Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

И.Ю.Иванова, А.Д.Нахман

РЕАЛИЗАЦИЯ КОНЦЕПЦИИ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ

Монография

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2016

Монография подготовлена в рамках реализации соглашения №7-16/МУ "О поддержке победителей проекта №22-04/МУ39-16" областного конкурса "Гранты для поддержки прикладных исследований молодых ученых 2016 г.", учрежденного Управлением образования и науки Тамбовской области и Советом молодых учёных и специалистов Тамбовской области

Рецензенты:
доктор технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» С.В.Плотникова;
заведующая кафедрой общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», кандидат филологических наук доцент Т.В.Мирзаева

УДК 372.851

Иванова И.Ю. Реализация Концепции развития математического образования в деятельности образовательных организаций: монография / И.Ю.Иванова, А.Д.Нахман. – «Инновации в образовании». Специальный выпуск. – Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2016. – 84 с.

Проанализированы основные идеи Концепции развития Российского математического образования и выстроена модель их реализация в деятельности образовательных организаций и региональных учебно-методических объединений. Предложены, в частности, меры по совершенствованию математического образования в системе «школа-вуз» Среди инновационных содержательно - методические линий курса математики выделена линия задач исследовательского характера. Предложен содержательно-технологический компонент данной линии. Монография адресована исследователям в области образовательных инноваций, а также преподавателям математики.

Введение

На современном этапе развития науки, экономики, культуры, производства, математической науке отводится всё более возрастающая роль. Математика является «одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса. Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека, в том числе к логическому мышлению, влияя на преподавание других дисциплин. Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе» (см. Концепцию развития Российского математического образования; далее – Концепция). Следуя основным идеям указанного документа, мы усматриваем

- *миссию* математического образования на современном этапе развития общества (*что* несет обществу математическое образование?) в пропаганде математики как необходимого элемента общей культуры, функциональной грамотности и повседневного применения, в формировании математической компетентности обучающихся;

- *амбициозность* концепции (стремление к ведущей роли, статусности) в претензии математики на статус национальной идеи России XXI века;

- *реалистичность* идей концепции в возможности сохранения Российской математики как сильнейшей в мире (что наблюдалось во второй половине XX в.), в высокой вероятности перехода математической науки (включая прикладную математику и информатику) и математического образования на уровень конкурентного преимущества экономики РФ в XXI веке.

В настоящей работе на основе идей Концепции выстроена модель их реализация в деятельности образовательных организаций.

В п.1 обсуждается понятийное поле концепции, в п. 2 формулируются общие проблемы математической подготовки, выявленные, в частности, в результате проведения государственной итоговой аттестации учащихся. Система математического образования представлена нами в виде ряда подсистем (п.3), наиболее значимым связующим звеном которых является содержание математического образования.

Основные идеи Концепции нами предлагается реализовать на следующих трех уровнях: на уровне образовательного учреждения (школы), муниципалитета и региона (п. 3-4); конкретизирован перечень соответствующих мероприятий. В п.5 анализируется роль системы повышения квалификации в реализации Концепции. В п. 6 предлагаются меры по совершенствованию математического образования в системе «школа-вуз»; в продолжение этой темы рассматриваются вопросы преемственности математической подготовки (п.7). Основные направления деятельности региональных учебно-методических объединений в области математики обсуждаются в п.8.

Одним из основных направлений инновационной политики в области образования является обновление его содержания. В п. 9 вводится понятие инновационных содержательно - методические линий курса математики и рассматривается данное понятие на примере стохастической линии.

В условиях предпрофильной, профильной и углубленной математической подготовки в качестве отдельной инновационной содержательно-методической линии может быть выделена линия задач исследовательского характера. В свою очередь, здесь на первое место выходят задачи с параметрами. Именно содержательному (и отчасти, технологическому) компоненту линии задач с параметрами посвящена вторая часть работы. К вопросам содержания относятся :

-общие положения;

-задачи, связанные с квадратической функцией;

- трансцендентные уравнения и неравенства;

- задачи на «отсечение» корней

- задачи на применение производной

- задачи, сводящиеся ко введению параметра

В качестве приложения даётся контрольный блок, содержащий теоретические упражнения и задания для самостоятельного решения учащимися.

I. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ «МАТЕМАТИКА»

1. Понятийное поле концепции

1.1. Цели математического образования традиционно понимаются как
-личностно-интеллектуальное развитие обучающихся;
-формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для полноценной жизни в обществе;
-формирование представлений об идеях и методах математики.

Концепция конкретизирует указанные общие цели, называя *приоритетами математического образования* развитие способностей к:
- «логическому мышлению, коммуникации и взаимодействию на широком математическом материале (от геометрии до программирования)»;
- «реальной математике: математическому моделированию (построению модели и интерпретации результатов), применению математики, в том числе, с использованием ИКТ»;
- «поиску решений новых задач, формированию внутренних представлений и моделей для математических объектов, преодолению интеллектуальных препятствий».

Для реализации указанных приоритетных направлений, согласно идеям Концепции, изменения должны быть внесены в
-*содержание* математического образования: оно будет все более пополняться элементами прикладной и «компьютерной» математики;
-*характер математической деятельности:* она будет носить традиционный характер (решение задач, доказательство теорем), но происходить в ИКТ-средах, с применением ИКТ-инструментов.

1.2. Математические компетенция и компетентность, несмотря на различные подходы авторов к этим понятиям, отражают в себе следующие основные черты:

-*математическая компетенция* понимается как *способность* обучающихся установить связь между усвоенными знаниями, сформированными умениями и навыками (ЗУН) и проблемой, применять математические ЗУН в измененной ситуации, в том числе при решении практических задач;
- *математическая компетентность* есть актуальная *готовность* (в отличие от компетенции как потенциала) к решению математических и прикладных задач (компетеция «в действии»).

1.3. Математическая грамотность понимается как «способность человека определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному, заинтересованному и мыслящему гражданину» (терминология исследований Programme for International Student Assessment – PISA). Соотнося это понятие с понятием математической компетенции, можно заметить, что понятие математической грамотности отражает в общих чертах роль математических знаний, умений, навыков в системе знаний, взглядов, умений, интеллектуальных потребностей индивида, тогда как математическая компетенция/компетентность более конкретна и прагматична: она предполагает наличие *мобильных* знаний и умений, способных «выйти за пределы» предметной области и «породить» конкретный «интеллектуальный продукт» .

2. Государственная итоговая аттестация: проблемы и пути решения

2.1. Приведем общую **характеристику содержания заданий ОГЭ и ЕГЭ**. В заданиях контрольно-измерительных материалов (КИМ) обоих экзаменов последних лет условно можно выделить три содержательных блока: алгебра и начала анализа, геометрия, «реальная математика» (практико-ориентированные задачи). Задания базового уровня обоих экзаменов, в первую очередь, направлены на

- проверку навыков вычислений и преобразований, а также логических умений;
- оценку умения считывать и анализировать информацию, представленную в форме диаграмм, графиков, таблиц, а также решать практико-ориентированные задачи, изложенные неформализованным текстовым способом;
- оценку способности учащихся ориентироваться в простейших наглядных геометрических конструкциях;
- построение и анализ простейших математических моделей.

