Электронный научный журнал «Инновации в образовании»
Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ФОРМИРОВАНИЕ ЛОГИКО-АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ СТУДЕНТОВ ИНЖЕНЕРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Учебно-методическое пособие

Издательская платформа Российской академии естествознания
2016

УДК 372.851

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензенты:
доктор технических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин»
ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»
С.В.Плотникова;
заведующая кафедрой общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», кандидат филологических наук
доцент Т.В.Мирзаева

Нахман, А.Д. Формирование логико-алгоритмической культуры студентов инженерных направлений подготовки: учебно-методическое пособие /АД.Нахман. - Электронный журнал «Инновации в образовании» (Издательская платформа Российской академии естествознания). Специальный выпуск. - 2016. - №2.- 60 с.

В контексте формирования логико-алгоритмической культуры бакалавров инженерных направлений подготовки предлагаются содержание модуля «Математическая логика и теория алгоритмов». Представлен соответствующий понятийно-категорийный аппарат, основные положения теории и обширный задачный материал. Работа предназначена для студентов инженерных вузов.

Введение.

1. Целью преподавания дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» (или соответствующего модуля в составе дисциплины «Высшая математика») является обучение студентов инженерных направлений подготовки построению формальных логических моделей и применению этих моделей в математике и ее приложениях, привитие студентам навыков решения логических задач математическими методами, формирование понимания формальных основ логики и выработка у студентов достаточного уровня логической интуиции, требующейся для формализации содержательных логических задач.

С развитием информационных технологий единая логико-алгоритмическая линия в обучении получает эффективную реализацию, создавая общую базу и предпосылки для реального разрешения проблемы межпредметных связей в профессиональной подготовке студентов.

Логико-алгоритмическую культуру будем понимать как совокупность специфических логико-алгоритмических представлений, умений и навыков, которые на современном этапе развития общества должны составлять часть общей культуры каждого человека и, следовательно, определять целенаправленный компонент профессионального образования.

Алгоритм выстраивается на основе определенного логического вывода, а алгоритмическая культура является основой компьютерной грамотности. Овладение ею предполагает: понимание сущности алгоритма и его свойств, представление о возможности автоматизации той области деятельности человека, где существует алгоритм этой деятельности; умение описать алгоритм с помощью определённых средств и методов описания; знание основных типов алгоритмических процессов.

Алгоритмическая культура является той частью математической культуры, которая способствует формированию и развитию у обучающихся специфических представлений и умений, связанных с пониманием сущности алгоритма и его свойств, пониманием сущности языка программирования как средства записи алгоритма, пониманием алгоритмического характера методов математики и их приложений. Понимание языковых и алгоритмических аспектов общения с компьютером составляет необходимый элемент культуры современного человека.

2.Логико-алгоритмический компонент в «компетентностном портрете» бакалавров инженерных направлений подготовки. Данный компонент способствует формированию следующих компетенций (в контексте актуализированных Федеральных образовательных стандартов высшего профессионального образования).

Ощепрофессиональные компетенции:

-способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

- способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат ;

- владение эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией;

- способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий.

Профессиональные компетенции:

- владение методами и средствами физического и математического (компьютерного) моделирования в том числе с использованием универсальных и специализированных программно-вычислительных комплексов, систем автоматизированных проектирования, стандартных пакетов автоматизации исследований.

2. Логико-алгоритмическая линия как инновационная содержательно-методическая линия курса математики. Происходящий в последние десятилетия процесс формирования информационного общества ориентирует систему образования на новые образовательные результаты, требует от нее способности гибко реагировать на запросы личности, на изменение потребностей экономики, рост инновационной активности и профессиональной мобильности человека.

Одним из основных направлений инновационной политики в области образования является обновление его содержания.

Содержание образования традиционно понимается как совокупность систематизированных знаний, умений и навыков, взглядов и убеждений, отражающая определенный уровень развития познавательных сил и практической подготовки. Содержание образования мы называем инновационным, если оно

-является актуальным, востребованным, соответствует современным целям образования;

- обладает определенной новизной, интегрирует формально-знаниевый и личностно-деятельностный подходы;

- является практически реализуемым и способным повышать эффективность деятельности субъектов образования.

При этом эффективность и реализуемость инновационного содержания возможны, если разработаны

а) вопросы содержания, в той или иной степени приближенные к новым результатам, полученным в соответствующей предметной области, к ее современному состоянию;

б) технологические приемы изложения учащимся вопросов содержания;
в) задачный материал, по возможности приближенный к реальным задачам, возникающим в соответствующей предметной области;
г) контрольно-измерительные материалы для оценки степени усвоения учащимися теоретического содержания, а также и степени сформированности операциональных умений.

В каждой учебной дисциплине области присутствуют фундаментальные понятия, вокруг которых группируется некоторое содержание (другие понятия, связанные с базовым, суждения и действия, необходимые для их усвоения и т.д.); при этом с каждым новым обращением учащихся к этим понятиям происходит обогащение представлений о них. Соответствующий блок содержания представляет собой некое целостное образование с многочисленными внутренними связями, с использованием специальных методов и определяет специфику методики изучения материала.

В подобных случаях об указанном целостном образовании говорят как об определенной *содержательно - методической линии* в программе изучения данной дисциплины. В контексте инновационного содержания соответствующую содержательно - методическую линию будем называть *инновационной*.

В современных условиях бурного развития информационных технологий становится все более актуальной и востребованной логико-алгоритмическая подготовка будущего бакалавра. Соответствующее содержание является фундаментальной основой при изучении как математики, так и информатики. Следовательно, элементы математической логики и теории алгоритмов обладают признаками инновационного содержания математического образования.

3. Логика и теория алгоритмов: пропедевтический уровень.

Требования образовательного стандарта к уровню логико-математической культуры выпускника школы. Среди целей изучения математики (базовый и профильный уровень) в старшей школе, предписанных образовательным стандартом, значатся: овладение математическими знаниями, достаточными для изучения смежных дисциплин на современном уровне и для продолжения образования в высшей школе, а также интеллектуальное развитие, формирование представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, как части общечеловеческой культуры. Данные цели не могут быть достигнуты без формирования должного уровня абстрактного и логического мышления и алгоритмической культуры. При этом должны быть достигнуты следующие результаты обучения: выпускник старшей школы

- умеет проводить дедуктивные и индуктивные рассуждения при доказательстве теорем и решении задач;
- владеет стилем мышления, характерным для математики, его абстрактностью, доказательностью, строгостью;
- умеет проводить аргументированные рассуждения, делать логически обоснованные выводы, отличать доказанные утверждения от недоказанных, аргументированные суждения от эмоционально убедительных;
-понимает, что формальный математический аппарат создан и развивается с целью расширения возможностей его применения к решению задач, возникающих в теории и практике;
- умеет уместно использовать математическую символику и объяснять значение математических терминов и символов; понимает значение математической символики и формул математики для описания общих закономерностей науки и практики;
-имеет представление об особенностях математического языка и умеет соотносить их с русским языком;
- имеет представления об аксиоматическом построении математической теории, о логическом статусе аксиом, определяемых и неопределяемых понятий, определений и теорем; о значении аксиоматики для других областей знания и практики;

-понимает, что законы логики математических рассуждений имеют универсальный характер и применимы во всех областях человеческой деятельности;

- владеет навыками алгоритмического мышления и понимает необходимость формального описания алгоритмов.

3. Содержание логико-математической подготовки бакалавров инженерных направлений: минимальный уровень.

Тема 1. Алгебра высказываний.

Алфавит алгебры высказываний. Формулы и их классификации. Основные тавтологии и равносильности. Закон двойственности. Нормальные формы. Логическое следование.

Тема 3. Логика предикатов.

Синтаксис. Предикаты. Кванторные операции. Основные тавтологии и равносильности.

Тема 3. Элементы теории алгоритмов.

Алгоритм как неопределяемое понятие. Требования к алгоритму. Способы задания алгоритмов. Машина Тьюринга как алгоритмическая система. Рекурсивные функции.

4. Краткая историческая справка. «Логика (греческое logos — слово, мысль, речь, разум) — совокупность наук о законах и формах мышления; формальная логика исследует формы отдельных мыслей и формы сочетаний их в отвлечении от конкретного содержания суждений, умозаключений, доказательств и понятий. Составной частью формальной логики является математическая логика, которая исследует эти формы средствами математики.

Математика разделяется на «чистую» и прикладную. Математическая логика относится к «чистой математике» и является, в частности, обосновательным средством самой математики; однако и прикладная математика, посвященная построению и анализу математических моделей, также использует законы математической логики и математический язык. Другая важная сфера приложений математической логики –информатика.

Логика возникла как часть античной философии. Одним из ее основоположников считается Аристотель (384 — 322 до н. э.). Ему принадлежат формулировки первых логических законов (законы тождества, непротиворечия, законы исключенного третьего, отрицания отрицания).

Основы математической логики заложил немецкий ученый и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 — 1716). Он сделал попытку построить первые логические исчисления, считал, что можно заменить простые рассуждения действиями со знаками и привел соответствующие правила. Идеи Лейбница развил англичанин Джордж Буль (1815 — 1864), который считается основоположником математической логики как самостоятельной дисциплины. В его работах логика обрела свой алфавит, свою орфографию и грамматику. В его честь начальный раздел математической логики называют алгеброй логики, или булевой алгеброй.

Алгебра логики (алгебра высказываний) — один из основных разделов математической логики, в котором методы алгебры используются в логических преобразованиях высказываний.

Термин «алгоритм» происходит от «Algorithmi» – латинского написания имени Мухаммеда аль-Хорезми (787 – 850 гг.) выдающегося математика средневекового Востока. В книге "Об индийском счете" он сформулировал правила записи натуральных чисел с помощью арабских цифр и правила действий над ними. В дальнейшем алгоритмом стали называть точное предписание, определяющее последовательность действий, обеспечивающую получение требуемого результата из исходных данных; алгоритм может быть предназначен для выполнения его человеком или автоматическим устройством. Однако только что данное описание алгоритма не может быть принято за его строгое математическое определение. Более того, все попытки дать определение алгоритму натыкаются на необходимость определения используемых при этом других понятий. Следовательно, остается считать, что алгоритм – это первоначальное, неопределяемое понятие.

1.Алгебра высказываний.

1.1 Понятие высказывания. Высказывание- это повествовательное предложение, о содержании которого можно сказать истинно оно или ложно.

Обозначения: A, B, C…

Удалено:

На множестве всех высказываний определена функция истинности $\lambda = \lambda(A)$, принимающая значение 1, если высказывание A – истинное, и значение 0, если A ложно..

Удалено: На множестве всех высказываний определим

Удалено: ю

Значение $\lambda(A)$ называется логическим значением или значением истинности высказывания A.

Приведем примеры, предложений не являющихся высказываниями:

«Эврика!»

«Пополните свой телефонный счет.»

«Который час?»

«$2x+5=12$».

1.2 Логические операции над высказываниями.

