в банке А, а B – множество акционеров, имеющих счета в банке В. Тогда требуется найти $n(A\cup B)$. Имеем

$$n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B) = 4+6-2 = 8.$$

1.5. Бином Ньютона

1.5.1. Известные формулы квадрата, куба суммы могут быть обобщены следующим образом.

Теорема. Для любого натурального m имеет место соотношение

$$(\alpha+\beta)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \alpha^{m-k}\beta^k. \qquad (1.5.1)$$

Запишем (1.5.1) в развернутом виде:

$$(\alpha+\beta)^m = \alpha^m + C_m^1\alpha^{m-1}\beta + C_m^2\alpha^{m-2}\beta^2 + \ldots + C_m^{m-2}\alpha^2\beta^{m-2} + C_m^{m-1}\alpha\,\beta^{m-1} + \beta^m.$$

Следует обратить внимание на то, что в слагаемых правой части разложения (1.5.1) степени α последовательно убывают от m к нулю, а степени β возрастают от нуля к m; степень каждого одночлена $\alpha^{m-k}\beta^k$ (от двух переменных) равна показателю m степени бинома; коэффициенты членов, равноудаленных от первого и последнего слагаемых разложения – одинаковы (в силу свойства (1.2.3)).

Числа C_m^k здесь называют также биномиальными коэффициентами.

Общий член суммы (1.5.1), т.е. слагаемое, стоящее на $k+1$ месте, считают k-ым членом разложения и обозначают T_k :

$$T_k = C_m^k\alpha^{m-k}\beta^k,\ k = 0,1,\ldots,m.$$

1.5.2. Один из возможных способов доказательства формулы (1.5.1) бинома Ньютона состоит в следующем. Сначала определяем коэффициенты a_k $(k = 0,1,...,m)$ в разложении

$$(1+x)^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{m-1}x^{m-1} + a_m x^m. \qquad (1.5.2)$$

Для этого полагаем в соотношении (1.5.2) $x = 0$; тогда $a_0 = 1 = C_m^0$. Далее дифференцируем обе части (1.5.2) по переменной x:

$$m(1+x)^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... + m a_m x^{m-1}.$$

Если выбрать $x = 0$, то получим $a_1 = m = C_m^1$. После второго дифференцирования имеем

$$m(m-1)(1+x)^{m-2} = 2!a_2 + 3\cdot 2x + ... + m(m-1)a_m x^{m-2}.$$

В случае $x = 0$ получаем $m(m-1) = 2!a_2$, откуда

$$a_2 = \frac{A_m^2}{P_2} = C_m^2.$$

Продолжая процесс дифференцирования, в общем случае получаем

$$a_k = C_m^k, k = 0,1,...,m,$$

и соотношение (1.5.2) приобретает вид

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + ... + C_m^{m-1}x^{m-1} + C_m^m x^m. \qquad (1.5.3)$$

Чтобы перейти к утверждению (1.5.1), достаточно положить теперь $x = \frac{\beta}{\alpha}$ в равенстве (1.5.3).

1.5.3. При x=1 из соотношения (1.5.3) вытекает следующий интересный факт:

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

Если вспомнить, что C_m^k есть количество всех неупорядоченных k-элементных подмножеств данного множества (содержащего всего m элементов), то указанная сумма выражает собою количество вообще всех различных подмножеств данного множества. Итак, *число всех подмножеств множества, содержащего m элементов, равно* 2^m.

Пример. В аудитории 8 люминесцентных ламп. Сколько существует различных способов освещения данной аудитории?

Решение. Любая комбинация из включенных в данный момент ламп есть некоторое подмножество данного множества, содержащего 8 элементов. Число всевозможных комбинаций (подмножеств) есть тогда 2^8, т.е. 512. Исключая случай нуль-элементного подмножества (случай, когда ни одна лампа не горит), получаем в ответе 511 способов освещения.

1.5.4. *Треугольник Паскаля.* Расположив коэффициенты разложения бинома при m=0,1,2,… в строки, получаем следующий треугольник, образованный такими строками:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & . & & & . & & & . & &
\end{array}
$$

В силу свойства (2.4) любой коэффициент (кроме стоящих «по краям» единиц), получаются сложением двух стоящих над ним чисел в предыдущей строке. Так, например, в последней из выписанных строк 5=1+4, 10=4+6.

1.5.5. Пример 1. Записать разложение для $(a+b)^5$.

Решение. Записывая строку треугольника, соответствующую возведению в шестую степень, получаем следующую последовательность коэффициентов: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Теперь, согласно описанному в п. 4.1 принципу образования слагаемых разложения, будем иметь

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 .$$

Пример 2. Найти член разложения степени бинома $(\frac{1}{\sqrt{x}} + x)^{12}$, не зависящий от x.

Решение. Имеем общий член разложения в виде

$$T_k = C_{12}^k \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12-k} x^k = C_{12}^k x^{\frac{3}{2}k-6}.$$

Этот член не будет зависеть от x, если показатель степени x равен нулю: $\frac{3}{2}k - 6 = 0$, откуда получаем $k = 4$. Следовательно,

$$T_4 = C_{12}^4 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.$$

КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

Теоретические упражнения

1. Доказать равенства (1.2.2) – (1.2.4).

2. Доказать равенство $P_m = A_m^k P_{m-k}$.

3. Пользуясь результатом $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, вывести формулу для подсчета количества элементов $n(A \cup B \cup C)$ в объединении трех множеств.

4.Каков наибольший из биномиальных коэффициентов в разложении $(1+x)^{2n}$?

5. Равны ли тождественно суммы

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k ?$$

Задачи для самостоятельного решения

1.Логин должен начинаться с английской буквы S и состоять из четырех букв (в английском алфавите 26 букв). Сколько можно образовать таких логинов, если

а)все буквы в нем должны быть различными;

б)буквы могут повторяться.

2. Каждый из учащихся класса во время каникул побывал в походе или на экскурсии. В походе были 75% учащихся класса, а на экскурсии - 60% класса, причем некоторые учащиеся успели поучаствовать в обоих мероприятиях. Каков процент таких учащихся?

3. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из четырех цифр, если первая из них не равна нулю?

4. Сколько существует различных перестановок букв в слове «дорога» ?

5. Сколько существует различных диагоналей в выпуклом n-угольнике?

6. Сколькими способами можно рассадить 10 человек в первом ряду театрального партера, если среди этих 12 присутствуют два человека, которые не должны сидеть рядом?

7. У девочки имеется 2 белых бусины, 3 синих и 1 красная. Сколькими способами их можно нанизать на нитку?

8. В магазине после распродажи осталось 14 ноутбуков, 10 сканеров, 18 принтеров, 24 сотовых телефона одной модели. Сколькими способами можно закупить для офиса 5 ноутбуков, 3 сканера, 4 принтера и 8 телефонов?

9.Решить уравнение $5C_n^3 = C_{n+2}^4$.

10.Найти член разложения бинома $(3x - \frac{1}{x^2})^6$, не зависящий от x.

2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

Теория вероятностей – это математическая наука, предметом которой является изучение закономерностей массовых случайных явлений.

Основными понятиями теории вероятностей – понятия события и его вероятности. События можно разбить на три категории: достоверные (наверняка происходящие при выполнении данного комплекса условий; достоверные события обозначаем символом E), невозможные (наверняка не происходящие; невозможные события обозначаем символом $\varnothing$) и случайные (могут как произойти, так и не произойти при выполнении данного комплекса условий; обозначаются: $A, B, C, \ldots$). Читатель без труда приведет примеры достоверных, невозможных и случайных событий.

Вероятностью в общем случае называют некоторую численную меру степени объективной возможности появления данного события; таким образом, каждому событию A сопоставляется (единственным образом) некоторое число $P = P(A)$.

2.1. Алгебра событий

2.1.1. Во множестве событий введем следующие действия.

Сложение событий. Событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ называется *суммой* конечного количества событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если событие A состоит в наступлении хотя бы одного из указанных A_k; $k = 1, \ldots, n$.

Понятие суммы можно распространить и на бесконечное количество слагаемых: событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ состоит в наступлении хотя бы одного из указанных A_k; $k = 1, 2, \ldots$

Умножение событий. Событие $B = A_1 A_2 \ldots A_n$ называется *произведением* конечного количества событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если оно состоит в совместном наступлении всех указанных A_k; $k = 1, \ldots, n$. Понятие произведения событий можно также распространить и на бесконечное число множителей (случай бесконечного числа множителей нам в дальнейшем не потребуется).

Замечание. Знаки равенства в этих определениях употреблены в смысле обозначений. Когда же мы будем *утверждать*, что события $A=B$, т.е. A и B равны, то означать это будет следующее: если происходит событие A, то наступает и B (т.е. событие B следует из A), и наоборот, событие A следует из B.

2.1.2. На основании введенных определений суммы и произведения событий легко проверить

а) *свойства коммутативности* операций сложения и умножения

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1, \qquad A_1A_2 = A_2A_1 \ ;$$

б) *свойства ассоциативности*

$$A_1 + A_2 + A_3 = (A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3)\,,$$

$$A_1A_2A_3 = (A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3)\,;$$

б)*дистрибутивное свойство*

$$(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3.$$

2.1.3. События A_1, A_2 называются *несовместными*, если $A_1A_2 = \varnothing$.

Другими словами, два события несовместны, если в результате опыта наступление одного из них исключает наступление другого.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из них несовместны.

Говорят, что события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу*, если

$$A_1 + A_2 + ...A_n = E\,.$$

Другими словами, события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта наступление хотя бы одного из них является достоверным.

События A и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если они несовместны и образуют полную группу: $A\overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = E$.

2.1.4. Пример. Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединенных элемента; событие A_1 есть исправность первого элемента, A_2

– второго. Выразить через A_1 и A_2 следующие события : A блок пропускает ток; B блок не пропускает тока.

Решение. Поскольку наступление события A означает исправность хотя бы одного из элементов, то $A = A_1 + A_2$. Событие B означает неисправность каждого элемента, т.е. совместное наступление $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$, а значит, $B = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$.

2.1.5. ***Алгеброй событий*** называется всякое множество событий *U*, в котором

-введены операции сложения и умножения, результаты выполнения которых также содержатся в *U*;

- содержится достоверное событие;

- вместе с каждым событием A содержится ему противоположное $\overline{A}$.

Алгебра событий, содержащая также всевозможные бесконечные суммы, называется σ-алгеброй (борелевской алгеброй).

2.2. Классическая вероятность

2.2.1. Будем рассматривать события *A*, *B*, *C*, ... как исходы некоторого опыта; число исходов считаем конечным. Каждому опыту сопоставим множество всех его *элементарных* (простейших, «неразложимых») *исходов* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, которое дает полную информацию о предполагаемых результатах этого опыта и которые удовлетворяют следующим условиям:

а) *группа исходов полна*, т.е. обязательно произойдет хотя бы один из ω_i;

б) исходы попарно *несовместны*;

в) все ω_i – *равновозможны*, т.е. объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой.

2.2.2. Среди элементов множества Ω имеются исходы, *благоприятствующие* событию *A*, то есть те, в результате которых событие *A* наступает.

Классической вероятностью события A называется отношение числа $m = m_A$ элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу n всевозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (2.2.1)$$

Для вычисления количества всевозможных и благоприятных исходов опыта часто пользуются формулами комбинаторики.

Пример 1. Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события A, состоящего в том, что суммарное число выпавших очков не будет превосходить 4.

Решение. Элементарные исходы опыта можно интерпретировать как пары чисел (1, 1), (1, 2),…, (6,6); попарная несовместность, полнота группы и равновозможность исходов очевидны. Имеем общее число исходов опыта n=36 (см. пример п. 1.1.1 обучающего модуля по комбинаторике). Число благоприятствующих событию A исходов найдем простым их перебором: 1+1, 1+2, 1+3, 2+1, 2+2, 3+1, т.е. m_A=6. Следовательно,

$$P(A) = \frac{6}{36}, \text{ т.е. } P(A) = \frac{1}{6}.$$

Пример 2. Студент выучил 75% вопросов к зачету. Какова вероятность, что он будет знать ответы на оба вопроса, случайным образом выбранные преподавателем?

Решение. Можно считать, что студент выучил 75 вопросов из 100. Пусть событие A состоит в том, что студенту известны два заданных вопроса. Всевозможные исходы опыта – случайно выбранные пары вопросов – очевидно, являются элементарными исходами. Их количество есть количество неупорядоченных выборок из 100 по 2, т.е. число таких исходов $n = C_{100}^2$. Благоприятными же исходами служат неупорядоченные выборки по 2 вопроса из 75, выученных студентом, так что их количество есть $m = C_{75}^2$. По формуле классической вероятности (2.2.1) имеем

$$P(A)=\frac{C_{75}^{2}}{C_{100}^{2}}=\frac{37}{66}.$$

Пример 3. В магазине имеются цветы 7 сортов. Необходимо составить букет из 5 цветов. Какова вероятность того, что в букете все цветы будут различны?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что все 5 цветов будут различны. Тогда число всевозможных исходов равно $n=\tilde{C}_7^5=\frac{11!}{5!\cdot 6!}=462$, так как имеем неупорядоченную выборку с повторениями. Число благоприятных исходов $m=C_7^5=\frac{7!}{5!\cdot 2!}=21$ (сочетания из 7 по 5, поскольку все цветы должны быть различными) и, следовательно, $p(A)=\frac{m}{n}=\frac{21}{462}=\frac{1}{22}\approx 0{,}045$.