Задания ЕГЭ повышенного и высокого уровня сложности предполагают
-уверенное владение аппаратом алгебры и базовыми идеями математического анализа;
- сформированность геометрических представлений и умение анализировать геометрические конструкции;
-умения логически грамотно излагать свои аргументы, а также комбинировать изученные математические методы в незнакомых ситуациях.

Анализ качественных и количественных результатов ГИА последних лет выявил недостаточную сформированность умений, общих для решения математических задач, таких как перевод условия задачи на математический язык (составление выражения, уравнения), работа с формулами, чтение и интерпретация графиков функций, применение основных геометрических фактов для решения задач. Это выражается в ошибках на выполнение заданий по темам
-решение задач на составление уравнений;
-решение квадратных неравенств;
- решение систем уравнений;
-исследование свойств функции элементарными методами;
-решение задач с параметром.

Ошибки, которые допускают выпускники при решении заданий группы «С» (задания повышенной и высокой сложности) свидетельствуют о недостаточном овладении материалом курса как основной школы, так и курса математики старшей ступени (трансцендентные уравнения и неравенства, начала математического анализа, основы стереометрии).

2.2. Совокупный результат международных исследований и государственной итоговой аттестации (как ГИА за курс основной школы, так и ЕГЭ) выявил **наличие следующих общих проблем**:

- недостаток вычислительной культуры и культуры преобразований;
- низкий уровень геометрической культуры, недостаточное развитие пространственных представлений, а также навыка «видения» стандартных ситуаций, описываемых теоремами геометрии;
- слабый уровень овладения простейшими методами математического анализа (в частности, умения исследовать функции);
- недостаточное умение применять теоретические знания как в повседневной жизни, так при решении прикладных задач.

К основным причинам существования отмеченных проблем можно отнести:

• недостаточную практическую ориентацию содержания и процесса обучения;

• перегруженность программ и учебников большим объемом информации;

• недостаточное внимание развитию общеучебных и межпредметных умений; в частности, недостаточное развитие способности осмысления информации, различной по форме и содержанию.

Именно в формировании следующих общеучебных умений, как нам представляется, заложен значительный потенциал для улучшения ситуации.

1.*Использование наглядных средств* для понимания и анализа предлагаемой ситуации (в математике – использование координатной оси при решении неравенств и их систем, графика квадратичной функции при решении квадратных неравенств, взаимного расположения графиков при анализе и нахождении решений системы уравнений).

2. Умение *выстроить алгоритм и точно следовать его пунктам* (в математике – напр., алгоритму решения квадратного уравнения, алгоритму исследования функции и др.).

3.*Приемы самоконтроля* (в математике – соответствует ли полученный ответ вопросу задачи, все ли данные использованы в решении, реален ли ответ; проверка решений уравнений и их систем и др.).

4. *Умения строить наиболее вероятный прогноз* развития ситуации (в математике – применять простейшие вероятностные схемы, вычислять относительные частоты и др.).

2.3. Мониторинг процесса формирования математической компетентности студентов инженерных, экономических и юридических направлений (на примере ситуации в Тамбовском регионе) дает основание для следующих выводов.

Уровень математической подготовки значительного числа поступающих оказывается не достаточным для полноценного освоения основных образовательных программ (ООП). В частности, наблюдается низкий уровень базовых знаний, умений, навыков (ЗУН) в области числовых, алгебраических и тригонометрических преобразований, слабое владение методом координат и др.

Наблюдаются *слабая мотивация студентов* к изучению математических дисциплин. Следствием указанных причин является низкий уровень успеваемости по математическим дисциплинам. Одно из негативных последствий – снижение требований (со стороны преподавателей) к математической подготовке студентов с целью сохранения их контингента.

Актуальна проблема сокращения количества академических часов (с переносом акцента на самостоятельную работу), трудноразрешимая в отмеченных выше условиях слабой мотивации к математической деятельности и недостаточного уровня «входных» ЗУН.

3.Модель системы математического образования в условиях реализации Концепции

В настоящем параграфе мы анализируем модель системы математического образования, предлагаемой в Концепции. Здесь мы усматриваем ряд следующих подсистем.

3.1. Подсистема, условно называемая нами **«идея-воплощение»**, в которую интегрирована деятельность ключевых фигур в области математического образования – ученых и педагогов.

Речь идет о моделировании процесса взаимодействия математических лидеров, профессионалов-математиков, педагогов ведущих образовательных учреждений естественно-математической направленности, исследователей в области педагогики и психологии и педагогов-математиков «рядовых» образовательных учреждений.

Ключевым здесь является тезис о том, что «педагог-математик… должен обладать не только математическим знанием в форме им воспроизводимого и передаваемого ученикам набора определений, доказательств и рецептов, но в первую очередь быть готовым к решению новых, ранее не встречавшихся (отдельному человеку или человечеству) задач в соответствующих областях, передавать обучающимся математическую модель деятельности».

Следовательно, деятельность математика-педагога должна быть дополнена элементами деятельности математика - исследователя. Более того, по мнению авторов Концепции, педагогам-математикам, работающим в области естественно-научного и инженерно-технического образования, надлежит иметь опыт самостоятельных исследований в области теоретической или прикладной математики и программирования, а также в математическом моделировании задач из соответствующей профессиональной области.

Возрастает роль математических лидеров в системе образования. Концепция предполагает их вовлечение в преподавательскую деятельность, и в частности, в «подготовку математиков, прикладных математиков, ИТ-профессионалов, педагогов-математиков, в общем и дополнительном образовании детей (прежде всего – мотивированных к получению математического образования)». Предполагается, в первую очередь, взаимодействие математических лидеров с общеобразовательными школами «высшей лиги», (лицеями, гимназиями и т. д). с углубленным, профильным изучением математики (и смежных дисциплин).

К реализации основных идей Концепции предлагается шире привлекать математиков-профессионалов. Их деятельность возможна по следующим направлениям:

- рецензирование учебников, учебных пособий и образовательных программ;
- экспертиза нововведений в математическом образовании;
- математическое просвещение (научно популярные лекции, книги, статьи).

Значительная роль в математическом образовании отводится приложениям научного знания в области педагогики и психологии. Пути реализации возможных приложений должны разрабатываться специальной рабочей группой, состоящей из практических работников образования, профессиональных математиков, специалистов в сфере ИКТ, ученых в области педагогики и психологии. «В задачу этой группы войдет критический анализ российских и зарубежных практик и теорий математического образования с точки зрения их приложения в российском образовании XXI века, продолжение перспективных линий исследования.»