1) Отрицание («не A», «неверно, что A») высказывания A есть высказывание $\bar{A}$ ($\neg A$), которое истинно тогда и только тогда, когда A ложно;
2) конъюнкция («A и B») двух данных высказываний есть высказывание $A \wedge B$, которое истинно тогда и только тогда, когда A и B истинны одновременно;

   Удалено: высказывание, которое
3) дизъюнкция («A или B») высказываний A и B есть составное высказывание $A \vee B$, которое является истинным, если истинно хотя бы одно из высказываний A и B;

   Удалено: есть

   Удалено: высказывание, которое
4) импликация («если A, то B») - высказываний A и B есть высказывание $A \rightarrow B$, которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно, и истинное - в остальных случаях;

5) эквиваленция высказываний A и B (« необходимо и достаточно», «тогда и только тогда») есть составное высказывание $A \leftrightarrow B$, которое истинно, если A и B одновременно истинны или одновременно ложны;

6) альтернативная дизъюнкция $A \Delta B$ - истинна, когда ровно одно из высказываний A и B истинно, и ложно – в остальных случаях.

Удалено: есть

Сформулированные определения можно записать в виде следующих таблиц истинности (таблиц, связывающих логические значения исходных переменных и результатов выполняемых операций):

$\lambda(A)$	$\lambda(\overline{A})$
1	0
0	1

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda\,(A \wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$\lambda\,(A)$	$\lambda\,(B)$	$\lambda\,(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$\lambda(A)$	$\lambda(B)$	$\lambda(A \Delta B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Приведем примеры логических операций над конкретными высказываниями.

1) A - « Москва – столица России»,

B - «московское метро - самое красивое в мире»,

$A \wedge B$ - «Москва – столица России, а московское метро - самое красивое в мире».

2) A- «Завтра будет хорошая погода»,

B – «Я пойду гулять»;

$A \rightarrow B$ – «Если завтра будет хорошая погода, я пойду гулять».

3) A- «Я пойду гулять»,

B – «Завтра будет хорошая погода»;

$A \leftrightarrow B$ – «Я пойду гулять в том и только том случае, если завтра будет хорошая погода».

1.3 Формулы алгебры высказываний. Переменная x называется пропозиционной, если она обозначает любое конкретное высказывание. Формула – это всякий объект, который построен по следующим правилам.

1) Всякая пропозиционная переменная – это формула.

2) Если F и G – формулы, то $\neg F$, $F \vee G$, $F \wedge G$, $F \to G$, $F \leftrightarrow G$, $F \Delta G$ тоже являются формулами.

3) Других формул нет.

Формула называется тождественно истинной или тавтологией (тождественно ложной или противоречием), если при любом наборе значений пропозиционных переменных, входящих в нее, она обращается в истинное (ложное) высказывание. Тождественную истину обозначаем через E; тождественную ложь - через $\varnothing$.

Формула называется выполнимой (опровержимой), если существует такой набор значений пропозиционных переменных, который обращает эту формулу в истинное (ложное) высказывание.

Две формулы F и G называются равносильными, если на любом наборе пропозиционных переменных $\lambda(F) = \lambda(G)$; применяем обозначение $F \equiv G$.

Критерий равносильности формул: $F \equiv G$ тогда и только тогда, когда формула $F \leftrightarrow G$ является тавтологией.

1.4 Основные равносильности алгебры высказываний.

1) Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции:

$X \vee Y \equiv Y \vee X; \quad X \wedge Y \equiv Y \wedge X;$

2) ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции:

$X \vee (Y \vee Z) \equiv (X \vee Y) \vee Z; \quad X \wedge (Y \wedge Z) \equiv (X \wedge Y) \wedge Z;$

3) дистрибутивные законы:

$X \wedge (Y \vee Z) \equiv (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z); \quad X \vee (Y \wedge Z) \equiv (X \vee Y) \wedge (X \vee Z);$

4) $X \wedge E \equiv X$; $\quad X \vee E \equiv E$;

5) $X \wedge \varnothing \equiv \varnothing$; $\quad X \vee \varnothing \equiv X$;

6) $X \vee X \equiv X$; $\quad X \wedge X \equiv X$;

7) законы де Моргана:

$\overline{X \vee Y} \equiv \overline{X} \wedge \overline{Y}$; $\quad \overline{X \wedge Y} \equiv \overline{X} \vee \overline{Y}$;

8) $(X \to Y) \equiv (\overline{X} \vee Y); \quad (X \leftrightarrow Y) \equiv (X \to Y) \wedge (Y \to X)$;

9) законы поглощения:

$X \wedge (Y \vee X) \equiv X; \quad X \vee (Y \wedge X) \equiv X;$

закон исключенного третьего:

$X \wedge \overline{X} \equiv \varnothing; \quad X \vee \overline{X} \equiv E;$

10) закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{X}} \equiv X$.

1.5 Выражение одних логических операций через другие. Имеют место следующие соотношения:

$A \vee B \equiv \overline{\neg A \wedge \neg B}$;

$A \wedge B \equiv \overline{\neg A \vee \neg B}$;

$A \to B \equiv \overline{A} \vee B$;

$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$;

$A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$;

$A \Delta B \equiv (\overline{A} \wedge B) \vee (A \vee \overline{B})$.

1.6 Нормальные формы формул алгебры высказываний. Обозначим

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1; \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Элементарной конъюнкцией (конъюнктом) называется формула вида: $K = x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \ldots \wedge x_n^{\sigma_n}$, а элементарной дизъюнкцией (дизъюнктом) – формула вида: $D = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$.

Дизъюнктивно нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция конечного количества элементарных конъюнкций, а конъюнктивно нормальной формой (КНФ) - конъюнкция конечного количества элементарных дизъюнкций.

1.7 Совершенные нормальные формы формул алгебры высказываний. Элементарная конъюнкция (дизъюнкция) называется правильной, если в ее составе нет одинаковых переменных. Дизъюнкт (конъюнкт) является полным, относительно некоторого набора переменных, если в его составе представлены все переменные этого набора. Правильный и полный дизъюнкт (конъюнкт) называется совершенным.

Совершенной ДНФ (совершенной КНФ) данной формулы F называется такая ее ДНФ (КНФ), которая не содержит одинаковых конъюнктов (дизъюнктов), причем каждый конъюнкт (дизъюнкт) совершенен. Аббревиатуры: СДНФ, СКНФ.

Любая формула F, не являющаяся тождественной ложью, обладает единственной СДНФ.

Любая формула F, не являющаяся тавтологией, обладает единственной СКНФ.

1.8 Алгоритм перехода от таблицы истинности формулы к ее записи в виде СДНФ:

1)выбрать в таблице такие наборы исходных переменных, на которых истинностное значение формулы (значение функции истинности) равно 1;

2)записать элементарные конъюнкции для выбранных наборов переменных; при этом необходимо руководствоваться следующим правилом: если значение входной переменной в наборе – единичное, то она записывается в прямой форме, если же значение переменной – нулевое, то – в форме отрицания;

3)полученные конъюнкты объединить между собой знаками дизъюнкции.

1.9 Алгоритм перехода от таблицы истинности формулы к ее записи в виде СКНФ:

1) выбрать в таблице истинности такие наборы входных переменных, на которых функция истинности формулы принимает нулевые значения;

2) записать элементарные дизъюнкции для выбранных наборов; при этом следует руководствоваться следующим правилом: если значение входной переменной в наборе нулевое, то она записывается в прямой форме, если значение переменной единичное, то – в форме отрицания;

3) полученные дизъюнкты соединить знаками конъюнкции.

1.10 Логическое следование. Говорят, что формула Q логически следует из формулы P, если Q принимает значение истины на всяком наборе пропозиционных переменных, на котором значение истины принимает формула P.

Другими словами, если $\lambda(P) = 1$, то $\lambda(Q) = 1$.

Обозначение: $P \models Q$

Критерий логического следования: формула Q логически следует из P, тогда и только тогда, когда импликация $P \rightarrow Q$ – тавтология.

Проверять справедливость логического следования можно как на основании определения, так и пользуясь указанным критерием.

1.11 Логическое следование из группы формул. Говорят, что формула Q следует логически из формул $P_1, P_2, ..., P_n$, если $\lambda(Q)=1$, при всех тех значениях переменных, при которых $\lambda(P_j)=1$ (j=1,2,...,n), то есть Q принимает значения истины на каждом наборе переменных, на котором истинна каждая из $P_1, P_2, ..., P_n$.

Обозначения: $P_1 ... P_n \models Q$.

Логическое следование $P_1 ... P_n \models Q$ имеет место тогда и только тогда, когда импликация $(P_1 \wedge P_2 \wedge ... \wedge P_n) \rightarrow Q$ является тавтологией.

Проверять справедливость логического следования из группы формул можно как на основании определения, так и пользуясь только что указанным критерием.

2. Логика предикатов

2.1 Предикаты. Множества истинности. *Предикатом* называют «*параметризованное*» высказывание, т.е. высказывание, которое в зависимости от значений содержащегося в нем параметра (содержащихся параметров) будет истинным либо ложным. Так, *одноместным предикатом* $P = P(x)$, заданным на некотором множестве M, называется объект, который для каждого $x \in M$ является истинным или ложным высказыванием.

Множество M называется предметной областью.

Подмножество M_P^+ множества M, состоящее из тех и только тех значений x, для которых $P(x)$ является истинным высказыванием, называется *множеством истинности* предиката P.

Предикат $P = P(x)$ называется *тождественно истинным* (*тождественно ложным*) на M, если он принимает значение истины (лжи) для всех $x \in M$. Ясно, что тождественно истинный предикат P имеет множество истинности M_P^+, совпадающим с M , а для тождественно ложного предиката $M_P^+ = \varnothing$.

Предикат называется *выполнимым* (*опровержимым*) на M, если существует хотя бы один элемент $x \in M$, такой что $P(x)$ принимает значение истины (лжи) .

2.2 Следование. Равносильность предикатов. Говорят, что предикат Q следует из предиката P, если $Q(x)$ принимает значение истины для любых x, для которых $P(x)$ является истинным. Обозначение: P=>Q.

Соотношение $P \Rightarrow Q$ справедливо тогда и только тогда, когда для множеств истинности предикатов P и Q имеет место включение $M_P^+ \subseteq M_Q^+$.

Две предиката P и Q называются *равносильными* на M, если значения истинности $P(x)$ и $Q(x)$ совпадают для любого $x \in M$. Обозначение: $P \Leftrightarrow Q$. Ясно, предикаты P и Q равносильны на M тогда и только тогда, когда $M_P^+ \equiv M_Q^+$.

2.3 Логические операции над предикатами определяются как логические операции над соответствующими высказываниями при каждом фиксированном x. Так, *отрицанием* предиката P (заданного на некотором M) является предикат $\overline{P}$, который принимает значение истины для тех и только тех значений $x \in M$, для которых P принимает значение лжи. Если предикаты P и Q заданы на некотором M, то их *конъюнкцией* называется предикат $T = P \wedge Q$, который принимает значение истины для тех и только тех значений $x \in M$, для которых оба предиката P и Q принимают значения истины; *дизъюнкцией* предикатов P и Q называется предикат $S = P \vee Q$, который принимает значение истины для тех и только тех значений $x \in M$, для которых хотя бы один из предикатов P или Q принимает значение истины.

В описанных ситуациях множества истинности предикатов, полученных в результате выполнения логических операций, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$M_{\bar{P}}^{+} = M \setminus M_{P}^{+}; \qquad M_{P \wedge Q}^{+} = M_{P}^{+} \cap M_{Q}^{+},\ M_{P \vee Q}^{+} = M_{P}^{+} \cup M_{Q}^{+}.$$

2.4 Кванторные операции над предикатами.

