Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

И.Ю.Иванова, А.Д.Нахман

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Монография

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2016

УДК 372.851

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензенты:
доктор технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» С.В.Плотникова;
заведующая кафедрой общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», кандидат филологических наук доцент Т.В.Мирзаева

Иванова, И.В. Технологические аспекты реализации Концепции развития математического образования: монография / И.Ю.Иванова, А.Д.Нахман – «Инновации в образовании». Специальный выпуск. – Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2016. –90 с.

Аннотация. В качестве инновационного технологического приёма обучения математике мы рассматриваем использование идей и методов математического моделирования. Проанализированы требования ФГОС и Концепции развития российского математического образования к приобретению учащимися первичных навыков математического моделирования. Процесс математического моделирования адаптирован к учебным задачам.

Монография может представлять интерес для специалистов в области инновационного образования, преподавателей вузов и школ, студентов, мотивированных к математической деятельности.

Введение

В данной монографии изучаются инновационные содержание и технологии реализации основных положений Концепции развития российского математического образования (далее – Концепция). Анализируются также требования ФГОС к математической подготовке учащихся, а именно к достижению определенных предметных, метапредметных и личностных результатов обучения. В качестве основной технологии формирования математических знаний и умений и развития мотивации математической деятельности мы рассматриваем задачный подход. В частности, в решении проблемы сближения в учебном процессе «теоретической» и «реальной» математики важное место занимает эффективное использование идей и методов математического моделирования. Рассмотрен соответствующий понятийно-категорийный аппарат и особенности некоторых моделей. Приведены основные характеристики линии моделей. Предложено содержательное наполнение данной линии: математический анализ, задачи «реальной» математики, стохастические модели.

1. Инновационные технологии формирования математических знаний и умений

1.1. Приоритетные направления математического образования. Концепция определила ряд приоритетных направлений развития математического образования. Среди них – развитие способностей к:

-логическому мышлению, коммуникации и взаимодействию на широком математическом материале;

- реальной математике, а именно, математическому моделированию, применению математики, в том числе, с использованием ИКТ;

- поиску решений новых задач, формированию внутренних представлений и моделей для математических объектов, преодолению интеллектуальных препятствий.

Реализации названных изменений возможна при существенном обновлении как содержания математического образования, которое должно пополняться элементами прикладной и «компьютерной» математики, так и характера математической деятельности. В свою очередь, данные изменения предполагают существенное обновление технологии обучения математике.

1.2. Инновационные технологии. Мы рассматриваем инновации как новшества в содержании, методиках, образовательных технологиях, которые, сохраняя в себе лучшие традиции педагогической практики,

-обусловлены определенным социальным заказом;

-практико-ориентированы;

-вовлечены в процесс апробации, внедрения, освоения; распространения (диффузии);

-призваны получить воплощение в виде нового или усовершенствованного «образовательного» продукта (стандарта, программы, линии учебной литературы, банка контрольных заданий и т.д.).

В свою очередь, технологию обучения будем рассматривать как «последовательность педагогических действий, операций, коммуникаций, выстраиваемую в соответствии с целевыми установками, конкретным ожидаемым предметным или метапредметным результатом» и направленную на гарантированность результата.

Наконец, технологии обучения будем называть инновационными, если они:

- наиболее востребованы на современном уровне развития образования;
- зарекомендовали себя положительным образом в процессе апробации;
- обладают свойством воспроизводимости (возможностью тиражирования).

Исходя из основных положений Концепции, и развивая идеи работы ([30]), всякую инновационную технологию обучения, в широком смысле мы будем рассматривать с точки зрения содержательного, компетентностного и собственно технологического подходов. А именно, речь идет об интеграции

- инновационного содержания, соответствующее компетентностному подходу в обучении;
- инновационных методов обучения, призванных активизировать собственную деятельность учащегося как субъекта образовательного процесса;
- современной инфраструктуры обучения, которое теперь будет происходить (и уже, во многом, происходит) в ИКТ-средах, с применением ИКТ-инструментов.

1.3. Инновационное содержание. Содержание обучения будем понимать как систему знаний, умений, навыков (ЗУН) и способностей установить связь между ЗУН и новой проблемой (в том числе, практического или прикладного характера), перенести соответствующие ЗУН в новую ситуацию и реализовать их в ней, что соответствует именно компетентностно-ориентированному обучению и достижению уровня творческой деятельности.

Инновационное содержание образования предполагает его актуальность и востребованность; такое содержание соответствует современным целям образования, интегрирует формально - знаниевый и личностно - деятельностный подходы. Так, в условиях обновления содержания школьного математического образования выстраиваются две инновационные содержательные линии: логико-стохастическая линия и линия «реальной математики», предполагающая, в частности, освоение учащимися простейших приемов математического моделирования. Эти содержательные линии пронизывают все основные разделы содержания математического образования на каждой данной ступени обучения.

Материал раздела «Логика и множества» нацелен на математическое развитие обучающихся, формирование у них умения точно, сжато и ясно излагать мысли в устной и письменной форме.

Стохастическое направление строится как объединение трех взаимосвязанных составляющих – элементов комбинаторики, теории вероятностей и статистики и включается в образовательный минимум как в основной, так и в старшей школе. Освоение элементов стохастики способствует формированию у учащихся:

-способности применять классическую, статистическую и геометрическую модели вероятности при решении прикладных и практических задач;

-умения прогнозировать наступление событий на основе вероятностно-статистических методов и использовать полученные умения для решения задач в смежных дисциплинах.

Собственно математический подход демонстрирует глубокую связь теоретико-множественного, логического и стохастического направлений ([14]), которая может быть трансформирована в образовательную практику с помощью приемов, предложенных в [14] и [15]. Результатом освоения данной инновационной линии должно стать формирование логико-стохастической компетенции, проявлением которой являются:

- понимание учащимися вероятностного характера происходящих процессов и явлений;

- мотивация к математической деятельности в области логических операций над высказываниями, нахождения вероятностей наступления тех или иных событий, статистической обработки результатов простейших экспериментов («оказывается, это интересно!»);

- овладение комплексом первичных знаний и умений в области математической логики, теории вероятностей и математической статистики (в частности, умений формализовать операции над высказываниями, множествами или событиями, вычислять вероятности событий непосредственно по определению или с помощью подходящих формул, систематизация и визуализация статистических данных в форме таблиц, многоугольников распределения, гистограмм и т.п.);

- приобретение первичного опыта соответствующей деятельности и потенциала для использования этого опыта в новых ситуациях;
- рефлексия (осознание собственных возможностей, самоутверждение в соответствующей деятельности, самооценка).

В современных условиях и в свете основных идей Концепции приобретает особую актуальность проблема сближения «теоретической» и «реальной» математики средствами эффективного использования идей и методов математического моделирования. При этом, по нашему мнению, речь должна идти не только о реализации средствами математики межпредметных связей, но и о внутрипредметном моделировании как способе «переноса» знаний, умений и навыков в смежные разделы курса математики.

Математическое моделирование позволяет свойства объекта-прообраза, его параметры, внутренние и внешние связи описать в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций. В частности, средства математики позволяют интерполировать и экстраполировать (прогнозировать) поведение объекта-прообраза.

Решая учебные задачи (в частности, задания ГИА за курс основной и старшей школы), учащийся постоянно сталкивается с термином «математическая модель». Однако, как правило, понимание этого термина остается на интуитивном уровне. В качестве технологического приема освоения данной содержательной линии мы предлагаем соответствующий цикл задач предварить введением основных понятий, связанных с математическим моделированием. В частности, изучение курса математики на профильном и углубленном уровне, по нашему мнению, предполагает не только ознакомление учащихся с понятиями модели, но также и с такими требованиями к ней как адекватность, простота, оснащенность, продуктивность и др.

Учащиеся должны четко представлять и уметь реализовывать (на доступном им уровне) основные этапа процесса математического моделирования.

Признаками сформированной на начальной стадии компетенции математического моделирования могут служить:

-осознание учащимися возможностей математической науки в описании, исследовании, прогнозировании характера происходящих процессов и явлений, приобретение представлений о широком спектре применений математических знаний и умений;

- повышение мотивации к математической деятельности как следствие такого осознания;

- овладение алгебраическим, геометрическим, аналитическим аппаратом, необходимым как для формализации моделируемой ситуации, так и для ее «внутриматематического» исследования;

- умение (сначала – под руководством учителя, а затем и самостоятельно) строить, анализировать простейшие математические модели и получать необходимые выводы, а также использовать опыт соответствующей деятельности в новых для себя ситуациях;

- «положительная» (оптимистически-ориентированная) рефлексия («у меня получается!»).

1.4. Инновационный технологический прием мы рассматриваем как элемент инновационной технологии, отвечающий на конкретный вопрос: «как данному материалу обучить результативно?». Такой прием отвечает целям формирования определенной компетенции и «привязан» к определенному математическому материалу.

Основным видом математической деятельности школьников является решение задач, то именно задачный подход мы рассматриваем в качестве основной технологии формирования математических знаний и умений и развития мотивации математической деятельности.

Будем понимать под задачным подходом *специально организованное и систематически осуществляемое обучение в виде разрешения разнообразных учебных задач.*

Задачный подход развивает логическое мышление, понуждает учащегося к активному поиску правильных решений, самостоятельной добыче новых знаний. При этом существенно обогащается рефлексивный компонент математической деятельности: осознание субъектом образования своих результатов, критическая самооценка, укрепляется уверенность в себе, в своих возможностях («я могу!»), формируется настойчивость в движении к поставленной цели, аккуратность и сосредоточенность.

Отметим следующие аспекты задачного подхода, которые мы связываем с инновационными технологическими приёмами.

1) Классификация задач на основе характерных признаков и выявление принадлежности данной задачи определенному классу.

2) Алгоритмизация (пошаговое выполнение действий, характерных для решения задач данного класса), в том числе использование технологических таблиц; в таких таблицах сведена информация, позволяющая найти четкие ответы на вопросы:

а) какого рода операции следует выполнять?

б) в какой последовательности выполняются предусмотренные процессом решения операции?

в) каким должен быть конечный результат выполнения определенной операции?

г) какие «математические инструменты» (правила, формулы и т.п.) могут быть привлечены для эффективного выполнения операции?

Так, например, решение задач на нахождение наибольших и наименьших значений величин (физических, геометрических и др.) предполагает:

а) моделирование задачи в терминах функциональной зависимости;

б)«опознавание» класса, к которому принадлежит данное задание – нахождение средствами дифференциального исчисления наибольшего или наименьшего значения функции;

в) использование адекватного данному классу алгоритма (область определения – производная – критические точки – экстремальные значения функции и значения на границе области определения – выбор наибольшего или наименьшего значения).

3)Визуализация (использование таблиц, графиков, мультимедийных средств).

4) Использование специализированных математических средств, например, инвариантности форм (формул) относительно аргумента (решение заданий с помощью замены переменных).

5) Использование серий теоретических упражнений взамен традиционных доказательств теорем; при этом теоретические упражнения понимаются нами как задачи на «локальный» анализ теоретического материала, а именно:

-распознавание основных дидактических единиц (определений, утверждений, формул), возможно – выбор правильного ответа из нескольких вариантов (такие задания относятся одновременно к тестовым);

- вывод незнакомых учащемуся формул на основе уже известных;

- доказательства «в несколько строк» новых (для учащихся) утверждений.

Решения теоретических упражнений, взамен пассивного восприятия учащимися уже готовых доказательств, являются элементами исследовательской деятельности и служат активным методами формирования образовательных компетенций.

К числу инновационных технологических приемов мы относим и кейс-метод (метод кейсов), как метод ситуационного анализа, использующий описание реальных ситуаций и предполагающий пошаговое решение комплексной задачи. Кейс-метод требует не только знания понятий и фактов, но и умения оперировать ими, выстраивать логические схемы решения проблемы, аргументировать свое мнение. Кейс-метод интегрирует в себе другие методы познания: анализ, синтез, описание, моделирование, проблемный метод, эксперимент, классификации и др., способствует оптимальному сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности учащихся.

Решение кейс-заданий влечет за собою рефлексию соответствующей математической деятельности, проявляющуюся, в частности, в анализе собственной работы, развитии самостоятельности, выработке навыков самоконтроля, умении находить причину затруднения и пути его преодоления и др.

Использование указанных приемов в сочетании с ИКТ-инструментами призвано существенно повысить эффективность труда как учителя, так и учащегося, усилить мотивацию учащихся к математической деятельности, а также обеспечить формирование у них практико-ориентированной математической компетенции.

2. Задачи математического образования в контексте требований основных нормативных документов

Обеспечение прикладной направленности обучения математике является одним из главных средств решения проблем, поставленных в Концепции развития Российского математического образования ([9]) и отвечает требованиям Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) к математической подготовке учащегося старшей школы ([25], [26]).

В следующей таблице основные задачи, поставленные ФГОС и Концепцией, систематизированы в соответствии с уровнями образования

№	Уровни образования	Задачи в контексте Концепции	Результаты освоения ООП (предметная область-математика) в соответствии с требованиями ФГОС
1	Дошкольное образование	Обеспечить условия (предметно-пространственную и информационную среду, образовательные ситуации, средства педагогической поддержки ребенка) для освоения воспитанниками форм деятельности,	Содержание образовательной Программы дошкольного образования должно охватывать определенные направления развития и образования детей, в том числе: -социально-коммуникативное развитие; -познавательное развитие. **К предметным результатам** здесь

		первичных математических представлений и образов, используемых в жизни.	можно отнести формирование представлений о свойствах и отношениях объектов окружающего мира (форме, размере, количестве, числе, части и целом, пространстве и времени и др.) **К метапредметным результатам** здесь можно отнести: -формирование познавательных действий, становление сознания; развитие воображения и творческой активности; - формирование умений определять способы действий в рамках предложенных условий и требований (формируется, в основном, в игровых ситуациях). **К личностным результатам** здесь можно отнести: --развитие познавательной мотивации; -развитие коммуникативных умений (общение и взаимодействие со взрослыми и сверстниками); -формирование системы отношений ребенка к миру, к другим людям, к себе самому.
2	Начальное общее образование	Обеспечить широкий спектр математической активности (занятий) обучающихся как на уроках, так и во внеурочной деятельности (прежде всего решение логических и арифметических задач, построение алгоритмов в визуальной и игровой среде), материальные, информационные и кадровые условия для развития обучающихся средствами математики.	**ОСНОВНЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ:** - использование начальных математических знаний для описания и объяснения окружающих предметов, процессов, явлений, а также оценки их количественных и пространственных отношений; -овладение основами логического и алгоритмического мышления, пространственного воображения и математической речи, измерения, …наглядного представления данных и процессов, записи и выполнения алгоритмов; -приобретение начального опыта применения математических знаний для решения учебно-познавательных и учебно-практических задач; -умение выполнять устно и письменно арифметические действия с числами и числовыми выражениями, решать текстовые задачи, умение действовать в соответствии с алгоритмом и строить простейшие алгоритмы, исследовать, распознавать и изображать геометрические фигуры,…представлять, анализировать и интерпретировать данные;

			МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: - овладение способностью принимать и сохранять цели и задачи учебной деятельности, поиска средств ее осуществления; - освоение способов решения проблем творческого и поискового характера; - формирование умения планировать, контролировать и оценивать учебные действия в соответствии с поставленной задачей и условиями ее реализации; определять наиболее эффективные способы достижения результата; - использование знаково-символических средств представления информации для создания моделей изучаемых объектов и процессов, схем решения учебных и практических задач; -овладение логическими действиями сравнения, анализа, синтеза, обобщения, -овладение базовыми предметными и межпредметными понятиями, отражающими существенные связи и отношения между объектами и процессами; -умение работать в материальной и информационной среде начального общего образования (в том числе с учебными моделями) в соответствии с содержанием конкретного учебного предмета. ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: - формирование целостного, социально ориентированного взгляда на мир; - овладение начальными навыками адаптации в динамично изменяющемся и развивающемся мире; -развитие мотивов учебной деятельности и формирование личностного смысла учения; -развитие навыков сотрудничества со взрослыми и сверстниками.
3	Основное общее и среднее общее образование	Предоставлять каждому обучающемуся возможность достижения уровня математических знаний, необходимого для дальнейшей успешной жизни в обществе; - обеспечивать	**ОСНОВНЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ:** - формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; -овладение символьным языком, понятийным аппаратом и методами

		математическую подготовку выпускников, достаточную для продолжения образования в различных направлениях и для практической деятельности; -достижение необходимого уровня математического образования должно поддерживаться индивидуализацией обучения, использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий; - возможность достижения высокого уровня подготовки должна быть обеспечена развитием системы специализированных общеобразовательных организаций и специализированных классов, системы дополнительного образования детей в области математики, системы математических соревнований (олимпиад и др.).	алгебры, геометрии, анализа; -овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; - развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин; - формирование информационной и алгоритмической культуры. **МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ:** -умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности; - умение …осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач; - умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией; - умение оценивать правильность выполнения учебной задачи,собственные возможности её решения; - владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности; - умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать,самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивноеи по аналогии) и делать выводы; - умение создавать, применять и

			преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач. **ЛИЧНОСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ:** - формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию, осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования на базе ориентировки в мире профессий и профессиональных предпочтений; - формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики; - формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве… в процессе образовательной, …учебно-исследовательской, творческой и других видов деятельности.
2	Высшее образование	Система профессионального образования должна обеспечивать необходимый уровень математической подготовки кадров для нужд математической науки, экономики, научно-технического прогресса, безопасности и медицины. Необходимо разработать современные программы, включить основные математические направления в соответствующие приоритетные направления модернизации и технологического развития российской экономики.	**ОБЛАДАНИЕ КОМПЕТЕНЦИЯМИ** (актуализированные ФГОС): выпускник, освоивший программу бакалавриата, должен обладать: способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования; способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат

Как вытекает из приведенных в цитированных нормативных документах положений, реализация прикладной направленности обучения математике тесно связана с реализацией современных подходов к обучению: личностно-ориентированного, деятельностного, исследовательского, компетентностного и др. и направлена, в конечном счёте, на развитие личности – главную цель школьного математического образования.