3.2. Подсистема **«математика в общем образовании»** предполагает три основных этапа освоения учащимися математических знаний и технологий и создания соответствующих этим этапам условий.

В дошкольном и начальном образовании особую роль Концепция отводит созданию сред, условий и ситуаций, содействующих развитию логико-математических и коммуникативных способностей учащихся, зарождению мотивации к математической деятельности, в том числе и средствами математических и логических игр, соревнований и т.д.

Необходимым для дошкольного и начального школьного уровня является наглядность используемых объектов визуализация процессов, использование вещественных, графических и экранных сред деятельности. Все это способствует пониманию смысла арифметических операций и их представления в десятичной системе счисления; такое понимание может возникать в ходе управляемого эксперимента, открытия.

Мотивация к математической деятельности учащихся основной школы может поддерживаться многообразием ее приложений в курсах физики и информатики, компьютерными инструментами и моделями. Особую роль здесь отводится установлению и углублению межпредметных связей, использованию математических фактов и методов в процессе моделирования физических и др. процессов, сочетанию математических и компьютерных технологий. Использование вычислительных инструментов в значительной степени поможет наиболее слабым учащимся сосредоточиться на понимании смысла решаемых задач и выстраиваемых моделей, идеях решения.

В контингенте учащихся старшей школе предполагается выделить три потока. Первый из них формируется из учащихся, слабо мотивированных к математической деятельности, и слабо освоивших программный материал начальной и основной школы. Здесь должна быть обеспечена базовая математическую компетентность, т.е. такой ее уровень, который позволяет успешно применять математические знания, умения и навыки в ситуациях, встречающихся в повседневной жизни.

Второму потоку, состоящему из учащихся, показавших хорошие результаты в основной школе, но не планирующих специализации в областях, требующих математики, необходимо обеспечить широкую общекультурную программу математической подготовки.

Наконец, учащимся, предполагающим дальнейшее обучение по естественно-научным, инженерным, ИТ-направлениям, необходимо углубленное изучение математики для предполагаемой профессиональной деятельности, в том числе – исследовательской деятельности. Такие учащиеся, обладающие устойчивой и результативной мотивацией, должны быть обеспечены высококвалифицированными педагогами в своей школе, либо возможностью обучения в специализированной школе для детей с той же мотивацией и соответствующими педагогами, либо дополнительным образованием необходимого уровня, в том числе, с применением дистанционных образовательных технологий.

3.3. Подсистема **«математическое просвещение»** настроена на подход к математике, как элементу общей культуры, функциональной грамотности и повседневного применения. Концепция провозглашает: «В массовом сознании математическая компетентность должна стать одним из основных показателей интеллектуального уровня человека, неотъемлемым элементом культуры и воспитанности, естественно интегрироваться в общегуманитарную культуру.

Должны быть сформирован интерес и уважение к математической деятельности, установка на ценность индивидуальной и общественной математической культуры и образованности, на критическую важность профессиональной математической деятельности и результатов для информационной, технологической, военной безопасности». Следует укоренять в массовом сознании понимания того, что умение применять математический подход в рассуждении, обосновании, аргументации, планировании, в пространственных построениях, численных оценках необходимо в различных видах (в том числе и весьма далеких от математики) видах профессиональной деятельности.

«Элементы математического просвещения должны насыщать среду обитания, интегрироваться в массовую культуру». Средства для этого могут быть весьма разнообразными: математические конкурсы и соревнования, игры, головоломки, занимательные задачи, телеконкурсы и т.п. «Доступная, яркая математика должна присутствовать в информационной среде городских пространств, помещений и сайтов, учебно-методические комплексы должны включать материал для работы родителей с ребенком».

Предполагается издание (размещение в электронном формате) и популяризация математической литературы и периодики для массового читателя.

Необходимым элементом математического просвещения является популяризация мировых достижений российской математики и ее приложений, лучших образцов российского математического образования, таких как школы для одаренных детей, физико-математические школы при университетах, высшее образование в МГУ и других важнейших университетах.

3.4. Подсистема **«математика в среднем профессиональном и высшем образовании».** В ее структуре могут быть выделены следующие элементы.

- Подготовка кадров для дошкольного и начального образования в части математики и информатики . Она должна вестись на основе современного содержания, методик и технологий работы с детьми соответствующих возрастов. Сюда включается «освоение педагогом материальных и материализованных (экранных, графических и т. д.), учебных ситуаций (в том числе – открытых исследовательских, игровых)». Такие педагоги для начальной школы и дошкольного образования должны получать современную математическую подготовку, спроектированную в соответствии с задачами общего образования.
- Подготовка учителей математики для общего образования. Основным компонентом обучения по программам педагогического бакалавриата, обязательным для присвоения квалификации учителя, должен быть значительный объем математической и педагогической деятельности. В первом случае необходимым элементом является решение «нестандартных» задач – в первую очередь, из элементарной математики; во втором – работа с учащимися школ на протяжении всех лет обучения в вузе.

Обучение в магистратуре и аспирантуре по направлению «Педагогическое образование (математика)» должно происходить, как правило, для работающих учителей. Соответствующие магистерские программы должны обеспечиваться ведущими педагогическими вузами, классическими университетами, организациями дополнительного профессионального образования.

3.5. Подсистема «математический бакалавриат и математическая магистратура». Бакалавриат по любому математическому направлению призван обеспечивать базовую подготовку в следующих областях.

- Классическая математика: общая алгебра, линейная алгебра и аналитическая геометрия, общая геометрия, математический анализ, дифференциальные уравнения.
- Теория вероятностей и математическая статистика.
- Дискретная математика (комбинаторная математика, логика, алгоритмы).
- Анализ данных и вычислительная математика.
- Математическое моделирование (в том числе и моделирование средствами методов математической физики).
- Программирование.

Соотношения указанных модулей определяется направлением подготовки, вузом, базовой кафедрой и выбором обучающегося. Предполагается, что уровень соответствующего образования обеспечит возможность:

- исследовательской деятельности в области «чистой математики»;
- работы в прикладной сфере, требующей применения и построения математических моделей, анализа данных;
- работы в области математического образования,
- работы в качестве программиста.

«Необходимым и важнейшим компонентом магистерских программ должна быть профессиональная деятельность обучающихся в составе коллективов, ведущих эту деятельность, как основную»: научных школ на базе вузов, подразделений РАН, ИТ-организации и др. Актуальна такая форма математической магистратуры как «инженерные потоки», необходимые для направлений прикладных исследований и требующих серьезного математического уровня специалистов.

3.6. Подсистема «математический компонент в нематематических направлениях подготовки». Содержательное ядро такой подготовки призвано обеспечить:

- достаточный научный математический уровень;
- соответствие профессиональной области, к которой относится подготовка;
- «восприятие математики и истории ее развития как важнейшего историко-культурного феномена, обладающего интеллектуальной, эмоциональной, эстетической ценностью».