2.2.3. *Задача о выборке в общей постановке.* Имеется N объектов, среди которых M меченых $(1\le M\le N-1)$. Случайным образом извлекается k объектов $(1\le k\le N-1)$. Какова вероятность того, что в данной выборке окажется ровно l меченых объектов, $0\le l\le \min(k,M)$?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в том, что среди k отобранных объектов окажется ровно l меченых . Всевозможные исходы опыта – это неупорядоченные выборки (из N объектов по k), равновозможные, попарно несовместные, и образующие, очевидно, полную группу. Их число есть число сочетаний (без повторений) $n=C_N^k$. Благоприятный исход наступает, когда одновременно извлечено ровно l объектов из M меченых , и k-l объектов из оставшихся N-M немеченых.

Число возможных извлечений по l объектов и из M есть C_M^l, тогда как число извлечений по k–l из N–M есть C_{N-M}^{k-l}. Следуя принципу умножения (п. 1.1.2) имеем число благоприятных для события A исходов опыта m=$C_M^l\cdot C_{N-M}^{k-l}$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{C_M^l\cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

2.2.4. Очевидны следующие свойства классической вероятности:

$$P(E) = 1, \qquad P(\varnothing) = 0, \tag{2.2.2}$$

$$0 < P(A) < 1 \text{ для всякого случайного события } A. \tag{2.2.3}$$

Действительно, в первом случае все исходы благоприятны, т.е. $m_E = n$, а во втором $m_{\varnothing} = 0$, так что оба соотношения вытекают из (2.2.1).

2.3. Относительная частота и статистическая вероятность

2.3.1. Это понятие вводится на основе анализа реально проведенных опытов. Если в результате n опытов событие A появилось $m = m_A$ раз, то относительной частотой события A называют число

$$W(A) = W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

2.3.2. Практика показывает, что с ростом числа однотипных опытов относительная частота приобретает *свойство устойчивости*, колеблясь относительно некоторого числа $P = P(A)$, которое называется *статистической вероятностью* события A. Точная формулировка указанного свойства устойчивости представлена ниже (закон больших чисел Бернулли).

2.3.3. Очевидно, что, относительная частота $W(A)$ удовлетворяет свойствам, аналогичным (2.2.2), (2.2.3); в частности, $0 \le W(A) \le 1$.

Пример. По результатам долговременных наблюдений выявлено, что на данном предприятии относительная частота события A – обнаружения контролерами нестандартного изделия равна 0, 04. При проведении контроля обнаружилось 6 нестандартных изделий. Каков был объем контролируемой партии?

Решение. Если n – объем партии, а m=6 – число нестандартных изделий, то относительная частота $W(A)$ события A есть

$$0{,}04 = \frac{6}{n}, \text{ откуда } n = 150.$$

2.4. Геометрическая вероятность

2.4.1. Рассмотрим следующий опыт: в некоторую ограниченную область E бросается точка, причем попадания ее в любые части, имеющие одинаковую меру (например, площадь в случае плоских областей) считаются равновозможными. Пусть событие A – ее попадание в область $A \subset E$ («благоприятная область»). Если $S(A)$ и $S(E)$, $S(E) \neq 0$ – соответственно меры A и E, то геометрической вероятностью события A будем называть число

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)}.$$

В простейших случаях мера отрезка на прямой – его длина, мера плоской области – ее площадь, мера пространственной области – объем.

2.4.2. Для геометрической вероятности сохраняются, очевидно, свойства (2.2.2), (2.2.3) и оценка $0 \leq P(A) \leq 1$. Заметим, что здесь равенства $P(A) = 1$, $P(A) = 0$ оказываются возможными и для некоторых *случайных* событий A. Так например, если E – квадрат, а случайное событие A – попадание точки на любую его диагональ, то $P(A) = 0$, поскольку диагональ имеет нулевую площадь .

Пример. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его расположения относительно круга.

Решение. Пусть A – событие попадания точки в квадрат. Сторона вписанного к круг квадрата, равна, очевидно, $2R\sin 45^0 = R\sqrt{2}$. Поэтому площадь квадрата $S(A) = 2R^2$, тогда как площадь круга $S(E) = \pi R^2$. Теперь

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)} = \frac{2}{\pi}.$$

2.5. Понятие об аксиомах вероятности

2.5.1. Вышеприведенные модели вероятности события (классическая, статистическая, геометрическая), как оказывается, обладают некоторыми общими свойствами, которые в общем же случае можно положить в основу аксиоматического определения вероятности.

Вероятность мы будем теперь рассматривать как некоторую функцию P на алгебре событий U (или на σ-алгебре событий), которая удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам).

А1 (аксиома неотрицательности) : $P(A) \geq 0$ для всякого $A \in U$;

А2 (аксиома нормированности): $P(E)=1$;

А3 (аксиома аддитивности**):** $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$,

если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны;

А4 (аксиома счетной аддитивности; рассматривается для вероятности, вводимой на σ-алгебре событий):

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

если события $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно несовместны; числовой ряд, записанный в правой части равенства, предполагаем сходящимся.

2.5.2. Если для вводимой модели вероятности выполнены свойства **А1 – А4**, то имеют место следующие утверждения.

***Теорема* 1.** Для всякой пары противоположных событий $A, \overline{A}$ справедливо равенство

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Действительно, в силу соотношения $A + \overline{A} = E$ и согласно аксиоме нормированности (см. **А1)** имеем

$$1 = P(E) = P(A + \overline{A}). \quad (2.5.1)$$

Далее, в силу несовместности A, $\overline{A}$ и **А3** получаем

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}). \quad (2.5.2)$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из (2.5.1) и (2.5.2).

Очевидно, в частности, что достоверное и невозможное события противоположны, а тогда

$$P(\varnothing) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

***Теорема* 2.** Всякое событие A имеет вероятность $P(A) \le 1$.

Для доказательства воспользуемся результатом теоремы 1 и аксиомой неотрицательности (**А1**), примененной к $\overline{A}$:

$$1 = P(A) + P(\overline{A}) \ge P(A).$$

2.5.3. В параграфе 2.2 была введена классическая вероятность и установлено, в частности, что она удовлетворяет свойствам **А1** и **А2**. Проверим для нее теперь справедливость **А3**. Начнем с рассмотрения двух несовместных событий и установим, что

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Пусть опыт имеет n элементарных исходов, из которых m_1 благоприятствует A_1, а m_2 исходов $- A_2$. Ввиду несовместности событий A_1 и A_2 , среди m_1 и m_2 нет общих исходов. В силу этого событию $A_1 + A_2$ благоприятствуют ровно $m_1 + m_2$ исходов, а тогда

$$P(A_1 + A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2).$$

2.5.4. Утверждение п. 2.5.3 можно распространить теперь на произвольное конечное количество событий, пользуясь ассоциативным свойством сложения и действуя по индукции. Так, например, если три события A_1, A_2, A_3 попарно несовместны, то события $(A_1 + A_2)$, и A_3 также, очевидно, будут несовместными. Теперь

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P((A_1 + A_2) + A_3)) =$$

$$= P(A_1 + A_2) + P(A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3),$$

так что свойство **А3** выполняется и в случае трех слагаемых.

2.6. Вероятность произведения событий

2.6.1. Рассмотрим способ вычисления *классической* вероятности произведения событий. Обозначим $P_A(B)$ означают вероятность события *B*, вычисленную при условии, что *A* произошло и будем называть ее условной вероятностью события *B*.

Теорема. Имеет место соотношение

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{2.6.1}$$

Доказательство. Предположим, что среди n элементарных исходов опыта ровно m благоприятствуют произведению AB, и m_A исходов благоприятствуют событию *A*. Тогда

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{m_A}{n} \cdot \frac{m}{m_A} = P(A) \cdot \frac{m}{m_A}. \tag{2.6.2}$$

Остается установить, что

$$P_A(B) = \frac{m}{m_A}. \tag{2.6.3}$$

Действительно, по наступлении *A* лишь те m_A исходов, которые ему благоприятствовали, оказываются возможными для дальнейшего рассмотрения, а событие *B* имеет тогда благоприятными исходы, благоприятные одновременно и для *A*, т.е. для произведения AB. Таким образом, по наступлении *A* оказывается $m_B = m$, и вычисление $P_A(B)$ приводит к равенству (2.6.3).

Соединив теперь равенства (2.6.2) и (2.6.3), получаем утверждение (2.6.1).

2.6.2. В случае произведения трех и большего числа событий имеет место результат, аналогичный теореме п. 2.6.1. Так, например,

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Доказательство проводится по индукции с использованием свойства ассоциативности умножения событий.

Замечание. Соотношение

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

вытекающее (для классической вероятности) при $P(A) \neq 0$ из (2.6.1), в общем случае может быть принято за *определение* условной вероятности события *B*.

2.6.3. Вычисление условной вероятности $P_A(B)$ предполагает, что вероятность события *B* зависит от того, наступило или не наступило событие *A*. Так, например, если среди *N* предметов будет ровно *M* (*0<M<N*) меченых (окрашенных, бракованных и т.п.) и производится безвозвратная выборка, то вероятность, что второй извлеченный предмет будет меченым (событие *B*) зависит от того, был ли меченым (событие *A*) или немеченым (событие $\overline{A}$) первый извлеченный предмет:

$$P_A(B) = \frac{M-1}{N-1}$$

(по наступлении *A* среди $N-1$ предметов осталось $M-1$ меченых) и

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N-1}$$

(по наступлении $\overline{A}$, осталось M меченых предметов среди $N-1$).

Однако, если бы первый из извлеченных предметов был возвращен в исходную совокупность, то вероятность того, что второй извлеченный предмет окажется меченым, не зависела бы от того, каким был первый предмет:

$$P\ (B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N}.$$

Подобные ситуации отражаются в понятии *независимых* событий: два события *A* и *B* называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли другое событие; иными словами, эти вероятности абсолютно постоянны в условиях данного опыта.

Аналогично, события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если каждая из вероятностей $P_j = P(A_j)$ остается абсолютно постоянной в условиях данного опыта.

Из теоремы п. 2.6.1, примененной к двум независимым событиям вытекает, что

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Распространяя результат на n событий, независимых в совокупности, приходим к соотношению

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

2.6.4. Пример 1 – пример 1 п. 2.2.2. Приведем второй способ решения.

Событие A, состоящее в том, что студент знает оба предложенных вопроса, равносильно произведению событий A_1A_2, состоящих, соответственно, в том, что ему известен и первый и второй вопрос. При этом $P(A_1A_2)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)$, и $P(A_1)=\frac{75}{100}$, $P_{A_1}(A_2)=\frac{74}{99}$ (по наступлении A_1 остается 99 вопросов, из которых студенту известно уже 74). Следовательно,

$$P(A)=\frac{75}{100}\cdot\frac{74}{99}=\frac{37}{66}.$$

Пример 2. По самолету выпущена ракета. Самолет может уничтожить ее с вероятностью 0,6. Если этого сделать не удается, то ракета поражает самолет с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения самолета ракетой?

Решение. Поражение самолета – сложное событие C, состоящее в совместном наступлении события A – неуничтожении ракеты, и события B – поражения в этом случае самолета ракетой. Следовательно, $C=AB$. Теперь

$$P(C)=P(A)P_A(B).$$

Перейдем к нахождению вероятностей. Событие A противоположно событию уничтожения ракеты, следовательно,

$$P(A)=1-0{,}6=0{,}4;\quad \text{при этом}\quad P_A(B)=0{,}8.$$

Тогда

$$P(C)=0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}32\,.$$

2.7. Вероятность суммы совместных событий

2.7.1. В параграфе 2.5 была рассмотрена вероятность суммы попарно несовместных событий. Следующий результат в случае суммы любых двух событий A и B является более общим.

Теорема $P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)$.

В частности, для *несовместных* A_1 и A_2 имеем $P(A_1A_2)=P(\varnothing)=0$, откуда следует уже известное равенство

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

2.7.2. В случае, когда события могут наступать совместно, справедлива

Теорема $P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n})$.

Доказательство последнего утверждения вытекает из теоремы 1 п. 2.5.1. Действительно, если событие A состоит в наступлении хотя бы одного из указанных событий, т.е. $A=A_1+A_2+...+A_n$, то событие ненаступления ни одного из них есть произведение $\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot...\cdot\overline{A_n}=\overline{A}$, так что события A и $\overline{A}$ являются, очевидно, противоположными.

2.7.3. Пусть теперь события $A_1,A_2,...,A_n$ *независимы в совокупности*, $p_j=P(A_j)$ и $q_j=P(\overline{A_j})=1-P(A_j),\ j=1,2,...,n.$ Из теоремы п. 2.7.2 вытекает тогда соотношение

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-q_1\cdot q_2\cdot...\cdot q_n.$$

В частности, *для двух независимых событий* A_1 и A_2 получаем

$$P(A_1+A_2)=1-q_1q_2=1-(1-p_1)(1-p_2)=p_1+p_2-p_1p_2,$$

и мы приходим в этом случае к утверждение теоремы п. 2.7.1.

2.7.4. Пример. В урне 6 белых и 4 черных шара. Наудачу извлекли два шара. Найти вероятность следующих событий:

а) оба шара белых;

б) только один шар белый;

в) хотя бы один шар белый.