1) Пусть предикат $P(x)$ задан на некоторой предметной области M. Операция связывания предиката $P(x)$ квантором общности есть операция перехода к высказыванию $\forall x\, P(x)$, которое определятся в виде:

   $\forall x\, P(x)$ = *истинное высказывание,*

   если $P(x)$ *тождественно истинный на* M ;

   $\forall x\, P(x)$ = *ложное высказывание,*

   если $P(x)$ *опровержим на* M.

   Например, предикат $P(x)$: $x^2 + x + 2 > 0$ является тождественно истинным на множестве всех действительных чисел, а значит,

   $\forall x\, P(x)$ - истинное высказывание.

   Если же на множестве всех действительных чисел рассмотреть предикат $P(x)$: $x^2 + x - 2 > 0$, то такой предикат будет уже опровержимым, а тогда $\forall x\, P(x)$ - ложное высказывание.

2) Пусть предикат $P(x)$ задан на некоторой предметной области M. Операция связывания предиката $P(x)$ квантором существования есть операция перехода к высказыванию $\exists x\, P(x)$, которое определятся в виде:

   $\exists x\, P(x)$ = *истинное высказывание,*

   если $P(x)$ *выполним на* M ;

   $\exists x\, P(x)$ = *ложное высказывание,* *если $P(x)$ тождественно ложный на M*

Например, предикат $P(x) : x^2+x+2=0$ является тождественно ложным на множестве всех действительных чисел , а значит $\exists x\ P(x)$ есть ложное высказывание. В то же время данный предикат на множестве всех комплексных чисел выполним, а значит, на такой предметной области $\exists x\ P(x)$ есть истинное высказывание.

2.5 Законы де Моргана для кванторов. Речь идет о следующих равносильных высказываниях:

$\neg(\forall x\ P(x))$ равносильно $\exists x \overline{P}(x)$;

$\neg(\exists x\ P(x))$ равносильно $\forall x \overline{P}(x)$.

3. Типовые задачи

3.1 *Приведите пример составного высказывания, которое можно было бы записать в следующем виде. Определите его значение истинности.*

$$(A \wedge B) \to (C \vee \overline{B})$$

Решение. В данном составном высказывании есть три простейших: *A, B, C.* В качестве них можно взять, например, следующие повествовательные предложения:

A—«Розовые слоны живут в Сибири»;

B—«В Солнечной системе - девять планет»;

C—«5 меньше 3».

Заменяя логические связки соответствующими речевыми оборотами, получим: «Если розовые слоны живут в Сибири и в Солнечной системе девять планет, то 5 меньше 3 или в Солнечной системе число планет отлично от девяти».

Чтобы определить истинность получившегося высказывания, определим сначала истинность его составляющих — $\lambda(A)=0$, $\lambda(B)=1$, $\lambda(C)=0$. Тогда соответственно $\lambda(A \wedge B)=0$, $\lambda(C \vee \overline{B}))=0$, и окончательно $\lambda((A \wedge B) \to (C \vee \overline{B}))=1$.

Итак, осуждаемое высказывание – истинно.

3.2 ***Составить таблицу истинности данной формулы.***

$$((X \rightarrow \overline{Y}) \vee Z) \wedge ((\overline{X \wedge Y}) \leftrightarrow \overline{Z})$$

Определить характер формулы.

Решение. Пользуясь определениями логических операций, составим таблицу истинности данной формулы. Так как формула зависит от трех переменных, то ее таблица будет содержать $2^3 = 8$ строк и 11 столбцов (количество операций плюс три столбца значений переменных).

Определим порядок выполнения операций:

$$((X \overset{5}{\rightarrow} \overset{1}{\overline{Y}}) \overset{6}{\vee} Z) \overset{8}{\wedge} (\overset{4}{\overline{(X \overset{3}{\wedge} Y)}} \overset{7}{\leftrightarrow} \overset{2}{\overline{Z}})$$

Имеем:

$\lambda(X)$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1

Значения в последнем столбце свидетельствуют, что данная формула как выполнима, так и опровержима, поскольку существуют наборы значений переменных, обращающих ее в и в истинные, и в ложные высказывания.

3.3 ***Найдите СДНФ и СКНФ для данной формулы***

$$\overline{Y} \wedge (Z \rightarrow (X \leftrightarrow Y)\,.$$

Решение. Воспользуемся алгоритмом построения совершенных форм, изложенном в п 4.7. Построим таблицу истинности исходной формулы:

$$\overset{1}{\overline{Y}} \overset{4}{\wedge} (Z \overset{3}{\rightarrow} (X \overset{2}{\leftrightarrow} Y)$$

$\lambda(X$	$\lambda(Y)$	$\lambda(Z)$	1	2	3	4	СДНФ	СКНФ
1	1	1	0	1	1	0		$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$
1	1	0	0	1	1	0		$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z)$
1	0	1	1	0	0	0		$(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z})$
1	0	0	1	0	1	1	$(X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$	
0	1	1	0	0	0	0		$(X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z})$
0	1	0	0	0	1	0		$(X \vee \overline{Y} \vee Z)$
0	0	1	1	1	1	1	$(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z)$	
0	0	0	1	1	1	1	$(\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$	

Итак, СДНФ и СКНФ формулы имеют, соответственно вид

$$(X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge Z) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Z})$$

и

$$(\overline{X} \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee Z) \wedge (\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z}) \wedge (X \vee \overline{Y} \vee Z).$$

3.4 ***Доказать логическое следование***

$$((X \vee Y) \rightarrow Z) \models (X \rightarrow (Y \vee Z)).$$

Решение. Достаточно доказать (см. п. 4.10), что импликация $(X \vee Y) \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow (Y \vee Z)$ тождественно истинна. Первый способ состоит в построении таблицы истинности полученной формулы и проверке того, что последний столбец таблицы состоит сплошь из единиц. Второй способ – в использовании цепочки равносильных преобразований, которая приведет к получению тавтологии.

Продемонстрируем здесь способ доказательства от противного на основе определения логического следования.

□ Предположим **противное**, то есть, что $Q = X \to (Y \vee Z)$ не является логическим следствием $P = (X \vee Y) \to Z$; тогда $\lambda((X \vee Y) \to Z) = 1$, а $\lambda(X \to (Y \vee Z)) = 0$.

Т.к. $\lambda(X \to (Y \vee Z)) = 0,$ то, на основании определения импликации, имеем $\lambda(X) = 1,\ \lambda(Y \vee Z) = 0,$ а тогда , по определению дизъюнкции, $\lambda(Y) = 0,\ \lambda(Z) = 0.$

Но, если $\lambda(X) = 1,\ \lambda(Y) = 0,\ \lambda(Z) = 0,$ то $\lambda((X \vee Y) \to Z) = 0$. Получено противоречие, следовательно наше предположение неверно и тем самым установлено, что $P \models Q$.

3.5 *Проверьте логичность рассуждений: «Если я поеду автобусом, а автобус опоздает, то я пропущу назначенное свидание. Если я пропущу назначенное свидание и мое настроение испортится, то мне не следует ехать домой. Если я не получу стипендию, то мое настроение испортится и мне следует поехать домой. Следовательно, если я поеду автобусом, и автобус опоздает, то я получу стипендию».*

Решение. Обозначим

A—« Я поеду автобусом»;

B—« Автобус опоздает»;

C—« Я пропущу назначенное свидание»;

D—« Мое настроение испортится»;

E—« Мне следует поехать домой»;

F—« Я получу стипендию».

Тогда посылки нашего рассуждения символически записываются следующим образом $(A \wedge B) \to C,\ (C \wedge D) \to \overline{E},\ \overline{F} \to (D \wedge E)$, а следствие $(A \wedge B) \to F$.

Покажем, что логическое следование неверно, т. е. $\lambda((A \wedge B) \to C) = 1$, $\lambda((C \wedge D) \to \overline{E}) = 1$, $\lambda(\overline{F} \to (D \wedge E)) = 1$, $\lambda((A \wedge B) \to F) = 0$.

Если $\lambda((A \wedge B) \to F) = 0$, то $\lambda(F) = 0$, $\lambda(A \wedge B) = 1$. Так как, $\lambda(A \wedge B) = 1$ и $\lambda((A \wedge B) \to C) = 1$, тогда $\underline{\lambda(C) = 1}$.

Далее, из $\lambda(F) = 0$ и $\lambda(\overline{F} \to (D \wedge E)) = 1$ следует, что $\lambda(D \wedge E) = 1$, а значит $\underline{\lambda(D) = 0}$, $\underline{\lambda(E) = 0}$.

Итак $\lambda(C) = 1$, $\lambda(D) = 0$, $\lambda(E) = 0$, следовательно $\lambda((C \wedge D) \to \overline{E}) = 1$.

Таким образом, мы нашли искомый набор значений истинности переменных, а значит, предположение оказалось верным и логическое следование не имеет места, т.е. рассуждения с точки зрения логики проведены неверно.

3.6 Даны предикаты $P(x)\colon x^2 \le 4$ и $Q(x)\colon |x-1| < 2$ Найти множество истинности предикатов $\overline{P}$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$. Имеют ли место соотношения а) P=>Q, б) Q =>P ?

Решение. 1) Найдем множества истинности предикатов P и Q. Для этого решим каждое из неравенств, с помощью которых предикаты заданы. Первое из неравенств запишем в виде $(x-2)(x+2) \le 0$. Применяя, например, метод интервалов, получим его решения $x \in [-2,2]$. Неравенство с модулем запишем в виде равносильной ему системы

$$\begin{cases} x-1 < 2 \\ x-1 > -2 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad x \in (-1,3).$$

Итак, $M_P^+ = [-2,2]$, $M_Q^+ = (-1,3)$. Теперь находим множество истинности предиката $\overline{P}$ как дополнение множества истинности предиката P и множества истинности конъюнкции и дизъюнкции предикатов P и Q в виде, соответственно, пересечения и объединения множеств M_P^+ и M_Q^+ (см. п. 2.3) :

$M_{\overline{P}}^+ = (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$, $M_{P \wedge Q}^+ = (-1,2]$, $M_{P \vee Q}^+ = [-2,3)$.

Наконец, ни одно из соотношений P=>Q, Q =>P в данной задаче не имеет места, поскольку (см. п. 5.2) не имеет места ни одно из включений $M_P^+ \subseteq M_Q^+$, $M_Q^+ \subseteq M_P^+$.

3.7 Определить, истинно или ложно высказывание

А) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 < 4$ на области $[-2,2]$.

Б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 \leq 4$ на области $[2,4]$.

Решение. По определению кванторных операций, следует выяснить

1) в пункте а) - тождественно истинен ли предикат $P(x)$ на области своего задания $[-2,2]$;

2) в пункте б) - выполним ли $Q(x)$ на области $[2,4]$.

Множество истинности предиката $P(x)$ есть интервал (-2,2), следовательно предикат принимает значения лжи при $x = \pm 2$, а тогда он опровержим на области задания. Значит высказывание $\forall x P(x)$ - ложно.