Выделенные подсистемы обладают разнообразными устойчивыми связями, всесторонний анализ которых не входит в задачу настоящего исследования. Отметим лишь одну из наиболее значимых связей - **содержание математического образования**. Именно его основные компоненты предлагаются математическими лидерами. Специалисты в области педагогики и психологии выявляют соответствующие психолого-педагогические условия, необходимые для освоения нового содержания. Авторские коллективы специалистов в области методики преподавания математики разрабатывают программы и учебные материалы. Апробация и внедрение «ложится на плечи» педагогов инновационных образовательных учреждения. Наконец, соответствующие инновационные компоненты содержания математического образования внедряются в «рядовых» образовательных учреждениях.

4. Система мероприятий по реализации Концепции: трехуровневая модель

Решение задачи повышения качества образования, в том числе , и математического, лежит, в первую очередь, в сферах организации и управления образовательным процессом.

Основные идеи Концепции предлагается *реализовать на следующих трех уровнях* (иерархия по восходящей линии).

4.1. На уровне образовательного учреждения (школы):

а) активизация работы методических объединений по следующим направлениям:
- разработка новых содержательных линий курса математики (например, стохастической линии, вопросов дискретной математики);

- внедрение новых форм образовательного процесса («телешколы» и др. формы дистанционного обучения, модульное обучение, виртуально-распределенное обучение, обучение в открытых студиях и др. – разновозрастное с индивидуальным выбором);

- разработка и внедрение инновационных контрольно - измерительных материалов;

б) создание творческих объединений учителей по направлениям «математика-естественнонаучные дисциплины», «математика – гуманитарные дисциплины» с целью реализации межпредметных связей и усиления прикладной направленности курса математики (координация учебно-тематических планов и рабочих программ, разработка интегрированных уроков и др.)

4.2. На уровне муниципалитета. Методическое объединение учителей математики в рамках реализации основных идей Концепции осуществляет следующие виды деятельности (см. также п.9 настоящей работы):

- проведение круглых столов и семинаров по освоению нового содержания и образовательных технологий;
- обобщение, пропаганда и внедрение передового педагогического опыта в практику средствами мастер-классов, открытых уроков; организация творческих отчетов учителей;
-мониторинг качества образования по предмету;
- оказание помощи начинающим учителям математики в формате школы молодого педагога;
-проведение системы математических мероприятий развивающего характера.

4.3. На уровне региона:

- реализация системы мониторинга качества усвоения математики в виде тематического и итогового контроля;
-организация стажировочных площадок для учителей на базе школ, успешно реализующих образовательные программы как для «продвинутых», так и для проблемных учащихся;

-организация конкурсов «учитель года» в номинации «математика и информатика»;
- привлечение ведущих математиков региона к ознакомлению учителей с результатами собственных исследований (на доступном уровне) и кругом проблем, разрабатываемых в рамках соответствующего научного направления;
-привлечение ведущих специалистов – математиков региона к участию в аттестации педагогических кадров.

5. Совершенствование кадрового потенциала. Роль системы повышения квалификации в реализации Концепции

Совершенствование кадрового потенциала есть необходимое условие для успешной реализации Концепции. «Дополнительное профессиональное образование и методическое сопровождение должны обеспечивать повышение качества профессиональной деятельности учителя. Важнейшей задачей в ближайшие годы здесь будет освоение педагогами… нового содержания математического образования и практики его реализации в пилотных образовательных учреждениях.»

5.1. Система повышения квалификации. Необходимо шире использовать потенциал данной системы как наиболее мобильной и оперативно реагирующей на запросы общества к математическому образованию. Миссию системы повышения квалификации мы видим в следующем.

Педагогические вузы не обеспечивали достаточной широты и современного уровня математических знаний будущих педагогов. Университетское образование не обеспечивает достаточной корреляции классического математического образования с нуждами школьного математического образования. Система повышения квалификации призвана «заполнить соответствующую нишу», т.е. сформировать из математика – педагога, а специалисту с педвузовским образованием обеспечить «приращение» математических знаний в объеме, необходимом для обучения детей на уровне современных требований.

Институты повышения квалификации могут обеспечить:

- разработку и чтение новых математических курсов, содержание которых вводит учителя в круг современных математических идей: нечеткая логика, элементы теории функций действительного и комплексного переменного, функционального, гармонического анализа и др.;

-разработку учебно-методических комплектов по отдельным блокам содержания курса математики, учебных пособий для школьников с использованием уровневого подхода, методических рекомендаций для учителя по изучению как традиционных, так и вновь вводимых в школьный курс блоков содержания (дискретная математика, экономическая математика, математическая статистика, и др.);

-создание банка современных уровневых педагогических измерительных материалов и др.;

-распространение наиболее эффективных технологий обучения (например, размещение в сети интернет видеоуроков лучших учителей и др.).

5.2. Указанные мероприятия осуществимы, очевидно, при **наличии определенных инновационных преобразований** в учебной деятельности, осуществляемой самими институтами повышения квалификации. Среди частных мер в области модернизации этой деятельности может быть предложена система творческих заданий, заменяющая традиционные формы контроля. Так, например, могут быть предложены следующие комплексные задания, контролирующие уровень методико-методической подготовки слушателей курсов повышения квалификации.

Предметная область «Математика». Творческие задания

Содержательное ядро предметной области «Математика»	**Компетенции**	**Методики**	**Алгоритмы**	**Тесты и задачи**
Актуальные вопросы преподавания тем "Комбинато-	Предложить перечень компетенций (предметных,	Разработать перечень вопросов по управлению решением задач	Разработать пошаговый алгоритм анализа выборочных	Разработать тестовые задания по теме «Применение

рика" и "Теория вероятностей" в школьном курсе математики	общепредметных, метапредметных), формируемых при изучении данного модуля	на тему «Стандартные вероятностные схемы суммы и произведения событий, схема гипотез, схема Бернулли»	совокупностей	комбинаторных формул к нахождению классической вероятности»
Математический анализ как метод математических исследований	Предложить перечень компетенций (предметных общепредметных, метапредметных), формируемых при изучении данного модуля	Произвести классификацию основных методов вычисления пределов и предложить методические указания к решению соответству-щих задач	Разработать пошаговый алгоритм решения задач на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке	Разработать тестовые задания по темам: 1)вычисление производных; 2)вычисление первообразных
Поле комплексных чисел	Предложить перечень компетенций (предметных общепредметных, метапредметных), формируемых при изучении данного модуля	Разработать перечень вопросов по управлению решением задач на тему «Действия над комплексными числами в алгебраичес-кой и тригонометри-ческой форме»	Разработать пошаговый алгоритм решения задач на нахождение тригонометри-ческой формы комплексного числа	Разработать тестовые задания по теме «Операции над комплексными числами в алгебраичес-кой форме»

Таблица 5.1

В области управления содержанием математического образования институты повышения квалификации имеют возможность организовать

- участие специалистов системы повышения квалификации в анализе ФГОС и примерных образовательных программ по курсу математики;
- экспертизу разрабатываемых рабочих программ для обучающихся на базовом, профильном и углубленном уровне;
- привлечение педагогов-математиков к широкому обсуждению материалов, реализующих изменения в сфере математического образования (стандартов, программ, образцов аттестационных материалов, аннотированного плана учебников, самой учебной литературы, результатов апробации и т.д.).