Решение. а) Событие A – оба извлеченных шара – белые. Элементарные исходы опыта – выборки.

Рассмотрим события: A_1 - первый извлеченный шар - белый, A_2 - второй шар - белый. Тогда

$$P(A_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ P_{A_1}(A_2)=\frac{5}{9}.$$

При этом $A=A_1A_2$, то есть

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}.$$

б) Событие B – только один извлеченный шар – белый. Рассмотрим события: A_1 – извлечен первым белый шар, A_2 – второй шар – белый. Поскольку надо извлечь либо первым белый, а вторым – черный шар (событие $A_1\overline{A}_2$) либо – наоборот (событие $\overline{A}_1A_2$), то $B=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$. События $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1A_2$ несовместны. Следовательно,

$$P(B)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=$$
$$=P(A_1)P_{A_1}(\overline{A}_2)\ +P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2).$$

При этом $P(A_1)=\dfrac{6}{10},\ P(\overline{A}_1)=\dfrac{4}{10},\ P_{A_1}(\overline{A}_2)=\dfrac{4}{9},\ P_{\overline{A}_1}(A_2)=\dfrac{6}{9}.$

Значит,

$$P(B)\ =\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{8}{15}.$$

в) C - хотя бы один шар белый. Согласно результату п. 2.7.3

$$P(C)=1-P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)=1-\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{13}{15}.$$

2.8. Формула полной вероятности и формулы Бейеса

2.8.1. Предположим, что событие A есть результат наступления хотя бы одного из событий H_1, H_2, ..., H_n , попарно несовместных и образующих полную группу, но при этом неизвестно, какое именно из H_i наступит. В этом случае события $H_1, H_2, ..., H_n$ называют *гипотезами* по отношению к A, а сама описываемая ситуация называется *схемой гипотез.*

2.8.2. В условиях п. 2.8.1 справедливо соотношение (называемое формулой *полной вероятности*)

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P_{H_k}(A). \tag{2.8.1}$$

Доказательство. Ввиду полноты группы гипотез имеем

$$E = H_1 + H_2 + \ldots + H_n,$$

где E, как и выше – достоверное событие. Учитывая очевидное представление $A = A \cdot E$ и свойства операций сложения и умножения событий, получаем тогда

$$A = AE = H_1 A + H_2 A + \ldots + H_n A.$$

События $H_k \cdot A,\ k = 1,2,\ldots n$, оказываются попарно несовместными (предположив противное, мы получили бы совместность гипотез), а поэтому

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k A).$$

Чтобы установить (2.8.1), осталось применить к каждому слагаемому последней суммы формулу умножения п. 2.6.1.

В частном случае двух гипотез формула полной вероятности принимает вид

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A).$$

2.8.3. Пусть выполнены условия п. 2.8.1 и при этом событие *A наступило.* Тогда вероятность того, что событие *A оказалось следствием гипотезы именно* H_k, определяется в виде

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) P_{H_k}(A)}{P(A)}, \quad k=1,2,\ldots,n, \tag{2.8.2}$$

где $P(A)$ – полная вероятность (2.8.1). Соотношения (2.8.2) называют формулами Бейеса.

Доказательство (2.8.2) будет вытекать из равенства

$$AH_к = H_к A$$

(коммутативное свойство умножения), применив к которому теорему умножения, получим

$$P(A) P_A(H_k) = P(H_k) P_{H_k}(A), \quad k = 1,2,\ldots n.$$

Последнее соотношение равносильно (2.8.2).

2.8.4. Пример 1. На конвейер поступают 20 % изделий цеха № 1 и 80 % – цеха №2. Вероятность брака для изделия из первого цеха $p_1 = 0{,}1$; для второго цеха – $p_2 = 0{,}05$.

l) Какова вероятность, что наугад взятое изделие - бракованное ?

2) Случайно выбранное изделие оказалось с браком. Какова вероятность, что его произвел цех № 1 ?

Решение. Пусть A – событие, состоящее в обнаружении брака в случайно отобранном изделии. Возможны гипотезы: H_1 – выбранное изделие произведено цехом №1, H_2 – цехом № 2. Очевидно, что выполнены условия несовместности и полноты группы H_1 и H_2. Здесь $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}8$; $P_{H_1}(A) = 0{,}1$, $P_{H_2}(A) = 0{,}05$. Тогда:

1)по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}06;$$

2)по формулам Бейеса для первой из гипотез

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}06} = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Компьютерной диагностике подвергается группа участников диспансеризации, среди которых 10% страдают некоторыми заболеваниями. В результате диагностики болезнь выявляется с вероятностью 0,95, и с вероятностью, равной 0,03 здоровый участник признается больным. У произвольно выбранного протестированного участника компьютер выявил заболевание. Какова вероятность, что произошла ошибка?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что протестированный участник признан больным. Возможны предположения (гипотезы):

H_1 – тестируется участник, страдающий заболеванием;

H_2 – тестируется здоровый участник.

Требуется найти вероятность гипотезы H_2, при условии, что наступило событие A; следовательно применима формула Бейеса

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}.$$

По условию задачи гипотезы имеют вероятности $P(H_1)= 0,1$ и $P(H_2)= 0,9$. Соответствующие условные вероятности события имеют вид

$$P_{H_1}(A)= 0,95;\ P_{H_2}(A)= 0,03.$$

Вероятность события A находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0,1 \cdot 0,95 + 0,9 \cdot 0,03 = 0,122;$$

теперь

$$P_A(H_2) = \frac{0,9 \cdot 0,03}{0,122} = \frac{27}{122}.$$

2.9. Повторение опытов. Формула Бернулли

2.9.1. Пусть один и тот же опыт воспроизводится n раз, и при этом вероятность наступления события A в каждом таком опыте остается неизменной, равной некоторому p; пусть $q = 1 - p$. Описанная ситуация независимых опытов (независимых – по причине постоянства вероятности наступления события A) называется *схемой Бернулли*.

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что *событие A появится ровно k раз в n опытах* (в этом случае говорят также о k «успехах» в n опытах). Имеет место следующая

Формула Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{2.9.1}$$

Доказательство. Фиксируем какие-либо k опытов. Наступление события A ровно k раз (т.е. в этих в k опытах) происходит совместно с его ненастулением (наступлением $\overline{A}$) в остальных $n-k$ опытах. Любая такая фиксированная комбинация $A_{n,k}$ имеет, очевидно, вероятность

$$P(A_{n,k}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Событие $B_{n,k}$, состоящее в том, что A появится ровно k раз, равносильно наступлению какого-либо из описанных (попарно несовместных) событий типа $A_{n,k}$, т.е. их сумме. Тогда

$$P_n(k) = P(B_{n,k}) = p^k \cdot q^{n-k} + p^k \cdot q^{n-k} + ...p^k \cdot q^{n-k},$$

причем слагаемых в этой сумме столько, сколько существует способов сформировать различные комбинации типа $A_{n,k}$. Это количество равно C_n^k (числу неупорядоченных выборок из n по k). Таким образом, слагаемое $p^k \cdot q^{n-k}$ повторяется C_n^k раз и мы приходим к (2.9.1).

2.9.2. В условиях пункта 2.9.1 *вероятность наступления события A в n опытах от k_1 до k_2 раз*, есть

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \quad . \tag{2.9.2}$$

Для доказательства (2.9.2) заметим, что $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ есть вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий B_{n,k_1}, $B_{n,k_1+1,}$,…, B_{n,k_2} где $B_{n,j}$ – событие, состоящее в наличии j « успехов» (в n опытах). Таким образом, $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ будет равна сумме соответствующих вероятностей Бернулли, а это и означает справедливость (2.9.2).

2.9.3. Число m_0 появления события называется *наивероятнейшим*, если вероятность $P_n(m_0)$ появления события m_0 раз в n испытаниях превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятностей $P_n(k)$ остальных возможных исходов испытаний. Наивероятнейшее число m_0 (или наивероятнейшие числа, поскольку их может быть и два) может быть определено из двойного неравенства

$$(n+1)p - 1 \le m_0 \le (n+1)p. \tag{2.9.3}$$

2.9.4. Пусть теперь от опыта к опыту вероятность наступления события A может меняться, так что в первом опыте она равна p_1, во втором – p_2, в n-ом – p_n; обозначим соответствующие вероятности ненаступления A через $q_1 = 1 - p_1, q_2 = 1 - p_2, ..., q_n = 1 - p_n$. Тогда вероятность наступления события A в этих n опытах ровно k раз оказывается равной коэффициенту при z^k в многочлене

$$\varphi_n(z) = \prod_{j=1}^{n}(q_j + p_j z);$$

функция $\varphi_n(z)$ называется производящей.

Если же все $p_j = p$ одинаковы и, соответственно, одинаковы все $q_j = 1 - p_j = q$, то

$$\varphi_n(z) = (q + pz)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} z^k$$

согласно формуле разложения бинома Ньютона, п.1.5.1. Коэффициент при z^k здесь совпадает с правой частью (2.9.1). Таким образом, результат п. 2.9.4 служит обобщением формулы Бернулли.

2.9.5 Пример 1. Найти вероятность того, что событие *A* появится в пяти независимых опытах: а) два раза; б) менее двух раз, если вероятность появления события *A* в одном опыте $p = 0{,}4$.

Решение. а) Пусть событие *B* состоит в появлении *A* ровно два раза в пяти опытах. Тогда по формуле Бернулли

$$P(B) = P_5(2) = C_5^2(0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}576.$$

б) Если событие *C* означает появление *A* менее двух раз, то есть или ни разу ($k = 0$) или один раз ($k = 1$), то

$$P(C) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 + C_5^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 = \\ = 0{,}14256 + 0{,}4752 = 0{,}61776.$$

Пример 2. Что вероятнее: выиграть у равносильного соперника две шахматные партии из четырех или три из шести?

Решение. Имеем схему Бернулли, в которой вероятность события в единичном опыте (выигрыша одной партии) $p = \frac{1}{2}, q = 1 - p = \frac{1}{2}.$ Теперь надо сравнить вероятности $P_4(2)$ и $P_6(3)$. Имеем

$$P_4(2) = C_4^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^2 = \frac{6}{16}, \quad P_6(3) = C_6^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}.$$

Следовательно, вероятность выиграть 2 партии из 4 – выше.

Пример 3. Тестируется каждый из 15 блоков некоторого электронного прибора. Вероятность пройти тест для каждого блока составляет 0,9. Найти наивероятнейшее число выдержавших тестирование блоков и его вероятность.

Решение. Так как n =15, p = 0,9, то согласно (2.9.3) имеем

$$16\cdot 0{,}9-1\le m_0\ \le 16\cdot 0{,}9 \quad \text{т.е.} \quad m_0=14.$$

Теперь осталось найти

$$P_{15}(14)=C_{15}^{14}(0{,}9)^{14}(0{,}1)^{1}\approx 0{,}343.$$

Пример 4. На отрезок MN длины a наудачу брошено 5 точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки М на расстоянии, меньшем $\frac{a}{3}$, а три другие – на расстоянии, большем $\frac{a}{3}$.

Решение. Введем в рассмотрение событие

A ={брошенная точка находится от точки M на расстоянии, меньшем $\frac{a}{3}$};

тогда «благоприятная» для A область имеет длину, равную $\frac{a}{3}$ и геометрическая вероятность $p = P(A) = \frac{a}{3} : a = \frac{1}{3}$.

Поскольку брошено 5 точек, то можно считать, что эксперимент повторен 5 раз и при этом имеется ровно 2 успеха (остальные три точки оказываются в «неблагоприятной области»). Итак, имеем схему Бернулли с $n=5, k=2, p=\frac{1}{3}, q=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$ Согласно (2.9.1)

$$P_5(2)=C_5^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})^3=\frac{80}{243}.$$

2.10. Предельные теоремы в схеме Бернулли

2.10.1. С ростом n $(n\to\infty)$ использование формулы Бернулли и ее следствий становится затруднительным с точки зрения громоздкости вычислений; нужны, следовательно, приближенные формулы, которые обходят эту трудность.

При больших значениях n и 0< p < 1 значение вероятности Бернулли $P_n(k)$ можно *приближенно* вычислить *по “локальной” формуле Лапласа*

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_{n,k}), \qquad (2.10.1)$$

где

$$x_{n,k} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Приближенные значения функции $\varphi(x)$ можно найти в таблицах, имеющихся практически во всех учебных пособиях по теории вероятностей; см. ниже табл.1 в приложениях. При этом используется свойство четности функции φ: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Соотношение (2.10.1) вытекает из асимптотической формулы

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_{n,k}) \cdot (1+\varepsilon_{n,k}) \quad , \qquad (2.10.2)$$

в которой предполагается $\left|x_{n,k}\right| \le const$, $n \to \infty$; остаточный член $\varepsilon_{n,k}$ здесь имеет оценку $|\varepsilon_{n,k}| < \frac{const}{\sqrt{n}}$; доказательство (2.10.2) мы не приводим.