Множество истинности предиката $Q(x)$ есть отрезок $[-2,2]$, поэтому в точке x=2, общей для области задания и множества истинности, предикат принимает значения истины. Следовательно, предикат $Q(x)$ выполним на области задания. Значит высказывание $\exists x Q(x)$ - истинно.

Задачи для самостоятельного решения

1) ***Приведите пример составного высказывания, которое можно было бы записать в следующем виде. Определите его значение истинности.***

1. $(A \to B) \to (C \wedge \overline{B})$;
2. $(A \vee \overline{B}) \leftrightarrow (C \wedge B)$;
3. $\overline{(B} \vee C) \to (B \wedge A)$;
4. $(A \to B) \vee \overline{(C \wedge B)}$;
5. $(A \to B) \leftrightarrow (C \vee \overline{B})$;
6. $\overline{B} \vee (A \vee (C \wedge B))$;
7. $(A \wedge B \wedge C) \vee (C \wedge \overline{B})$;
8. $\overline{B} \leftrightarrow (\overline{A} \to (C \wedge B))$;

9. $(A\wedge(C\to B))\leftrightarrow\overline{B}$;

10. $\overline{(A\to B)}\vee(C\to\overline{B})$.

2) *Составьте таблицу истинности для формулы алгебры высказываний. Укажите вид формулы.*

1. $\overline{(Y\vee\overline{Z})\to\overline{(X\vee\overline{Y})}}$ 2. $((\overline{(X\vee Y)}\wedge Z)\to\overline{X})\wedge\overline{Z}$

3. $((X\to\overline{Y})\vee Z))\wedge\overline{(X\wedge Z)}$

4. $((X\wedge\overline{Y})\to(\overline{Z}\leftrightarrow Y))\vee\overline{X}$;

5. $(\overline{X}\wedge\overline{Y})\leftrightarrow(\overline{(X\to Y)}\to Z)$;

6. $(\overline{Y}\to Z)\wedge(\overline{Z}\wedge\overline{Y})\wedge(\overline{Z}\to X)$;

7. $(\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge Z)\leftrightarrow(\overline{X}\to Y)$;

8. $\overline{Z}\leftrightarrow(\overline{X}\to(\overline{(Y\vee Z)}\wedge X))$;

9. $((X\leftrightarrow\overline{Z})\to(Y\vee Z))\to(\overline{Y}\wedge X)$;

10. $(\overline{X}\to(Z\wedge\overline{Y}))\to(X\wedge\overline{(Y\vee Z)})$.

3) *Найдите совершенные дизъюнктивную и конъюнктивную нормальную форму для данной формулы (если соответствующая форма существует)*

1. $((X\to Y)\to Z)\to\overline{X}$;

2. $(X\leftrightarrow Z)\to(X\wedge\overline{Y})$;

3. $(\overline{X}\wedge Z)\vee(Y\to Z)$;

4. $\overline{(X\wedge Y)}\vee\overline{(Z\to Y)}$;

5. $\overline{X\vee(Y\leftrightarrow\overline{Z})}$;

6. $(X\leftrightarrow Y)\vee(\overline{Y}\wedge Z)$;

7. $(X\vee(Y\to Z))\to X$;

8. $(X\wedge Y)\vee((X\to\overline{Y})\wedge\overline{Z})$;

9. $(X\leftrightarrow Y)\wedge(\overline{Y}\vee Z)$;

10. $(X\wedge Y)\vee(Y\leftrightarrow Z)$

4) *Доказать(или опровергнуть) логическое следование*

1. $(X\vee Y)\to Z\mid- X\to(Y\to Z)$;

2. $(X \vee Y) \to Z \mid\!- (X \wedge Y) \to Z$;

3. $(X \vee Y) \to Z \mid\!- X \to Z$;

4. $(X \to Y) \wedge (X \vee Z) \mid\!- X \vee Z$;

5. $(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee Z) \mid\!- X \to Y$;

6. $(\overline{X} \vee Y) \wedge (X \vee Z) \mid\!- Y \vee Z$;

7. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \mid\!- X \to Z$;

8. $(\overline{X} \to Z) \wedge (X \to Y) \mid\!- X \to Y$;

9. $(X \to Y) \to Z \mid\!- X \vee Y \vee Z$;

10. $(X \to Y) \to Z \mid\!- (X \wedge Y) \to Z$

5)*Справедливо ли проведенное рассуждение:*

1. а)*Я пойду или в кино на новую комедию, или на занятие по математической логике. Если я пойду в кино на новую комедию, то я от всей души посмеюсь. Если я пойду на занятие, то испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений. Следовательно, или я от всей души посмеюсь или испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений.*

б)Если цех №2 не будет участвовать в выпуске нового образца продукции, то не будет участвовать и цех №1. Если же цех №2 будет участвовать в выпуске нового образца, то в этой работе непременно должны быть задействованы цеха №1 и №3. Следовательно, если в выпуске нового образца будет участвовать цех №1, то цех №3 тоже должен участвовать в работе.

2. *а) Если Антон ляжет сегодня поздно, то утром он будет в нерабочем состоянии. Если он ляжет не поздно, то ему будет казаться, что он много времени теряет напрасно. Следовательно, или Антон завтра будет в нерабочем состоянии, или ему будет казаться, что он много времени теряет напрасно.*

б) Андрей или переутомился, или болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следовательно, он не болен.

3. *а)Если я пойду завтра на первый урок, то должен буду рано встать, а если я пойду вечером на дискотеку, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно и встану рано, то вынужден буду довольствоваться пятью часами сна. Я просто не в состоянии обойтись пятью часами сна. Следовательно, я должен или пропустить завтра первый урок или не ходить вечером на дискотеку.*

б) *Если завтра будет холодно, то я надену теплое пальто, если его рукав будет починен. Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следовательно, я не надену теплое пальто.*

4. а)*Если 2—простое число, то 2—наименьшее простое число. Если 2—наименьшее простое число, то 1 не является простым числом. Число 1 не является простым числом. Следовательно 2—простое число.*

б)*Или Анна и Антон одного возраста, или Анна старше Антона. Если Анна и Антон одного возраста, то Наташа и Антон не одного возраста. Если Анна старше Антона, то Антон старше Николая. Следовательно, либо Наташа и Антон не одного возраста, либо Антон старше Николая.*

5. *а) Если 6—составное число, то 12—составное число. Если 12—составное число, то существует простое число больше чем 12. Если существует простое число больше 12, то существует составное число большее 12. Если 6 делится на 2, то 6—составное число. Число 12 составное. Следовательно, 6—составное число.*

б)*Если Сергей выиграет теннисный турнир, то он будет доволен, а если он будет доволен, то он плохой борец в последующих турнирах. Но если он проиграет этот турнир, то потеряет поддержку своих болельщиков. Он плохой борец в последующих турнирах, если потеряет поддержку своих болельщиков. Если он плохой борец, то ему следует прекратить занятия теннисом. Сергей или выиграет этот турнир, или проиграет. Следовательно, ему нужно прекратить занятия теннисом.*

6. а) *Если сумма цифр целого числа делится на 3, то это число делится на 3 или на 9. Если целое число делится на 9, то оно делится и на 3. Следовательно, сумма цифр числа делится на 3 тогда и только тогда, когда число делится на 9.*

б)Если правительство не продолжит политику сохранения цен, то оно потеряет голоса фермеров. Если же оно продолжит политику сохранения цен и не установит контроль над производством, то перепроизводство продолжится. Если правительство потеряет голоса фермеров, то оно вынуждено будет уйти в отставку. Следовательно, если правительство не уйдет в отставку, и оно не установит контроль над ценами, то продолжится перепроизводство.

7. а)*Если данный четырехугольник – ромб, то его диагонали взаимно перпендикулярны. Если же диагонали данного четырехугольника не взаимно перпендикулярны, то он не является квадратом. Если этот четырехугольник квадрат, то его можно вписать в окружность. Неверно, что данный четырехугольник имеет взаимно перпендикулярные диагонали или не может быть вписан в окружность. Следовательно, данный четырехугольник не может быть не ромбом ни квадратом.*

б) *Если Джонс не встречал ночью Смита, то Смит— убийца или Джонс лжет. Если Смит не виновен, то Джонс не встречал Смита, и убийство произошло около полуночи. Если убийство произошло около полуночи, то или Смит убийца или Джонс лжет. Эксперты установили, что убийство произошло около полуночи. Следовательно, Смит— убийца.*

8. *а)Прямые a и b либо параллельны, либо пересекаются, либо скрещиваются. Прямые a и b лежат в одной плоскости и параллельны. Если прямые a и b скрещиваются, то они не лежат в одной плоскости. Следовательно, прямые a и b лежат в одной плоскости и параллельны.*

б)Если в школьных соревнованиях по гимнастике Наташа займет первое место, то Рита будет второй. Если Рита будет второй, тогда Лида не займет второе место. Если Рита будет третьей, то или Лида займет второе место, или первое займет Наташа. Следовательно, если Рита будет третьей, то Лида будет второй.

9*.а)Если Иванов возьмет отпуск в мае, то Петров поедет к морю. Если Петров не поедет к морю, тогда он станет хуже работать. Петров к морю так и не поехал. Следовательно, и Иванов не взял отпуск в мае и Петров не стал хуже работать.*

б)Если система линейных уравнений имеет единственное решение, то определитель ее не равен нулю. Или система имеет единственное решение или бесконечно много решений или не имеет решений. Если определитель системы равен нулю, то или система имеет бесконечно много решений или не имеет их совсем. Следовательно, если система не имеет решений, то определитель ее равен нулю.

10. а)*Число 5 или больше 2 или меньше 6 или не меньше 3. Если 5 больше 2, то или 2 простое число или 5 простое число. Если 5 меньше 6, то 6 делится на 2. Известно, что 5 не меньше 3. Следовательно, или 2 простое число, или 5 простое число, или 6 делится на 2.*

б)Если капитан корабля получит приказ, то он должен покинуть порт на своем корабле. Если случится непредвиденная ситуация, тогда корабль не должен заходить в порт. Корабль должен зайти в порт или не покидать порт. Следовательно, если капитан корабля получит приказ, то не случится никакой непредвиденной ситуации.

6) На множестве всех действительных чисел заданы предикаты $P(x):\ |x^2-2x-a^2x+a^2|\le a^2$ и $Q(x)$. Найти множество истинности предикатов $\overline{P},\ P\wedge Q,\ P\vee Q$. Имеют ли место соотношения а) $P => Q$, б) $Q => P$, в) $P\Leftrightarrow Q$?

1. $Q(x):\ \ 22<x\le 27$; $a=5$

2. $Q(x)$: $0 \le x \le 1{,}9$; $a = -9$

3. $Q(x)$: $x^2 \le 4$; $a = 0$

4. $Q(x)$: $|x| > 2$; $a = -12$

5. $Q(x)$: $0{,}2 \le x < 1{,}2$; $a = 4$

6. $Q(x)$: $0 \le x \le 4$; $a = \sqrt{2}$

7. $Q(x)$: $|x| \le 2$; $a = -1$

8. $Q(x)$: $3 < x < 20$; $a = -5$

9. $Q(x)$: $2 < x \le 11$; $a = -3$

10. $Q(x)$: $|x| \le 123$; $a = -11$

7) Определить, истинно или ложно высказывание

1. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 \le 4x$ на области $(0,4)$.