6 .Меры по совершенствованию математического образования в системе «школа-вуз»

Они, с нашей точки зрения, могут быть следующими.

6.1. Привлечение широкого круга старшеклассников к занятиям математикой и подготовке к поступлению в университеты средствами дистанционного обучения, возрождения заочных математических школ и др.; обеспечение свободный доступ всех желающих школьников к электронным учебным и научным ресурсам библиотек вузов.

6.2. Организация на базе вузов математических олимпиад для школьников с предоставлением победителям льгот при поступлении в данный вуз.

6.3. Разработка адаптивных («переходных») курсов и соответствующих учебных материалов (учебных пособий, рабочих тетрадей и др.) для студентов со слабой школьной математической подготовкой.

6.4. Завершение разработки **основных образовательных программ** (ООП) по курсу математики, реализующих компетентностный подход в высшем профессиональном образовании (ВПО).

6.5. Широкое **использование тестовых форм контроля** на основе уровневых компетентностно-ориентированных педагогических измерительных материалов (ПИМ).

6.6. Разработка и чтение **математических курсов по выбору** для студентов вуза.

6.7. Привлечение студентов к ***междисциплинарным научным исследованиям***, использующим математическое моделирование.

6.8. Формирование **единой образовательно-научной информационной среды** вуза, способствующей частичной компьютеризации математического образования в вузе.

6.9. Проведение (на региональном уровне) **мероприятий по контролю процесса формирования и развития математической компетентности** студентов нематематических направлений подготовки с целью сравнения результатов по вузам, отслеживания динамики процесса, обмена и распространения передового опыта математической подготовки.

7. Преемственность математической подготовки в контексте реализации основных идей Концепции

7.1. Особенности современного состояния математической подготовки на данном этапе мы видим в следующем:

-приток (в первую очередь, на экономические и информационные направления) большого числа абитуриентов, слабо мотивированных к математической деятельности (в том числе, обучающихся на коммерческой основе);

-падение престижности инженерного образования (где наиболее востребованы математические знания, умения и навыки), и как следствие этого, отсутствие серьезного конкурса на соответствующие направления обучения;

-значительное сокращения аудиторных часов, с перенесением акцента на самостоятельную работу, что проблематично в условиях отсутствия у студентов достаточной мотивации, слабого уровня развития общеучебных умений и самого главного из них - умения учиться;

-введение курса математики в основные образовательные программы (ООП) бакалавриата гуманитарных направлений подготовки.

Вместе с тем , в главе «Профессиональное образование» Концепции говорится**:** «Система профессионального образования должна обеспечивать необходимый уровень математической подготовки кадров для нужд математической науки, экономики, научно-технического прогресса, безопасности и медицины».

7.2. Пути разрешения возникающего противоречия мы видим, в первую очередь, в четком разделении целей (планируемых уровней математической подготовки) в соответствии со следующей дифференциацией групп учащихся:

1) классы старшей школы с углубленной математической подготовкой – направления бакалавриата /магистратуры в области механико-математических

наук и информационных технологий. Согласно точке зрения группы математиков МГУ – авторов одного из проектов Концепции, здесь предполагается «глубокое и неформальное изучение определённых разделов математики и близких к ней прикладных наук» как основы для последующих научных исследований и практической деятельности;

2) профильные классы – естественнонаучный, технический, экономический профили бакалавриата. Здесь, в первую очередь, необходимо развитие общей математической культуры для использования полученных знаний и навыков в дальнейшей работе по избранной профессии;

3) классы гуманитарного профиля (базовая математическая подготовка) – гуманитарные направления бакалавриата: формирования логической культуры, умения анализировать, классифицировать, выдвигать гипотезы, опровергать их или доказывать их состоятельность, пользоваться аналогиями, аргументировать доводы и т.д.

Однако, достижение поставленных целей невозможно без усиления мотивации всех групп учащихся к математической деятельности, большей доступности и открытости математического образования, укрепления связей по линии «школа-вуз». И здесь на первый план выходят компоненты организационного блока.

7.3. Содержание обучения. Особое место во всех проектах Концепции уделялось вопросу о содержании математического образования как в школьном, так и в вузовском курсах. Мы разделяем точку зрения авторов проекта МГУ, согласно которой важнейшим результатом обучения являются *знания*. Они должны подаваться «в систематизированном виде, с учётом взаимосвязи различных математических и естественнонаучных дисциплин. Принципиально важным является закрепление на государственном уровне перечня основных математических понятий и фактов», подлежащих изучению по каждому направлению бакалавриата.

Вместе с тем мы предлагаем универсальное ядро содержания математической подготовки, включающее как традиционные, так и инновационные (отвечающие современным потребностям науки и практики) линии. Инновационной же является идея реализации их как средства математического моделирования. Инвариантом (по отношению к направлениям профессиональной деятельности) служат основные понятия и факты, составляющие ядро содержания, тогда как вариативными остаются их объем и степень обоснования. Речь идет о следующих содержательных линиях.

1.*Дискретно-математическая линия.*

1.1. Множества, операции над множествами. Декартовы произведения и отношения на множествах.

1.2. Конечные множества. Нахождение числа элементов (принципы сложения и умножения). Комбинаторные формулы.

1.3. Последовательности. Рекурсивное задание. Рекурсии как средство построения алгоритмов.

1.4. Понятие булевых алгебр. Алгебры множеств, высказываний, событий (см. [10]).

1.5. Элементы теории графов.

2. *Аналитико-геометрическая линия.*

2.1. Прямоугольная и полярная системы координат как средство задания положений объектов на плоскости.

2.2. Прямоугольная, цилиндрическая и сферическая системы координат как средство задания положений объектов в пространстве.

2.3. Скалярные и векторные поля. Линейные и нелинейные операции над векторами.

2.4. Уравнения прямых и плоскостей и их взаимное расположение .

3. *Моделирование процессов методами математического анализа.*

3.1. Функция как зависимость выходного параметра от входных параметров процесса.

3.2. Предельное поведение функции как модель тенденций процесса.

3.3. Средняя и мгновенная скорости процесса. Производная. Дифференциал (изменение функции «в малом») и его применения к приближенным вычислениям.