2.10.2. При больших значениях n и $0<p<1$ вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что *событие A произойдет не менее* k_1 *и не более* k_2 *раз,* может быть найдена *по приближенной интегральной формуле Лапласа*

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_{k_2}) - \Phi(x_{k_1}) \ , \qquad (2.10.3)$$

где

$$x_{k_1} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ x_{k_2} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \ \Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt.$$

Приближенные значения $\Phi(x)$ приведены в таблицах; см. табл. 1 в приложениях. При этом используется свойство нечетности $\Phi(x)$:

$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Доказательство интегральной формулы Лапласа (2.10.3) основано на асимптотическом представлении (2.10.2) и следствии (2.9.2) формулы Бернулли.

2.10.3. Установим, что вероятность отклонения относительной частоты $w(A) = \frac{m}{n}$ ($m = m_A$ – число наступления события A в n опытах) от его вероятности $p(A)$ может быть найдена по приближенной формуле

$$P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}), \tag{2.10.4}$$

где Φ - как и выше - интегральная функция Лапласа.

Для доказательства (2.10.4) запишем неравенство

$$|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon$$

в равносильном виде $n(p-\varepsilon) < m < n(p+\varepsilon)$ и заметим, что m есть число наступлений события A в n опытах, а поэтому можно применить приближенную интегральную формулу Лапласа с

$$k_1 = n(p-\varepsilon),\ k_2 = n(p+\varepsilon).$$

Имеем тогда

$$x_{k_1} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}} = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \quad \text{и} \quad x_{k_2} = \frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}} = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Следовательно,

$$P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) = \Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) - \Phi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}),$$

откуда, в силу нечетности интегральной функции Лапласа, и будет вытекать соотношение (2.10.4).

2.10.4. Из результатов п. 2.10.3 может быть получен так называемый закон больших чисел Бернулли.

Теорема. Пусть $w_n(A) = \frac{m_A}{n}$ – относительная частота события A в n опытах и $p(A)$ – его вероятность. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{m_A}{n} - p(A)| < \varepsilon) = 1.$$

Утверждение следует из того факта, что при $n \to \infty$ правая часть соотношения (2.10.4) стремится к значению $2\Phi(\infty) = 2 \cdot 0{,}5 = 1$.

Закон Бернулли есть математически строгая форма описанного выше свойства устойчивости относительной частоты,. Говорят также, что *относительная частота события A сходится по вероятности* (при $n \to \infty$) *к вероятности* $p(A)$.

2.10.5. Пусть в схеме Бернулли от серии к серии опытов (с ростом их количества n) *значение произведения* $\lambda = np$ *остается постоянным*. При сформулированных условиях имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \ . \qquad (2.10.5)$$

Для его доказательства представим вероятность Бернулли в виде

$$P_n(k) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} (\frac{\lambda}{n})^k \cdot (1-\frac{\lambda}{n})^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}\right) \cdot \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{\lambda}{n}\cdot(n-k)} . \qquad (2.10.6)$$

Заметим, что отношение $\frac{\lambda^k}{k!}$ при $n \to \infty$ остается постоянным; произведение же в скобках содержит k множителей, каждый из которых стремится к единице. Вычисляя предел последнего множителя в правой части (2.10.6), будем иметь

$$(1+t)^{1/t} \to e, \qquad \text{где} \quad t = -\frac{\lambda}{n} \ , \quad \text{так что} \quad t \to 0$$

(так называемый второй замечательный предел). Показатель степени $-\frac{\lambda}{n}(n-k) = -\lambda + \frac{k}{n}$ при этом стремится к значению $-\lambda$.

Таким образом, произведение в правой части (2.10.6) стремится к значению $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot 1^k \cdot e^{-\lambda}$, чем и доказано утверждение (2.10.5).

Установленный результат означает, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов мала, а при этом n - велико и $\lambda = np$, то имеет место приближенная формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \qquad (2.10.7)$$

Вероятность же того, что при достаточно большом числе опытов событие произойдет не менее m_1 и не более m_2 раз можно найти (ср. п. 2.9.2) по приближенной формуле

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \qquad (2.10.8)$$

2.10.6. Пример 1. Вероятность того, что на странице рукописи имеется опечатка, равна 0,2.Найти вероятность того, что

а)на 400 страницах будет ровно 104 опечатки;

б) на 400 страницах будет не менее 72 и не более 104 опечаток.

Решение. а) Можно использовать формулу Лапласа (2.10.1), где $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. Имеем

$$x_{n,k} = \frac{104-80}{8} = 3.$$

По табл. 1 Приложений находим $\varphi(3) = 0{,}0044$. Тогда

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(3) = \frac{0{,}0044}{8} = 0{,}00055.$$

б) Используем интегральную формулу Лапласа, в которой $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, и, следовательно,

$$x_{n,k_1} = \frac{72-80}{8} = -1, \quad x_{n,k_2} = \frac{104-80}{8} = 3.$$

По табл. 1 Прил. находим $\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0{,}3413$, $\Phi(3) = 0{,}4986$. Значит,

$$P_{400}(72 \le k \le 104) \approx \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) + \Phi(1) = 0{,}8399.$$

Пример 2. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью p=0,9544 утверждать, что относительная частота выпадения герба отклонится от 0,5 не более, чем на 0,05?

Решение. Согласно приближенной формуле (2.10.4) имеем

$$0{,}9544 = P(|\frac{m}{n} - 0{,}5| < 0{,}05) \approx 2\Phi(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}5(1-0{,}5)}}),$$

где m – число появлений герба при n подбрасываниях монеты. Отсюда

$$0{,}9544 \approx 2\Phi(0{,}05\sqrt{4n}) \quad \text{или} \quad \Phi(0{,}1\sqrt{n}) \approx 0{,}4772.$$

По таблице значений интегральной функции Лапласа (см. таблицу 1 Приложений) находим значение аргумента интегральной функции Лапласа: $0{,}1\sqrt{n} \approx 2$ откуда $n \approx 400$. Итак, монету надо бросить 400 раз.

Пример 3. Вероятность того, что телефонный номер будет набран неправильно, принимается для всех абонентов равной 0,001. Определить вероятность того, что среди 500 произведенных независимо один от другого вызовов, ровно один абонент наберет неправильно телефонный номер.

Решение. Имеем схему Бернулли, в которой n = 500 (число опытов велико), p = 0,001 (вероятность «успеха» в единичном опыте мала), так что применима формула Пуассона (2.10.7) с $\lambda = np = 0{,}5$ и k=1. По табл. 2 Приложений находим $e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$, а тогда

$$P_{500}(1) \approx \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6065}{1!} = 0{,}30325.$$

Пример 4. В течение года из аэропорта города N отправляется 1200 авиарейсов. Вероятность задержки каждого вылета по метеоусловиям равна 0,005. Какова вероятность задержки по метеоусловиям в течение года не менее 2 рейсов?

Решение. По условию задачи, вероятность наступления события в единичном опыте (задержки рейса по метеоусловиям) мала: p=0,005, тогда как число опытов (число рейсов) велико: n=1500. Следовательно, в расчетах возможно использование формулы Пуассона. Событие задержки не менее 2 рейсов противоположно событию задержки $k \le 1$ рейсов. Имеем $\lambda = np = 1200 \times 0{,}005 = 6$ и (см. (2.10.8))

$$p_{1500}(0 \le k \le 1) = p_{1500}(0) + p_{1500}(1) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 7e^{-6},$$

т.е.

$$p_{1500}(k \geq 2) = 1 - 7e^{-6} \approx 0{,}97.$$

КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1. Теоретические упражнения

1.Привести примеры:

а) полной группы событий;

б) двух совместных и независимых событий.

2. Если классическая вероятность некоторого события равна 1, то верно ли, что это событие –достоверное ? Почему?

3. Задача о выборке. Среди N предметов имеется M меченых. Случайным образом извлекается k предметов. A событие, состоящее в том, что в этой выборке содержится ровно l меченых предметов. Доказать, что вероятность этого события может быть найдена по формуле

$$P(A) = \frac{C_M^l \cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

4. Доказать, что для любых двух событий A и B имеет место неравенство

$$P(A+B) \leq P(A) + P(B).$$

5. Доказать, что если $p = P(A)$ и $q = P(\overline{A})$, то $pq \leq \dfrac{1}{4}$.

6. Доказать, что если $P(B)$ не зависит от наступления (ненаступления) события A, то и $P(A)$ не зависит от B (т.е. свойство независимости – взаимное).

Указание: воспользоваться вероятностью произведения $P(AB)$, представив ее (на основании свойства коммутативности умножения) двумя способами.

7. Доказать, что если A и B – независимые события, то и каждая пара событий A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и B, $\overline{A}$ и $\overline{B}$ является парой независимых событий.

8. Доказать соотношение

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n).$$

Указание: воспользоваться методом математической индукции.

9. Можно ли в случае *двух* гипотез формулу полной вероятности записать в

виде

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(\overline{H}_1)P_{\overline{H}_1}(A) \quad ?$$

10. Доказать, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов постоянна, и $q = 1 - p$, то вероятность ρ наступления события A хотя бы один раз может быть вычислена в виде

$$\rho = 1 - q^n.$$

11. Вероятность p появления события A в каждом опыте постоянна. Опыты проводят до первого наступления события. Чему равна вероятность того, что будет проведено ровно n опытов?

12. Вероятность p появления события A в каждом из n опытов постоянна. При каких значениях p вероятность наступления события ровно n раз больше, чем вероятность непоявления события ровно n раз?

Указание: сравнить результаты применения формулы Бернулли в обоих случаях.

13. Доказать, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов мала (n – велико) и $\lambda = np$, то вероятность появления события A хотя бы один раз может быть найдена по приближенной формуле

$$P(k \geq 1) \approx 1 - e^{-\lambda}.$$

14. Доказать нечетность интегральной функции Лапласа $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Образуют ли полную группу следующие события: A – два попадания в мишень при двух выстрелах, B – ни одного попадания при тех же двух выстрелах ?

2. Рассматриваются следующие события: A – первое из полученных электронных писем содержит навязчивую рекламу (СПАМ), B – второе письмо содержит СПАМ. Выразить с помощью операций сложения и умножения через события A и B и (или) им противоположные следующие события а) событие С – ни одно из писем не содержит СПАМ;

б) хотя бы одно письмо содержит СПАМ;

в) только одно письмо содержит СПАМ.

3. Вероятность дождливой погоды в предстоящий выходной день равна 0,7. Вероятность удачной рыбалки в дождливую погоду равна 0,8, а в ясную погоду – 0,4. Какова вероятность, что в предстоящий выходной рыбалка будет удачной.

4. Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридические направлений поступают на биржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,8, на вакансию юриста – 0,5. Найти вероятность, что

а) случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности;

б)вероятность того, что устроившийся на работу специалист – экономист.

5. Имеется 10 двадцатидолларовых купюр, из которых 4 купюры фальшивые. Наугад *поочередно* извлекают две купюры и отыскивают вероятность события A, состоящего в том, что обе эти купюры окажутся фальшивыми. Можно ли применять формулу Бернулли, если а) купюра после извлечения и проверки возвращается в пачку; б)выборка безвозвратная.

Найти $P(A)$ в каждом из случаев а) и б).

6. Вероятность продать по оптимальной цене каждый из пяти пакетов акций в период их падения равна 0,25. Какова вероятность продажи по оптимальной цене большей части пакета?

7. В прямоугольник вписаны две окружности равного радиуса, касающиеся друг друга внешним образом. В прямоугольник случайным образом брошена точка. Какова вероятность, что она не попадет ни в один из кругов?

8. В семье 5 детей; вероятность рождения мальчика в данной местности равна 0,6. Найти вероятности следующих событий:

а) в семье две девочки;

б) в семье не менее двух девочек;

в) в семье мальчиков больше, чем девочек

9**.** В данной местности левши составляют 5% населения. Какова вероятность, что в на факультете, где обучаются 400 человек, окажутся не менее 3 левшей?

10. Студент одинаково плохо подготовился к каждому из трех экзаменов. С какой вероятностью он сдает каждый экзамен, если хотя бы один из них он сдаст с вероятностью 0,578125

3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

Случайной величиной называется числовая величина X , которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Если все возможные значения величины X можно записать в виде числовой последовательности $\{x_n\}$, $n = 1, 2, ...$ (конечной или бесконечной), то X называется дискретной (ДСВ – дискретная случайная величина); если же возможные значения X заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина X называется непрерывно распределенной на этом интервале (НСВ – непрерывная случайная величина).

Примером дискретной случайной величины является ежедневно фиксируемый рублевый курс доллара, непрерывной – время t загрузки файла, скачиваемого из Интернета: $t \in (0, \infty)$.

3.1. Ряд распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики

3.1.1. *Законом распределения* дискретной случайной величины (ДСВ) X называется соответствие между ее возможными значениями x_k и вероятностями $p_k = P(X = x_k)$ события, состоящего в принятии величиной X значения именно x_k . Обычный способ задания такого закона – ряд (таблица) распределения, который в случае конечного числа n значений величины X (записанных в порядке возрастания) имеет вид

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{3.1.1}$$

Действительно, все события вида $A_k = \{X = x_k\}$ образуют полную группу, так что

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = E,$$

и, по аксиоме вероятности **A1**,

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1.$$

Благодаря попарной несовместности событий A_k и аксиоме **A3**, получаем тогда из последнего равенства утверждение (3.1.1).

Возможно также рассмотрение ряда распределения с бесконечным набором значений *X*. В этом случае, согласно аксиоме **A4,** для соответствующих вероятностей значений $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

При этом мы рассматриваем распределения, для которых записанный числовой ряд является сходящимся.