Вместе с тем, в современных условиях обострились проблемы и противоречия, связанные с математическим образованием. Среди них – *противоречия* между

- традиционными содержанием и методикой преподавания курса математики и потребностью в его практической и профессиональной ориентированности;
- преобладанием в курсе теоретических положений, их подробным, обремененным техническими деталями обоснованием, и необходимостью формирования у учащихся операциональных, практико-ориентированных умений;
- возрастанием в курсе «удельного веса» самостоятельной работы и недостаточным для этого уровнем мотивации учащихся и др.

В этой связи усилилась необходимость модернизации математического образования ([8]), целью которого является уже не только приобретение учащимися некоторой суммы математических знаний, но, в первую очередь, развитие логического мышления, освоение математического аппарата, необходимого для решения прикладных и практических задач, выработка умений перевести задачу с практическим содержанием на математический язык. В решении таких задач заложен наибольший потенциал для роста мотивации учащихся к математической деятельности. Мотив рождается как следствие осознания учащимися возможностей математической науки в описании, исследовании, прогнозировании характера происходящих процессов и явлений. Эта мысль неоднократно высказывалась многими ведущими математиками (А.Н.Колмогоров, Б.В. Гнеденко и др.; см. статью [24] и библиографию в ней).

Каждая практическая или прикладная задача, решаемая средствами математики, сопровождается переводом ее условия на математический язык и последующим использованием понятий, фактов и методов математической науки. Следовательно, процесс ее решения является ничем иным, как процессом математического моделирования.

Навыки математического моделирования занимают важное место среди общих результатов освоения учащимися основной образовательной программы (личностные характеристики, результаты метапредметного характера), и предметных результатов. Востребованность таких навыков обусловлена тем, что математическое моделирование, благодаря бурному развитию вычислительных методов, становится одним из основных методологических подходов к исследованию разнообразных реальных процессов, становясь все более универсальным.

Таким образом, в решении *проблемы* сближения в учебном процессе «теоретической» и «реальной» математики важное место занимает эффективное использование идей и методов математического моделирования.

3. Понятийный аппарат математического моделирования

3.1. Различные подходы к понятию модели. Данное понятие (в частности, математическая модель), строго говоря, представляется первоначальным, *неопределяемым понятием*. Оно основывается на интуитивном представлении об изучаемом объекте, вводится его описание через другие понятия, также ранее не определенные (первоначальные).

Приведем имеющиеся в литературе (см., напр., работы [13], [18] и библиографию в них) формулировки (описания) понятия модели.

«*Моделирование есть замещение некоторого объекта А другим объектом М. Замещаемый объект А называется оригиналом или объектом моделирования, а замещающий Б – моделью»*. Другими словами, *модель – это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий возможность изучения некоторых свойств оригинала.*

«Модель есть намеренно упрощенная схема некоторой части реальной жизни, с помощью которой мы надеемся получить рекомендации к решению реальных проблем».

«Объект M является моделью объекта A относительно некоторой системы S характеристик, если M имитирует A по этим характеристикам».

«Модель есть искусственно созданный объект, который, будучи подобен исследуемому объекту (явлению), отображает и воспроизводит (в виде знаковых форм, формул, схем и т.п.) в более простом и огрубленном виде структуру, свойства, взаимосвязи и отношения между элементами данного объекта (явления)».

«Целью моделирования являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой; модель здесь выступает как средство познания свойств и закономерности поведения объекта. Модель представляет собой как бы проекцию объективной реальности под определенным углом зрения».

Общим для этих описаний является положение о том, что моделирование есть замещение одного объекта (оригинала) другим, который и будет называться моделью.

В настоящей работе мы будем придерживаться концепции А. А. Ляпунова (см. напр. [27]), согласно которой «*моделирование есть опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, изучающее не сам объект, а некоторую вспомогательную искусственную или естественную систему (модель):*

-находящуюся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

-способную замещать его в определенных отношениях;

-дающую при её исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте».

3.2. Математическая модель: характеристики и этапы моделирования. С понятием модели и целями моделирования учащемуся на доступном уровне целесообразно познакомиться уже в курсе основной школы, при этом уровень строгости изложения должен соответствовать возрастной группе учащихся. Математическая модель «в первом приближении» должна ассоциироваться с неким необычным образом реального объекта или процесса, так что моделирование представляет собою путешествие в сказочную страну «Математика», где живут символы, формулы, графики, геометрические фигуры и др., в которые волшебным образом превратились предметы, связи, взаимоотношения, существующие в реальном мире. При этом задача учащегося – выполнить какие-либо действия и «разгадать», что кроется за итоговой формулой, тем или иным результатом, – словом, восстановить цепочку подлинных событий и фактов.

Ознакомление с «миром моделей» на более строгом уровне возможно в старшей школе. Здесь уже речь пойдет о записи свойств изучаемого объекта, процесса или явления на формальном языке с целью получения нового знания (обнаружения новых свойств) путем применения формальных же (математических) методов.

Согласно [22], под математическим моделированием понимается процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью; исследование этой модели, позволяет получать характеристики рассматриваемого реального объекта.

Будем рассматривать *математическую модель как приближенное представление реальных объектов, процессов или систем, выраженное в математических терминах и сохраняющее существенные черты оригинала; при этом математические модели в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.* В частности, при моделировании физического процесса ему сопоставляется система математических соотношений, решение которой позволяет получить ответ на вопрос о поведении объекта без создания собственно физической модели.

Согласно концепции А.А.Ляпунова, процесс математического моделирования должен состоять из трех следующих основных этапов.

1. Прежде всего, строится так называемая *содержательная модель в терминах исходной предметной области* (иногда называемая также концептуальной моделью).

Концептуальная модель содержит исходную информацию для аналитика, выполняющего формализацию задачи и использующего для этого определенную методологию и технологию.

При построении содержательной модели формулируются так называемые постулаты модели (напр., гипотеза о линейном характере исследуемой зависимости), т.е. происходит переход к упрощенному, схематическому описанию объекта.

2. Следующий этап – *перевод содержательной модели на формальный математический язык*, т.е. переход к собственно математической модели.

3. Третий этап состоит в изучении математической модели, т.е. *решении полученной математической задачи*.

4. Последним является этап *интерпретации* (истолкования) результата исследования математической модели, следствием чего будет получение новой для исследователя информации о свойствах реального объекта (для чего, собственно, и был нужен весь процесс моделирования).

Первые два «предматематических» этапа наиболее важны с точки зрения создания модели, адекватной исходному процессу (явлению). По А.А.Ляпунову ([27]), здесь имеются свои шаги (ступени).

Шаг первый состоит в наблюдении, сборе, коллекционировании материалов.

Шаг второй – «систематизация, инвентаризация, индексирование, поиск системы».

Шаг третий – выдвижение гипотезы, ее проверка, проведение эксперимента.

Шаг четвертый – построение теории или соответствующий феноменологической модели изучаемого явления (модель в первом приближении; модель в статусе временного, подлежащего уточнению решения; ситуация типа «ведем себя так, как если бы…»).

И лишь пятый шаг , как высшая точка процесса, – математическое описание объекта, явления, системы.

Вернемся к этапам моделирования. Третий этап, собственно математический, определяется характером возникающей математической задачи и имеющимися средствами ее решения. Здесь мы выделяем следующие шаги.

Шаг 1. Выбор носителя модели, т.е. той математической теории, на базе которой будет решаться математическая задача.

Шаг 2. Выбор метода решения: аналитический (если он принципиально возможен или если уровень развития теории позволяет его осуществить), либо численный.

Шаг 3. Разработка алгоритма решения (так, для краевой задачи математической физики такой алгоритм заложен в методе Фурье; при численном решении речь может идти о блок-схеме и т.д.).

Шаг 4. Реализация алгоритма. Получение результата.

Наиболее часто здесь возникают уравнения различного характера, неравенства, системы уравнений или (и) неравенств, задачи максимизации (минимизации), оптимизации, и др.

Наконец, четвертый этап – это этап возвращения к исходной предметной области. Именно на этом этапе мы получаем требуемую информацию об исходном процессе (явлении), которую мы не могли получить другими средствами. В частности, если речь идет о процессе, то возникает возможность

- определить состояние процесса в определенные моменты времени, промежуточные между теми, в которые это состояние уже было известно;
- прогнозировать состояние процесса за рамками данного временного интервала.

Первая возможность называется *интерполяцией*, вторая – *экстраполяцией.*

Подводя итог, *цель математического моделирования мы усматриваем в создании и реализации математического аппарата, позволяющего умозрительно обнаружить связи между теми или иными процессами, явлениями, факторами, и предвидеть конечный результат их действия.* Математическая модель по мере накопления фактов перерастает в математическую теорию, которая сама начинает служить источником информации.

3.3. Схема представления модели. Полезно ознакомить учащихся со следующей общей схемой представления модели: $X \to W \to Y$. Здесь X – вектор входных переменных, Y – вектор выходных переменных (исходы модели); W – так называемый оператор модели, обеспечивающий преобразование информации (X преобразуется в Y) в соответствие с задачей, решаемой на модели. Имеются следующие три варианта упомянутых задач:

1) *прямая задача*: известны X и W, необходимо найти Y;

2) *обратная задача* 1: известны Y и W, необходимо найти X;

3) *обратная задача* 2: известны X и Y, необходимо найти W.

В последней задаче случае возможны случаи «черного ящика» – оператор модели полностью неизвестен, и «серого ящика» – при известной структуре оператора неизвестны значения параметров.

Так, например, в учебных задачах, относящихся к моделированию физических процессов, в качестве вектора входных переменных X обычно выбирается набор физических характеристик объектов, подверженных, например, механическим колебаниям (струна, стержень), совокупность теплофизических характеристик материалов, в которых происходит теплообмен; в задачах экономики вектор X определяется набором исходных данных, подлежащих анализу (объем выпускаемой продукции, цены, показатели спроса и др.) и т.д. В основе построения оператора модели лежит некоторый физический закон, закономерности рынка (([1], [3]) и т.п. Получаемый результат (число или набор чисел, функция или совокупность функций, функциональный ряд и др.) и порождает компоненты вектора Y выходных переменных.

Здесь следует подчеркнуть, что поиск оператора модели во многих случаях есть составная часть процесса моделирования.

3.4. Иерархия моделей. Свойство универсальности. Решение практических или прикладных задач часто сопровождается некоторой идеализацией реального объекта или ситуации, пренебрежением малозначительными факторами. Учащийся должен понимать, что при этом необходимо соблюдать разумный баланс между адекватностью модели и ее простотой. Адекватность выступает здесь как требование воспроизведения моделью с достаточной полнотой и точностью всех свойств системы, существенных для целей данного исследования; сложность модели не должна превосходить некоторого предела, определяемого возможностями математического аппарата, которым располагает исследователь. На практике часто исследователь строит последовательность моделей, получающихся одна из другой путем последовательного же отказа от предположений, идеализирующих изучаемую систему. Таким образом, выстраивается иерархическая цепочка математических моделей, уточняющих и обобщающих одна другую. Ясно, что при этом утрачивается простота и растет степень адекватности моделей.

Учащимся школы достаточно иметь лишь общие представления об иерархии моделей. Студенту вуза уже доступно изучение иерархических цепочек моделей многих объектов и процессов, относящихся к их будущей профессиональной деятельности. Например, речь может идти о процессе тепломассопереноса. В простейшем случае рассматривается процесс распространения тепла в стержне при отсутствии источников и поглотителей тепла, и с поддержанием нулевой температуры на его концах. При этом решается однородное уравнение в частных производных с однородными краевыми условиями. Усложнение модели происходит, когда температура на концах стержня может меняться с течением времени. Наконец, отказ от предположения «свободного» теплообмена (т.е. присутствие источников или поглотителей тепла) приводит к так называемой неоднородной (существенно более сложной) краевой задаче.

При достаточно глубоко разработанном математическом аппарате возможен и другой путь изучения моделей: «от общего к частному» ([20]). А именно, исследователь рассматривает и решает математическую задачу в общем виде. Затем, опираясь на соответствующую «общую» модель, путем последовательных рассмотрений частных случаев, он выстраивает цепочку более простых моделей. Данный подход позволяет, установив общие свойства системы, конкретизировать и дополнить их в частных случаях.

Свойство *универсальности* математических моделей проявляется в возможности применения одной и той же модели к объектам (системам) принципиально различной природы, подчиняющимся разным фундаментальным законам. Универсальность математических моделей объясняется, с одной стороны, как единством проявления физических свойств окружающего мира, так и абстрактностью математических теорий, их отвлеченностью от объекта исследования с другой стороны. «Математика - это искусство давать разным вещам одно наименование» ([19]).

Примером простейшей универсальной математической модели является функциональная зависимость $y = k x$. При соответствующем «наполнении» данное уравнение может описывать совершенно разные закономерности (закон равномерного прямолинейного движения при постоянной скорости, размер уплачиваемого налога при постоянном проценте отчисления и др.)

Другим примером служит линейное дифференциальное уравнение второго порядка $x'' = -\lambda^2 x$ с постоянным коэффициентом $-\lambda^2$, описывающее процесс (процессную систему) свободных механических колебаний и электромагнитных колебаний. В приведенных и других примерах универсальных математических моделей (см., напр., [10], [11]) одним и тем же символам следует дать соответствующую данной системе интерпретацию. Таким образом, *в универсальности математических моделей проявляется интегрирующая роль математики и ее методов.*

4. Математическое моделирование при решении учебных задач

Обсудим, как реализуется четырехэтапный процесс математического моделирования применительно к учебным задачам.

4.1. Трансформация содержательной модели в модель математическую. Как правило, в учебных задачах содержательная модель уже представлена в условии задачи. Остается только ее проанализировать и формализовать.

На этапе трансформации содержательной модели в модель математическую мы выделяем два возможных уровня сложности решаемых задач. Первый уровень соответствует уже данной знаковой модели, и тогда остается завершить переход к задаче математической: уточнить постановку, выявить дополнительные условия (ограничения на параметры, начальные или краевые условия и т.п.). Такими являются, например, «задачи с прикладным содержанием» банка контрольно-измерительных материалах ЕГЭ. В значительно большей степени интеграция знаний проявляет себя в случае второго уровня сложности, когда саму знаковую модель предстоит еще построить, на основе, например, вербального описания процесса.

4.2. Особенности некоторых моделей.

1) *Моделирование ситуаций аналитически заданными функциями, уравнениями и их системами*. Таковыми являются, например, ситуации, описываемые в задачах на составление уравнений. Здесь происходит переход от вербальной модели к математической, при этом построение математической модели есть, по сути, построение ее оператора на основе зависимостей (законов), представленных в условии задачи. Так, например,

уравнение вида $f(x)=b$ или система уравнений вида $f(x,y)=p,\ \ g(x,y)=q$ может быть истолкована как информация о выходных значениях (b и (p,q), соответственно) оператора. представленного функциями f и g. Используя эту информацию, следует определить «входные» значения x и y (см. обратную задачу №1 математического моделирования в п.1.4.).

2) *Интерполяция и экстраполяция* позволяют отыскивать аналитические зависимости, близкие к функциям, описывающим реальные закономерности. Так, например, при моделировании состояний систем, меняющихся во времени, на заданном временном интервале $[\tau_1,\tau_2]$ в некоторые фиксированные моменты $t_1, t_2,...,t_n$ наблюдаются значения функции $f(t_1), f(t_2),..., f(t_n)$. Требуется восстановить значения f в другие моменты. Если из каких-либо соображений известен вид функции $f(t;a_1,...,a_m)$, где $a_1,...,a_m$ – неизвестные параметры, то эти параметры могут быть определены из условия совпадения значений функции f в точках t_k с данными наблюдений. Соответствующий способ аппроксимации функции и нахождения «промежуточных» значений и является интерполяцией. Ясно, что для вычисления параметров функции необходимо определенное число наблюдений (измерений) в зависимости от вида искомой функции. Так, для определения коэффициентов многочлена *n*-ой степени необходимо $n+1$ наблюдений.