   б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 \le 4x$ на области $(4,+\infty)$;

2. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $|x| \le 2$ на области $(-\infty, 2]$;

   б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $|x| \le 2$ на области
(-2, 2).

3. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 > x$ на области $(-1,0)$.

   б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 > x$ на области $[1,+\infty)$;

4. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 - 5x + 4 = 0$ на области $[1,4]$.

   б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 - 5x + 4 = 0$ на области $[4,5]$.

5. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 + 4x + 4 = 0$ на области $[-2,2]$.

   б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 + 4x + 4 = 0$ на области $[0,2]$.

6. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 - 6x + 8 < 0$ на области $(2,4)$.

   б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 - 6x + 8 < 0$ на области $[3,4]$.

7. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 \ge 16$ на области $(-\infty, -4)$

   б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 \ge 16$ на области $(-4, 4)$.

8. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $x^2 > 3x$ на области $[3, +\infty)$

   б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $x^2 > 3x$ на области $[0,3]$.

9. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $|x|>5$ на области $(-6,-5)$

б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $|x|>5$ на области $(-6, 6)$.

10. а) $\forall x P(x)$, где предикат $P(x)$ задан в виде $4x^2-1>0$ на области $[\frac{1}{2},1)$

б) $\exists x Q(x)$ где предикат $Q(x)$ задан в виде $4x^2-1>0$ на области $(0,1)$.

4.Элементы теории алгоритмов

4.1. Основные понятия. Алгоритм как эффективная процедура, однозначно приводящая к требуемому результату, знакома школьнику с младших классов. Школьные методы умножения «столбиком» и деления «углом», метод исключения неизвестных при решении системы линейных уравнений, правило дифференцирования сложной функции, способ построения треугольника по трем заданным сторонам – все это алгоритмы.

Простой анализ любого алгоритма (от алгоритма решения математической задачи до алгоритма приготовления, скажем, борща), позволяет вычленить основные его признаки. Прежде всего, это наличие некоторого набора данных (входные данные), которому ставится в соответствие набор выходных данных. Далее, это система предписаний, по которым набор входных данных преобразуется в набор данных, получаемых на выходе. Поэтому можно говорить об алгоритме как о *конструктивно заданном операторе.*

В технику термин «алгоритм» пришел вместе с кибернетикой. Если понятие метода вычисления не нуждалось в пояснениях, то понятие процесса управления пришлось вырабатывать практически заново. Понадобилось осознавать, каким требованиям должна удовлетворять последовательность действий (или ее описание), чтобы считаться конструктивно заданной,
т. е. иметь право называться алгоритмом. В этом осознании существенную помощь помощь инженерной интуиции оказала практика использования вычислительных машин, сделавшая понятие алгоритма ощутимой

реальностью. С точки зрения современной практики алгоритм – это программа, а критерием алгоритмичности процесса является возможность его запрограммировать.

4.2. Основные требования, применяемые к алгоритму

1. *Наличие данных.* Как выше указывалось, алгоритм, примененный к исходным данным, выдает некоторые результаты. Вместе с тем, в процессе реализации алгоритма, возникают некоторые промежуточные данные.

Типичным средством получения как промежуточных, так и выходных данных, являются индуктивные (рекурсивные) определения, указывающие, как строить новые объекты из уже построенных.

2. *Наличие памяти*, необходимой для размещения данных. Память обычно считается однородной и дискретной, т. е. условно говоря, состоит из одинаковых ячеек, в каждой из которых хранится «единица» информации. Таким образом, единицы измерения объема данных и памяти согласованы. При этом память может быть бесконечной.

3. *Дискретность и конечность.* Алгоритм состоит из отдельных элементарных шагов, или действий, причем множество различных шагов, из которых составлен алгоритм, конечно. Типичный пример множества элементарных действий – система команд ЭВМ.

4. *Детерминированность.* Суть этого требования состоит в том, что после каждого шага необходимо указывать, какой шаг выполняется следующим, либо давать команду остановки, после чего работа алгоритма считается законченной.

5. *Результативность или сходимость алгоритма* для любого набора входных данных означает остановку его действия после конечного числа шагов.

6. Требование м*ассовости* состоит в том, что алгоритм решения задачи разрабатывается в общем виде, то есть, он должен быть применим для некоторого класса задач, различающихся только исходными данными. При

этом исходные данные могут выбираться из некоторой области, которая называется областью применимости алгоритма.

Понятие “массовости” тесно связано с понятием математической модели. Решение поставленных практикой задач математическими методами основано на абстрагировании – мы выделяем ряд существенных признаков, характерных для некоторого круга явлений, и строим на основании этих признаков математическую модель, отбрасывая несущественные признаки каждого конкретного явления. В этом смысле любая математическая модель обладает свойством массовости. Если в рамках построенной модели мы решаем задачу и решение представляем в виде алгоритма, то решение и будет “массовым”.

Приведем следующий пример алгоритма.

S: Записать результат работы алгоритма $\begin{cases} 0 \to 1 \\ 2 \to 1 \end{cases}$ над числом 510242.

Решение. Данный алгоритм устанавливает следующие предписания:

1) цифру 0 заменить на 1;
2) цифру 2 заменить на 1.

Поскольку других предписаний нет, то остальные цифры числа оставляем неизменными. Имеем в результате работы алгоритма число 511141.

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать результат работы алгоритма $\begin{cases} 0 \to 2 \\ 4 \to 3 \end{cases}$ над числом 1004

2. Записать результат работы алгоритма $\begin{cases} 0 \to 2 \\ 2 \to 3 \end{cases}$ над числом 1203

4.3. Способы задания алгоритмов. Примеры.

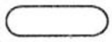
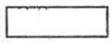
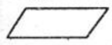
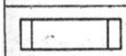
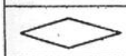
На практике наиболее распространены следующие формы представления алгоритмов.

1.Словесная (запись на естественном языке; словесный способ описания последовательных этапов обработки данных);

2. Табличная (представление алгоритма в форме расчетных формул и таблицы).

3. Графическая (изображения из графических символов);

Задание графического алгоритма происходит путем использования блоков.

	Начало или конец алгоритма
	Блок вычислений
	Блок ввода или вывода данных
	Обращение к подпрограмме
	Блок проверки условия

4. Программная (тексты на языках программирования);

Примеры

1. Словесные алгоритмы.

Пример 1. Записать алгоритм упорядочивания (расположения в порядке возрастания) конечного массива выборочных данных М.

Решение. Пусть S_n – искомая последовательность, где n-размер выборки, по смыслу задачи $n \geq 2$. .

Шаг 1. Найти в массиве М наименьшее число, вычеркнуть его из М и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Записать найденное число в качестве первого члена последовательности S_n и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Найти в оставшемся массиве наименьшее число, вычеркнуть его из М и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Записать найденное на предыдущем шаге число справа к тому, что записано в S_n и перейти к шагу 5.

Шаг 5. Если в массиве больше нет чисел, то остановить работу алгоритма, иначе перейти к шагу 4.

Поскольку на шаге 3 всякий раз массив выборочных данных уменьшается, то алгоритм сходится. Выполнение остальных из вышеперечисленных 6 требований очевидно.

Пример 2. Алгоритм (Эвклида) нахождения наибольшего общего делителя двух заданных натуральных чисел.

Шаг 1. Задать два числа и перейти к шагу 2.

Шаг 2 Если числа равны, то взять любое из них в качестве ответа. Иначе перейти к шагу 3.

Шаг 3. Определить большее из чисел и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Заменить большее число разностью большего и меньшего из чисел и перейти к шагу 2.

Поскольку на шаге 4 всякий раз большее натуральное число уменьшается, то алгоритм сходится. Выполнение остальных из вышеперечисленных 6 требований очевидно.

3. Табличный алгоритм.

Записать алгоритм вычисления размера банковского вклада $A_0 = 10000$ по истечении каждого года хранения, если банк начисляет $k = 10$ процентов годовых.

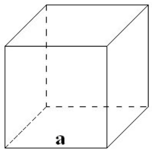
Решение. Если A_0 – размер первоначального вклада, то размер вклада через год будет $A_1 = A + \frac{kA}{100}$, через 2 года - $A_2 = A_1 + \frac{kA_1}{100}$ и т.д., так что через n лет хранения $A_n = A_{n-1} + \frac{kA_{n-1}}{100}$.

Имеем следующую таблицу:

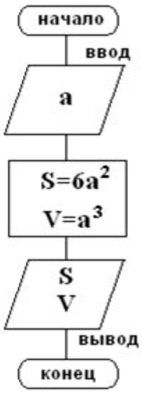
Год хранения	Вклад к началу года хранения	Вклад по истечение года хранения
1	10000	11000
2	11000	12100
3	12100	13310

…	…	…
$П$	A_{n-1}	$A_n = A_{n-1} + \frac{A_{n-1}}{10}$
...	…	…

4. Графический алгоритм вычисления объема куба и площади его боковой поверхности куба.



Запись алгоритма выглядит следующим образом.



Задачи для самостоятельного решения.

1. Записать словесные алгоритмы

1) деления отрезка пополам с помощью циркуля и линейки;

2) построения серединного перпендикуляра к данному отрезку;

3) разложения натурального числа $n \geq 2$ на простые множители.

2. Задать табличным способом алгоритм вычисления значения $A = a(a+c) - c$, задав 5 пар целых чисел *a* и *c*.

3. Записать графический алгоритм вычисление объема конуса, если заданы его образующая l и высота H.

4.4.Машина Тьюринга

Программную форму записи алгоритма продемонстрируем на примере так называемой машины Тьюринга. Алан Тьюринг (1912-1954) — английский математик, логик, криптограф, оказавший существенное влияние на развитие информатики. В 1936 году им была предложена абстрактная вычислительная машина, представляющая собою алгоритмическую систему, т.е. некоторый общий способ задания алгоритма. С тех пор никому еще не удалось предъявить пример процесса, который можно было бы признать алгоритмическим, но который невозможно было бы смоделировать на машине Тьюринга. Иными словами, любой вычислительный процесс может быть смоделирован на подходящей машине Тьюринга. Иными словами подтверждается так называемый тезис Тьюринга (естественнонаучная гипотеза), согласно которому в*сякий алгоритм можно реализовать с помощью подходящей машины Тьюринга*

Описание машины Тьюринга:

а) задается совокупность символов, называемая внешним алфавитом $A=\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$;

б) задается алфавит Q так называемых внутренних состояний $Q=\{q_0, q_1,\ldots, q_m\}$

в) программа машины Тьюринга определяется набором команд вида $q_ia_k \rightarrow q_ja_l \quad (i, j \in \{0,1,\ldots,m\}, k, l \in \{0,1,\ldots,n\}$; не исключаются случаи $j=i$, $k=l$); при этом справа от записи команды может быть указан символ П (право), либо Л(лево).

Наглядное представление машины Тьюринга.

а) Рассматривается бесконечная лента, разбитая на ячейки, в каждую из которых вписан символ из алфавита A; ячейка в которую вписан символ a_0, считается пустой. Предполагается, что на ленте всегда написано конечное слово, то есть все ячейки, находящиеся справа и слева от этого слова, являются пустыми.