3.1.2. Наряду с законом (рядом) распределения часто бывает удобно пользоваться числами, которые описывают случайную величину «суммарно» – так называемыми *числовыми характеристиками* случайной величины. Они помогают «в сжатой форме» выразить наиболее существенные черты распределения. Основными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, характеризующее среднее значение случайной величины, и дисперсия, характеризующая степень рассеяния случайной величины относительно ее математического ожидания.

Ограничимся пока рассмотрением дискретной случайной величины с конечным набором возможных значений.

3.1.3. *Математическое ожидание* $M(X)$ дискретной величины *X* определяется в виде

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k , \tag{3.1.2}$$

Поясним, почему естественно считать значение (3.1.2) *средним* *значением* случайной величины. В привычном понимании среднего значения стоило бы рассмотреть среднее арифметическое n значений x_k, или, что то же самое, сумму вида

$$x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{n},$$

в которой каждое x_k умножается на $\frac{1}{n}$, т.е. все x_k содержатся в этой сумме с учетом их «равного вклада» вида $\frac{1}{n}$. *Вероятностный же аналог* среднего значений x_k должен учитывать «вероятностный вклад» каждого такого значения, т.е. принимать вид *суммы произведений наблюдаемых значений случайной величины на их вероятности*

$$x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n,$$

которая и совпадает с определением математического ожидания (3.1.2). Частный случай распределения ДСВ, для которой математическое ожидание равно в точности среднему арифметическому значений случайной величины, см. ниже в п. 3.5.1.

Замечание. Математическое ожидание ДСВ относится к так называемым характеристикам положения, т.е. характеризует положение случайной величины на числовой оси, указывая некоторое среднее, ориентировочное значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины. К другим характеристикам положения случайной величины относятся мода и медиана.

Модой ДСВ называется её наиболее вероятное значение $Mo = x_l$. Этих значений может оказаться несколько (их вероятности – наибольшие по сравнению вероятностями всех других значений); такие случайные величины называются полимодальными.

Медианой дискретной случайной величины X, имеющей значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется такое ее значение $Me = x_l$, что

$$\sum_{k=1}^{l} p_k \geq \frac{1}{2} \text{ и } \sum_{k=l}^{n} p_k \geq \frac{1}{2}.$$

Этому условию в ряде распределения ДСВ может соответствовать два различных (соседних) значения x_l.

Чтобы найти медиану, достаточно найти такое «пограничное» значение x_l, чтобы сумма вероятностей от p_1 до p_{l-1} была еще меньше ½, но уже после добавления слагаемого p_l она стала не меньше ½; условие $p_l + ... + p_n \geq \frac{1}{2}$ тогда будет выполнено автоматически.

3.1.4. Наряду со средним значением $M(X)$ случайной величины X естественно было бы также рассмотреть числовую характеристику степени рассеяния значений x_k относительно их среднего значения. На первый взгляд, следовало бы рассмотреть среднее значений разностей $x_k - M(X)$, т.е. сумму вида

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - M(X)\right)\ p_k\ . \qquad (3.1.3)$$

Однако, преобразовав (3.1.3) к разности

$$\sum_{k=1}^{n} x_k p_k - M(X)\ \sum_{k=1}^{n} p_k$$

(общий множитель $M(X)$ вынесен за знак второй суммы) и принимая во внимание соотношения (3.1.1) и (3.1.2), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - M(X)\right)\ p_k \equiv 0\,, \qquad (3.1.4)$$

так что значение этой суммы одинаково для *любых* распределений, и, следовательно, не может служить характеристикой рассеяния конкретных распределений.

Нулевое значение суммы (3.1.4) получилось за счет «интерференции» положительных и отрицательных уклонений $x_k - M(X)$. Чтобы устранить такую интерференцию, рассматривают *сумму произведений квадратов уклонений на вероятности* p_k соответствующих x_k

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - M(X)\right)^2 p_k\ . \qquad (3.1.5)$$

Числовая характеристика вида (3.1.5) называется *дисперсией* случайной величины X.

Из аксиомы **А1** и определения (3.1.5) следует, что $D(X) \geq 0$, а тогда можно рассмотреть характеристику рассеяния вида

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

называемую *средним квадратическим отклонением*. Она предпочтительней дисперсии в том смысле, что оценка рассеяния теперь имеет размерность случайной величины (заметим, что дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно).

3.1.5. Дисперсию ДСВ можно вычислить также по формуле

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k - (M(X))^2. \qquad (3.1.6)$$

Для ее доказательства которой выполним в (3.1.5) следующие преобразования: раскроем скобки, возводя разность в квадрат, перегруппируем слагаемые, записав три соответствующие суммы и воспользуемся определением (3.1.2) и свойством вероятностей (3.1.1). Итак,

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 p_k - 2M(X)\cdot x_k p_k + (M(X))^2 \cdot p_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2M(X)\cdot \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + (M(X))^2)\cdot \sum_{k=1}^{n} p_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2(M(X))^2 + (M(X))^2 \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (M(X))^2,$$

чем и установлено (3.1.6).

Замечание. Определение математического ожидания и дисперсии ДСВ можно распространить и на случай величин с бесконечным перечнем возможных значений. В этом случае суммы (3.1.2) и (3.1.5) следует заменить числовыми рядами

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad \text{и} \quad D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - M(X)\right)^2 p_k,$$

требуя их сходимость (иначе соответствующая числовая характеристика признается несуществующей), причем первый из рядов должен обладать абсолютной сходимостью.

3.1.6. Для более детального исследования распределений случайных величин вводят понятия начального и центрального моментов распределения

$$\nu_l = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^l p_k \ , \quad \mu_l = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X)^l p_k \ , \ l = 1,2,...$$

Согласно (3.1.2), (3.1.4) – (3.1.6)

$$\nu_1 = M(X), \ \mu_1 = 0, \ \mu_2 = D(X), \ \mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2 . \qquad (3.1.7)$$

Центральные моменты могут быть выражены через начальные, и наоборот. Так, например, вместе с последним из только что приведенных соотношений, справедливы равенства

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3, \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4 \qquad (3.1.8)$$

и т.д.

Третий центральный момент может служить характеристикой асимметрии (или «скошенности») ряда распределения. Так, если ряд распределения симметричен относительно среднего значения (математического ожидания) то все моменты нечетного порядка равны нулю (в сумме μ_l при нечетном l каждому положительному слагаемому соответствует равное ему по абсолютной величине отрицательное слагаемое, так что вся сумма равна нулю). Естественно поэтому в качестве характеристики асимметрии распределения выбрать какой-либо из нечетных моментов, а именно – простейший третий центральный момент. Он имеет размерность куба случайной величины; чтобы получить безразмерную характеристику, третий момент делят на куб среднего квадратического отклонения. Полученная величина носит название «коэффициент асимметрии» или просто «асимметрии»: $S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Если $S_k > 0$, то преобладают положительные отклонения от математического ожидания, если $S_k < 0$ – то отрицательные.

Четвертый центральный момент используется в понятии так называемого эксцесса распределения $E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, на обсуждении которого мы остановимся позже в другой ситуации (п. 3.7.4).

3.1.7. Пример 1. В сессию планируется два экзамена. Вероятности успешной сдачи первого и второго экзамена для данного студента равны соответственно 0,7 и 0,8. Составить ряд распределения случайной величины *X*- числа экзаменов, которые успешно сдаст студент. Найти математическое ожидание и дисперсию числа успешно сданных экзаменов.

Решение. Рассматриваемая случайная величина *X* может принять одно из следующих значений: x_1=0, x_2=1, x_3=2 соответственно следующим событиям: студент не сдаст оба экзамена, студент сдаст успешно только один экзамен, студент сдаст успешно оба экзамена. Согласно теореме о вероятности произведения событий

$$P(X=2) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56;\ P(X=0) = (1-0{,}7)(1-0{,}8) = 0{,}06.$$

Осталось найти вероятность $P(X=1)$ того, что студент сдаст успешно только один экзамен; здесь можно воспользоваться свойством (3.1.1) вероятностей в ряде распределения:

$$P(X=1) = 1 - P(X=0) - P(X=2) = 0{,}38.$$

Итак, ряд распределения случайной величины *X* принимает вид:

x	0	1	2
p	0,6	0,38	0,56

Найдем теперь математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*. Пользуясь формулами (3.1.2) и (3.1.6) , получаем

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}56 = 1{,}5$$

и

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}38 + 2^2 \cdot 0{,}56 - 1{,}5^2 = 0{,}37\ .$$

Пример 2. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x	x_1	x_2
p	0,3	0,7

Найти значения x_1 и x_2, если даны математическое ожидание $M(X)=2{,}7$ и дисперсия $D(X)=0{,}21$ и известно, что $x_1 < x_2$.

Решение. Согласно данному ряду распределения

$$M(X) = x_1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}7 \quad \text{и} \quad D(X)=x_1^2 \cdot 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}7 - 2{,}7^2.$$

Имеем, следовательно, систему алгебраических уравнений для нахождения x_1 и x_2

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 2{,}7 \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 - 2{,}7^2 = 0{,}21 \end{cases},$$

которую несложно преобразовать к виду

$$\begin{cases} x_1 = 9 - \dfrac{7}{3}x_2 \\ \dfrac{5}{3}x_2^2 - 9x_2 + 12 = 0 \end{cases}.$$

Найдя из последнего квадратного уравнения значения x_2, получаем затем пару решений системы

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3 \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{17}{5},\ x_2 = \frac{12}{5}.$$

Согласно условию задачи $x_1 < x_2$, следовательно, $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

3.2. Функция распределения

3.2.1. Понятие ряда распределения неприменимо к непрерывным случайным величинам (НСВ), поскольку невозможно выписать перечень всех ее значений (читатель, знакомый с теорией множеств, знает, что множество всех точек числового интервала не является счетным); более того, как мы установим ниже, вероятность каждого конкретного значения непрерывной случайной величины оказывается равной нулю. В этом случае содержательной характеристикой «поведения» НСВ могли бы служить вероятности принятия ею значений в заданном числовом интервале. Эти вероятности, как мы увидим в дальнейшем, могут быть выражены через функцию вида

$$F(x) = P(X < x). \tag{3.2.1}$$

Функцию, определенную в виде (3.2.1) мы будем рассматривать теперь *для любой* случайной величины *X*; она соотносит каждому $x \in (-\infty; +\infty)$ вероятность события, состоящая в принятии величиной *X* значения левее точки *x* (см. рис. 3.2.1) и называется *функцией распределения* (синонимы: интегральный закон распределения, интегральная функция распределения случайной величины *X*).

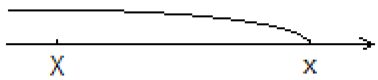


Рис. 3.2.1

3.2.2. Рассмотрим случай *функции распределения дискретной случайной величины X*, которая имеет ряд распределения вида

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Утверждается, что

$$F(x) = \sum_{k \mid x_k < x} p_k \ , \tag{3.2.2}$$

причем суммирование в (3.2.2) проводится по тем и только тем k, для которых соответствующие значения x_k оказываются меньшими *x*.

Чтобы установить соотношение (3.2.2), расположим на числовой оси значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Если аргумент x удовлетворяет соотношению $x \le x_1$, то событие $X < x$ является невозможным, и следовательно, $F(x) = 0$.

В случае $x_1 \le x < x_2$ событие $X < x$ равносильно событию $X = x_1$, а тогда $F(x) = p_1$. Если $x_2 \le x < x_3$, то событие $X < x$ равносильно наступлению хотя бы одного из двух несовместных событий $X = x_1$ и $X = x_2$, а тогда $F(x) = p_1 + p_2$.

Рассуждая таким образом и далее, мы и получаем (3.2.2). В частности, при $x_n < x$, имеем

$$F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

В «развернутой» форме (3.2.2) принимает вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \ldots & \\ p_1 + p_2 + \ldots p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n \\ 1, & x > x_n \end{cases}.$$

Указанный принцип построения $F(x)$ можно назвать принципом накопления вероятностей.

Мы получили неубывающую кусочно-постоянную функцию, значения которой расположены в промежутке [0, 1], непрерывную в каждой точке x_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ слева (рис. 3.2.2).

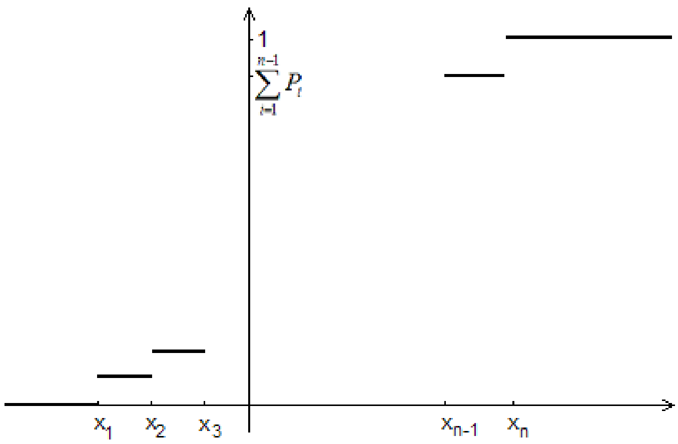


Рис. 3.2.2

Ее предел на $-\infty$ равен 0 (точнее, $F(x) = 0$ при $x \le x_1$), а на $+\infty$ равен 1 (точнее, $F(x) = 1$ при $x > x_n$).