Процесс аппроксимации функции и вычисления её значений за пределами интервала $[\tau_1,\tau_2]$ наблюдения представляет собою экстраполяцию. В более широком понимании, всякое научное представление, порожденное математической моделью, есть экстраполяция (с наблюдаемых ситуаций на ненаблюдаемые, с измеренных величин на неизмеренные и т.д.). Расширение понятия экстраполяции на общий случай существования и перспектив развития системы в будущем называется прогнозированием.

Задачи интерполяции и экстраполяции связаны с обратной задачей 2 моделирования, т.е. с поиском оператора W модели. Случай известного вида искомой функции (напр., многочлена) относится к ситуации «серого ящика».

3) *«Внутриматематическое» моделирование*. Примерами могут служить «алгебраические» способы решения геометрических задач. Так, исходя из теорем и формул геометрии, задача ттрансформируется в уравнение относительно искомой величины или систему уравнений относительно величин, среди которых присутствуют и искомые.

4) Особым случаем моделирования является математическое *моделирование стохастических процессов*, активно внедряющееся в настоящее время в курс математики средней и даже начальной школ (см., напр., [6]).

4.3. Примеры построения математических моделей.

1) Задача интерполяции и экстраполяции. В начале месяца электросчетчик показывал 1050 (квт.), а 20-го числа 2000 (квт.). Считая, что рост потребленной электроэнергии равномерным, определить показания счетчика 5-го числа. Каково должно быть показание счетчика в конце месяца (30-го числа), если потребление электроэнергии будет оставаться равномерным?

Здесь имеется вербальное представление ситуации. Для построения математической модели (нахождения оператора модели) следует знать, что равномерно протекающие процессы описываются линейными функциями. Следовательно, искомая зависимость имеет вид $y = kt + b$ («серый ящик»). Значения $t = 0$ и $t = 5$ можно считать «входными», а $y = 1600$ и $y = 2000$ - «выходными». Параметры k и b искомой линейной зависимости определяются теперь как решения соответствующей системы уравнений. «Восстановленный» оператор есть зависимость вида $y = 20t + 1600$. Теперь возможно нахождение потребленной электроэнергии в любые промежуточные дни и дни после 20-го числа данного месяца (получение этой информации можно отнести к этапу интерпретации модели).

2) Приведём задачу моделирования физического процесса из открытого банка контрольно- измерительных материалах ЕГЭ (www.mathege.ru). В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 6{,}25$ м. – начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин^2, и $b = -\frac{1}{2}$ м/мин – постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ приведите в минутах).

Данную ситуацию можно отнести к первому уровню сложности моделирования: знаковая модель уже представлена в условии задачи, требуется лишь уточнение модели, т.е. сведение задачи к поиску промежутка решений неравенства $H(t) \geq 0$.

3) В случае того же физического процесса рассмотрим задачу моделирования второго уровня сложности (см. [15]) . Из цилиндрического резервуара (площадь основания которого равна S, а высота равна H), заполненного жидкостью, через отверстие площадью s в его дне начинает вытекать жидкость со скоростью, пропорциональной $\sqrt{h}$, где h – высота жидкости над отверстием; коэффициент пропорциональности k известен. Через сколько времени вся жидкость вытечет из резервуара?

На первом этапе решения требуется построить знаковую модель (формализация задачи), для чего применяем следующие рассуждения. Объем жидкости ΔV , вылившейся за промежуток времени Δt, равен произведению $-S\Delta h$, где Δh - изменение высоты h жидкости над отверстием; очевидно, что высота жидкости убывает, так что $\Delta h < 0$, чем и объясняется появление знака "минус" в записи произведения. С другой стороны, этот же объем равен sl, где l - высота вылившейся (через отверстие площадью s) цилиндрической струйки, при этом l (путь, проделанный жидкостью) приближенно равен $v\Delta t$, поскольку можно считать истечение жидкости за малые промежутки времени Δt практически равномерным. Сравнивая полученные двумя способами значения выражения для объема ΔV вытекшей жидкости, получим

$$-S\Delta h \approx sv\Delta t$$

или, согласно условию (пропорциональность скорости величине $\sqrt{h}$),

$$-S\Delta h \approx k\sqrt{h}s\Delta t.$$

При стремлении к нулю приращения Δt последнее приближенное равенство становится все более точным и может быть заменено равенством соответствующих дифференциалов (взятых с постоянными коэффициентами)

$$-S\cdot dh = k\sqrt{h}s\cdot dt \quad \text{или} \quad -S\frac{dh}{\sqrt{h}} = ksdt.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение (этап исследования модели), и учитывая, что в начальный момент резервуар был заполнен (т.е. $h(0)=H$), получаем $-2S\sqrt{h} = kst - 2S\sqrt{H}$.

Теперь возможна интерпретация модели. Резервуар опустеет в тот момент, когда $h=0$. В этом случае получаем $t=\dfrac{2S\sqrt{H}}{ks}$, что и служит ответом задачи.

4) Приведем пример задачи оптимизации, решаемой средствами дифференциального исчисления. Требуется позолотить ларец формы прямоугольного параллелепипеда (стенки и крышку) объема 72 куб. ед., у которого длина основания вдвое больше его ширины. При каких размерах ларца будет потрачено меньше всего позолоты (решение данной задачи приведено ниже в параграфе 6).

5. Содержательно-методическая линия математических моделей

5.1. Типы моделей. Мы выделяем четыре основных типа моделей, возникающих при решении учебных задач.

1) *Модели логического типа*: здесь имеет место формализация рассуждений средствами операций над высказываниями и предикатами. Носителем модели является, соответственно, алгебра высказываний или логика предикатов.

2)*Аналитические модели*: здесь процессы функционирования реальных объектов, или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей. Эти модели разделяется на классы в зависимости от математической проблемы:

-преобразования (нахождение образа при действии некоторого оператора);

-уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные) и неравенства;

- аппроксимационные задачи (задачи интерполяция, экстраполяция, численные методы дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений);

- задачи оптимизации (например, задача линейного программирования).

3) *Геометрические модели*, носителями в которых являются факты и методы геометрии, а объектами исследования – плоские фигуры, поверхности, многогранники, тела вращения и т.д.

4) *Модели стохастического типа* (анализ данных, статистическая обработка результатов наблюдения, вероятностные характеристики случайных событий); см. напр., [6].

5) *Модели смешанного типа*. Так, например, задачи, решаемые средствами аналитической или дифференциальной геометрии используют как аналитический, так и геометрический аппарат; стохастические задачи, решаемые на основе действий над случайными событиями, используют свойства элементов булевых алгебр, общих как для алгебры событий, так и для алгебр множеств и высказываний ([14]).

5.2. Математический анализ как средство моделирования процессов и явлений. В качестве примера рассмотрим возможности средств математического анализа в решении проблем построения аналитических моделей.

Необходимость овладения учащимися элементами математического анализа обусловлена рядом требований, предъявляемых Федеральными государственными образовательными стандартами к результатам освоения основных образовательных программ ([16], [25]).

В частности, изучение элементов математического анализа способствует овладению системой функциональных понятий, развитию умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей. Если функцию одной или нескольких переменных рассматривать как математическую модель реального процесса, то выстраиваются следующие связи понятий.

Связи характеристик процесса и функциональных понятий

Характеристики процесса	***Функциональные понятия***
Тенденции процесса, проявляющаяся с течением времени.	*Предел функции на бесконечности, асимптотическое поведение.*
Бесперебойное течение процесса (перепады, сбои).	*Непрерывность функции (разрывы).*
Скорость течения процесса.	*Производная функции.*
Изменение состояний в малые промежутки времени.	*Дифференциал функции.*
Рост, падение.	*Монотонность функции.*
Пиковые состояния (апогей, перигей).	*Экстремумы функции (наибольшее, наименьшее значения).*
Воспроизводимость состояний процесса.	*Периодичность функции.*
Промежуточные состояния.	*Интерполяция.*
Прогнозируемые состояния.	*Экстраполяция.*
Восстановление процесса по скорости его течения.	*Неопределенное интегрирование.*
Изменение процесса на временном промежутке, локально зависящего от времени протекания линейным образом.	*Определенный интеграл.*

Таким образом, построение, анализ и интерпретация математических моделей процессов и явлений, требует освоения учащимися основ дифференциально-интегрального исчисления. Содержательное наполнение изучаемого модуля «Математический анализ» предлагается ниже.

В заключение отметим, что концептуальные положения данного параграфа в значительной степени являются результатом научного осмысления работ [1] – [30].

6. Математический анализ: содержательное наполнение

6.1. Предел функции одной переменной. *Понятие предела* – одно из основных в математическом анализе. Не приводя строгих определений, объясним смысл указанного понятия. Пусть дана функция $y = f(x)$ и *значения аргумента x неограниченно приближаются к значению* x_0 , но не совпадают с x_0 (что будем записывать в виде $x \to x_0$). Если при этом оказывается, что значения $y = f(x)$ становятся сколь угодно близкими к некоторому числу *A*, то говорят, *A* есть предел функции $f(x)$ в точке x_0 и записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

В случае, когда значения аргумента *x* неограниченно растут по модулю, оставаясь при этом положительными (отрицательными), мы записываем $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$). Если не принципиально, какого знака значения аргумента *x*, то употребляем символ $x \to \infty$. Запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ означает, что значения $y = f(x)$ становятся сколь угодно близкими к числу *A* при $x \to \infty$. Говорят также, что число *A* есть предел функции на бесконечности.

Если в (любом из трех рассмотренных случаев) *A*=0, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой. Возможен также случай, когда значения функции $f(x)$ неограниченно растут (к $+\infty$ или $-\infty$) при стремлении аргумента x к некоторому x_0 или к бесконечности. В этих случаях записывают соответственно $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

а функцию $f(x)$ называют бесконечно большой (при $x \to x_0$ и $x \to \infty$ соответственно). Следует заметить, что если функция $f(x)$ - бесконечно большая (бесконечно малая), то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая (бесконечно большая).

Если рассмотреть, в частности, функцию натурального аргумента (последовательность) $y_n = f(n)$, то к ней применимо определение предела на бесконечности; используют запись $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = A$.

Всякая элементарная функция $f = f(x)$ *непрерывна на своей области определения* $D(f)$. Это означает возможность перехода к пределу под знаком функции $f(x)$ во всякой точке $x_0 \in D(f)$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Этим свойством пользуются при вычислении пределов. Кроме того, при выполнении арифметических операций над функциями соответствующие операции выполняются и над их пределами.

Неопределенностями (при $x \to x_0$ или $x \to \infty$) называются такие выражения (под знаком предела), которые при формальной подстановке вместо аргумента x предельного значения (x_0 или ∞) принимают вид $\dfrac{0}{0}$, $0 \cdot \infty, \dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^{∞} и др.

Приемы вычисления пределов. Вычисление пределов рациональных или иррациональных *дробей на бесконечности* может быть произведено путем *одновременного деления числителя и знаменателя на старшую степень аргумента*, чем достигается переход от бесконечно больших к бесконечно малым. Продемонстрируем прием на следующем примере.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x - x^4}{2x^3 + 3x^2 - 1}$.

Решение. Имеем бесконечно большие в числителе и знаменателе дроби; следовательно, выполняем одновременное деление на старшую степень аргумента, т.е. на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-x^4}{2x^3+3x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^4}-\frac{x^4}{x^4}}{\frac{2x^3}{x^4}+\frac{3x^2}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-1}{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x^4}}.$$

Теперь имеем бесконечно малую в знаменателе дробь и функцию, стремящуюся к -1 в числителе, т.е. дробь оказывается бесконечно большой. Ответ записываем в виде

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-x^4}{2x^3+3x^2-1}=\infty.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю, т.е. на $\sqrt{x+1}+1$, и сократим числитель и знаменатель на общий множитель x, (который при $x\to 0$ не равен нулю). В результате имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

так что искомый предел равен 0,5.

Замечательные пределы. 1) При $t\to 0$ отношение $\frac{\sin t}{t}$ представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Можно доказать, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

2) При $t\to 0$ показательно-степенное выражение вида $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ представляет собою неопределенность вида 1^{∞}. Можно доказать, что соответствующий предел существует и равен некоторому иррациональному числу e=2,7…:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e.$$

Рассмотренные пределы называются , соответственно, первым и вторым замечательными пределами. Второй замечательный предел может быть также записан в равносильной форме

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Непосредственными следствиями первого замечательного предела являются соотношения

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{tg\ t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg\ t}=1,\ \ \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin\ t}{t}=1,\ \ \lim_{t\to 0}\frac{arctg\ t}{t}=1.$$

Пример. Вычислить

$$\text{а)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 x},\quad \text{б)}\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}.$$

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Заметим, что при $x\to 0$(см. первый замечательный предел) отношение $\frac{x}{\sin x}$ (вместе с $\frac{\sin x}{x}$) стремится к единице. При вычислении предела отношения $\frac{\sin 3x}{3x}$ можно снова воспользоваться первым замечательным пределом, если положить $t=3x$, и заметить, что $t\to 0$ при $x\to 0$. Остается выполнить преобразование

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3$$

и закончить вычисление:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 x}=3\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1\cdot 1=3.$$

б) Имеем «комбинированную» неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^\infty$. Если выделить в скобках в качестве слагаемого число 1, то станет возможным использование второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x+3}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{2x}.$$

Теперь $t=\dfrac{-2}{x+3}\to 0$ при $x\to\infty$, поэтому в показателе степени удобно выделить выражение вида $\dfrac{1}{t}$, т.е. $\dfrac{x+3}{-2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}\cdot\frac{-2}{x+3}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{-4x}{x+3}}.$$

Далее, пользуясь свойством непрерывности показательно-степенной функции, перейдем по-отдельности к пределу в основании и показателе степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}=e \text{ (второй замечательный предел при } t=\frac{x+3}{-2}\text{)},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1+\frac{3}{x}}=-4.$$

Имеем теперь

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=e^{-4}.$$

6.2. Задачи по теме «Пределы» для самостоятельного решения учащимися.

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{5-2x}$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{x+1}-2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

6.3. Производная функции одной переменной. Если значение аргумента x функции $f(x)$ получило приращение Δx (изменилось на величину Δx), то соответствующее приращение (изменение) функции $f(x)$ есть $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$. Величину $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ естественно назвать средней скоростью изменения функции f, соответствующей изменению аргумента от x до $x+\Delta x$; «мнговенной» же скоростью изменения функции в точке x тогда следует считать предел вида $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, называемый ***производной*** функции f и обозначаемый $f'(x)$, y' или $\dfrac{dy}{dx}$. Операция взятия производной называется дифференцированием функции.

Таблица производных основных элементарных функций.

1) $(c)'=0,\ c=const$;
2) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$;
3) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$;
5) $(e^x)'=e^x$;
6) $(a^x)'=a^x\ln a$;
7) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;
8) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;
9) $(\cos x)'=-\sin x$;
10) $(\sin x)'=\cos x$;
11) $(\mathrm{tg}\,x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;
12) $(\mathrm{ctg}\,x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
13) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
15) $(\mathrm{arctg}\,x)=\dfrac{1}{1+x^2}$;
16) $(\mathrm{arcctg}\,x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования. Пусть $C=const$, $C\neq 0$, $u=u(x)$, $v=v(x)$. Тогда

$$(C\cdot u)'=C\cdot u';\ \left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{1}{C}u';\ (u\pm v)'=u'\pm v';$$

$$(u\cdot v)'=u'v+uv';\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Производная *сложной функции* $y=f(u(x))$ вычисляется по правилу $y'=f'(u)\cdot u'(x)$, где $u=u(x)$. Так, например,

$$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u',\ (e^u)'=e^u\cdot u',\ (\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'.$$

Если *зависимость* $y=y(x)$ *задана параметрически*, т.е. в виде

$$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},$$

то производная $y'(x)$ (или, в других обозначениях, $\frac{dy}{dx}$) вычисляется по формуле

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Параметрическое задание зависимости y от x (ординаты от абсциссы) может быть использовано, например, при описании движения точки по координатной плоскости в том случае, если ее координаты x и y являются функциями времени *t*.

Производную $f'(x)$ также можно рассматривать как некоторую функцию; в этом случае можно говорить о ее производной как *второй производной* данной функции: $f''(x) = (f'(x))'$. Аналогично можно рассматривать третью и другие производные (производные высших порядков).

Примеры. 1. Вычислить y', если $y = 2x - \ln(1-5x)$.