б) В каждый данный момент времени машина Тьюринга обозревает некоторую ячейку, находясь в каком-либо из внутренних состояний. Чтобы указать, какая именно ячейка рассматривается, иногда говорят об определенном положении считывающей головки. Символ $q_i a_k$ в записи команды означает, что ячейка a_k обозревается машиной в состоянии q_i.

в) Первая команда, которую выполняет машина с заданными программой, являются команда, начинающиеся с q_1 . Последняя команда, завершающая работу команда, оканчивается символом q_0.

Всякая команда вида $q_i a_k \rightarrow q_j a_l$ выполняется следующим образом: в обозреваемой ячейке символ a_k стирается и в нее записывается символ a_l, после чего машина из состояния q_i переходит в состояние q_j. Если же имеется команда $q_i\, a_k \rightarrow q_j\, a_l$ (П), то «считывающая головка» сдвигается вправо на одну ячейку, так что теперь, находясь в состоянии q_j, машина обозревает ячейку правее исходной. Аналогично, в случае команды $q_i\, a_k \rightarrow q_j\, a_l$ (Л) сдвиг головки происходит влево. Таким образом, (начиная с состояния q_1) последовательно выполняются все команды программы до тех пор, пока машина не перейдет в состояние q_0.

Примеры

1. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0;1\}$ и программой

$q_1 0 \rightarrow q_2 0$ (Л); $q_2 0 \rightarrow q_0 1$; $q_1 1 \rightarrow q_1 1$ (Л); $q_2 1 \rightarrow q_2 1$ (Л).

Начальное положение «считывающей головки» - крайнее правое.

В какое слово будет преобразовано машиной входное слово

а) 10100111; б) 1011011.

Решение. Проанализируем программу машины. Находясь в состоянии q_1, либо q_2, и обозревая при этом ячейку, в которой записана 1, машина, не меняя ни своего состояния, ни числа 1 ячейке, переходит к обозрению соседней слева ячейки, т.е. «считывающая головка» как бы скользит влево по единицам. Так происходит до тех пор, пока «на ее пути» не встретится ячейка, в которой записан символ «0». Если при этом машина находится в состоянии q_1, то она по команде $q_1 0 \rightarrow q_2 0$ перейдет в состояние q_2 и запишет снова в обозреваемую ячейку символ 0. На следующем шаге по команде $q_2 0 \to q_0 1$ машина запишет в ту же ячейку символ 1 и завершит свою работу.

Если же «считывающая головка» ячейку с записанным в ней символом 0 «встречает» в состоянии q_2, то по команде $q_2 0 \to q_0 1$ символ 0 заменяется на 1 и машина завершает работу.

Так, для данных входных слов и стандартного положения считывающей головки первый из «встреченных» нулей сохраняется, а второй заменяется единицей.

Имеем в п. а) : слово 10100111 в результате выполнения команды $q_1 1 \to q_1 1$ (Л) из стандартного (крайнего правого) положения считывающей головки преобразуется в такое же слово 10100111 дважды; команда $q_1 0 \to q_2 0$ (Л) преобразует «первый встреченный» ноль - в ноль, а затем выполняется команда $q_2 0 \to q_0 1$, в результате которой получается слово 10110111, и машина завершает работу.

Аналогично, в п. б), входное слово 1011011 (согласно вышеприведенному описанию выполнения программы) будет преобразовано в 11110111.

2. Сконструировать машину Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0;1\}$, выполняющую вычитание единицы, если начальное положение «считывающей головки» - крайнее правое.

Решение. При движении «считывающей головки» справа налево при первой же «встрече» единицы в ячейке, эта единица должна быть преобразована в ноль, после чего работа машины должна быть завершена. Следовательно, имеем $q_1 0 \to q_1 0\,(Л)$ («скольжение» по нулям) и $q_1 1 \to q_0 0$ (замена единицы на ноль, что и есть вычитание единицы). Таким образом, приходим к программе $q_1 0 \to q_1 0\,(Л)$, $q_1 1 \to q_0 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Дана Машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0;1\}$ и программой

$q_1 0 \to q_2 0$ (Л); $q_2 0 \to q_0 1$; $q_1 1 \to q_1 1$ (Л); $q_2 1 \to q_2 1$ (Л).

Начальное положение «считывающей головки» - крайнее правое.

В какое слово будет преобразовано машиной входное слово

1. 11001101; 2. 10010101; 3. 11000001; 4. 10111101; 5. 11001111;

6. 10001011 ; 7. 10101101; 8. 10111101; 9. 10101111; 10. 10000001

4.5 Рекурсия

Многие алгоритмы содержат периодически повторяющиеся процессы. Процесс повторения элементов самоподобным образом называют *рекурсией.* Такие алгоритмы весьма часто используются в процедурах программирования и содержат *рекурсивные функции*, которые в свою очередь, определяются при помощи так называемого «рекурсивного метода».

Данный метод базируется на следующем принципе индукции. Пусть функция задана для некоторого данного начального целого значения l (обычно 0 или 1), и будучи заданной для некоторого значения $k > l$, она задана также для значения $k+1$. Тогда функция будет определена для всех целых чисел, больших l.

Таким образом, рекурсивная функция определена в точке l, и ее значение $f(k+1)$ выражается через $f(k)$.

Примеры.

1. Факториал $f(n) = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, может быть определен рекурсивным образом: $f(0) = 1$, $f(k+1) = (k+1) \cdot f(k)$.

2. Функция $f(n) = a^n$ ($a > 0, a \neq 1$ - заданная постоянная) определена на множестве неотрицательных целых чисел. Она, очевидно, допускает также и рекурсивное определение $f(0) = 1,\ f(k+1) = a \cdot f(k)$.

3. Числа Фибоначчи 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55 и т.д. - последовательность чисел, в которой каждый следующий элемент равен сумме двух предыдущих $f(k+1) = f(k) + f(k-1)$.

Рассмотрим теперь обратную задачу: переход от рекурсивного описания функции к непосредственному. Такая процедура называется *исключением рекурсии.*

Примеры.

1. Исключить рекурсию из следующего рекурсивного определения:

$$f(1)=1,\ f(k)=f(k-1)+k.$$

Решение. Имеем $f(1)=1=\frac{1\cdot 2}{2}$, $f(2)=1+2=\frac{2\cdot 3}{2}$,

$$f(3)=(1+2)+3=\frac{3\cdot 4}{2},\quad f(4)=(1+2+3)+4=\frac{4\cdot 5}{2},$$

$$f(5)=(1+2+3+4)+5=\frac{5\cdot 6}{2}\quad \text{и т. д.}$$

Приведенные записи позволяют выдвинуть следующую гипотезу:

$$f(n)=1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Чтобы доказать ее справедливость, достаточно проверить, что функция $f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$ удовлетворяет рекурсивному соотношению:

$$f(1)=1,\ f(k)=f(k-1)+k.$$

Имеем:

$$f(1)=\frac{1\cdot 2}{2}=1,\quad f(k-1)+k=\frac{k(k-1)}{2}+k=\frac{k^2+k}{2}=\frac{k(k+1)}{2}=f(k).$$

Следовательно, функция $f(n)$ найдена верно.

2. Исключить рекурсию из рекурсивного определения:

$$f(1)=2,\ f(k)=2\cdot k\cdot f(k-1).$$

Решение. Рассматриваем следующие равенства $f(1)=2=2^1\cdot 1!$,

$$f(2)=2\cdot 2\cdot 2=2^2\cdot 2!,\quad f(3)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=2^3\cdot 3!,$$

$$f(4)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4=2^4\cdot 4!,\quad f(5)=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 5=2^5\cdot 5!$$

Можно предположить, что $f(n)=2^n\cdot n!$

Проверим выполнение рекурсивных соотношений:

$$f(1)=2^1\cdot 1!=2,$$

$$2\cdot k\cdot f(k-1)=2\cdot k\cdot\left[2^{k-1}\cdot(k-1)!\right]=2\cdot 2^{k-1}\cdot k\cdot(k-1)!=2^k\cdot k!=f(k).$$

Следовательно, функция $f(n)$ найдена верно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $f(1), f(2), f(3), f(4)$ для приведенных ниже рекурсивных функций:

а) $\begin{cases} f(0)=3, \\ f(k)=-f(k-1). \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(0)=-2, \\ f(k)=2f(k-1)+3k. \end{cases}$ г) $\begin{cases} f(0)=1, \\ f(k)=k^2 f(k-1). \end{cases}$

2. Найти $f(2), f(3), f(4), f(5)$ для следующих рекурсивных функций:

а) $\begin{cases} f(0)=1, \\ f(1)=3, \\ f(k)=2f(k-1)-f(k-2). \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(0)=0, \\ f(1)=1 \\ f(k)=f^2(k-1)-f^2(k-2). \end{cases}$

3. Найдите явные выражения для $f(n)$, исключив рекурсию из следующих определений:

а) $\begin{cases} f(1)=-32, \\ f(k+1)=f(k)-30. \end{cases}$ б) $\begin{cases} f(0)=1, \\ f(k)=-12f(k-1). \end{cases}$ в) $\begin{cases} f(0)=10, \\ f(k)=f(0)+f(k-1). \end{cases}$

5. Приложение логических операций к вычислению вероятностей событий

Наш опыт подсказывает, что вычисление классической вероятности полезно разделить на два этапа. Первый этап – качественный анализ результатов опыта или серии опытов. Второй этап – вычисление вероятности как функции «простого» события (в схеме одного опыта) или «сложного события» (в серии опытов).

5.1.Действия над событиями

Введению понятия вероятности предшествует классификация событий на достоверные (достоверное событие обозначаем символом E), невозможные (символ $\varnothing$) и случайные (обозначения: $A,B,C,\ldots$). Представляется полезным здесь же ввести действия над событиями (альтернативный подход представлен, напр., в [3], гл.12, параграф 1). С одной стороны, навыки декомпозиций сложного события в простейшие облегчат в дальнейшем решение вероятностных задач, с другой – в терминах действий над событиями могут быть введены понятия совместных и несовместных событий и полноты группы событий. Напомним, что:

- событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (по определению) состоит в наступлении хотя бы одного из указанных $A_k, k=1,\ldots,n,$ а событие $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ – в совместном наступлении всех $A_k, k=1,\ldots,n$;

- два события (по определению) равны, если наступление каждого из них влечет за собою наступление другого.

В процессе каких-либо теоретических обоснований и при решении задач могут быть использованы переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, а также распределительное свойство умножения относительно сложения

$$(A_1 + A_2)\, A_3 = A_1 A_3 + A_2 A_3. \qquad (5.1)$$

Доказательства указанных свойств и других равенств между событиями можно формализовать, если учащиеся владеют таблицами истинности для основных логических операций. Дело в том, что высказывание «наступит хотя бы одно из событий A_1 или A_2» («наступят оба события A_1 и A_2») истинно тогда и только тогда когда истинна дизъюнкция (конъюнкция) высказываний «наступит A_1», «наступит A_2». Следовательно, имеет место *взаимно-однозначное соответствие между операциями сложения (умножения) событий и дизъюнкцией (конъюнкцией) соответствующих высказываний.*

Так, например, в справедливости (5.1) убеждаемся сравнением пятой и седьмой колонок в следующей таблице истинности (символ «И» означает: истинно высказывание, что наступит соответствующее событие; символ «Л» - ложно, т.е. событие не наступит).