3.5. Первообразные как восстановленные процессы. Введение в дифференциальные уравнения.

3.4. Скорости процесса в заданных направлениях. Частные производные и градиент.

3.4. Общенаучное понятие интеграции и интеграция в математике на примере вычисления площади криволинейной трапеции. Понятие определенного интеграла в общем случае и его приложения.

3.5. Ряды как бесконечные суммы. Применение методов математического анализа к исследованию сходимости числовых рядов.

3.6. Применение методов математического анализа к вычислительным задачам.

4. *Вероятностно-статистическая линия.*

4.1. Вероятность как функция на алгебре событий. Классическая, статистическая и геометрическая модели. Вероятности «составных» событий.

4.2. Схема Бернулли. Биномиальная случайная величина. Понятие случайной величины в общем случае.

4.3. Распределения дискретных и непрерывных случайных величин. Функция и плотность распределения.

4.4. Числовые характеристики распределений.

4.5. Классические распределения: равномерное, Пуассоновское, нормальное.

4.6. Теоретическое распределение и эмпирическое распределения. Табличная и геометрическая интерпретации выборки.

4.7. Числовые характеристики выборки. Проявление закона больших чисел в свойствах устойчивости относительной частоты и состоятельности точечных оценок параметров распределения. Понятие об интервальных оценках.

4.8. Статистические гипотезы о характере и параметрах теоретического распределения.

7.4. Координация вопросов содержания математической подготовки. Одной из проблемных зон переходного этапа «старшая школа – начальная ступень бакалавриата» является координация вопросов и объема содержания математического материала в «пограничных» модулях: стохастика, математический анализ и аналитическая геометрия. Здесь необходимо минимизировать риски как дублирования, так и образования «лакун», т.е. возникновения ситуаций, когда отдельные вопросы не освещаются в школьном курсе, но являются опорными для изучения тем вузовского курса.

Сформулируем соответствующие предложения применительно к базовому уровню освоения математики в старшей школе.

Введение в аналитическую геометрию, как нам представляется, следует ограничить следующим кругом вопросов.

1. Начальные сведения о векторах: вектор как способ задания движения на плоскости и в пространстве, линейные операции над векторами (например, сложение сил), а также линейные операции в координатах.
2. Уравнения «горизонтальной», «вертикальной» и «наклонных» прямых на плоскости»; уравнения параболы как графика квадратичной зависимости и гиперболы как графика обратно-пропорциональной зависимости; уравнение окружности; условие пересечения линий на плоскости. Вместе с тем мы считаем нецелесообразным изучение уравнения плоскости в пространстве, поскольку в рамках школьного курса не находит место полный «арсенал» средств векторной алгебры для исследования взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве.
3. Преобразование уравнений линий путем параллельного переноса системы координат на соответствующий вектор вполне доступно на базовом уровне изучения математики и проясняет способы построения графиков не только вышеуказанных зависимостей, но и трансцендентных функций линейного аргумента.

Начала математического анализа на базовом уровне школьного курса, по нашему мнению, должны, по-прежнему, включать в себя:

-понятие предела, приращения функции, производной и первообразной;
- геометрический смысл производной и уравнение касательной;
- применение производной к исследованию функций и нахождению наибольших и наименьших значений функций на отрезке.

В понятии предела, как нам представляется, достаточно ограничиться следующей «динамической» его моделью: число A есть предел функции в точке a, если (при движении точки x по оси абсцисс к точке a) расстояние от значений $y=f(x)$ до A (на оси ординат) может быть сделано заданно малым, если только расстояние от x до a достаточно мало. Точная формулировка на языке «эпсилон-дельта», как правило, не воспринимается большинством учащихся, поскольку не подкреплена достаточным количеством примеров и не востребована в дальнейшем курсе.

Представляется также нецелесообразным рассмотрение на базовом уровне «второго замечательного предела», числа e и натуральных логарифмов по причине невозможности выстраивания соответствующей доказательной базы; указанные понятия и факты понятия и факты, не имеющие в школьном курсе дальнейшего развития и приложений, воспринимаются учащимися как искусственно введенные. Полноценное же рассмотрение всех вопросов, связанных с интегральным исчислением (за исключением понятия первообразной и простейших примеров ее нахождения), по нашему мнению, должно быть перенесено в вузовский курс.

В педагогических кругах продолжается дискуссия о целесообразности изучения начал стохастики в школьном курсе на базовом уровне. Если быть более точным, то основные споры относятся к объему изучаемых понятий, фактов и уровню строгости их изложения.

Нам представляется, что вероятностно-статистическая линия в школьном курсе может быть представлена лишь простейшими понятиями и фактами. Здесь в большей степени (нежели в других разделах курса математики) находят свое применение интуиция и жизненный опыт учащихся. Формализация основных фактов должна уступить место их вербальным характеристикам (например, сложение событий соответствует речевому обороту «хотя бы одно из событий» и т.д.), а стандартные вероятностные схемы предлагаться в упрощенном виде. Более глубокое изучение может быть организовано лишь в рамках вузовского курса, так как требует от учащегося достаточного уровня алгебраических знаний (например, владения понятием нормированной счетно-аддитивной функции на булевой алгебре) и знаний в области математического анализа.

Другие практические меры по минимизации вышеотмеченных рисков в рамках переходного этапа «старшая школа – начальная ступень бакалавриата» могут быть выстроены, по нашему мнению, на основе деятельности рабочих групп (состоящих из учителей математики и вузовских преподавателей) по координации вопросов содержания математической подготовки.

8. Основные направления деятельности региональных учебно-методических объединений в области математики

8.1. Общие положения. Типовое положение об учебно-методических объединениях в системе общего образования утверждено приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 15 октября 2014 г. № 1322 регламентирует порядок создания и организации деятельности учебно-методических объединений в системе общего образования (далее УМО), управления ими, а также основные направления деятельности учебно-методических объединений. Согласно положению УМО создаются *в целях участия педагогических, научных работников, представителей работодателей в разработке федеральных государственных образовательных стандартов общего образования, примерных основных общеобразовательных программ, координации действий организаций, осуществляющих образовательную деятельность по основным общеобразовательным программам (далее - образовательные программы), в обеспечении качества и развития содержания общего образования.*

Согласно положению, региональными УМО могут создаваться секции, рабочие группы, отделения:

-экспертно-мониторинговая;

- группа методического сопровождения образовательной деятельности;

-по направленностям (профилям) образовательных программ (рабочая группа по программам основного образования, по программам образования в старшей школе и др.);

- группа по внедрению инновационных образовательных технологий,

а также и др. секции (напр., по обеспечению деятельности учебно-методического объединения в отдельных регионах).

В состав учебно-методических объединений входят педагогические работники, научные работники и другие работники организаций, осуществляющих образовательную деятельность, и иных организаций, действующих в системе образования.