Решение. В силу правил дифференцирования $y' = 2x' - (\ln(1-5x))'$. Здесь мы имеем сложную функцию, а именно логарифмическую функцию аргумента $u = 1-5x$. По формуле дифференцирования натурального логарифма «сложного аргумента» получаем тогда

$$y' = 2x' - \frac{1}{1-5x} \cdot (1-5x)' = 2 - \frac{-5}{1-5x} = \frac{7-10x}{1-5x}.$$

2. Материальная точка движется прямолинейно, при этом зависимость пройденного расстояния $s = s(t)$ от времени t (закон движения) имеет вид $s(t) = 4t\sqrt{t^2+5}$. Найти скорость v точки в момент $t = 2$.

Решение. Достаточно вычислить производную в точке $t = 2$. По формуле дифференцирования произведения и с учетом правила дифференцирования сложной функции мы имеем

$$v = v(t) = s'(t) = 4\left(1 \cdot \sqrt{t^2+5} + t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t^2+5}} \cdot (t^2+5)'\right) = 4\left(\sqrt{t^2+5} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+5}}\right),$$

$$v = v(2) = 4(\sqrt{9} + \frac{4}{\sqrt{9}}) = \frac{52}{3}.$$

4. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = tg\, 3t \end{cases}$.

Решение. Имеем: $x'(t) = 3\cos 3t,\ y'(t) = \dfrac{3}{\cos^2 3t}$, а тогда по формуле дифференцирования функции, заданной параметрически, получаем

$$y'(t) = \frac{3}{\cos^2 3t} : (3\cos 3t) = \frac{1}{\cos^3 3t}.$$

6.5. Задачи по теме «Производная» для самостоятельного решения учащимися. Найти производную функции $y'(x)$ (в п.в) функция $y(x)$ задана параметрически) :

а) $y = \dfrac{\sin x}{1 + tg\, 2x}$; б) $y = \ln^4 x$ в) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$;

г) $y = e^{3x} + \arcsin\sqrt{x}$; д) $y = \left(1 + ctg^2 x\right)\cdot e^{-x}$; е) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{3x-2}}$;

ж) $\begin{cases} x = 3t + 2t^2 \\ y = 4t^3 - 5t^2 \end{cases}$; з) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$; и) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

6.6. Касательная и нормаль. Правило Лопиталя. *Касательная* к графику функции (кривой) $y = f(x)$, проведенная в точке x_0, имеет уравнение

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Нормаль к графику функции (кривой) $y = f(x)$, проведенная в точке x_0 (т.е. перпендикуляр к касательной в точке касания) в том случае, если $f'(x_0) \neq 0$, имеет уравнение

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0).$$

Пример 1. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^2 - 5x + 4$, в точке $M_0(-1;10)$.

Решение. В нашем случае точка касания имеет (по условию задачи) координаты $x_0 = -1,\ y_0 = f(x_0) = 10$. Вычислим $f'(x) = 2x - 5,$ тогда $f'(x_0) = f'(-1) = 2(-1) - 5 = -7$. Уравнение $y = 10 + \dfrac{1}{7}(x+1)$ или $7x + y - 3 = 0$

является уравнением касательной, а уравнение $y = 10 - 7(x+1)$ или $x - 7y + 71 = 0$ есть уравнение нормали к заданной кривой в указанной точке.

Пример 2**.** Прямая $y = 1 - 3x$ параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 - 6x - 5$. Найти абсциссу точки касания.

Решение. Значение производной $y' = (3x^2 - 6x - 5)'$ в точке касания x равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная в этой точке параллельна прямой $y = 1 - 3x$, их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения:

$$(3x^2 - 6x - 5)' = -3 \quad \text{или} \quad 6x - 6 = -3, \ \text{откуда} \ x = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ состоит в следующем: если существует предел вида $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь a – некоторая точка или бесконечность любого знака.

Если отношение производных при $x \to a$ снова есть неопределенность указанного выше вида, то и правило можно применить снова, переходя ко вторым производным и т.д.

Пример . Вычислить $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

Решение. Функции $y = \ln(x+1)$ и $y = \sqrt{x}$ бесконечно большие при $x \to \infty$, т.е. имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' \right) : \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Снова при $x \to \infty$ имеем неопределенное выражение $\frac{\infty}{\infty}$. Повторное применение правило Лопиталя приводит к следующему результату:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2\sqrt{x})'}{(1+x)'}=\lim_{x\to\infty}2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=0.$$

6.7. Задачи по теме «Касательная. Правило Лопиталя» для самостоятельного решения учащимися. Составить уравнение касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, в точке $M_0(x_0;y_0)$:

1. $y=4\sin 6x,\ M_0(\frac{\pi}{18};\ 2\sqrt{3}).$

2. $y=e^{1-x^2},\ M_0(-1;1).$

3. $y=\frac{4}{x+1},\ M_0(1;2).$

4. $y=\sqrt{x^2+5},\ M_0(2;3).$

5. $y=\ln(2x+1),\ M_0(0;0).$

6. $y=\frac{x^4}{4}-27x+60,\ M_0(2;10).$

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x^2}.$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{tg\,2x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\,4x}{e^{5x}-1}.$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x-e^{-x}}$

6.8. Применение производной к исследованию функций.

Исследование по первой производной: монотонность, экстремумы.

В основе исследования функции на монотонность (возрастание, убывание) и экстремумы (максимумы, минимумы) лежат следующие положения:

а) интервалы, где $f'(x)\ge 0$, служат интервалами возрастания функции $y=f(x)$; на интервалах, где $f'(x)\le 0$, функция убывает;

б) точки перемены знака $f'(x)$ с «+» на «-» служат точками максимума (точка наибольшего значения функции среди всех ее значений из некоторой окрестности этой точки) , а с «-» на «+» - точками минимума (точка наименьшего значения функции в некоторой окрестности).

Исследование по второй производной: характер выпуклости.

Говорят, что дуга линии имеет определенный характер выпуклости, если она пересекается с любой своей секущей не более, чем в двух точках. Такая дуга лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой точке дуги: если целиком ниже касательной, то дуга называется выпуклой (выпуклой вверх), а если выше – то вогнутой (выпуклой вниз).

В основе исследования функции на характер выпуклости лежат следующие положения:

а) интервалы, где $f''(x) \ge 0$, служат интервалами вогнутости графика функции $y = f(x)$; на интервалах, где $f''(x) \le 0$, график функции выпукл;

б) точки перемены знака второй производной $f''(x)$ служат точками перегиба графика, т.е. точками перемены характера выпуклости.

Асимптоты графика. Вертикальная асимптота $x = x_0$ графика функции $y = f(x)$ возникает во всякой точке x_0, где эта функция не определена, и хотя бы один из односторонних ее пределов в точке x_0 равен бесконечности.

График функции обладает асимптотой $y = kx + b$ на бесконечности (наклонной асимптотой), если существуют оба числа (оба предела)

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) \ ;$$

при этом, вообще говоря, следует рассмотреть отдельно оба случая $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Если первый из указанных пределов не существует, или существует первый, но не существует второй, то график не обладает асимптотой (на бесконечности соответствующего знака).

Алгоритм полного исследования функции.

1. Исследование элементарными методами: область определения, характер четности, периодичность.
2. Точки разрыва, вертикальные асимптоты.
3. Исследование на монотонность и экстремумы.
4. Характер выпуклости, точки перегиба.
5. Асимптоты на бесконечности.

Пример. Исследовать процесс, описываемый функцией $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$.

Построить график зависимости состояния процесса от значений переменной x. Можно ли пользоваться адекватной линейной моделью (какой именно?) при неограниченном увеличении значений x ?

Решение. 1)Функция определена при всех $x \neq 2$. Поскольку ее область определения не обладает симметрией относительно начала координат, то вопрос о характере четности не стоит: функция ни четна, ни нечетна.

Очевидно, что функция непериодична.

2)Функция претерпевает разрыв при $x = 2$. Исследуем ее поведение при стремлении x к 2 слева (т.е. при $x < 2$, что обозначается в виде $x \to 2-0$) и справа (т.е. при $x > 2$, что обозначается в виде $x \to 2+0$). В обоих случаях функция остается положителен, и знаменатель дроби стремится к нулю, так что

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = \infty, \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3}{4(2-x)^2} = \infty .$$

Следовательно, прямая x=2 служит вертикальной асимптотой графика.

3)Имеем

$$y' = \frac{3x^2(2-x)^2 - x^3 \cdot 2(x-2)}{4(x-2)^4} = \frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}.$$

Критическими точками (т.е. точками, где производная не определена или обращается в ноль), служат точки $x = 0, x = 2, x = 6$. Этими точками числовая ось разбивается на интервалы знакопостоянства производной y'. При $x \in (-\infty, 0)$, а также при $x \in (0,2)$ имеем $y' > 0$, а значит каждом из этих интервалов функция возрастает; при $x \in (2, 6)$ имеем $y' < 0$, так что в этом интервале функция убывает; наконец, $y' > 0$при $x \in (6, \infty)$, так что в этом интервале функция возрастает.

В точке x=6 производная y' изменила свой знак с «-» на «+», следовательно, в этой точке данная функция достигла своего минимального значения: $y_{\min} = y(6) = 3{,}375$.

4)Найдем вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}\right)' = \frac{6x}{(x-2)^4}.$$

Имеем $y'' < 0$ при $x \in (-\infty, 0)$, так что в указанном интервале график функции выпукл; $y'' > 0$ при $x \in (0,2)$, $x \in (2,+\infty)$, следовательно, при указанных значениях переменной вогнут. Значит, $x = 0$ – точка перегиба графика; при этом $y(0) = 0$. В точке x=2 (критическая точка второй производной) функция не определена.

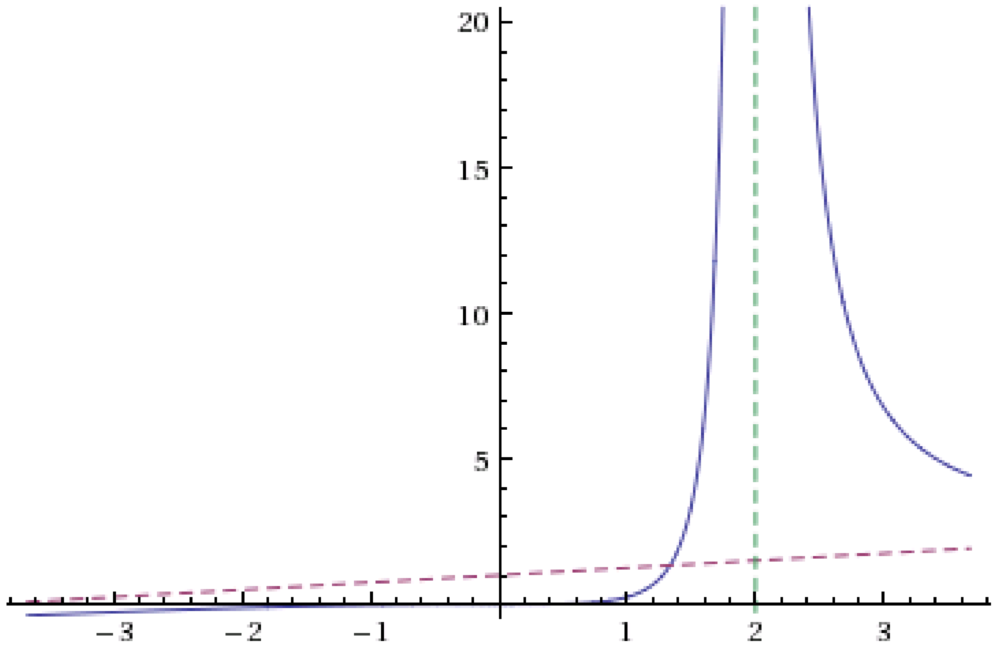
5)Определяем асимптоты графика на бесконечности (наклонные асимптоты). В случае $x \to +\infty$ коэффициенты уравнения прямой $y = kx + b$ будут следующими:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{4(2-x)^2 x} = \frac{1}{4} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{(2-x)^2} = \frac{1}{4} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(\frac{2}{x}-1)^2} = \frac{1}{4};$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^3}{4(2-x)^2} - \frac{1}{4}x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - 4x + 4} = 1.$$

Итак, $k = \frac{1}{4}, b = 1$, следовательно, график обладает асимптотой $y = \frac{1}{4}x + 1$ на $+\infty$. Точно такие же вычисления пределов при $x \to -\infty$ приводят к следующему результату: график обладает той же асимптотой $y = \frac{1}{4}x + 1$ и на $-\infty$.

Соединяя результаты полного исследования, изображаем эскиз графика функции:



Интерпретация модели:

1) Процесс носит разрывный характер; он «резонирует» при $x = 2$.

2) Процесс «нарастает» при $x \in (-\infty, 2)$ и убывает при $x \in (2, +\infty)$.

3) При неограниченном увеличении (уменьшении) значений x можно пользоваться адекватной линейной моделью $y = \frac{1}{4}x + 1$.

6.9. Задачи по теме «Исследование функций» для самостоятельного решения учащимися. Исследовать функцию и построить эскиз ее графика

1. $y = \ln(x^2 + 1)$. 2. $y = (x+2)e^{1-x}$. 3. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$.

4. $y = xe^{-x}$. 5. $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$. 6. $y = -x\ln x$.

6.10. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$, как известно, принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения, соответственно, M и m. Эти значения могут достигаться либо в точках экстремумов, либо на концах отрезка. Следовательно, алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ состоит в следующем.

1. Найти производную функции $f'(x)$.

2. Найти критические точки, расположенные внутри отрезка $[a,b]$ (если они имеются; экстремумы функции могут быть только в этих точках).

3. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка (т.е. в точках $x=a,\ x=b$).

4. Среди найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2, 0]$.

Решение. Следуя изложенному алгоритму, находим $y' = 3x^2 - 3$. Теперь определяем критические точки: $3(x^2-1)=0$, т.е. $x=-1,\ x=1$. Среди них только первая точка лежит на заданном отрезке. Остается вычислить значения функции в точке $x=-1$ и на концах отрезка. Имеем: $y(-2)=2$, $y(-1)=6$, $y(0)=4$. Теперь среди найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее: $y_{наибольшее} = y(-1) = 6,\ \ y_{наименьшее} = y(-2) = 0$.

Пример 2. Найти наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \dfrac{24}{\pi}x - 2$ на отрезке $[-\dfrac{2\pi}{3}, 0]$.

Решение. Имеем $y' = -6\sin x + \dfrac{24}{\pi}$ и $y'=0$, если $\sin x = \dfrac{4}{\pi}$. Последнее уравнение не имеет решений; следовательно, производная знакопостоянна на указанном отрезке. Ясно, что $y'>0$, а поэтому данная функция возрастает на $[-\dfrac{2\pi}{3}, 0]$ и ее наименьшее значении достигается, следовательно, в точке $-\dfrac{2\pi}{3}$:

$$y_{наименьшее} = y(-\frac{2\pi}{3}) = 6\cos(-\frac{2\pi}{3}) - \frac{24}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3} - 2 = -3 - 16 - 2 = -21.$$

6.11. Задачи о наибольших и наименьших значениях величин. Многие задачи из геометрии, физики и других областей естествознания могут быть представлены следующей моделью: имеется некоторая величина, зависящая от двух переменных $\tau = \tau(x, y)$; требуется найти ее наибольшее или наименьшее значение при условии, что x и y связаны некоторым уравнением.

В общем случае возникает так называемая задача об условном экстремуме функции двух переменных. Она решается средствами дифференциального исчисления таких функций, которое в общих чертах представлено ниже. В простейших же случаях удается выразить одну переменную через другую, в результате чего величина τ оказывается функцией одной переменной. Для нахождения ее наибольшего или наименьшего значений остается применить вышеизложенный алгоритм.

Пример. Прямоугольный треугольник имеет периметр, равный $2a$. Найти размеры его катетов, при которых он обладает наибольшей площадью.

Решение. Если x и y – катеты треугольника, то, как известно из геометрии, его площадь $S = \frac{1}{2}xy$. Очевидно, что каждый катет меньше периметра, т.е. $0 < x < 2a$, $0 < y < 2a$. На основании теоремы Пифагора имеем гипотенузу $c = \sqrt{x^2 + y^2}$, так что теперь периметр треугольника $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$. Выразим из полученного уравнения y через x, после чего получим S в виде функции одной переменной. Итак, выполняем соответствующие преобразования полученного уравнения:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a - (x + y);\ x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a(x + y) + (x + y)^2;$$

$$x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a(x + y) + x^2 + y^2 + 2xy;\ 2ax + 2ay - xy = 2a^2.$$

Теперь $y = \frac{2a(a - x)}{2a - x}$ и $S = a \cdot \frac{ax - x^2}{2a - x}$, при этом $0 < x < 2a$. В полученном интервале значений x наибольшее значение площади S может быть достигнуто в точке максимума; следовательно, исследуем знаки первой производной

$$S' = \frac{(a - 2x)(2a - x) + (ax - x^2)}{(2a - x)^2} \text{ или } S' = \frac{x^2 - 4ax + 2a^2}{(2a - x)^2}.$$

Критические точки определяем из условия $S' = 0$ (знаменатель дроби при $0 < x < 2a$ будет строго положительным): $x^2 - 4ax + 2a^2 = 0$, откуда

$x_1 = a(2-\sqrt{2}),\ x_2 = a(2+\sqrt{2})$. Ясно, что $x_2 > 2a$, поэтому на интервале $(0,\ 2a)$ остается единственная критическая точка $x = a(2-\sqrt{2})$, при переходе через которую производная S' меняет свой знак с «+» на «-». Следовательно, в этой единственной точке максимума площадь треугольника и принимает свое наибольшее значение. При этом $y = \dfrac{2a(a-x)}{2a-x} = \dfrac{2a(a\sqrt{2}-a)}{a\sqrt{2}} = a(2-\sqrt{2})$.