3.2.3. В общем случае свойства функции распределения $F(x) = P(X < x)$ будут следующими:

а) $0 \le F(x) \le 1$;

б) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;

в) $F(x)$ - неубывающая функция;

г) если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (α, β), то $F(x) = 0$ при $x \le \alpha$ и $F(x) = 1$ при $x \ge \beta$; в случае распределения X на всей числовой оси имеют место соотношения

$$F(+\infty) = 1 \qquad \text{и} \qquad F(-\infty) = 0, \tag{3.2.3}$$

где, по определению, $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} F(x)$.

Доказательство. Свойство а) очевидно, поскольку значения $F(x)$ определяются в виде вероятностей.

Для доказательства свойства б) представим значение $F(b)$ в виде

$$F(b) = P(X < b) = P(X < a \text{ или } a \le X < b).$$

Поскольку события $X < a$ и $a \le X < b$ несовместны, то, в силу аксиомы **А3**, получим

$$F(b) = P(X < a) + P(a \le x < b).$$

Таким образом,

$$F(b) = F(a) + P(a \le x < b),$$

а это и равносильно свойству б).

Из последнего соотношения и оценки $F(a) \ge 0$ получаем, что $F(b) \ge F(a)$ при $b > a$, а это и означает, что функции распределения – неубывающая всюду функция.

Первая часть утверждения п. г) достаточно очевидна: событие $X < x$ является невозможным при $x \le \alpha$ и достоверным – при $x \ge \beta$. Соотношение (3.2.3) в общем случае мы не доказываем.

3.2.4. Следующие свойства относятся к случаю *непрерывной* $F(x)$. В дальнейшем, говоря о непрерывной случайной величине, будем предполагать, что ее функция распределения $F(x)$ непрерывна и кусочно-дифференцируема.

а)Соотношение

$$P(X = x) = 0$$

имеет место для любого действительного x.

б)Справедливо равенство

$$\begin{aligned} P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = \\ = P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Доказательства свойств а) и б) основаны на возможности предельного перехода под знаком функции $F(x)$, обладающей свойством непрерывности. Так, свойство а) есть результат предельного перехода (при $\Delta x \to 0$) в равенстве (см. свойство б) в п. 3.2.3)

$$P(x \le X < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x);$$

соотношения (3.2.4) снова следуют из свойства б) п. 3.2.3, поскольку вероятность принятия непрерывной случайной величиной каждого конкретного значения равна нулю.

3.2.5. Пример. Индикатором случайного события A, имеющего вероятность $p(A) = p$, называется случайная величина $\eta = \eta(A)$, принимающая значение, равное 1, если A наступает и значение, равное 0, если A не наступает. Построить функцию распределения индикатора η и найти его числовые характеристики $M(\eta)$ и $D(\eta)$.

Решение. По условию, индикатор есть дискретная случайная величина с рядом распределения

η	0	1
p	q	p

где $q = 1 - p$.

Согласно (3.2.2) имеем функцию распределения индикатора

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ q, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M(\eta)=0\cdot q+1\cdot p=p\,,\ D(\eta)=0^2\cdot 1+1^2\cdot p-p^2=p(1-p)=pq.$$

3.3. Плотность распределения

3.3.1 *Плотностью распределения* (плотностью вероятности или дифференциальной функцией) назовем функцию вида

$$f(x)=F'(x)\,.$$

Согласно принятому в п.3.2.4 соглашению для всякой непрерывной случайной величины X плотность распределения существуют (хотя бы в виде односторонней производной) всюду за исключением, может быть, конечного числа точек.

Использование термина «*плотность*» оправдано следующими соображениями. По определению производной имеем

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left(x<X<x+\Delta x\right)}{\Delta x}\,. \qquad (3.3.1)$$

Отношение, записанное под знаком предела (3.3.1), при $\Delta x>0$ было бы естественно назвать средней плотностью вероятности значений X на промежутке $(x,x+\Delta x)$, а тогда само значение предела (3.3.1) – плотностью вероятности в точке x.

В соответствии с (3.3.1) при малых Δx справедливо приближенное равенство

$$P\left(x<X<x+\Delta x\right)\approx f(x)\cdot\Delta x\,.$$

3.3.2. Имеют место следующие *свойства* плотности распределения:

а) $f(x)\ge 0$ для всех x;

б) $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)dx;$

в) функция распределения $F(x)$ может быть восстановлена (по известной дифференциальной функции) в виде

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\,.$$

г) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ (свойство нормированности).

Замечание. Несобственный интеграл по $(-\infty,+\infty)$ здесь и в дальнейшем понимается в смысле так называемого главного значения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{T\to+\infty}\int_{-T}^{T} f(x)dx\,.$$

Свойство а) очевидно, т.к. $f(x)$ есть производная неубывающей функции.

Докажем соотношение б). Согласно определению п. 3.3.1, функция распределения $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$. Тогда применима формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=F(b)-F(a),$$

в правой части которой мы и узнаем значение $P(a<X<b)$, если воспользоваться соотношениями (3.2.4).

Равенства в) и г) вытекают из свойства б) и (3.2.3); например,

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=F(x)-F(-\infty)=F(x)-0=F(x).$$

3.3.3. Пример. Плотность распределения задана в виде

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ c\cdot x, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases},$$

где c – постоянная величина. Найти значение c, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})$.

Решение. Согласно свойству г) нормированности п. 3.3.2 имеем

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_{0}^{1} c\cdot x\cdot dx+\int_{0}^{+\infty} 0\cdot dx=$$

$$=0+\frac{1}{2}\cdot c\cdot x^2\Big|_0^1+0=\frac{1}{2}\cdot c,$$

откуда $c=2$. Теперь

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 2x, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}.$$

Найдем $F(x)$ в соответствии со свойством в) п. 3.2.2, в); рассмотрим при этом все возможные здесь случаи: $x\le 0$, $0<x<1$, $x\ge 1$. Имеем

1) при $x\le 0$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dx=0;$$

2)при $0<x<1$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_{-\infty}^{x} 2x\cdot dx=x^2;$$

3) при $x\ge 1$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot dx+\int_{-\infty}^{1} 2x\cdot dx+\ +\int_{1}^{x} 0\cdot dx=1.$$

Таким образом (см. рис. 3.3.1),

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}.$$

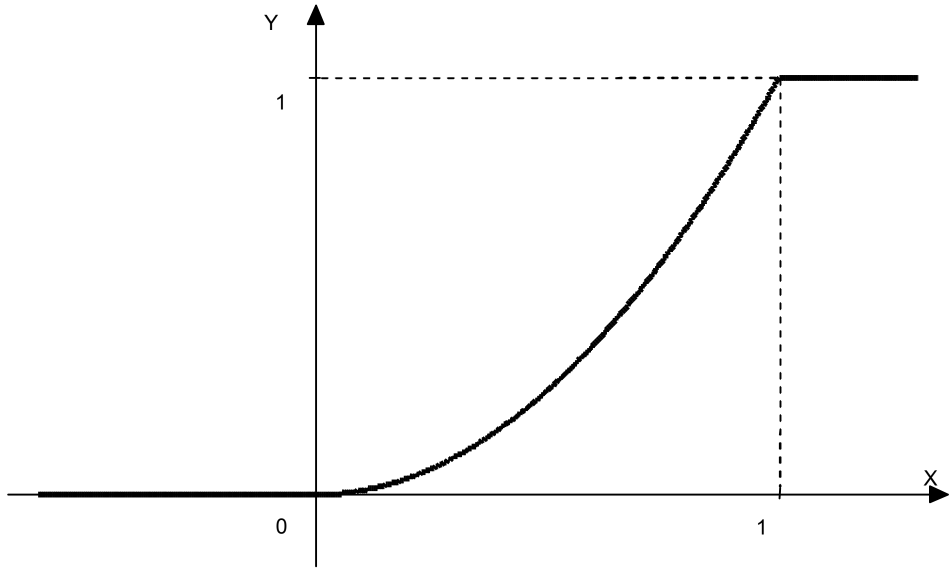


Рис. 3.3.1

Так как $\frac{3}{2} \in [1, +\infty)$, $\frac{1}{2} \in [0,1)$, то в соответствии с найденным видом $F(x)$, будем иметь

$$P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}.$$

3.4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

3.4.1. Пусть X – непрерывная случайная величина (НСВ) и $f(x)$ – ее плотность распределения. Математическое ожидание и дисперсия в этом случае определяются, соответственно, в виде

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad (3.4.1)$$

и

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x) dx \qquad (3.4.2)$$

при условии сходимости указанных несобственных интегралов, причем сходимость (3.4.1) предполагается абсолютной.

Интегралы (3.4.1) и (3.4.2) являются естественными аналогами соответствующих числовых характеристик (3.1.2) и (3.1.5) дискретных случайных величин.

В том случае, когда все возможные значения X расположены на отрезке $[a,b]$, интегрирование в (3.4.1) и (3.4.2) заменяется интегрированием по $[a,b]$:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx \quad \text{и} \qquad D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2 .$$

Замечание. Как и в случае ДСВ, к характеристиками положения НСВ относятся также мода и медиана.

Модой непрерывной случайной величины X называется точка максимума $x=Mo$ ее плотности вероятности $f(x)$. Возможны случаи полимодальных распределений – когда точек максимума несколько.

Медианой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение $x=Me$, при котором $P(X<Me)=P(X>Me)$.

3.4.2. Из определения дисперсии (3.4.2) и свойства неотрицательности $f(x)$ вытекает оценка $D(X)\geq 0$.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется в виде

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

3.4.3. Для вычисления дисперсии можно воспользоваться также формулой

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2 . \qquad (3.4.3)$$

Доказательство (3.4.3) проводится с помощью рассуждений, подобных п. 3.1.3: возводя разность в квадрат, преобразуем (3.4.2) в сумму трех интегралов и, далее, пользуемся свойством нормированности $f(x)$ (п. 3.3.2, г).

3.4.4. Для непрерывной случайной величины X начальные и центральные моменты распределения определяются, соответственно, в виде

$$\nu_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^l f(x)dx .$$

Как и в случае ДСВ, имеют место, очевидно, соотношения (3.1.7), (3.1.8). Точно так же, как и в случае ДСВ, определяются асимметрия распределения $S_k = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ и его эксцесс $E_x = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

3.4.5. Пример. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ 1 - x^2, & -1 < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. По определению плотности распределения имеем

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ -2x, & -1 < x \le 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Графики $y = F(x)$ и $y = f(x)$ изображены на рис. 3.4.1:

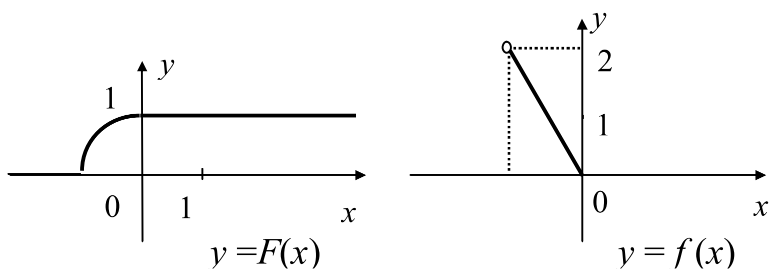


Рис. 3.4.1

Далее, согласно формулам п. 3.4.1 имеем

$$M(X) = \int_{-1}^{0} x(-2x)dx = -\frac{2}{3}x^3 \Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{3};$$

$$D(X) = \int_{-1}^{0} x^2(-2x)dx - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{4}x^4 \Big|_{-1}^{0} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

3.5. Специальные виды дискретных распределений

3.5.1. Дискретная величина X с конечным перечнем значений $x_1, x_2, ..., x_n$ называется распределенной *равномерным* образом, если все ее значения равновероятны: $P(X = x_k) = p,\ k = 1,2,...,n.$ Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} p = 1 \quad \text{, то} \quad np = 1 \quad \text{или} \quad p = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, ряд распределения X имеет вид

X	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

Найдем числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}, \quad D(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right)^2.$$

Таким образом, *равномерно распределенная случайная величина имеет математическое ожидание, равное* в точности *среднему арифметическому* всех значений случайной величины, а дисперсия равна среднему квадратов значений величины минус квадрат ее среднего значения.

3.5.2. Рассмотрим задачу о выборке п. 2.2.3. Из N объектов, среди которых M меченых $(1 \le M \le N-1)$, случайным образом извлекается k объектов $(1 \le k \le N-1)$. В качестве случайной величины X рассмотрим число меченых объектов в извлеченной выборке. Ее значения $l \in \{0,1,..., \min(k, M)\}$. Как показано в п. 2.2.3

$$P(X = l) = \frac{C_M^l \cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

Распределение такой дискретной случайной величины X называется *гипергеометрическим.* Можно доказать, что

$$M(X) = \frac{kM}{N},\ D(X) = \frac{kM}{N-1}(1 - \frac{M}{N})(1 - \frac{k}{N}).$$

3.5.3. Пусть дискретная случайная величина X принимает значения, равные количеству появлений события A в n испытаниях, при условии, что в каждом вероятность p=P(A) одна и та же; $q = 1 - p$ (схема Бернулли). Ее закон распределения называется *биномиальным*; соответствующий ряд распределения имеет вид

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Название распределения объясняется тем, что сумма всех вероятностей представляет собой сумму членов разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n = 1.$$

Биномиальный закон распределения широко используется при статистическом контроле качества продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и т.д.