При УМО создается совет, состоящий из руководителей рабочих групп, авторитетных ученых, наиболее опытных и успешных специалистов.

8.2. Основными направлениями деятельности учебно-методических объединений являются:

а) *в части федеральных государственных образовательных стандартов общего образования:*

- подготовка предложений в Минобрнауки России по проектам федеральных государственных образовательных стандартов общего образования;

- участие в разработке проектов федеральных государственных образовательных стандартов общего образования;

- осуществление методического сопровождения реализации федеральных государственных образовательных стандартов общего образования;

б) *в части примерных основных общеобразовательных программ (далее - примерные программы):*

-разработка и экспертиза примерных программ;

-обеспечение научно-методического и учебно-методического сопровождения примерных программ;

-участие в разработке контрольно-измерительных материалов для оценки знаний, умений, навыков и уровня сформированности компетенций обучающихся;

г) *в части профессионального совершенствования деятельности педагогических работников*:

-участие в разработке программ повышения квалификации и профессиональной переподготовки по вопросам общего образования;

-участие в разработке профессиональных стандартов;

- осуществляет методическое сопровождение педагогов при подготовке к конкурсам профессионального мастерства;

-организует создание видеотеки «Золотая педагогическая коллекция»;

- организует работу семинара «Школа молодого специалиста».

8.3. В рамках своей деятельности УМО:

-проводит мероприятия по вопросам совершенствования системы общего образования (конференции, семинары, совещания), олимпиады и конкурсы;

- разрабатывает региональную программу по реализации Концепции развития математического образования в Российской Федерации и координирует мероприятия по ее осуществлению;

- осуществляет предметно-тематический анализ результатов ЕГЭ и результатов итоговой аттестации обучающихся, освоивших программы основного общего образования.

8.4. Деятельность региональных учебно-методических объединений (УМО) по реализации Концепции развития математического образования. Перечень возможных мероприятий представлен в следующей таблице.

№ п/п	Мероприятия	Ответственные подразделения УМО
1	Участие в разработке и издании методических рекомендаций по совершенствованию преподавания учебного предмета «Математика» в общеобразовательных организациях региона	Совет при УМО

2	Апробация ФГОС основного общего образования в образовательных организациях	Рабочая группа по программам математического образования в основной и старшей школах
3	Апробация ФГОС среднего (полного) общего образования в образовательных организациях региона	Рабочая группа по программам математического образования в основной и старшей школах
4	Участие в разработке материалов по совершенствованию нормативно-правовой базы по организации и проведению государственной итоговой аттестации обучающихся	Совет УМО
5	Анализ результатов проведения государственной итоговой аттестации обучающихся, мониторингов учебных достижений	Экспертно-мониторинговая группа
6	Организация работы с одаренными детьми: расширение практики проведения школьных, муниципальных, региональных познавательно-развлекательных мероприятий (интеллектуальных игр, индивидуальных и командных викторин, в том числе – в виртуальной форме, летних и зимних смен, конкурсов и т.п.) для разных возрастных категорий обучающихся, направленных на популяризацию знаний по математике	Совет УМО
7	Поддержка сетевых форм реализации образовательных программ	Рабочая группа по программам математического образования в основной и старшей школах
8	Участие в разработке и реализация системы творческих конкурсов для педагогов, направленных на развитие профессиональной компетентности учителей математики	Совет УМО
9	Организация в муниципальных методических службах постоянно действующих консультационных пунктов для учителей математики, учащихся, их родителей по вопросам нормативно-правового и методического обеспечения проведения государственной итоговой аттестации	Группа методического сопровождения
10	Взаимодействие с научными центрами и лабораториями региональных вузов, оказывающими информационные, методические, консультативные, экспертные услуги по вопросам методического обеспечения преподавания математики	Группа методического сопровождения, экспертно-мониторинговая группа
11	Разработка методических рекомендаций по развитию математической грамотности и культуры у детей дошкольного возраста	Группа методического сопровождения
12	Участие в организация и проведении региональных, федеральных, международных мониторингов по оценке образовательных достижений обучающихся по математике	Экспертно-мониторинговая группа
13	Участие в создании банка диагностического инструментария для оценки качества образования по матема-	Экспертно-мониторинговая группа

	тике	
14	Участие в подготовке экспертов по оценке качества образования по математике	Экспертно-мониторинговая группа
15	Совершенствование в образовательных организациях области внутренней системы оценки качества образования с учетом результатов итоговой государственной аттестации, внешних мониторингов учебных достижений	Экспертно-мониторинговая группа
16	Подготовка методических рекомендаций по организации работы педагогов с материалами открытого банка заданий ЕГЭ и ОГЭ	Группа методического сопровождения
17	Использование материалов открытого банка заданий ЕГЭ и ОГЭ в региональной системе образования	Группа методического сопровождения, экспертно-мониторинговая группа
18	Обеспечение проведения общественной экспертизы качества образования	Экспертно-мониторинговая группа
19	Внедрение в практику преподавания методик формирующего оценивания	Экспертно-мониторинговая группа
20	Подготовка предложений по внесению изменений в нормативно-правовые акты аттестации учителей математики в соответствии с профессиональным стандартом	Совет УМО
21	Внедрение в образовательный процесс инновационных образовательных технологий, в т.ч. технологий дистанционного образования (информационно-коммуникационные, кейс-технологии, интернет-технологии, телекоммуникационные технологии и т.д.)	Группа по внедрению современных образовательных технологий
22	Анализ и отбор образовательных ресурсов для использования в образовательной деятельности	Группа по внедрению инновационных образовательных технологий
23	Создание и пополнение регионального банка видеолекций и мастер-классов учителей математики	Группа по внедрению инновационных образовательных технологий
24	Разработка адаптированных образовательных программ по математике для обучающихся с ограниченными возможностями здоровья с использованием инструментов преодоления индивидуальных трудностей обучающихся в области математики	Рабочая группа по программам математического образования в основной и старшей школах
25	Разработка методических рекомендаций по совершенствованию обучения математике «отстающих» обучающихся с использованием инструментов автоматизированной диагностики	Группа по внедрению инновационных образовательных технологий, группа методического обеспечения
26	Разработка методических рекомендаций по совершенствованию обучения математике с одаренными обучающимися	Группа методического обеспечения
27	Разработка методических рекомендаций по совершенствованию образовательного процесса по математике на основе анализа результатов государственной итоговой аттестации предыдущих лет	Группа методического обеспечения
28	Участие в разработке методического пособия по проектированию современного урока: анализ инновачи-	Группа по внедрению инновационных образователь-