Итак, при заданном периметре, равном $2a$ наибольшая площадь прямоугольного треугольника достигается, если он равнобедренный с катетами $x = a(2-\sqrt{2})$, $y = a(2-\sqrt{2})$.

6.12. Задачи по теме «Наибольшие и наименьшие значения» для самостоятельного решения учащимися. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

1. $y = \dfrac{x}{9-x^2}$, $[-2,2]$
2. $y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + \dfrac{1}{3}$, $[0,3]$
3. $y = \dfrac{x^4}{4} - 6x^3 + 7$, $[16,20]$
4. $y = (x-2)e^x$, $[-2,1]$
5. $y = \dfrac{x^2+4}{x}$, $[-4,-1]$
6. $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $[1,4]$.

6.13. Неопределенный интеграл. *Интегрирование* есть действие, обратное дифференцированию. Если $f(x) = F'(x)$ на некотором интервале (a,b), то функция $F(x)$ (по отношению к $f(x)$) называется первообразной.

Так, например, для $f(x) = 2x$ первообразными являются: $F(x) = x^2$, $F(x) = x^2 - 1$, ..., и вообще, любая функция вида $F(x) = x^2 + C$, где C – произвольная постоянная.

В общем случае, совокупность всех первообразных для $f(x)$, $x \in (a,b)$, имеет вид: $\{F(x)+C\}$, где $F(x)$ – некоторая (фиксированная) первообразная, C – произвольная постоянная. Такая совокупность называется неопределенным интегралом для $f(x)$. Обозначение:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Следующие таблица и свойства интегралов могут быть проверены (доказаны) путем дифференцирования правых частей и получением тем самым подынтегральных функций в левой части.

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C$

2. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4. $\int e^{x} dx = e^{x} + C$

5. $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^{2} x} = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^{2} x} = -\operatorname{ctg} x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \arcsin x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}} = \operatorname{arctg} x + C$

12. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

13. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$

Приведем ряд свойств неопределенного интеграла.

Линейность интеграла:

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx; \ \lambda, \mu = \text{const}.$$

Приемы интегрирования:

а) Использование таблицы, линейности и почленного деления. Например,

$$\int \frac{3\sqrt{x}-2x+1}{x}dx = \int\left(\frac{3\sqrt{x}}{x}-\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx = 3\int x^{-\frac{1}{2}}dx - 2\int dx + \int\frac{dx}{x} =$$

$$= 3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 2x + \ln|x| + C = 6\sqrt{x} - 2x + \ln|x| + C .$$

Использованы табличные интегралы: 2), 1), 3).

б) Замена переменных $t = \varphi(x)$ по формуле

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int f(t)dt .$$

Указанная замена эффективна, если в произведении с dx имеется множитель, являющийся (с точностью до постоянного коэффициента) производной выражения ("блока"), от которого зависит оставшийся множитель. Этот блок и обозначаем новой буквой. Вычислив интеграл, возвращаемся к старой переменной.

Пример 1. $J = \int\frac{xdx}{1+x^2}$.

Решение. Заметим, что множитель x есть "почти производная" от блока $1+x^2$: $\left(1+x^2\right)' = 2x$.

Следовательно, полагаем $t = 1 + x^2$ и устанавливаем связь дифференциалов:

$$dt = 2xdx .$$

Числитель подынтегрального выражения будет равен dt, если его домножить на 2 (одновременно умножим интеграл на 1/2):

$$J = \frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C .$$

Любопытно проверить ответ:

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\left(1+x^2\right)' + 0 = \frac{x}{1+x^2} ,$$

т.е. действительно получили подынтегральную функцию.

Пример 2. $J = \int\frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Поскольку $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ есть (с точностью до коэффициента 1/2) производная от $\sqrt{x}$, то обозначим $t=\sqrt{x}$, тогда $dt=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Поэтому

$$J=2\int 2^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right)=2\int 2^{t}dt=2\cdot\frac{2^{t}}{\ln 2}+C=\frac{2}{\ln 2}2^{\sqrt{x}}+C=\frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\ln 2}+C.$$

Те же рассуждения можно привести без явного введения новой переменной, так как $d\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$, то имеем

$$J=2\int 2^{\sqrt{x}}d\left(\sqrt{x}\right)=2\cdot\frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2}+C=\frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\ln 2}+C.$$

Последний прием называется введением под знак дифференциала.

в) В случае интеграла "табличной" функции аргумента λx или $\lambda x+a$ $(\lambda, a=\text{const})$ табличный результат следует делить на коэффициент λ (можно, конечно, применять также замену $t=\lambda x$ или $t=\lambda x+a$ соответственно).

Примеры.

$$1)\ \int\sin 2x dx=-\frac{\cos 2x}{2}+C;$$

$$2)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-(5x)^2}}=\frac{1}{5}\arcsin 5x+C;$$

$$3)\ \int\frac{dx}{3x-1}=\frac{1}{3}\ln|3x-1|+C.$$

г) Выделение полного квадрата в случае квадратного трехчлена в знаменателе дроби. Здесь следует пользоваться формулой

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

и заменой переменных $t=x+\dfrac{b}{2a}$, откуда $x=t-\dfrac{b}{2a}$, $dx=dt$.

Пример. $J=\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+8x+20}$.

Решение. Используем формулу г), в которой $a=1, b=8, c=20$. Имеем

$$x^2+8x+20=1\cdot\left(x+\frac{8}{2}\right)^2+\frac{4\cdot 1\cdot 20-8^2}{4\cdot 1}=(x+4)^2+4.$$

Положим далее $t=x+4$, откуда $dt=dx$. Имеем

$$J=\int\frac{dx}{(x+4)^2+4}=\int\frac{dt}{2^2+t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2}+C.$$

Интегрирование "по частям"

$$\int u dv=uv-\int v du.$$

Прием эффективен при интегрировании функций логарифмической, обратных тригонометрических, а также произведений функций степенной на показательную, тригонометрическую, обратную тригонометрическую. Выбор множителя u (оставшийся множитель в интеграле есть dv) обусловлен такими соображениями:

- du должен иметь простой вид;
- первообразная $v=\int dv$ должна легко отыскиваться;
- $\int v du$ должен оказаться проще $\int u dv$ (т.е. исходного).

Пример 1. $J=\int xe^{1+2x}dx$.

Решение. Имеем произведение степенной и показательной функций. Выберем $u=x$. Тогда $dv=e^{1+2x}dx$. Следовательно,

$$du=dx,\ v=\int e^{1+2x}dx=\frac{1}{2}e^{1+2x}$$

(найдена одна из первообразных). Имеем

$$J=x\cdot\frac{1}{2}e^{1+2x}-\int\frac{1}{2}e^{1+2x}dx=\frac{1}{2}xe^{1+2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{1+2x}+C=\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{1+2x}+C.$$

Заметим, что возможен был также выбор $u=e^{1+2x}, dv=xdx$, но в результате бы интеграл $\int v du$ оказался сложнее исходного.

Пример 2. $J=\int\operatorname{arctg}x dx$.

Решение. Здесь возможен лишь выбор $u=\operatorname{arctg}x, dv=dx$. Тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = \int dx = x.$$

Следовательно,

$$J = (\text{arctg}x)\cdot x - \int x\cdot\frac{dx}{1+x^2} = x\text{arctg}x - \frac{1}{2}\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= x\text{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

6.14.Задачи по теме «Неопределенный интеграл» для самостоятельного решения учащимися. Найти следующие неопределенные интегралы.

1) $\int\frac{e^{3x}\cdot\sqrt{x}-3x^3+4}{2\sqrt{x}}dx$

2) $\int e^{3\cos x-1}\cdot\sin x\cdot dx$

3) $\int\frac{dx}{x^2+6x+13}$

4) $\int x\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot dx$

5) $\int\frac{3\sqrt{x}\cdot\sin x+2\sin^2 x-1}{\sin x}dx$

6) $\int\frac{x^3}{\sqrt{2+x^4}}dx$

7) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-10x+26}}$

8) $\int(1-x)e^{-x}dx$

6.15. Определенный интеграл. К понятию *определенного интеграла* приводит следующая задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Пусть такая трапеция ограничена отрезком $[a,\ b]$ оси абсцисс, прямыми $x=a,\ y=b$ и графиком непрерывной на $[a,\ b]$ функции $y=f(x)$; для определенности считаем $f(x)\geq 0$ на $[a,\ b]$.

Выделим отрезок $[x,\ x+\Delta x]$ малой длины Δx. Площадь соответствующей "полоски" может быть приближенно вычислена как площадь прямоугольника со сторонами длины Δx и $f(\bar{x})$, где точка $\bar{x}\in[x,\ x+\Delta x]$ – произвольна: $\Delta S = f(\bar{x})\Delta x$. Разобьем всю криволинейную трапецию на такие полоски, пронумеруем их (пусть их число равно n) и вычислим приближенно искомую площадь как сумму площадей полосок

$$S \approx \sum_{k=1}^{n}\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k.$$

Устремляя к нулю каждую из длин Δx_k, будем получать все более точное приближение к площади *S*. В качестве точного ее значения естественно принять предел (при стремлении к нулю всех Δx_k) последовательности полученных сумм. Можно доказать, что при сформулированных условиях указанный предел существует и является одним и тем же числом для всевозможных разбиений трапеции на полоски и выбора "промежуточных" точек $\bar{x}_k$.

Сконструированный предел "интегральных" сумм вида называется определенным интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Можно доказать, следующую формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Площадь *S* криволинейной трапеции вычисляется теперь по формуле Ньютона-Лейбница.

Как и для неопределенного интеграла, здесь сохраняется *свойство линейности*. Кроме того, для любых чисел a, b, c:

$$1)\ \int_a^a f(x)dx = 0; \qquad 2)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

$$3)\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Если $x = \varphi(t)$ монотонна на $[\alpha, \beta]$, например, возрастает от $x = a$ к $x = b$ при $\alpha \le t \le \beta$, то справедлива *формула замены переменных*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(знак "минус" в правой части – в случае убывания $\varphi(t)$).

Заменяя переменную под знаком определенного интеграла, следует переходить к новым пределам интегрирования, и, найдя первообразную, к старой переменной не возвращаться.

Пример 1.

$$\int_1^1 \frac{\cos(\text{arctg}x)}{x^2+1}dx = \int_0^1 \cos(\text{arctg}x)\cdot d\,\text{arctg}x = \sin(\text{arctg}x)\Big|_0^1 =$$

$$= \sin(\text{arctg}1) - \sin(\text{arctg}0) = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. $J = \int_2^3 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}dx$.

Решение. Сделаем замену переменных $t = \sqrt{x-2}$, откуда $t^2 = x-2, x = t^2+2, dx = 2tdt$. Новые пределы интегрирования α и β определяются через старые пределы $a = 2$ и $b = 3$ по той же формуле $t = \sqrt{x-2}$:

$$a = 2, \alpha = \sqrt{2-2} = 0; \quad b = 3, \beta = \sqrt{3-2} = 1.$$

Итак,

$$J = \int_0^1 \frac{t}{t+1}2tdt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t+1}dt.$$

Имеем интеграл неправильной рациональной дроби. Выполняя деление "углом", получаем

$$\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}.$$

Поэтому

$$J = 2\left(\int_0^1 tdt - \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{dt}{t+1}\right) = 2\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 - t\Big|_0^1 + \ln(t+1)\Big|_0^1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1-0}{2} - (1-0) + \ln 2 - \ln 1\right) = 2\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

Пример 3. $J = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$u = \ln x, du = \frac{dx}{x};$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, v = 2\sqrt{x}\ .$$

Имеем

$$J = 2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big|_1^e - \int_1^e 2\sqrt{x}\frac{dx}{x} = 2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x^{-\frac{1}{2}}dx\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - 2\sqrt{x}\Big|_1^e\right) = 2\left(\sqrt{e}\ln e - \ln 1 - 2\left(\sqrt{e}-1\right)\right) = 2\left(2-\sqrt{e}\right).$$

6.16. Задачи по теме «Определенный интеграл» для самостоятельного решения учащимися. Найти определенные интегралы.

1) $\int\limits_{-1}^{2}(4-2x)dx$ 2) $\int\limits_{0}^{1}(1-x)e^x dx$

3) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{1+x^2}dx$ 4) $\int\limits_{0}^{4}\frac{x}{1+3\sqrt{x}}dx$

5) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos^2 x\, dx$ 6) $\int\limits_{1}^{2}(6\sqrt[5]{x}-\frac{4}{x^5})dx$

6.15. Приложения определенных интегралов к задачам геометрии. Перечислим основные геометрические приложения определенных интегралов.

1)Площадь фигуры. Если плоская фигура D ограничена линиями $x=a, x=b,\ y=g(x), y=f(x)$, где g и f – непрерывны на $[a,b]$ и $g(x)\le f(x)$ при $x\in[a,b]$, то ее площадь

$$S = \int\limits_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx\,.$$

В частности, при $g(x)\equiv 0$ имеем площадь криволинейной трапеции (см. рис. 1 и 2).

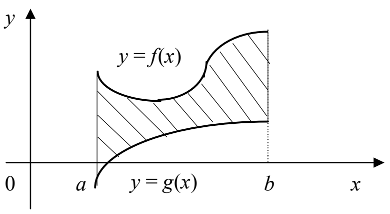


Рис. 1

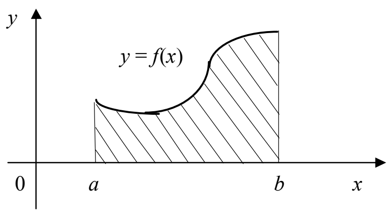


Рис. 2.

2)Длина дуги линии. Если линия L задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то длина ее дуги, соответствующей значениям $x \in [a, b]$ вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx .$$

Пример. Найти длину дуги линии.

$$y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}, 0 \le x \le 2 .$$

Решение. График функции $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ изображен на рис. 3

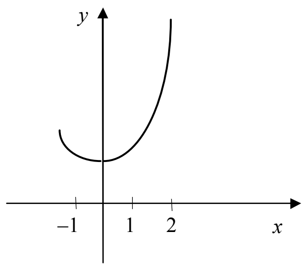


Рис. 3.

Имеем:

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{e^x + 2 + e^{-x}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\right) dx = \frac{1}{2} \cdot 2\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(e - e^{-1}\right) - (1 - 1) = e - \frac{1}{e} .$$

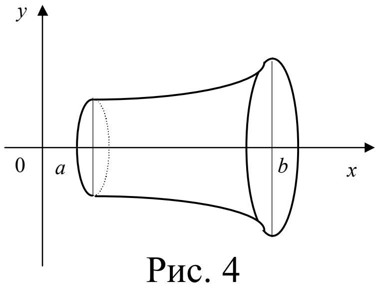


Рис. 4

3) Объем тела вращения. Тело, образованное вращением вокруг $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x = a, x = b$ и графиком $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$), имеет объем (рис. 4)

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx .$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением криволинейного треугольника вокруг оси $0x$, если треугольник ограничен осью $0x$, прямой $x = \frac{\pi}{4}$ и графиком $y = \mathrm{tg}x$.

Решение. Имеем

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \right) =$$

$$= \pi \left(\mathrm{tg}x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \pi \left(1 - 0 - \frac{\pi}{4} \right) = \pi - \frac{\pi^2}{4} .$$

6.16. Задачи по теме «Приложения интегралов» для самостоятельного решения учащимися.

1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1. $y = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, $y = 0,\ x = -1,\ x = 1$ 2. $y = 3\sin 2x,\ \ y = 0\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

1) $y = e^{-x},\ y = 2x + 1,\ x = 1$. 2) $y = -\sqrt{x}$, $y = 2x,\ x = 4$.

3. Найти длину участка линии $y = 2(x+1)\sqrt{x+1}$ при $-1 \le x \le 0$.

7. Задачи с практическим содержанием

7.1. Линейная зависимость. Закон сложения. При решении задач на составление уравнений часто применяют стандартные схемы построения *оператора модели* (уравнения, неравенства, системы уравнений, неравенств и др). Одной из таких схем является использование линейной зависимости. Такая зависимость действует в следующих задачах.