Как оказывается, математическое ожидание биномиальной случайной величины X

$$M(X) = np\,,$$

а её дисперсия

$$D(X) = npq\,.$$

Установим, например, первое из соотношений. Согласно виду ряда распределения имеем математическое ожидание биномиальной величины

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}\,.$$

Заметим, что суммирование фактически производится по k=1,..., n , так как слагаемое, соответствующее значению k=0, обращается в ноль. Преобразуем полученную сумму следующим образом:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=$$

$$\sum_{k=1}^{n}k\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\cdot p\cdot p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}=$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

(общий множитель np вынесен за знак суммы). Перенумеровав члены (то есть заменив индекс суммирования $k-1$ на k), получаем

$$M(X)=np\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}=np\sum_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^{k}p^k q^{(n-1)-k}=$$

$$=np(p+q)^{n-1}=np\cdot 1=np,$$

что и утверждалось.

Следующие два распределения относятся к случаю дискретных случайных величин с бесконечным перечнем значений.

3.5.4. Дискретная случайная величина X распределена *по закону Пуассона* с параметром λ, если она принимает значения $\{0,1,2,..., m,...\}$ с вероятностями

$$p_m=P(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\qquad (m=0,1,2,...).$$

Закон Пуассона можно понимать как «предельный случай» (при $n\to\infty$, $\lambda=np=const$) биномиального закона. Записав в ряд распределения Пуассона

X	0	1	2	…	m	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

следует проверить, что в этом, «предельном» случае, сумма всех вероятностей остается равной единице. Итак, вычислим сумму ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\quad . \tag{3.5.1}$$

Использовав разложение экспоненты e^{λ} по степеням λ (ряд Маклорена)

$$e^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \quad ,$$

получаем сумму (3.5.1) в виде

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

что и требовалось установить.

Оперируя с суммами степенных рядов и обращаясь все к тому же разложению Маклорена, можно доказать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают между собою и и равны параметру λ этого распределения:

$$M(X) = \lambda, \; D(X) = \lambda .$$

Так, например,

$$M(X) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

3.5.5. Пусть в каждом опыте событие A имеет одну и ту же вероятность $p = p(A), \; 0 < p < 1$ и $q = 1 - p$.

Пусть случайная величина X представляет собой число испытаний, проведенных до первого появления события A. Обозначим через p_m вероятность события, означающего, что при первых m–1 испытаниях A не произошло, а в m-ом – наступило:

$p_1 = p$ (событие A наступило уже в первом опыте);

$p_2 = p(\bar{A} \cdot A) = qp$ (событие A не наступило в первом опыте, но наступило во втором);

…

$$p_m = p(X = m) = p(\bar{A} \cdot \bar{A} \ldots \cdot \bar{A} \cdot A) = q^{m-1} p \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

X	1	2	3	...	m	...
P	p	Pq	Pq^2	...	pq^{m-1}	...

Распределение X называется *геометрическим*; название объясняется тем, что вероятности p_m образуют бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q.

Докажем, что математическое ожидание случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, равно величине, обратной появлению события в одном испытании:

$$M(X) = \frac{1}{p} \qquad (3.5.2)$$

Имеем

$$M(X) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m p_m = \sum_{m=1}^{\infty} mpq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty} \frac{dq^m}{dq} = p\frac{d}{dq}(\sum_{m=1}^{\infty} q^m) =$$

$$= p\frac{d}{dq}(\frac{q}{1-q}) = p\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p},$$

(использована возможность почленного дифференцирования степенного ряда с общим членом q^m, $0 < q < 1$), что и утверждалось в (3.5.2).

Можно также доказать, что геометрически распределенная случайная величина X имеет дисперсию

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

3.5.6. Пример 1. Компания производит изделия, 4% из которых имеют отклонение от стандарта. Для контроля качества отбирают 200 изделий. Найти ожидаемое количество изделий с отклонениями от стандарта.

Решение. Имеем биномиальное распределение числа обнаруженных X нестандартных изделий, так как производится $n = 200$ опытов, в каждом из которых событие обнаружения нестандартности имеет одну и ту же вероятность $p = 0{,}04$. Ожидаемое (среднее) количество нестандартных изделий есть математическое ожидание $M(X) = np = 200 \cdot 0{,}04 = 8$.

Заметим, что непосредственное вычисление математического ожидания по формуле (3.1.2) было бы связано в построением ряда распределения, содержащего 201 значение случайной величины и вычислением 201 вероятности !

Пример 2. Стрелок может попасть в мишень при каждом выстреле с вероятностью $p=\frac{1}{6}$. Какова вероятность того, что он попадет в мишень с третьего раза? Каково среднее число выстрелов, которые нужно сделать для поражения мишени?

Решение. Здесь случайная величина X – число выстрелов, сделанных до поражения мишени. Имеем геометрическое распределение с вероятностью $p=\frac{1}{6}$ наступления события в каждом опыте и числом проведенных опытов m=3. Согласно результатам п. 3.5.5

$$p_3 = p(X=3) = (1-\frac{1}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{49}{216}.$$

Среднее число выстрелов есть математическое ожидание (3.5.2)

$$M(X) = \frac{1}{p} = 6.$$

Пример 3. В компании, сдающей на прокат две машины, каждодневный спрос на автомобили подчиняется распределению Пуассона и в среднем составляет 1,3 машины в день, при этом, машины используются в равной степени. Какова вероятность, что в любой из дней:

1) ни на одну машину не будет заказов;

2) на обе поступят заказы.

Решение. По условию число заказов X=k на машину в день есть ДСВ, распределенная по закону Пуассона, при этом количество k заказов может быть неограниченным. Вероятность поступления ровно k заказов вычисляется по формуле Пуассона (2.10.7), в которой параметр λ есть математическое ожидание величины X (см. п. 3.5.4) или ее среднее значение, которое, по условию, равно 1,3. Следовательно,

$$P(X=k) = \frac{1{,}3^k e^{-1{,}3}}{k!}, \; k = 0,1,2,3,...$$

В частности, если не заказан ни один автомобиль, то $X=0$ и

$$P(X=0)=\frac{1{,}3^0 e^{-1{,}3}}{0!}=e^{-1{,}3}\approx 0{,}27 .$$

Если же на оба автомобиля поступили заказы, то число заказов $X \geq 2$ и

$$P(X \geq 2)=1-P(X<2)=1-(P(X=0)+P(X=1))=$$
$$=1-(\frac{1{,}3^0 e^{-1{,}3}}{0!}+\frac{1{,}3^1 e^{-1{,}3}}{1!})\approx 0{,}37$$

3.6. Равномерное и показательное распределения непрерывных случайных величин.

3.6.1. Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *равномерному закону* на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке:

$$f(x)=\begin{cases} \nu, & x\in[a,b], \\ 0, & x\notin[a,b], \end{cases} \qquad \nu=const.$$

Воспользовавшись свойством нормированности, установим, что

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in[a,b], \\ 0 \quad , & x\notin[a,b]. \end{cases} \qquad (3.6.1)$$

Действительно,

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b \nu\, dx=c(b-a), \text{ откуда } \nu=\frac{1}{b-a}.$$

Найдем теперь функцию распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Имеем, очевидно, при $x\leq a$ значения функция распределения $F(x)$=0. При $a<x\leq b$ получим:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_a^x \frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a} .$$

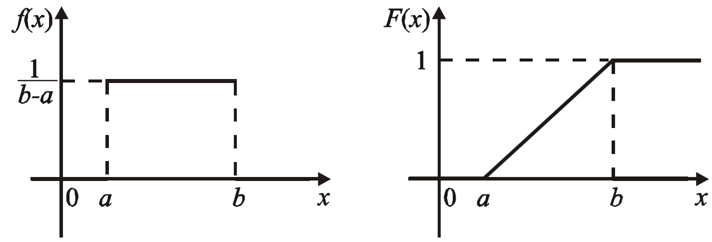
Наконец, при $x>b$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a} 0dt+\int_a^b \frac{1}{b-a}dt+\int_a^x 0dt=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x\le a\,,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\ ,\\ 1, & x>b. \end{cases} \qquad (3.6.2)$$

Графики плотности и функции равномерного распределения изображены на следующем рисунке.



а) *б*)

Рис. 3.6.1

Установим теперь, что математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$ случайной величины вычисляются, соответственно, по формулам

$$M(X)=\frac{a+b}{2}\ \text{ и }\ D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Имеем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_a^b\frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Второе соотношение (формула для дисперсии) доказывается аналогично:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-[M(X)]^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

3.6.2. Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *показательному закону* с параметром λ >0, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0. \end{cases} \qquad (3.6.3)$$

Функция (3.6.3) действительно может служить плотностью распределения, т.к. она, очевидно, неотрицательна и обладает свойством нормированности :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \lambda \lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A} e^{-\lambda x}dx = \lambda \lim_{A\to\infty}(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A) =$$

$$= (\lim_{A\to\infty} e^{-\lambda A}) - (-1) = 0 + 1 = 1 .$$

Найдем функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. При $x \le 0$ имеем $F(x)=0$. При $x > 0$ получим:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}dt = 0 - \frac{\lambda}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -(e^{-\lambda x} - e^{0}) = 1 - e^{-\lambda x} .$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Графики плотности и функции показательного распределения представлены на рис. 3.6.2.

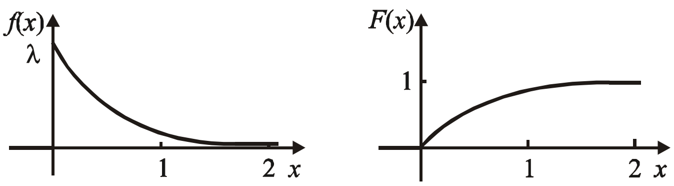


Рис. 3.6.2

Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно проверить, что математическое ожидание и дисперсия показательно распределенной случайной величины имеют, соответственно, значения

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{3.6.4}$$

Так, например,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A} xde^{-\lambda x} =$$

$$= -\lim_{A\to\infty}(xe^{-\lambda x}\Big|_0^A - \int_{0}^{A} e^{-\lambda x}dx) = -\lim_{A\to\infty}(\frac{A}{e^{\lambda A}} - 0 +$$

$$+\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A) = -\frac{1}{\lambda}\lim_{A\to\infty}(e^{-\lambda A}-1) = \frac{1}{\lambda};$$

здесь предел вида

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A}{e^{\lambda A}} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda A}} = 0$$

вычислен по правилу Лопиталя.

Из результатов (3.6.4) следует важное свойство: для случайной величины, распределенной по показательному закону, математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению, т.е.

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Показательный закон распределения обладает важным свойством, называемым отсутствием последействия: если промежуток времени T (случайная величина), распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время τ, то это не влияет на распределение оставшейся части $T–\tau$ промежутка. Проиллюстрируем это свойство на следующем примере.

Пример 1. Установлено, что время работы прибора до первой поломки является случайной величиной T, распределенной по показательному закону с параметром λ.

Обозначим через A случайное событие, состоящее в том, что прибор будет работать безотказно на интервале $[0,t]$. Вероятность этого события

$$P(A) = P(T > t) = 1 - P(T \le t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Аналогично, если C – случайное событие, заключающееся в безотказной работе прибора на интервале времени $[0, t+\tau]$, то $P(C) = e^{-\lambda(t+\tau)}$.

Далее, пусть B– случайное событие, состоящее в том, что прибор будет безотказно работать на интервале времени $[t, t+\tau]$.Из определения случайных событий A, B и C следует, что $C = A \cdot B$. Тогда $P(C) = P(A)P_A(B)$. Найдем теперь $P_A(B)$, то есть условную вероятность того, что прибор будет безотказно работать на интервале $[t, t+\tau]$ при условии, что он уже проработал безотказно на интервале $[0, t]$. Имеем

$$P_A(B) = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\tau}.$$

Полученное значение вероятности оказалось не зависящем от *t*; следовательно событие *B* не зависит от *A*. Другими словами, вероятность безотказной работы прибора на промежутке времени $[t, t+\tau]$ зависит только от длины этого промежутка τ, и не зависит от того, сколько времени прибор проработал до этого.

Пример 2. Сегмент $[a, b]$ оси OX представляет (моделирует) собою шкалу некоторого прибора, причем вероятность попадания указателя в некоторый отрезок шкалы пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его места на шкале. Проверить, что случайная величина X – отметка указателя прибора, распределена по равномерному закону и найти вероятность того, что при испытании указатель остановится на отметке в правой половине шкалы прибора.

Решение. Имеем непрерывную случайную величину *X*, распределенную на отрезке $[a, b]$. По условию, для любых двух точек x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ отрезка $[a, b]$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = k(x_2 - x_1),$$

где k - постоянный коэффициент пропорциональности. В частности,

$$1 = P(a \le X \le b) = k(b-a) \text{ , откуда находим } k = \frac{1}{b-a},$$

и, следовательно,

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{b-a}(x_2 - x_1) \qquad (3.6.5)$$

Теперь построим функцию распределения $F(x) = P(X < x)$. Поскольку случайная величина X распределена на отрезке $[a, b]$, то

$$F(x) = 0 \qquad \text{при } x \le a \qquad (3.6.6)$$

и

$$F(x) = P(X < x) = P(X \le b) = 1 \text{ при } \quad x > b. \tag{3.6.7}$$

Далее, согласно (3.6.5)

$$F(x) = P(X < x) = P(a \le X \le x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad a < x \le b. \tag{3.6.8}$$

Согласно соотношениям (3.6.6), (3.6.8) и (3.6.7) полученная функция распределения совпала с функцией равномерного распределения (3.6.2), что и достаточно было установить.