A_1	A_2	A_3	A_1+A_2	$(A_1+A_2)A_3$	A_1A_3	A_2A_3	$A_1A_3+A_2A_3$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	И	Л	И
Л	И	И	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

С помощью введенных операций определяется теперь понятие несовместности событий A_1 и A_2 ($A_1 \cdot A_2 = \varnothing$, т.е. в результате опыта наступление одного из них исключает наступление другого), полноты группы $A_1, A_2, ..., A_n$ ($A_1 + A_2 + ... A_n = E$, т.е. в результате опыта наступление хотя бы одного из указанных событий является достоверным), а также понятие противоположных событий A и $\overline{A}$ (они несовместны и образуют полную группу: $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = E$). Можно также сказать, что $\overline{A}$ состоит в ненаступлении A : высказывание «наступит $\overline{A}$» есть отрицание высказывания «наступит A».

Нам представляется полезным решение серии упражнений, относящихся к классификации событий и действиям над событиями. Для начала, можно предложить учащимся привести примеры событий совместных и несовместных, образующих полную группу и не образующих таковую, примеры противоположных событий. Рассмотрим другие возможные упражнения.

Задача **5.1** Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединенных элемента; событие A_1 есть исправность первого элемента, A_2 – второго. Выразить через A_1 и A_2 следующие события : A блок пропускает ток; B блок не пропускает тока.

Здесь рассуждения состоят в следующем. Поскольку наступление события A означает исправность *хотя бы одного* из элементов, то $A = A_1 + A_2$. Событие B означает *неисправность* каждого элемента, т.е. *совместное наступление* $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$, а значит, $B=\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$.

Задача **5.2** Выразить (при наличии той же электрической схемы) следующее событие C: в блоке исправен только один элемент.

Рассуждаем так: событие C равносильно одному из двух следующих: исправен первый элемент (событие A_1), и неисправен второй ($\overline{A}_2$), так что наступает $A_1\ \overline{A}_2$, или (наоборот) наступает $\overline{A}_1\ A_2$; следовательно,

$$C = A_1\ \overline{A}_2 + \overline{A}_1\ A_2.$$

Можно, далее, предложить учащимся распространить результат на случай наступления ровно одного из трех, …, из n данных событий, доказать, что наступление ровно двух из трех данных событий есть событие

$$A = A_1\ A_2\ \overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1\ A_2\ A_3$$

и т.п.

***Задача* 5.3** Доказать равенства

$$\overline{A_1 + A_2} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}\ , \qquad\qquad \overline{A_1 \cdot A_2} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2.$$

Доказательство этих равенств (аналогов логических законов де Моргана) может быть проведено с помощью таблиц истинности.

Полезно также проинтерпретировать второе равенство для элементов, *последовательно* соединенных в электрической схеме (т.е. A_1 есть исправность первого элемента, A_2 – второго).

5.2. Вычисление классической вероятности непосредственно по определению

Вероятность P понимается как некоторая численная мера $P = P(A)$ степени объективной возможности наступления данного события. Одной из наиболее употребимых является классическая модель. Здесь всякое событие рассматривается как результат некоторого опыта, имеющего конечное число элементарных исходов. Под элементарными понимаются простейшие («неразложимые») исходы опыта (простейшие случайные события), которые

а)попарно несовместны;

б)образуют полную группу;

в)равновозможны.

При этом понятия «простейшие исходы», «равновозможные исходы» следует отнести к неопределяемым. Так, равновозможность исходов означает, что объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой; о равновозможности судят на основании соображений симметрии и т.п. Часто совокупность всех элементарных исходов называют пространством элементарных исходов.

Стоит обсудить с учащимися примеры простейших и «составных» исходов, равновозможных и неравновозможных исходов. Так, если опытом служит подбрасывание игрального кубика, то исходы «выпадение числа очков, кратного трем» и «не кратного трем …» не являются элементарными, ибо они не равновозможны (исходов второго типа –больше); кроме того, эти два исхода могут быть «разложены» на более простые : «3, 6 очков» и «1,2,4,5 очков».

Элементарные исходы называются благоприятствующими событию *A*, если в результате наступления любого из них наступает событие *A*. Теперь определение классической вероятности события *A* формулируется в виде

$$P(A)=\frac{m_A}{n},$$

где n - число *всех элементарных исходов опыта*, $m=m_A$ - число тех из них, которые благоприятствуют событию *A*.

В схеме *одного* опыта решение задачи на вычисление вероятности следует начинать с описания опыта и его элементарных исходов (если исходов много, то достаточно назвать лишь несколько типичных). Далее, следует провести *качественный анализ* исходов, т.е. убедиться в том, что они действительно *элементарные* в соответствии с вышеуказанными пп. а),б), в). И лишь затем *перейти к количественному анализу*, т.е. вычислению n и m.

В качестве простейших иллюстраций последовательного применения качественного и количественного анализа можно предложить классические задачи о выпадении герба на монете или 6 очков на игральном кубике. Далее стоит распространить задачи на случаи подбрасывания двух, трех,… монет или кубиков. На этапе вычисления вероятности *непосредственно по определению* каждую такую ситуацию интерпретируют как *единичный* опыт, к элементарным исходам которого относят всевозможные *пары* (тройки,…) граней (монет, кубиков). За качественным анализом (проверка несовместности, равновозможности, полноты группы исходов) последует количественный анализ, состоящий в реализации комбинаторного принципа умножения. Так, например, при подбрасывании двух игральных кубиков число элементарных исходов есть $n = 6 \times 6 = 36$.

Весьма часто опыты можно интерпретировать как выборки одного или нескольких элементов из данной совокупности. В общем случае задача формулируется так.

Среди N предметов имеется M меченых. Случайным образом извлекается k предметов. Событие A состоит в том, что в этой выборке содержится ровно l меченых предметов. Найти $P(A)$.

Мы рекомендуем в этом, *общем* случае, установить, что *все исходы такого опыта – элементарные* , т.е. обосновать их попарную несовместность, полноту группы и равновозможность (последняя следует из того, что выборки - случайные). В дальнейших задачах, моделируемых как выборки, достаточно будет лишь сослаться на качественный анализ, проведенный в этом общем случае.

Количественный анализ мы рекомендуем провести поначалу при конкретных значениях N, M, k, l . При этом следует *выделить тот случай, когда извлекается один предмет* (k=1): *здесь число исходов равно* N, *а благоприятствует событию появления меченого предмета ровно M исходов.* В случае $k > 1$ имеем дело с неупорядоченными выборками, а значит – с сочетаниями.

На основе рассмотрения нескольких частных случаев легко прийти к общей формуле

$$P(A) = \frac{C_M^l \cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

В случае *упорядоченных* выборок рассуждения на этапе качественного анализа сохраняются, на этапе количественного анализа оперируем уже не с сочетаниями, а с размещениями (в частности, с перестановками).

Приведем примеры заданий на выборку.

***Задача* 5.4** Для контроля в торговом предприятии отобрано 20 видеодисков, среди которых 5 нелицензионных. Однако один диск (неизвестно какой) был утерян. После этого наугад проверенный диск оказался нелицензионным. Какова вероятность, что утерянный диск был а)нелицензионным; б)лицензионным.

Р е ш е н и е. Опыт может быть интерпретирован как *случайная выборка* 1 диска (утерянного) из 19 (непроверенных), поскольку проверенный (нелицензионный) диск исключается, очевидно, из рассмотрения. Исходы поэтому – элементарные.

Случай а). Пусть A – событие утери лицензионного диска Так как выбирается *один* предмет, то число исходов n=19 а благоприятных - $m_A = 4$.

Следовательно, $P(A) = \frac{4}{19}$.

Случай б). Выбор лицензионного диска есть событие $\overline{A}$, противоположное A. Следовательно, $P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{19} = \frac{15}{19}$.

***Задача* 5.5** В кооперативном доме-новостройке имеется 20 квартир, среди которых 8 расположены на крайних этажах. Квартиры распределяются по жребию. Найти вероятность того, что эти 8 квартир достанутся данным восьми семьям-переселенцам.

Р е ш е н и е . Опыт можно интерпретировать как выборки из 20 участников жеребьевки. Исходы опыта, следовательно, будут элементарными.

Для поведения количественного анализа уточним, что производятся *упорядоченные выборки* из 20 (число участников) по 20 (по числу распределяемых квартир) т.е. имеются перестановки из 20. Количество всевозможных исходов, таким образом есть n=20!

Если событие A состоит в том, что 8 квартир на крайних этажах достанутся восьми семьям-переселенцам, то число благоприятных исходов m_A можно вычислить следующим образом. Среди данных восьми семей возможно 8! способов распределения квартир на крайних этажах, и каждый такой способ сочетается с остальными 12! способами распределения квартир среди остальных 12 участников жеребьевки. Согласно принципу умножения $m_A = 8! \cdot 12!$ Итак,

$$P(A) = \frac{m_A}{m} = \frac{8! \cdot 12!}{20!} = \frac{1}{125970}.$$

5.4. Вероятности «составных» событий

Рассмотрим теперь ситуации, когда случайное событие может быть подвергнуто декомпозиции: выражено через операции сложения, умножения и отрицания (перехода к противоположному событию) более простых событий – результатов единичного опыта. Напомним основные формулы.

1)*Вероятность произведения есть*

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B),$$

где $P_A(B)$ означают вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло (условная вероятность события B). Результат может быть распространен и на большее количество событий, например,

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

В связи с этими формулами обычно выделяют случай независимых событий: два события A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли другое событие, т.е. эта вероятность абсолютно постоянна в условиях данных опытов. Аналогично, события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если *каждая из вероятностей* $P_j = P(A_j)$ *остается абсолютно постоянной* в условиях данных опытов. Для n событий, независимых в совокупности,

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n);$$

в частности, для двух независимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

2) *Вероятность суммы двух событий* вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

Вероятность суммы *n попарно несовместных* событий вычисляется в виде

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n);$$

для случая же совместимости любой пары событий имеем

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}).$$

3) Если $A, \overline{A}$ - пара противоположных событий, то справедливо равенство

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Трансформируем задачу 5.2 следующим образом.

***Задача* 5.7** Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединенных элемента, причем первый может пропускать ток (исправен) с вероятностью 0,9, а второй – с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что исправен ровно один блок?

Рассуждения начинаем с качественного анализа. Испытание схемы может быть представлено в виде серии из *двух «единичных» опытов* по испытанию каждого элемента. Результатами опытов являются события A_1(или $\overline{A_1}$), A_2 (или $\overline{A_2}$). Событие *C*, состоящее в том, что в блоке исправен только один элемент, есть

$$C = A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2, \text{ так что } P(C) = P(A_1 \overline{A_2} + \overline{A_1} A_2).$$

Вычисление последней вероятности относится уже к количественному анализу, однако остается выяснить «взаимоотношение» событий-компонентов суммы, представляющей событие *C*. События $A_1 \overline{A_2}$ и $\overline{A_1} A_2$, очевидно, несовместны (в чем можно убедиться и формальным образом: $(A_1 \overline{A_2})(\overline{A_1} A_2) = (A_1 \overline{A_1})(\overline{A_2} A_2) = \varnothing$), следовательно,

$$P(C) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} A_2).$$

Остается вычислить вероятность каждого произведения. По условию, $P(A_1)=0{,}9,\ P(A_2)=0{,}8$, следовательно, $P(\overline{A}_1)=0{,}1,\ P(\overline{A}_2)=0{,}2$. Вероятности всех этих событий, как мы видим, остаются постоянными в условиях испытания схемы, значит можно утверждать независимость событий A_1 и $\overline{A}_2$ а также $\overline{A}_1$ и A_2. Тогда

$$P(C)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)=0{,}9\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}8=0{,}26.$$

Решение задач на схему выборок с использованием комбинаторных формул часто вызывает затруднение у учащихся. В ряде случаев альтернативой может быть использование формулы вероятности произведения зависимых событий.