1. Задачи на движение: линейная зависимость между переменными S (длина пути, пройденного прямолинейно движущимся телом), v (скорость равномерного движения) и t (время движения).
2. Задачи на тему «Работа»: линейная зависимость между объемом работы A, производительностью v и временем выполнения работы t.
3. Задачи на тему «Смеси, сплавы»: линейная зависимость между массой смеси (сплава) M, концентрацией вещества c и объемом V.

Оператор модели в этих случаях – это «аддитивный закон» (закон сложения):

1. Встречное движение: расстояние между пунктами равно сумме отрезков пути, пройденных участниками движения до их встречи.
2. Совместная работа: весь ее объем складывается из долей, выполненных участниками.
3. Смеси, сплавы: масса M всей смеси (сплава) складывается из масс ее (его) компонент; масса чистого вещества m в смеси (сплаве) складывается из масс чистого вещества в каждом компоненте.

Переменные	Локальная линейная зависимость	Аддитивный закон (оператор модели)
Равномерное движение: S, v, t	$S=vt$	Встречное движение: $S = S_1 + S_2$
Работа: A,v, t	$A=vt$	Совместная работа: $A = A_1 + A_2 + \ldots$
Смесь, сплав:	$M=cV$	Смеси, сплавы:

M,c,V		$M = M_1 + M_2 + \ldots$ $m = m_1 + m_2 + \ldots$

Решение полученной математической задачи есть решение уравнения или системы уравнений, определяемых оператором модели.

Задача 1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 35% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% меди. На сколько килограммов масса второго сплава больше массы первого?

Решение (моделирование ситуации).

1) Формализация. Введение переменных: x – масса первого сплава, y – масса второго; c_1 -содержание меди в первом сплаве (в процентах) , c_2 - во втором ; M - масса третьего сплава , c - содержание меди (в процентах) в третьем сплаве.

Компоненты «вектора входных переменных» (данные задачи):

$$c_1 = 5,\ c_2 = 35,\ M = 225,\ c = 25.$$

Компоненты «вектора выходных переменных» (искомые величины): x, y.

2) Закон линейной зависимости (применяется к составу каждого сплава):

$$m_1 = c_1 x\ ,\ m_2 = c_2 y,\ m = cM\ .$$

3) Применение аддитивного закона (оператор модели):

$$\begin{cases} x + y = 225 \\ 0{,}05x + 0{,}35y = 0{,}25 \cdot 225 \end{cases}$$

Теперь решаем полученную математическую задачу – систему уравнений; в ответе потребуется записать разность $y - x$.

Решить систему можно, например, следующим образом. Поделим на 0,05 первое уравнение системы, а далее – вычтем из второго уравнения первое. Мы получим $y = 150$, а тогда (из первого уравнения системы) $x = 75$. Итак, вектор выходных переменных имеет компоненты $x = 75, y_2 = 150$.

Теперь искомое $x - y = 75$.

7.2. «Сложные» проценты.

Задача 1 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). 1 января 2015 года был взят в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем должник переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев может быть взят кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

Решение. Ясно, что чем больше месячные выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 220 тыс. рублей. Попробуем непосредственно подсчитать по годам оставшийся долг при указанной схеме выплаты кредита. Составим таблицу, в первом столбце которой будем указывать долг на первое число месяца, а во втором — долг в том же месяце, но уже после выплаты. Для упрощения расчётов будем сохранять только два знака после запятой, представляя суммы долга в тыс. рублей.

Так, в результате первого начисления процентов останется долг $1100+0{,}02 \times 1100 ==1122$; а после выплаты «транша» : $1122 - 220=902$ (тыс.руб.).

Действуя подобным образом и далее, будем иметь

Месяц	Долг на первое число месяца (тыс. руб)	Долг после выплаты (тыс. руб)
1	1122	902
2	920,04	700,04
3	714,04	494,04
4	503,92	283,92
5	289,60	69,60
6	70,99	0

Стоит заметить, что в последний месяц выплата составит менее 220 тыс. руб. Из таблицы видно, что минимальный срок кредита в условиях задачи составляет 6 месяцев.

Ответ: 6.

Задача 2 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). 31 декабря 2013 года был взят в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем должник переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы долг был выплачен тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Здесь (в сравнении с предыдущей задачей) непосредственный подсчет невозможен, но рассуждения будут аналогичными.

Пусть сумма кредита равна a, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют k %. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = a_2 m - x = (am^2 - (1+m)x)m - x$$

Или

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)\,x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1}\cdot x.$$

По условию тремя выплатами кредит должен быть погашен полностью, поэтому

$$am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1}\cdot x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{am^3\,(m-1)}{m^3 - 1}.$$

При $a = 9\,930\,000$ и $k = 10$, получаем: $m = 1 + 0{,}01k$ или $m = 1{,}1$ и

$$x = \frac{9930000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Рассмотрим теперь задачу, в которой предполагается не выплата кредита, а обратный процесс – накопление

Задача 3 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение. Пусть банк первоначально принял вклад в размере s у.е. под x % годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $s(1+0,01x)$ у.е.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось

$$\frac{3s}{4}(1+0,01x)$$

условных единиц (у.е.)

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3s}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)$$

у.е. По условию задачи эта сумма равна $1,44s$ у.е.

Решим уравнение

$$\frac{3s}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,44s.$$

Имеем

$$\frac{3s}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,44s \Leftrightarrow (1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x=-120\pm\sqrt{19600} \Leftrightarrow x=-120\pm 140.$$

$$x_1=20;\ x_2=-260$$

По смыслу задачи: x=20. Новые годовые составляют тогда 20 + 40 = 60 %.

Ответ: 60.

7.3.Задачи «максимизации» и «минимизации».

Задача 1 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение. Пусть в меньший класс распределено x мальчиков (где $1 \le x \le 21$), тогда в больший класс попало ($23 - x$) мальчиков. Доля мальчиков в меньшем классе есть $x/21$, в большем – (23-x)/23. Значит, суммарная доля мальчиков в двух классах равна

$$\frac{x}{21} + \frac{23-x}{22} = \frac{x}{462} + \frac{23}{22}.$$

Получена линейная функция

$$y = \frac{1}{462}x + \frac{23}{22}$$

с положительным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка [1; 21], то есть при $x = 21$. Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из мальчиков, а в большем классе должно быть 20 девочки и 2 мальчика.

Ответ: В одном классе — 21 мальчик, в другом — 20 девочек и 2 мальчика.

Задача 2. Требуется позолотить ларец формы прямоугольного параллелепипеда (стенки и крышку) объема 72 куб. ед., у которого длина основания вдвое больше его ширины. При каких размерах ларца будет потрачено меньше всего позолоты?

Решение. Вектор входных переменных:

x- ширина основания;

$2x$ - длина основания;

y- высота.

Требование к результату в терминах содержательной модели: наименьшие затраты материала. Требование к результату в терминах математической модели: наименьшая площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Оператор математической модели строится из следующих соображений:
1)выражение площади поверхности через компоненты вектора входных переменных x, y;
2) минимизация полученной функции двух переменных.

Оператор модели:

$$S = 2x \cdot x + 2(x + 2x)y,$$
$$S \mapsto \min.$$

Окончательная постановка задачи возможна путем связывания переменных x и y формулой объема, так что в результате минимизируемая площадь поверхности оказывается функцией одного переменного, наименьшее значение которой находим средствами дифференциального исчисления:

$$S = 2x^2 + 6xy;$$
$$V = 2x^2 y;$$
$$S = S(x) \mapsto \min.$$

Прогноз результата: при нахождении точки x наименьшего значения функции $S = S(x)$ определятся размеры ларца, на который уйдет наименьшее количество позолоты.

Теперь алгоритм решения задачи реализуется следующим образом.

1) $y = \dfrac{72}{2x^2};$

2) $S = 2(x^2 + \dfrac{108}{x}),\ x > 0.$

3) Далее находим критические точки функции $S = S(x)$:

$$S' = 2(2x - \frac{108}{x^2}); \quad 2(2x - \frac{108}{x^2}) = 0,$$

откуда $x^3 = 27,\ x = 3.$ Непосредственным исследованием знаков производной убеждаемся, что найденное значение $x = 3$ служит точкой минимума функции $S = S(x)$.

4) В условиях данной задачи при $x = 3$ поверхность ларца (боковая поверхность плюс крышка) будет наименьшей. Следовательно, искомые размеры ларца: ширина $x = 3$; длина $2x = 6$; высота $y = 4$.

Результат интерпретируется следующим образом: при размерах $6 \times 3 \times 4$ на позолоту уйдет наименьшее количество материала.

7.4.Задачи для самостоятельного решения учащимися.

1. Расстояние между городами A и B равно 650 км. Из города A в город B со скоростью 55 км/ч выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города A автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

2. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 20 часов. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

3. В среду акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а в четверг подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 64% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

4.Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

5.Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации;

$25 < t < 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гбайт?

8. Стохастические модели

Ряд процессов и явлений носят случайный характер, в силу чего при их моделировании используется аппарат теории вероятностей и математической статистики. Стохастические знания, вероятностное мышление, умение строить научно обоснованные прогнозы, становятся как нельзя востребованными в современных условиях. Согласно требованиям ФГОС, в результате изучения базовой части естественно-математического цикла обучающийся должен

знать: основные понятия, методы и приемы теории вероятностей и математической статистики;

уметь: использовать в практической деятельности математические (вероятностно-статистические) методы;

владеть навыками анализа статистических данных.

В свою очередь, для этого необходимы владение умениями:

- построения вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей;
- исследования случайных величин по их распределению;
-анализа статистических данных.

8.1. Случайные события. Понятие *события* является первоначальным, неопределяемым. События можно разбить на три категории: *достоверные* (наверняка происходящие при выполнении данного комплекса условий; достоверные события обозначаем символом E), *невозможные* (наверняка не происходящие; невозможные события обозначаем символом $\varnothing$) и *случайные* (могут как произойти, так и не произойти при выполнении данного комплекса условий; обозначения: $A, B, C, \ldots$).

Во множестве событий вводятся следующие действия.

Сложение событий. Событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ называется суммой конечного количества событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если событие А состоит в наступлении хотя бы одного из указанных $A_k, k = 1,\ldots,n.$

Умножение событий. Событие $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ называется произведением конечного количества событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если событие B состоит в совместном наступлении всех указанных $A_k, k = 1,\ldots,n.$

События A_1, A_2 называются *несовместными*, если $A_1 \cdot A_2 = \varnothing$. Другими словами, два события несовместны, если в результате опыта наступление одного из них исключает наступление другого.

События $A_1, A_2,\ldots,A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из них несовместны.

Говорят, что события $A_1, A_2,\ldots,A_n$ образуют *полную группу*, если $A_1 + A_2 + \ldots A_n = E$. Другими словами, события $A_1, A_2,\ldots,A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта наступление хотя бы одного из них является достоверным.

События A и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если они несовместны и образуют полную группу: $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = E$.

8.2. Классическая, статистическая и геометрическая вероятность.

Будем рассматривать события A, B, C, ... как исходы некоторого опыта; число исходов считаем конечным. Каждому опыту сопоставим множество всех его *элементарных* (простейших, «неразложимых») *исходов* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, которое дает полную информацию о предполагаемых результатах этого опыта.

Элементарными называются такие исходы ω_i опыта, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) *группа исходов полна*, т.е. обязательно произойдет хотя бы один из ω_i;

б) исходы попарно *несовместны*;

в) все ω_i – *равновозможны*, т.е. объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой.

Среди элементов множества Ω имеются исходы, *благоприятствующие* событию A, то есть те, в результате которых событие A наступает.

Классической вероятностью события A называется отношение числа $m = m_A$ элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу n всевозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для вычисления количества всевозможных и благоприятных исходов опыта часто пользуются формулами комбинаторики.

Понятие *относительной частоты* вводится в результате анализа проведенных опытов. Если в результате n опытов событие А появилось $m = m_A$ раз, то относительной частотой события A называют число

$$W(A) = W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

С ростом числа однотипных опытов относительная частота приобретает свойство устойчивости, колеблясь относительно некоторого числа $P = P(A)$, которое принимают за статистическую вероятность события A.

Геометрическая вероятность. Рассмотрим следующий опыт: в некоторую ограниченную область E бросается точка, причем попадания ее в любые части, имеющие одинаковую меру (например, площадь в случае плоских областей) считаются равновозможными. Пусть событие A – ее попадание в область $A \subset E$. Если $S(A)$ и $S(E)$, $S(E) \neq 0$ – соответственно меры A и E, то геометрической вероятностью события A будем называть число

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)}.$$

8.3. Вероятность произведения и суммы событий. Обозначим $P_A(B)$ вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло и будем называть ее *условной вероятностью события* B. Имеет место соотношение

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

В случае произведения трех и большего числа событий имеет место аналогичный результат. Так, например,

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C).$$

Вычисление условной вероятности $P_A(B)$ предполагает, что вероятность события В зависит от того, наступило или не наступило событие A. Два события A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли другое событие. Аналогично, события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности, если каждая из вероятностей $P_j = P(A_j)$ остается абсолютно постоянной в условиях данных опытов.

Для двух независимых событий A и B

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B);$$

в случае же n событий, независимых в совокупности,

$$P(A_1\cdot A_2\cdot ...\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot ...\cdot P(A_n).$$

Вероятность суммы событий. Следующий результат справедлив в случае суммы любых двух событий A и B:

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2).$$

В частности, для *несовместных* A_1 и A_2 имеем

$$P(A_1+A_2)=P(A_1)+P(A_2).$$

В случае суммы n попарно несовместных событий .

$$P(A_1+A_2+...A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n);$$

Наконец, для совместных событий имеет место соотношение

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot ...\cdot\overline{A_n}).$$

В частности, если события $A_1, A_2, ..., A_n$ *независимы в совокупности*,

$p_j = P(A_j)$ и $q_j = P(\overline{A_j}) = 1-P(A_j),\ j=1,2,...,n,$

имеет место равенство

$$P(A_1+A_2+...A_n)=1-q_1q_2...q_n.,$$

Схема альтернатив. Решение многих задач основано на следующей альтернативе, к которой часто сводятся составные события: «или и *A* и *B*, или не *A* и *C*», $D = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$. Следовательно,

$$P(D) = p \cdot p_1 + q \cdot p_2,$$

где $p = p(A)$, $q = 1 - p$; при этом вероятности p_1 и p_2 событий *B* и *C*, соответственно, могут быть как «безусловными», так и условными: $p_1 = p_A(B)$, $p_2 = p_{\bar{A}}(C)$. Формула альтернатив включает в себя так называемую формулу полной вероятности для двух гипотез

$$P(D) = P(A) \cdot P_A(D) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(D),$$

и формулу вычисления вероятности наступления только одного из двух независимых событий *A* и *B*

$$P(A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B) = p \cdot q^* + q \cdot p^*, \text{ где } p^* = p(B),\ q^* = 1 - p^*.$$

8.4. Типовые задачи.

1. Из четырех отрезков длиной 1, 3, 5, 7 наугад выбирают три. Какова вероятность, события *A*, состоящего в том, что из них можно построить треугольник?

Решение. Используем вычисление классической вероятности. Элементарным исходами опыта являются всевозможные выборки по три отрезка из четырех. Непосредственным перебором (или используя формулу числа сочетаний из четырех по три), убеждаемся, что их количество *n*=4. Благоприятным является единственный исход «3,5,7» (когда сумма длин двух любых сторон больше третьей стороны треугольника); таким образом, *m*=1. Следовательно, искомая вероятность $P(A) = \frac{1}{4}$.

2 Считается, что в данной местности относительная частота рождения мальчиков равна 0,52. Сколько имелось новорожденных в течение года, если в органах ЗАГСа было зарегистрировано 572 мальчика.

Решение. Относительная частота события A рождения мальчика $w(A)$ =0,52 в данной задаче вычисляется как отношение числа m=572 рожденных мальчиков к числу n новорожденных: $0{,}52 = w(A) = \dfrac{572}{n}$, откуда n=1100.

3. На склад поступают детали заводов № 1 и № 2. Первый завод производит 80% стандартных изделий, завод № 2 – 60%. Наудачу взяли по одной детали каждого завода. Найти вероятности следующих событий: а) обе детали стандартны; б) только одна деталь стандартна; в) хотя бы одна деталь стандартна.

Решение . а) Событие A – обе детали стандартны. Введем события A_1 – произведенная заводом № 1 деталь стандартна, A_2 – деталь завода № 2 стандартна; следовательно, $A = A_1 A_2$. События A_1 и A_2 , очевидно, независимы; поэтому

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48\,.$$

б) Событие B – только одна деталь стандартна; $B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$ (схема альтернатив). События A_1 и $\overline{A}_2$, $\overline{A}_1$ и A_2 – независимы, $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$ несовместны. Тогда

$$P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44.$$

в) C – хотя бы одна деталь стандартна; очевидно, что $C = A_1 + A_2$, причем события A_1 и A_2 – совместны; следовательно

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}48 = 0{,}92\,.$$

4. На конвейер поступают 20 % изделий цеха № 1 и 80 % – цеха № 2. Вероятность брака для изделия из первого цеха P_1 = 0,1; для второго цеха – P_2 = 0,05. Какова вероятность, что наугад взятое изделие - бракованное ?