Далее, случайное событие A – расположение указателя в правой половине шкалы прибора, означает выполнение неравенства $\frac{a+b}{2} < X \le b$, так что соответствующая вероятность может быть вычислена в виде (см. (3.6.5))

$$P(A) = \frac{1}{b-a}\left(b - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

3.7. Нормальное распределение

3.7.1. Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *нормальному закону* с параметрами a и $\sigma > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{3.7.1}$$

Функция (3.7.1) действительно может служить плотностью некоторого распределения, т.к. она, очевидно, неотрицательна и обладает свойством нормированности. Проверим последнее свойство, воспользовавшись значением несобственного интеграла, называемого интеграла Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}. \tag{3.7.2}$$

С помощью замены переменной $t = \frac{x-a}{\sigma}$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1,$$

что и утверждалось.

Если в (3.7.1) $a = 0$ и $\sigma = 1$, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

то говорят, что имеется стандартное нормальное распределение; его плотность совпадает с функцией Лапласа $\varphi(x)$, см. п. 2.10.1

Установим, что соответствующая функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

выражается через интегральную функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt \qquad (3.7.2)$$

следующим образом:

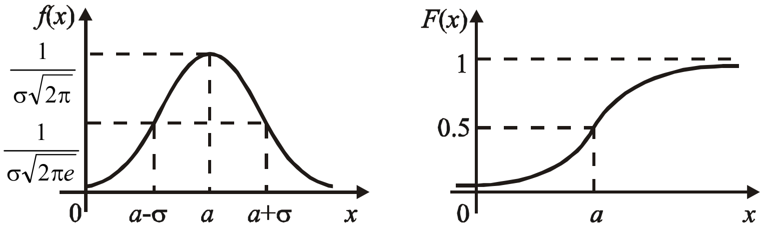
$$F(x) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \qquad (3.7.3)$$

Действительно, с помощью вводимой ранее замены переменных $t = \frac{x-a}{\sigma}$, получаем

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad ; \qquad (3.7.4)$$

При этом первое слагаемое в сумме (3.7.3) есть «половина от значения» интеграла (3.7.1), поскольку (3.7.1) есть интеграл от четной функции по симметричному промежутку. Итак, первое слагаемое в (3.7.4) равно ½, а второе – значение интегральной функции Лапласа в точке $\frac{x-a}{\sigma}$, чем и доказано (3.7.3).

Графики плотности и функции нормального распределения представлены на рис. 3.7.1.



а) б)

Рис. 3.7.1

Кривую, изображенную на рис 3.7.1 а), называют *нормальной* или *гауссовой* кривой. Отметим, что нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a$ и имеет максимум в точке $x = a$, равный $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, а также имеет точки перегиба $x = a \pm \sigma$ с ординатой $1/(\sigma\sqrt{2\pi e})$.

Выясним, как будет меняться нормальная кривая при изменении параметров a и σ. Если параметр σ остается постоянным, но меняется параметр a, то нормальная кривая смещается вдоль оси абсцисс, не меняя формы. Если параметр a остается постоянным, но меняется σ, то меняется ордината максимума кривой $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. При уменьшении σ (т.е. при уменьшении рассеяния случайной величины), ордината точки максимума увеличивается. Но так как площадь под любой кривой распределения должна оставаться равной единице, то кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. При увеличении параметра σ наблюдается обратная картина. Таким образом, параметр a определяет положение, а параметр σ – форму нормальной кривой.

3.7.2. Вероятность попадания значений случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в промежуток (α, β) может быть вычислена в виде

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}).$$

Действительно, если воспользоваться видом функции распределения (3.7.3), то получим

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0{,}5 + \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - (0{,}5 + \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})) =$$

$$= \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}),$$

что и утверждалось.

3.7.3. Из результата п. 3.7.2 вытекает следующее утверждение о вероятности малого отклонения значений нормальной величины от параметра a: для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Для доказательства запишем неравенство $|X - a| < \varepsilon$ в равносильном виде $a - \varepsilon < X < a + \varepsilon$. Тогда, ввиду нечетности функции Лапласа, будем иметь

$$P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \Phi(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}) =$$

$$= \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}),$$

что и требовалось доказать.

В частности при $\varepsilon = 3\sigma$ получаем так называемое правило «трех сигм»

$$P(|X - a| < 3\varepsilon) = 2\Phi(\frac{3\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

Смысл его состоит в следующем: практически достоверно, что абсолютная величина отклонения значений нормально распределенной X от параметра a меньше утроенного значения σ.

3.7.4. Вероятностный смысл параметров a и σ проясняется в следующем утверждении.

Нормально распределенная случайная величина имеет математическое ожидание

$$M(X) = a$$

и дисперсию

$$D(X) = \sigma^2.$$

Докажем, например, первое из соотношений. Используя снова замену переменной $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$, получим

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma t) \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} dt = a \cdot 1 + 0 = a$$

(использовано соотношение (3.7.2) и свойство равенства нулю интеграла по симметричному промежутку от нечетной функции), что и утверждалось.

Замечание. Понятие эксцесса, введенное выше (пп. 3.1.6, 3.4.4) служит одним из параметров, определяющих отличие распределения случайной величины X от нормального распределения, которое наиболее часто используется в теории вероятностей и в математической статистике. По этой причине нормальная кривая стала своего рода эталоном, с которым сравнивают другие распределения. У нормального распределения, как нетрудно проверить , эксцесс $E_x = 0.$ Если $E_x > 0$, то это означает, что график плотности вероятностей $y = f(x)$ сильнее «заострен», чем у нормального распределения, если же $E_x < 0$, то «заостренность» графика $y = f(x)$ меньше, чем у нормального распределения.

3.7.5. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Объясняется это тем, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях. Именно, если случайная величина X представляет собой сумму большого числа взаимно независимых случайных величин $X = X_1 + ... + X_n$ (то есть значения X складываются из значений случайных величин X_k, $k = 1,2,...,n$, распределение каждой из которых не зависит от значений, принимаемых остальными случайными величинами), то при весьма общих условиях закон распределения случайной величины X

близок к нормальному. Условиям, при которых возникает нормальный закон распределения, посвящен ряд теорем, называемых *центральной предельной теоремой*. Смысл этих условий состоит в том, что «удельный вес» каждого отдельного слагаемого должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых. Например, если X – производственная погрешность, то на неё влияют множество факторов (погрешность материала, погрешность станка, инструмента и т.д.), причем если ни одна из этих погрешностей не является определяющей, то случайная величина X имеет закон распределения, близкий к нормальному.

3.6.6. Пример 1. Найти математическое ожидание нормально распределенной случайной величины с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}x^2 - x - 2}.$$

Решение. Выделяя полный квадрат в показателе степени, имеем

$$-\frac{1}{8}x^2 - x - 2 = -\frac{1}{8}(x^2 + 8x + 16) = -\frac{1}{8}(x+4)^2.$$

Теперь

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x+4)^2}$$

и сравнивая эту запись с видом плотности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

имеем параметр $a = -4$, и, следовательно, искомое математическое ожидание $M(X) = -4$.

Пример 2. Производится измерение длины деталей без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,4 см. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,3 см.

Решение. Ошибок систематических, т.е. ошибок одного знака нет, следовательно, математическое ожидание случайных ошибок равно нулю. Здесь применима формула

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) \text{ при } a=0,\ \sigma=0{,}4 \text{ и } \varepsilon=0{,}3.$$

Получим

$$P(|X|<0{,}3)=2\Phi(\frac{0{,}3}{0{,}4})=2\Phi(0{,}75)\approx 2\cdot 0{,}2734=0{,}5468.$$

КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1. Теоретические упражнения

1. Постоянную величину C будем рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую единственное значение C с вероятностью *p*=1. Доказать, что $M(C)=0$ и $D(C)=0$.

2. Пусть C – постоянная величина, $C\neq 0$. Дискретную случайную величину CX определим как величину со значениями Cx_k, соответствующие вероятности которых, очевидно, будут равны $p_k=p(X=x_k)$, $k=1,2,...$. Пусть, далее , X некоторая НСВ; непрерывную случайную величину CX определим как величину со значениями Cx (где x – любое возможное значение величины X) и плотностью вероятности $f(x)$ той же, что и плотность вероятности величины X. В обоих случаях (т.е. в случаях ДСВ и НСВ) доказать, что

$$M(CX)=CM(X) \text{ и } D(CX)=C^2D(X).$$

3. Радиус X круга измерен приближенно. Считая X непрерывной случайной величиной, распределенной в интервале $[a,b]$, найти математическое ожидание и дисперсию длины окружности.

4. Возможно ли, чтобы плотность распределения была равна 1 на промежутке (-0,5, 0,7)?

5. Может ли плотность распределения принять значение, равное 1,1?

6. Может ли функция $F(x) = 1 - e^{-|x|}$ быть функцией какого-либо распределения? Может ли вообще четная функция быть функцией какого-либо распределения?

7. Если плотность распределения $f(x)$ – четна, то чему равен несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx \quad ?$$

8. Может ли плотность распределения быть нечетной?

9. Доказать, что функция $f(x) = e^{-ax^2+bx+c}$, где $a > 0, b$ и c – некоторые заданные постоянные величины, служит плотностью случайной величины βX, где β – некоторая постоянная, а X распределена нормально. Найти (выразить через a, b и c) математическое ожидание и дисперсию величины βX.

10. Найти характеристики положения (моду, медиану, математическое ожидание) случайной величины *X*, распределенной по закону Рэлея

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ (x \geq 0;\ \sigma > 0).$$

Указание: при нахождении медианы Me следует учесть, что $P(X < Me) = F(Me) = \frac{1}{2}$, а при нахождении математического ожидания $M(X)$ использовать метод интегрирования по частям и значение интеграла Эйлера-Пуассона (3.7.2).

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента при включении равна 0,2. Составить ряд распределения числа элементов, отказавших при включении. Найти вероятность того, что откажет не более одного элемента.

2. Три стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, для второго и для

третьего – по 0,7. Пусть X - число попаданий в мишень при одном залпе. Составить ряд распределения X, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3. В пачке из 10 театральных билетов три билета – на премьеру. Наудачу взяты 3 билета. Составить ряд распределения случайной величины X - числа билетов на премьеру среди отобранных. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых билетов окажется на премьеру.

4. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,6. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадет в первый раз в мишень. Составить ряд распределения случайной величины X - числа патронов, выданных стрелку.

5. Испытывается 3 блока компьютера, причем вероятность отказа каждого не зависит от отказов остальных и составляет 0,1. Пусть X - число отказавших за время испытаний блоков. Составить ряд распределения величины X, найти ее математическое ожидание и дисперсию и вычислить вероятности событий: а) $X = 0$; б) $X < 3$.

6. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,5. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X)=4$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)=2$.

7. Случайная величина X задана на всей числовой оси функцией

распределения $F(x) = \frac{2}{\pi} arctg\, x.$ Найти

а) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в промежутке [-1; 0];

б) плотность распределения $f(x)$.

8. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения)

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{x}{6}, 0<x\le 3\\ 1,\ x>3\end{cases}.$$

Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность распределения);

б) математическое ожидание;

в) среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

г) вероятность попадания значений X в интервал $(-1;1)$.

9. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \nu\sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Найти значение параметра ν, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

10. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma=0{,}4$. Найти вероятность того, что дважды в трех испытаниях отклонение X от ее математического ожидания будет меньше 0,3.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

x	0	0,5	1,0	1,5	1,645	1,96
$\varphi(x)$	0,3989	0,3521	0,2420	0,1295	0,103	0,0584
$\Phi(x)$	0,0000	0,1915	0,3413	0,4332	0,45	0,4750
x	2,0	2,50	2,80	3,0	3,5	
$\varphi(x)$	0,0540	0,0175	0,0078	0,0044	0,0009	
$\Phi(x)$	0,4772	0,4938	0,4985	0,4987	0,49977	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е.Гмурман. – М.: Высшая школа, 2001. – 479 с.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.

3.Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и её инженерные приложения/ Е. С. Вентцель, Л. А..Овчаров – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

4. Куликов Г.М. Элементы прикладной математики / Г.М.Куликов, А.Д.Нахман, С.В.Плотникова. – Тамбов.: Изд.-во ТГТУ, 2008. – 160 с.

5. Куликов, Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика: сборник задач/ Г.М. Куликов, И.В. Косенкова, А.Д. Нахман. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Nakhman A.D. Random variables: a teaching aid / A.D.Nahman. - "Innovations in Education". Special issue. Publishing platform of the Russian Academy of Natural Sciences. – 2016. –88 p.

Teaching aid is prepared in accordance with the requirements of updated GEF in the preparation of bachelors and specialists of engineering training areas and aims at the formation of a number of general competencies related to the application of mathematical methods, and, in particular, the method of mathematical modeling, theoretical and experimental research. We propose material on "random event" and "random variables", as well as a compilation of the tasks of practice-oriented.

Designed for students of engineering schools and teachers of mathematics.