***Задача* 5.8** Ученик выучил 15 вопросов из 20, предусмотренных программой экзамена. Какова вероятность, что он знает все три вопроса, случайным образом предложенные ему на экзамене?

Имеем стандартную задачу о выборке. Однако испытание (выбор трех вопросов) может быть также представлено последовательным трехкратным (безвозвратным) выбором по одному вопросу из списка. Пусть событие A состоит в том, что ученик знает все три вопроса, и событие A_k – ученику известен k-ый последовательно выбранный вопрос; k=1,2,3. Тогда $A=A_1A_2A_3$ и, следовательно,

$$P(A)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3).$$

На этапе вычисления каждой из вероятностей $P(A_1), P_{A_1}(A_2), P_{A_1A_2}(A_3)$ имеем выборку одного вопроса из данной (в случае $P(A_1)$) или оставшейся (в случаях $P_{A_1}(A_2)$ и $P_{A_1A_2}(A_3)$) совокупностей. Получаем тогда $P(A_1)=\dfrac{15}{20}$; $P_{A_1}(A_2)=\dfrac{14}{19}$ так как к моменту выбора второго вопроса (по наступлении A_1) остается 14 известных ученику вопросов из 19; $P_{A_1A_2}(A_3)=\dfrac{13}{18}$ (по наступлении A_1 и A_2 из 18 оставшихся вопросов ученик знает 13). Значит

$$P(A) = \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} \cdot \frac{13}{18} = \frac{91}{228}.$$

Задача **5.9** Пользователь компьютера давно не обновлял вирусные базы. Новый вирус поэтому может быть обнаружен с вероятностью 0,6. Если вирус не обнаружен, то он поражает наиболее ценные файлы с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения ценных файлов?

Управление решением может быть выстроено следующим образом

ВОПРОС	ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ
В чем состоит испытание?	«Вирусная атака».
Вероятность какого события требуется найти?	Событие *A* - поражение ценных файлов.
Можно ли событие *A* «разложить» на более простые?	Событие В – необнаружение вируса и событие С – поражение при этом ценных файлов.
Как можно выразить событие *A* с помощью действий над событиями *B* и *C*? Почему именно так?	*A*=*BC*, поскольку А состоит в совместном наступлении *B* и *C*.
Записать формулу для вычисления вероятности события *A*.	$P(A) = P(B)P_B(C)$
Известна ли вероятность события *B*? Если нет, то как ее найти?	Нам дана вероятность обнаружения вируса; вероятность необнаружения ищется как вероятость противоположного события: *P*(*B*)=1-0,6=0,4.
Что означает в данной задаче запись $P_B(C)$? Известна ли эта вероятность?	$P_B(C)$ есть вероятность события *C* (поражения ценных файлов) при условии, что событие *B* (необнаружение вируса) наступило. Эта вероятность дана, она равна 0,8.
Получите окончательный ответ.	$P(A) = P(B)P_B(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32.$

В качестве обсуждения решения стоит выяснить, зависимы ли здесь оказались события *B* и *C* (ответ: зависимы) и чему равна была бы вероятность события *C*, если бы *B* не наступило (ответ: вирус обнаружен и уничтожен, следовательно $P_{\overline{B}}(C)=0$).

В общем случае процесс управления решением задачи может быть выстроен пошагово (алгоритмизирован) следующим образом.

1.Описать *опыт* и ввести в рассмотрение *событие*, вероятность которого следует найти.

2. Если речь идет об одном опыте (иначе – перейти к пункту 3), то провести последовательно качественный и количественный анализ:

2.1 назвать исходы опыта;

2.2 установить, что они - элементарные;

2.3 назвать исходы, благоприятствующие данному событию;

2.4 найти число *n* всех элементарных исходов;

2.5 найти число *m* всех элементарных исходов;

2.6 вычислить вероятность данного события.

3.Если опыт можно представить как серию из нескольких «единичных опытов», то:

3.1 обосновать, что исходы каждого опыта – элементарные;

3.2 произвести декомпозицию данного события (представить его как результат действий над более простыми, полученными в единичных опытах);

3.3 выяснить «взаимоотношения» компонентов, полученных в декомпозиции (например, попарную несовместность, если речь идет о сумме событий);

3.4 записать формулу для вычисления вероятности «сложного события» в соответствии с декомпозицией п. 3.2;

3.5 произвести соответствующие п. 3.4 числовые выкладки.

ИТОГОВЫЙ ТЕСТ

Алгебра высказываний

1. Следующие два высказывания истинны: «неверно, что если магазин *A* организует распродажу, то магазин *C* тоже»; «из двух магазинов *B* и *C* организует распродажу только один». Какие магазины организуют распродажу?

Варианты ответов :

1)магазины *A* и С проводят распродажу, а магазин *B* – нет.

2)магазины *C* и В проводят распродажу, а магазин *A* – нет.

*3)магазины *A* и В проводят распродажу, а магазин *C* – нет.

4)Среди ответов 1-3 верного не указано

2. Формула $(A \to B) \vee (C \vee \overline{B})$

*1)тождественна истинна

2)выполнима

3)выполнима и опровержима

4)тождественно ложна

3. Результат упрощения формулы $A \wedge ((\overline{B} \leftrightarrow A) \to (\overline{A} \vee \overline{B}))$ есть

1) высказывание (формула) $\overline{B}$

2)тождественная истина

3)тождественная ложь

*4) высказывание (формула) *A*

4. Соотнести каждую из формул

А) $\overline{A \Delta B}$

Б) $(\overline{B} \to B) \wedge A$

В) $\neg(\overline{(A \to B)} \wedge A)$

с ей равносильной

Р) $(B \vee \overline{A}) \wedge (B \to A)$

Q) E (тождественная истина)

R) $A \vee B$

S) $A \wedge B$

Варианты ответов:

1)*А)-P); 2) А)-R); 3)Б)- Q); 4)*Б)- S); 5)*В)- Q); 6) В)- S)

5. Соотнести следующие дизъюнкты (элементарные дизъюнкции) относительно логических переменных x, y, z

А) $z \wedge \overline{x}$

Б) $(\overline{x}) \vee (y \vee x)$

В) $(\overline{z}) \vee (y \vee x)$

с их типом:

P) полный

Q)правильный

R)совершенный

S) не обладающий ни одним из перечисленных свойств P, Q, R

Варианты ответов:

*1)А)-Q) ; 2)А)-P) ; 3) Б)-P) ; *4) Б)-S) ; 5)В)-S) *6) В)-R)

6. Формула (высказывание) $(A \to \overline{B}) \wedge \ldots$ равносильна (равносильно) $\overline{A} \wedge B$, если на месте многоточия записать формулу (высказывание)

1) $\overline{A}$ *2) B 3) $\overline{B}$ 4) A

7. Среди следующих формул конъюнктивно-нормальную форму имеет формула

1) $(y \to x) \wedge (y \vee \overline{z})$

2) $(y \wedge x) \vee ((y \vee \overline{z}) \wedge y)$

*3) $((y \vee x) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z})) \wedge x$

4) $(y \Delta x) \wedge (y \Delta \overline{z})$

Логика предикатов

8. Даны пары уравнений (*P, Q*). Для каждой из них указать , какое из следующих четырех соотношений имеет место

$1) P \Rightarrow Q,\ \ 2) Q \Rightarrow P,\ \ 3) P \Leftrightarrow Q,$ 4) ни одно из указанных в пп.1)-3) соотношений не имеет места

А) $P:\ x^2 - 6x + 9 = 0; \qquad Q:\ \dfrac{x^2 - 3x}{x-1} = 0$

Б) $P:\ \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x+4} = 0; \qquad Q:\ \dfrac{x^2 + 7x + 12}{x-4} = 0$

В) $P:\ 4x^2 - x - 5 = 0; \qquad Q:\ \sqrt{x+5} + 2x = 0$

Верные ответы:

А) $P \Leftrightarrow Q$;

Б) $P \Rightarrow Q$;

В) $Q \Rightarrow P$.

9. Даны пары неравенств (*P, Q*). Для каждой из них указать , какое из следующих четырех соотношений имеет место

$1) P \Rightarrow Q,\ \ 2) Q \Rightarrow P,\ \ 3) P \Leftrightarrow Q,$ 4) ни одно из указанных в пп.1)-3) соотношений не имеет места

А) $P:\ x^2 > 4; \qquad Q: x \le -2$

Б) $P:\ 4 \le x \le 10; \qquad Q: |x-7| \le 3$

В) $P:\ x < 2; \qquad Q:\ |x-2| > 0$

Верные ответы:

А) ни одно из указанных в пп.1)-3) соотношений не имеет места;

Б) $P \Leftrightarrow Q$;

В) $P \Rightarrow Q$;

10. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ - некоторые предикаты, заданные на одной и той же непустой предметной области. Указать высказывание, которое равносильно следующему: $\neg(\exists x (P(x) \wedge \overline{Q}(x))$.

1) $\exists x (Q(x) \vee \overline{P}(x))$

2) $\forall x (P(x) \wedge \overline{Q}(x))$

3) $\forall x (Q(x) \wedge \overline{P}(x)))$

*4) среди ответов 1)-3) верного не содержится

Теория алгоритмов

11. Записать результат работы алгоритма $\begin{cases} 0 \to 2 \\ 4 \to 3 \end{cases}$ над числом 4004…

Варианты ответов

1)4224

2)3003

+3) 3223

4)3224

Задания с развернутым ответом

12. Существует ли предикат $P(x)$ (и, если существует, то привести пример этого предиката и предметной области, на которой он задан), чтобы для него выполнялись пары соотношений

$$\begin{cases} \lambda(\forall x\, P(x)) = 0 \\ \lambda(\exists x\, P(x)) = 1 \end{cases}$$

13. Существует ли предикат $P(x)$ (и , если существует, то привести пример этого предиката и предметной области, на которой он задан), чтобы для него выполнялись пары соотношений

$$\begin{cases} \lambda(\forall x\, P(x)) = 1 \\ \lambda(\exists x\, P(x)) = 0 \end{cases}$$

14. Пусть предикат $P(x)$ задан на конечной предметной области $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Доказать, что высказывания

$\forall x\, P(x)$ и $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$ равносильны.

15. Пусть предикат $P(x)$ задан на конечной предметной области $G = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Доказать, что высказывания

$\exists x\, P(x)$ и $P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$ равносильны.

16.Сконструировать машину Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{0;1\}$, выполняющую прибавление единицы к написанному слову, если начальное положение «считывающей головки» - крайнее правое.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Академия, 2007. - 304 с.
2. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Академия, 2008. - 448 с.
3. Нахман А.Д. Математическая логика : методические рекомендации и контрольные задания. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2011. – 16 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