Решение . Пусть A – событие, состоящее в обнаружении брака в случайно отобранном изделии. Пусть B выбранное изделие произведено цехом №1.

Тогда событие A есть наступление B и A или $\overline{B}$ и A так что применима схема альтернатив, в которой $P(B)=0{,}2$; $P(\bar{B})=0{,}8$; $P_B(A)=0{,}1$; $P_{\bar{B}}(A)=0{,}05$. Тогда по формуле альтернатив

$$P(A)=0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}8\cdot 0{,}05=0{,}06$$

8.5. Повторение опытов. Формула Бернулли. Пусть один и тот же опыт повторяется n раз, и при этом вероятность наступления события A в каждом таком опыте остается неизменной, равной некоторому p; пусть $q=1-p$. Описанная ситуация независимых опытов называется *схемой Бернулли*. Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что *событие A появится ровно k раз в n опытах.* В этом случае говорят также о k «успехах» в n опытах. Имеет место следующая *формула Бернулли*:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

где C_n^k - так называемое число сочетаний из n по k, вычисляемое по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Далее, *вероятность наступления события A в n опытах от k_1 до k_2 раз*, есть

$$P_n(k_1\le k\le k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}.$$

8.6. Примеры.

1. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых опытах: а) два раза; б) менее двух раз, если вероятность появления события A в одном опыте $p=0{,}4$.

Решение. а) Пусть событие B состоит в появлении A ровно два раза в пяти опытах. Тогда по формуле Бернулли

$$P(B)=P_5(2)=C_5^2(0{,}4)^2\cdot(0{,}6)^3=0{,}3456.$$

б) Если событие C означает появление A менее двух раз, то есть или ни разу (k=0) или один раз (k=1), то

$$P(C)=P_5(0)+P_5(1)=C_5^0\cdot 0{,}4^0\cdot 0{,}6^5+C_5^1\cdot 0{,}4^1\cdot 0{,}6^4=$$
$$=0{,}07776+0{,}2592=0{,}33696.$$

2. Что вероятнее: выиграть у равносильного соперника две шахматные партии из четырех или три из шести?

Решение. Имеем схему Бернулли, в которой вероятность события в единичном опыте (выигрыша одной партии) $p = \frac{1}{2}$, $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Теперь надо сравнить вероятности $P_4(2)$ и $P_6(3)$. Получаем

$$P_4(2) = C_4^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^2 = \frac{6}{16}, \quad P_6(3) = C_6^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}.$$

Следовательно, вероятность выиграть 2 партии из 4 – выше.

8.7. Задачи для самостоятельного решения учащимися.

1. Рассматриваются следующие события: A – первое из полученных электронных писем содержит навязчивую рекламу (СПАМ), B – второе письмо содержит СПАМ. Выразить с помощью операций сложения и умножения через события A и B и (или) им противоположные следующие события:

а) событие С – ни одно из писем не содержит СПАМ;

б) хотя бы одно письмо содержит СПАМ;

в) только одно письмо содержит СПАМ.

2. Владелец банковской карты забыл PIN-код и, помня только, что все 4 цифры различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что PIN-код набран правильно.

3. После летнего ремонта в аудитории расставили в случайном порядке 20 столов. Найти вероятность того, что столы будут расставлены в прежнем порядке.

4. Для студента вероятности сдать экзамен по высшей математике на оценку удовлетворительно равна 0,4; на оценку хорошо и отлично соответственно равны 0,3 и 0,2. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен на оценку выше удовлетворительной.

5. Абитуриент сдает три экзамена. Вероятность сдать экзамен по русскому языку равна 0,9, по математике и физике вероятности соответственно равны 0,8 и 0,6. Найти вероятности следующих событий

а) абитуриент сдаст все три экзамена;

б) абитуриент не сдаст ни один экзамен;

в) абитуриент сдаст только экзамен по русскому языку;

г) абитуриент сдаст только один экзамен;

д) абитуриент сдаст хотя бы один экзамен.

6. В конкурсе на строительство крупного объекта принимают участие 5 местных фирм. Вероятности для каждой из фирм выиграть конкурс соответственно равны 0,1; 0,05; 0,2; 0,15; 0,3. Найти вероятность того, что хотя бы одна местная фирма примет участие в строительстве объекта.

7. Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридические направлений поступают на биржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,8, на вакансию юриста – 0,5. Найти вероятность, что случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности.

8. На строительство объекта поставляются кирпичи, изготовленные двумя заводами. Производительность второго завода выше производительности первого на 20%. Вероятность того, что кирпич, изготовленный на первом заводе высокого качества равна 0,9; для второго завода эта вероятность равна 0,85. Найти вероятность, что наудачу взятый кирпич оказался высокого качества.

9. Вероятность продать по оптимальной цене каждый из пяти пакетов акций в период их падения равна 0,25. Какова вероятность продажи по оптимальной цене большей части пакета?

10. В семье 5 детей; вероятность рождения мальчика в данной местности равна 0,6. Найти вероятности следующих событий:

а) в семье две девочки;

б) в семье не менее двух девочек;

в) в семье мальчиков больше, чем девочек.

8.8. Случайные величины. Числовые характеристики. *Случайной величиной* называется числовая величина X , которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Если все возможные значения величины X можно записать в виде числовой последовательности $\{x_n\}$, $n = 1, 2, ...$ (конечной или бесконечной), то X называется *дискретной*; если же возможные значения X заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина X называется *непрерывно распределенной* на этом интервале.

Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между ее возможными значениями x_k и вероятностями $p_k = P(X = x_k)$ принятия величиной X этих значений. Обычный способ задания такого закона – ряд (таблица) распределения. В случае конечного числа n значений величины X (записанных в порядке возрастания) ряд распределения имеет вид

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Наряду с законом (рядом) распределения часто бывает удобно пользоваться числами, которые описывают случайную величину суммарно; такие числа называются *числовыми характеристиками* случайной величины. Они помогают «в сжатой форме» выразить наиболее существенные черты распределения. Основными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, характеризующее среднее значение случайной величины, и дисперсия, характеризующая степень рассеяния случайной величины относительно ее математического ожидания.

Математическое ожидание $M(X)$ дискретной величины X определяется в виде

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k \ ,$$

дисперсия $D(X)$ – в виде

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - M(X)\right)^2 p_k \ ;$$

дисперсию можно вычислить также по формуле

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n} \ (x_k)^2 p_k - (M(X))^2 \ .$$

Характеристика рассеяния вида

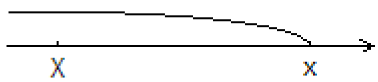
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} \ ,$$

называется *средним квадратическим отклонением.*

9.9. Функция распределения. Универсальным способом описания всякой случайной величины X является *функция распределения* (синонимы: интегральный закон распределения, интегральная функция), имеющая вид

$$F(x) = P(X < x).$$

Она соотносит каждому $x \in (-\infty;+\infty)$ вероятность события, состоящая в принятии величиной X значения левее точки x.



Так, функция распределения дискретной случайной величины, обладающей конечным перечнем значений $\{x_1, x_2, ... x_n\}$, строится в виде

$$F(x) = \sum_{k \mid x_k < x} p_k \ \ ;$$

суммирование в (2.2) проводится по тем k, для которых соответствующие x_k оказываются меньшими x.

Уточним теперь определение непрерывных случайных величин: это величины *с непрерывной кусочно-дифференцируемой функцией распределения.*

Плотностью распределения (плотностью вероятности или дифференциальной функцией) называется функция

$$f(x) = F'(x).$$

Вероятность принятия непрерывной случайной величиной значения в данном числовом интервале может быть вычислена в виде

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) \text{ или } P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$$

В случае, если $f(x)$ принимает нулевые значения вне интервала $[a, b]$, математическое ожидание и дисперсия определяются, соответственно, в виде

$$M(X) = \int_{a}^{b} x f(x)dx \text{ и } D(X) = \int_{a}^{b} (x - M(x))^2 f(x)dx.$$

Дисперсия может быть также вычислена в виде

$$D(X) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)dx - (M(X))^2;$$

средним квадратическим отклонением непрерывной случайной величины называется величина $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

9.10. Случайные величины: типовые задачи.

1. Ряд распределения дискретной случайной величины X имеет вид

X	1	2	4
p	0,5	p_2	0,25

Определить p_2, $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Согласно свойству вероятностей ряда распределения имеем $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, откуда $p_2 = 1 - 0,5 - 0,25$, то есть $p_2 = 0,25$. Далее, согласно формулам для вычисления математического ожидания и дисперсии получаем в нашем случае

$$M(X) = 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,25 + 4 \cdot 0,25 = 2;$$
$$D(X) = 1^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,25 + 4^2 \cdot 0,25 - 2^2 = 1,5.$$

2. В лотерее из ста билетов выигрышными являются один билет в 50 рублей, три билета в 25 рублей и пять билетов по 10 рублей. Для случайной величины X – стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета найти:

а) закон распределения;

б) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Решение. а) Множество возможных значений случайной величины X:

$$\{x\} = \{0;10;25;50\}.$$

Найдем соответствующие вероятности этих значений:

$p_1 = p(X = 0) = \frac{100 - 1 - 3 - 5}{100} = \frac{91}{100} = 0{,}91$;

$p_2 = p(X = 10) = \frac{5}{100} = 0{,}05$;

$p_3 = p(X = 25) = \frac{3}{100} = 0{,}03$;

$p_4 = p(X = 50) = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

Проверим, что $\sum_i p_i = 1$. Действительно, 0,91 +0,05+0,03+0,01=1.

Итак, ряд распределения примет вид:

x_i	0	10	25	50
p_i	0,91	0,05	0,03	0,01

б) Вычислим математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$M(X) = 0 \cdot 0{,}91 + 10 \cdot 0{,}05 + 25 \cdot 0{,}03 + 50 \cdot 0{,}01 = 1{,}75$

$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}91 + 10^2 \cdot 0{,}05 + 25^2 \cdot 0{,}03 + 50^2 \cdot 0{,}01 - 1{,}75^2 = 45{,}6875$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{45{,}6875} = 6{,}759252917$

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ 1 - x^2, & -1 < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. Имеем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ -2x, & -1<x\le 0;\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

Далее,

$$M(X)=\int_{-1}^{0}x(-2x)dx=-\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}=-\frac{2}{3};$$
$$D(X)=\int_{-1}^{0}x^2(-2x)dx-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{0}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

9.11. Специальные виды распределений. Пусть дискретная случайная величина X принимает значения, равные количеству появлений события A в n испытаниях, при условии, что в каждом вероятность $P(A)$ одна и та же, равная некоторому p; $q=1-p$ (схема Бернулли). Ее *закон распределения называется биномиальным*; соответствующий ряд распределения имеет вид

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Математическое ожидание биномиальной случайной величины X равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании

$$M(X)=np,$$

а её дисперсия равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании

$$D(X)=npq.$$

Дискретная случайная величина X *распределена по закону Пуассона* с параметром λ, если она принимает значения $\{0,1,2,...,m,...\}$ с вероятностями

$$p_m=P(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\ (m=0,1,2,...).$$

Закон Пуассона можно понимать как предельный случай (при $n\to\infty$, $\lambda=np=const$) биномиального закона. Так как вероятность появления события A в каждом испытании мала, то закон Пуассона называют законом редких явлений. По закону Пуассона распределены многие случайные величины, например, число сбоев на автоматической линии, число бракованных изделий в большой партии товара и т.д.

Ряд распределения Пуассона имеет вид

X	0	1	2	...	m	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают между собою и равны параметру λ этого распределения:

$$M(X) = \lambda, \ \ D(X) = \lambda .$$

Непрерывная случайная величина X *распределена по равномерному закону* на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке. А именно,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0 \quad , & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Функция распределения $F(x)$ равномерно распределенной случайной величины равна

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases} ,$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$ случайной величины вычисляются, соответственно, по формулам $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$ и $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Равномерные распределения довольно часто встречаются на практике. Например, равномерно распределение на отрезке $[0;t_0]$ время ожидания транспорта, если предположить, что пассажир приходит на остановку в случайный момент времени, а транспорт ходит регулярно с интервалом t_0 мин. При компьютерном моделировании случайных явлений используется так называемый «генератор случайных чисел», который генерирует значения случайной величины, распределенной равномерно на отрезке $[0;1]$.

Непрерывная случайная величина X распределена *по показательному закону* с параметром $\lambda>0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0\ , & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Как оказывается, функция распределения в этом случае определяется в виде

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x\leq 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

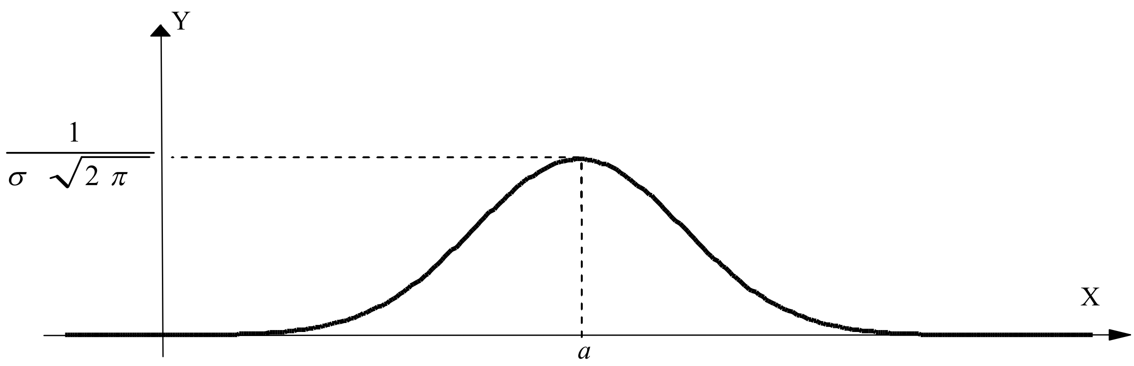
Математическое ожидание и дисперсия показательно распределенной случайной величины имеют, соответственно, значения

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\quad \text{и}\quad D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

8.12. Нормальное распределение. На практике часто встречаются так называемые нормально распределенные случайные величины. Непрерывная случайная величина X *распределена по нормальному закону* с параметрами a и $\sigma>0$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

График плотности нормального распределения (нормальная кривая) имеет следующий вид



Вероятность попадания значений нормальной величины в промежуток (α,β) может быть вычислена в виде

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}),$$

где функция

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

называется интегральной функцией Лапласа.

Вероятностный смысл параметров a и σ проясняется в следующем утверждении.

Нормально распределенная случайная величина имеет математическое ожидание $M(X) = a$ и дисперсию $D(X) = \sigma^2$.

8.14. Типовые задачи на специальные распределения.

1. Вероятность наступления события в каждом опыте равна 0,25. Сколько экспериментов надо провести, чтобы число X наступлений события обладало дисперсией, равной 12.

Решение. Имеем биномиальное распределение с дисперсией $D(X) = npq$. Здесь $p = 0{,}25 = \frac{1}{4}$, $q = 1 - p = \frac{3}{4}$, а значит $n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = 12$, откуда число экспериментов $n = 64$.

2. Математическое ожидание распределенной по Пуассону случайной величины равно 3. Какова вероятность, что при проведении опыта значение случайной величины не превзойдет 2.

Решение. Поскольку математическое ожидание Пуассоновской величины есть параметр λ в формуле Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ \text{то}\ \lambda = 3 \quad \text{и}$$

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-3}(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!}) = \frac{17}{2}e^{-3} = 0{,}423190081.$$

3. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке [2,6]. Какова вероятность принятия ею значений, не более, чем на 0,5 отклоняющихся от среднего значения?

Решение. Среднее значение (математическое ожидание) равномерно распределенной величины, как показано в п. 5.3 есть среднее арифметическое концов отрезка:

$$M(X) = \frac{2+6}{2} = 4 .$$

Следовательно, речь идет о значениях на отрезке [3,5 , 4,5]. Имеем плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{6-2} = \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad P(3{,}5 \le X \le 4{,}5) = \int_{3{,}5}^{4{,}5} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4} .$$

4. Найти математическое ожидание нормально распределенной случайной величины с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}x^2 - x - 2} .$$

Решение. Выделяя полный квадрат в показателе степени, имеем

$$-\frac{1}{8}x^2 - x - 2 = -\frac{1}{8}(x^2 + 8x + 16) = -\frac{1}{8}(x+4)^2.$$

Теперь

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x+4)^2}$$

и сравнивая эту запись с видом плотности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} ,$$

имеем параметр $a = 4$ и, следовательно, искомое математическое ожидание $M(X) = -4$.

8.15. Задачи для самостоятельного решения учащимися.

1. Вероятность наступления события в каждом опыте равна 0,5. Сколько экспериментов надо провести, чтобы число X наступлений события обладало математическим ожиданием, равным 5.

2.Ряд распределения дискретной случайной величины имеет вид:

x_i	2	3	4	5
p_i	0,2	0,3	p_3	0,2

Найти $p_3, M(X), D(X)$. Построить функцию распределения.

3. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0{,}5; \\ \dfrac{2x^2 - x}{6}, & 0{,}5 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$, вероятность попадания случайной величины X в интервал $(\frac{1}{3};\frac{3}{2})$. Построить графики функций $f(X);F(X)$.

4. Плотность распределения задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}5(x-2), & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}$$

Найти вероятность $P(\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2})$.

8.16. Статистическое распределение выборки. *Генеральная совокупность и выборка*. Пусть имеется множество, состоящее из конечного (но достаточно большого) или бесконечного количества некоторых объектов, причем каждый объект характеризуется единственным значением x_j некоторого количественного признака *X*. Такое множество называется *генеральной совокупностью*; в свою очередь, совокупность *n* случайно отобранных объектов называется *выборкой объема n*. Анализ извлеченных выборок позволяют получить представление о распределении количественного признака X как некоторой случайной величины.

Пусть n_1 объектов из выборки характеризуются значением x_1, n_2 объектов – значением x_2, ..., n_k - объектов – значением x_k. Числа x_1, x_2, ..., x_k (которые будем считать расположенными в порядке возрастания) называются *вариантами*, а числа n_1, n_2 ,... , n_k – *частотами* соответствующих вариант. Соответствие между вариантами и их частотами называется статистическим распределением выборки, а таблица вида

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

называется вариационным рядом; очевидно, что

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

Относительными частотами значений x_i называются соответствующие числа вида $w_i = \frac{n_i}{n}$; справедливо соотношение

$$w_1 + w_2 + ... + w_k = 1.$$

Модой Mо называют варианту, имеющую наибольшую частоту. *Медианой* mе называют варианту, которая делит находится в середине вариационного ряда, если число вариант нечетно; медиана mе равна среднему арифметическому двух ближайших к «середине» вариант, если их число четно. *Размахом* варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантой.

Выборочной средней $\bar{x}_B$ называется среднее арифметическое всех наблюдаемых (в выборке) значений:

$$\bar{x}_в = \frac{(x_1 + ... + x_1) + (x_2 + ... + x_2) + ... + (x_k + ... + x_k)}{n},$$

причем в первой скобке имеется n_1 слагаемых, во второй $n_2, \ldots$, в последней - n_k слагаемых (здесь все $n_j \geq 1$). Выборочная средняя вычисляется, таким образом, по формуле

$$\overline{x}_B = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \ldots + x_k \frac{n_k}{n} \quad \text{или} \quad \overline{x}_B = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i \, .$$

Возникает вопрос о количественной характеристике степени рассеивания наблюдаемых значений относительно их среднего. В этом случае рассматривают так называемую выборочную дисперсию, а именно, среднее арифметическое *квадратов* уклонений значений x_i относительно их средней $\overline{x}_B$. Итак, *выборочная дисперсия* определяется в виде

$$D_B = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x}_B)^2 w_i \, ;$$

удобнее пользоваться формулой

$$D_B = (x_1)^2 \frac{n_1}{n} + (x_2)^2 \frac{n_2}{n} + \ldots + (x_k)^2 \frac{n_k}{n} - (\overline{x}_B)^2 \, .$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина $\sigma(X) = \sqrt{D_B}$.

Поскольку с ростом *n* относительные частоты $w_i = w(X = x_i)$ становятся близкими к соответствующим вероятностям $p_i = P(X = x_i)$, то значения выборочных средних $\overline{x}_B$ становятся близкими к математическому ожиданию $M = M(X)$ количественного признака X. Точно также, значения выборочных дисперсий D_B становятся (с ростом *n*) близкими к дисперсии количественного признака $\sigma^2 = D(X)$. Точные формы этих утверждений используют понятие сходимости по вероятности и выходят за рамки настоящего материала.

8.17. Статистические оценки параметров распределения. Предположим, что нас интересует неизвестное значение θ некоторого параметра, характеризующего распределение количественного признака X генеральной совокупности. Оценкой параметра θ называют значения θ^* некоторой функции от наблюдаемых (в выборках) значений, приближенно равных величине θ.

Точечной оценкой параметра θ называют оценку, которая определяется одним числом; так, например, точечной оценкой математического ожидания

$\mu = M(X)$ количественного признака X генеральной совокупности есть значение выборочной средней.

Пусть известен вид функции распределения $F(x,\theta)$ количественного признака X генеральной совокупности, но единственный параметр распределения θ остается неизвестным. Для его оценки достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Поскольку математическое ожидание μ случайной величины X также зависит от этого параметра, т.е. $\mu = M(X,\theta)$, то имеем (см. п. 8.1) следующее приближенное равенство для нахождения θ:

$$\bar{x}_B \approx M(X,\theta).$$

Если функция распределения определяется двумя неизвестными параметрами, то есть имеет вид $F(x,\theta_1,\theta_2)$, то для их оценки необходимы два уравнения. В этом случае следует пользоваться системой двух приближенных равенств

$$\begin{cases} \bar{x}_B \approx M(X,\theta_1,\theta_2) \\ D_B \approx D(X,\theta_1,\theta_2) \end{cases}.$$

Указанный способ нахождения неизвестных параметров распределения называется методом моментов.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ^* называют вероятность γ, с которой отклонение ? 9 оказывается заданно малым.

Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99; 0,995. Интервал $(\theta^* - \delta,\ \theta^* + \delta)$ называют доверительным интервалом для оценки параметра θ.

Рассмотрим так называемые *доверительные интервалы для оценки математического ожидания* нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении σ . Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен с плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(нормальное распределение); здесь параметр a есть значение математического ожидания, а σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*. Предположим, что среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, и извлечена выборка объема *n*. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание *a* по выборочной средней с заданной надежностью γ. Если

$$P(|\bar{x}_B - a| < \delta) = \gamma,$$

то значение δ (радиус доверительного интервала) определяется в виде $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где число *t* может быть найдено из соотношения $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$ (Φ(*t*) – так называемая функция Лапласа, значения которой имеются в таблицах; так, например, при $\gamma = 0{,}95$ имеем $t = 1{,}96$). Следовательно, с надежностью γ доверительный интервал

$$\left(\bar{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает неизвестный параметр *a*; точность оценки есть $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

8.18. Метод наименьших квадратов. Предположим, что эмпирическим путем выявлена зависимость между величинами *X* и *Y*, где *Y* – случайная величина. Например, эксперимент может состоять в измерении значений $y_1, y_2, ..., y_n$ случайной величины *Y* в точках $x_1, x_2, ..., x_n$. Полученная на координатной плоскости система точек (x_i, y_j), $j = 1 \ldots n$, называется диаграммой рассеяния. При этом по характеру расположения точек может быть сделан вывод о возможном виде объективно имеющейся функциональной зависимости $y = \phi(x)$; последнее уравнение называется уравнением регрессии. Например, речь может идти о регрессии (зависимости) линейной $y = ax + b$, квадратичной $y = ax^2 + bx + c$ и др. Однако значения параметров $a, b, ...$ остаются неизвестными; на основе полученных экспериментальных данных можно говорить лишь о точечных оценках $\alpha, \beta,...$ параметров $a,b,...$ Итак, мы ищем зависимость $y = \phi(x;\alpha,\beta,...)$, «наилучшим образом» описывающую расположение точек на диаграмме рассеяния (так называемое выборочное уравнение регрессии). Значения параметров $\alpha, \beta,...$ выберем так, чтобы сумма квадратов

$$\Phi(\alpha,\beta,...) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \varphi(x_j;\alpha,\beta,...))^2$$

В случае линейной регрессии $y = ax + b$ система уравнений для получения точечных оценок α, β параметров a, b принимает вид

$$\begin{cases} \alpha \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 + \beta \sum\limits_{j=1}^{n} x_j = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j \\ \alpha \sum\limits_{j=1}^{n} x_j + \beta \cdot n = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j \end{cases}.$$

Искомые значения α и β находим в результате решения полученной для них системы уравнений.

9.19. Математическая статистика: типовые задачи

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Известен вариационный ряд

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	25	40	15	10

Указать размах варьирования, моду, медиану вариационного ряда. Найти: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию.

Решение. Размах

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 1{,}5 - 1{,}1 = 0{,}4.$$

Мода Mo=1,3, т.к. эта варианта обладает наибольшей частотой, равной 40. Медиана me=1,3, поскольку эта варианта расположена в середине вариационного ряда.

Объем выборки

$$n = 10 + 25 + 40 + 15 + 10 = 100.$$

а) Имеем

$$\overline{x}_B = 1{,}1\cdot\frac{10}{100}+1{,}2\cdot\frac{25}{100}+1{,}3\cdot\frac{40}{100}+1{,}4\cdot\frac{15}{100}+1{,}5\cdot\frac{10}{100}=1{,}29.$$

б) Далее,

$$D_B=(1{,}1)^2\cdot 0{,}1+(1{,}2)^2\cdot 0{,}25+(1{,}3)^2\cdot 0{,}4+(1{,}4)^2\cdot 0{,}15+$$

$$+(1{,}5)^2\cdot 0{,}1-(1{,}29)^2=0{,}0119.$$

2. Найти по методу моментов точечные оценки параметров a и b равномерно распределенного количественного признака генеральной совокупности.

Решение. Имеем систему приближенных равенств

$$\begin{cases} \overline{x}_B\approx M(X,a,b) \\ D_B\approx D(X,a,b) \end{cases}.$$

Учитывая, что для равномерного распределения

$$M(X)=\frac{a+b}{2} \text{ и } D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},$$

получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b)\approx\overline{x}_B \\ \frac{1}{12}(b-a)^2\approx D_B \end{cases},$$

откуда

$$a^*=\overline{x}_B-\sigma_B\sqrt{3},\ b^*=\overline{x}_B+\sigma_B\sqrt{3}, \text{ где } \sigma_B=\sqrt{D_B}.$$

3. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением σ = 4. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\overline{x}_B$=3,6, если объем выборки n =64 и задана надежность оценки γ = 0,95.

Решение. Найдем t из соотношения $\Phi(t)=\frac{0{,}95}{2}=0{,}475$. Известно, что в этом случае t = 1,96. Найдем точность оценки:

$$\delta=\frac{1{,}96\cdot 4}{\sqrt{64}}=0{,}98.$$

Следовательно, доверительный интервал имеет вид (3,6 – 0,98; 3,6 + 0,98). Иначе говоря, с надежностью $\gamma = 0,95$ имеет место неравенство $2,62 < a < 4,58$.

4. Найти выборочное уравнение линейной регрессии по следующим данным измерений:

y_j	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2	10,0
x_j	1	2	3	4	5	6

Решение. Находим значения сумм, которые являются коэффициентами при α и β в соответствующей системе уравнений:

$$\sum_j x_j = 21 \qquad \sum_j y_j = 46,3 \qquad \sum_j x_j^2 = 91 \qquad \sum_j x_j y_j = 179,1$$

Записываем теперь уравнения системы

$$\begin{cases} 91\alpha + 21\beta = 179,1 \\ 21\alpha + 6\beta = 46,3, \end{cases}$$

откуда находим α=0,97, β=4,3, так что уравнение линейной регрессии принимает вид $y = 0,97x + 4,3$.

4.20. Задачи для самостоятельного решения учащимися

1. Из генеральной совокупности, подлежащих уценке, товаров сделана выборка. Известны цены (до проведения уценки) в тыс. руб. x_i и частоты n_i их значений в выборочной совокупности.

x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
n_i	26	15	12	18	16	13

Найти выборочную среднюю цены и ее выборочное средне-квадратическое отклонение.

2. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания а нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_B$=82,51, объем выборки n=11 и среднее квадратичное отклонение σ=11.

3. Найти выборочное уравнение линейной регрессии по следующим данным измерений:

x_i	5	10	12	15	18	20
y_i	45,6	40,3	38,2	34,6	37,6	32,4

Библиографический список

1. Бордовский Г. А., Кондратьев А. С., Чоудери А. Д. Физические основы математического моделирования. – М.: Издательский центр Академия, 2005. – 320 с.

2. Волкова В.И., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1997. –510 с.

3. Воронин А. А., Губко М. В. и др. Математические модели организаций: учебное пособие. – М.: Ленанд, 2008. – 360 с.

4. Гайдук А.Р. Непрерывные и дискретные динамические системы. – М.: Учебно-методический и издательский центр «Учебная литература», 2004. – 252с.

5. Доманский Е.В. Рефлексия как элемент ключевой образовательной компетенции [Электронный ресурс] // Интернет–журнал «Эйдос». – 2003. – 24 апреля. – Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2003/0424.htm (дата обращения 1.09.16).

6. Зайцев В.Л., Каратеева С.А., Нахман А.Д. Элементы математической логики и стохастики: учебно-метод. пособие. – Тамбов: ТОПКРИО, 2008. – 46 с.

7. Зимняя И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. – 2003. – №5. – С.34-42.

8. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 г. Модернизация российского образования. Документы и материалы. – М.: Изд-во ВШЭ, 2002. – С.263 – 282.

9. Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.htm (дата обращения 1.09.2016).

10.Куликов Г.М., Нахман А.Д. Математическое моделирование механических колебаний и процессов тепломассопереноса. – Тамбов: ТГТУ, 2013. – 96 с.

11. Куликов Г.М., Нахман А.Д. Метод Фурье в уравнениях математической физики. - М.: Машиностроение, 2000. – 156 с.

12. Лебедев С.А. Философия науки: словарь основных терминов. – М.: Академический Проект, 2004. – 320 с.

13. Моисеева Л.Т. Методы математического моделирования процессов в машиностроении: курс лекций [Электронный ресурс] – Курск, 2008. – 46 с. – Режим доступа: http://www.twirpx.com/file/1243710 (дата обращения 1.09.16)

14. Нахман А.Д. Булевы алгебры как основа для изучения математической логики, теории множеств, теории вероятностей // Вестник ТГТУ. – 2005. – Т.11, №1Б. – С.246-253.

15. Нахман А.Д. Дифференциальные уравнения: метод. пособие. – Тамбов: ТОПКРИО, 2007. – 64 с.

16. Нахман А.Д., Иванова И.Ю. Преподавание математики в условиях реализации федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования: учебно-методический комплект по элементам математического анализа.– Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2012. – 115 с.

17. Нахман А.Д. Математическое моделирование как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики // Вестник Тульского ГУ, "Современные образовательные технологии". – Вып.13.– 2014. – С.93-96.

18. Новик И. Б., О философских вопросах кибернетического моделирования. – М.: Знание, 1964. – 40 с.

19. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1990. –736с.

20. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. –320 с.

21. Серебрякова И.В. Современные задачи менеджмента в области математического моделирования // Вестник ЮУрГУ. Серия «Образование. Педагогические науки», 2013 – Т. 5, № 2. – 2013. – С.98-104.
22. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. – М.: Высш. шк., 2001. – 343с.
23. Стратегия модернизации содержания общего образования: материалы для разработки документов по обновлению общего образования. – М.: ООО «Мир книги», 2001. – 18 с.
24. Тестов В. А. Обучение на социокультурном опыте как средство повышения мотивации к изучению математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 1 (январь). – С. 6–10. – Режим доступа: URL: http://e-koncept.ru/2016/16002.htm (дата обращения 1.09.16)
25. Требования к результатам освоения основной образовательной программы среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.lomonholding.ru/articles/detail (дата обращения 1.09.16)
26. Федеральные Государственные Образовательные Стандарты [Электронный ресурс] / – Режим доступа: Минобрнауки.рф/документы/336 (дата обращения 1.09.16)
27. Федотов А.М. А.А.Ляпунов и математическая биология . В кн. Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2011. –587 с.
28. Фишман, Б.Е., Кузьмина Б.С. Методологические аспекты проблемы компетентностной избыточности. // Материалы XIX Всероссийской научно-методической конференции «Проектирование образовательных программ высшего профессионального образования на компетентностной основе». Сборник № 4. –Москва-Уфа: Уфимский государственный авиационный технический университет. – 2009. – С.32-42.
29. Хуторской А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций [Электронный ресурс] // Интернет-журнал "Эйдос", 2005. – 12

декабря – – Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm (дата обращения 1.09.16)
30. Энгельгардт В.А. Интегратизм – путь от простого к сложному в познании явлений жизни. В кн.: Материалы к 2-му Всесоюз. совещ. по филос. вопр. соврем. Естествознания. – М.: Ин-т философии АН СССР, 1970. – 48 с.

Оглавление

1. Инновационные технологии формирования математических знаний и умений

2. Задачи математического образования в контексте требований основных нормативных документов

3. Понятийный аппарат математического моделирования

4. Математическое моделирование при решении учебных задач

5. Содержательно-методическая линия математических моделей

6. Математический анализ: содержательное наполнение

7. Задачи с практическим содержанием

8. Стохастические модели