	онного опыта с позиций требований новых образовательных стандартов	ных технологий, группа методического обеспечения
29	Участие в разработке учебно-методических комплектов по технологическим аспектам преподавания курса математики	Группа методического обеспечения, группа по программам математического образования в основной и старшей школах
30	Подготовка и издание методического пособия по проектированию образовательного процесса с использованием интерактивных средств обучения	Группа по внедрению инновационных образовательных технологий, группа методического обеспечения
31	Подготовка и издание методического пособия по инновационным содержательно-методическим линиям курса математики	Группа методического обеспечения
32	Продолжить апробацию профессионального стандарта педагога на базе образовательных организаций	Совет УМО
33	Разработка предложений по включению в программы повышения квалификации учебных модулей, направленных на повышение компетентности педагогов в вопросах разработки контрольно-диагностических работ по математике	Совет УМО
34	Участие в разработке и реализация программ стажировок учителей математики на базе лидерских практик математического образования	Совет УМО
35	Участие в разработке методических материалов для дистанционного обучения учителей математики	Группа методического обеспечения
36	Участие в организации и проведении научно-практического семинара «Структурные и содержательные особенности учебно-методических комплексов по математике в рамках Концепции математического образования РФ»	Совет УМО
37	Участие в проведении вебинара «Содержание экзаменационной работы по математике в формате ЕГЭ и оценка качества работ выпускников»	Группа методического сопровождения, экспертно-мониторинговая группа
38	Участие в деятельности е регионального профессионального Интернет-сообщества учителей математики	Совет УМО
39	Разработка предложений к апробация новых моделей педагогической практики студентов математических факультетов на базе эффективных школ с традиционно с сильной подготовкой по математике (лицеев, профильных физико-математических школ)	Совет УМО
40	Участие в организации и проведении математических лекториев со школьниками и с массовой аудиторией с привлечения профессорско-преподавательского состава вузов области	Совет УМО
41	Организация и проведение тематических теле- и радиопрограмм, направленных на популяризацию математического образования, достижений российских ученых	Совет УМО
42	Поддержка и распространение успешных практик до-	Совет УМО

	полнительного образования (в том числе - кружков), направленных на развитие математических способностей обучающихся	
43	Трансляция лучших практик организации внеурочной деятельности, реализации программ дополнительного образования математической направленности	Совет УМО
44	Участие в организация и проведении мониторинга по реализации Концепции развития математического образования региона, подготовка аналитического отчета	Экспертно-мониторинговая группа
45	Содействие информационному сопровождению мероприятий по реализации Концепции развития математического образования	Совеет УМО

Таблица 8.1

9. Инновационные содержательно - методические линии курса математики

Происходящий в последние десятилетия процесс формирования информационного общества ориентирует систему образования на новые образовательные результаты, требует от нее способности гибко реагировать на запросы личности, на изменение потребностей экономики, рост инновационной активности и профессиональной мобильности человека.

Одним из основных направлений инновационной политики в области образования является обновление его содержания.

Содержание образования мы называем инновационным, если оно

-является актуальным, востребованным, соответствует современным целям образования;

- обладает определенной новизной, интегрирует формально-знаниевый и личностно-деятельностный подходы;
- является практически реализуемым и способным повышать эффективность деятельности субъектов образования.

При этом эффективность и реализуемость инновационного содержания возможны, если разработаны

а) вопросы содержания, в той или иной степени приближенные к новым результатам, полученным в соответствующей предметной области, к ее современному состоянию;

б) технологические приемы изложения учащимся вопросов содержания;
в) задачный материал, по возможности приближенный к реальным задачам, возникающим в соответствующей предметной области;
г) контрольно-измерительные материалы для оценки степени усвоения учащимися теоретического содержания, а также и степени сформированности операциональных умений.

9.1. В математике, как и в каждой учебной дисциплине, присутствуют фундаментальные понятия, вокруг которых группируется некоторое содержание (другие понятия, связанные с базовым, суждения и действия, необходимые для их усвоения и т.д.). Соответствующий **блок содержания представляет собой некое целостное образование с многочисленными внутренними связями**, с использованием специальных методов и определяет специфику методики изучения материала.

В подобных случаях об указанном целостном образовании говорят как об определенной содержательно - методической линии в программе изучения данной дисциплины. В контексте инновационного содержания соответствующую **содержательно - методическую линию будем называть инновационной**. Рассмотрим указанное понятие на примере стохастической линии.

9.2. Начиная со второй половины прошлого века наблюдается все более возрастающий интерес к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики. Изучение различного рода случайных явлений, стохастических отклонений от нормы является важным средством предотвращения чрезвычайных ситуаций, техногенных катастроф, выпуска некачественной и ненадежной продукции и т.п.

С развитием современных средств вычислительной микропроцессорной техники расширяются возможности хранения, поиска и обработки больших массивов вероятностно-статистической информации о реальных объектах, выявления причинно-следственных связей между процессами и явлениями. Методы теории вероятностей и математической статистики, применяемые, например, к анализу ошибок разного рода измерений, находят все большее применение в физике, биологии, экологии, социологии, в телефонии и процессах обслуживания, адаптивного управления и т. д. По этой причине стохастические знания становятся неотъемлемым компонентом инновационного содержания образования – как общего, так и профессионального. Без минимальной вероятностно-статистической грамотности нельзя в наши дни адекватно воспринимать разнообразную социальную, политическую, экономическую информацию, выдвигать и оценивать гипотезы и принимать обоснованные решения. Без соответствующей подготовки невозможно полноценное изучение естественнонаучных и социально-экономических дисциплин уже школьном курсе.

Указанными соображениями определяются критерии отбора содержания дисциплин, разработка и внедрение новых, интерактивных методик преподавания, изменения в требованиях к математической подготовке ученика. Когда речь идет не только об обучении математике, но и формировании личности с помощью математики, необходимость развития у всех школьников вероятностной интуиции и статистического мышления становится насущной задачей. Изучение вероятностно-статистического материала необходимо уже в школьном курсе в рамках самостоятельной содержательно-методической линии.

Стохастическая линия строится как объединение трех взаимосвязанных составляющих – элементов комбинаторики, теории вероятностей и статистики и включается в обучение как в основной, так и в старшей школе и направлена на формирование способностей

- применять классическую, статистическую и геометрическую модели вероятности при решении прикладных и практических задач;
- прогнозировать наступление событий на основе вероятностно-статистических методов;

-использовать полученные умения для решения задач в смежных дисциплинах.

Если в высших учебных заведениях основной акцент делается на изучение математического аппарата для исследования вероятностных моделей, то в школе учащихся, прежде всего, необходимо ознакомить с процессом построения модели, учить их анализировать, проверять адекватность построенной модели реальным ситуациям, развивать вероятностную интуицию.

Одна из главных особенностей вероятностно-статистической линии в школе состоит в тесной связи отвлеченных понятий и структур с окружающим миром. Поэтому математическая деятельность школьников не должна ограничиваться изучением только готовых вероятностных моделей. Напротив, процессы построения и истолкования моделей рассматриваются как ведущие формы математической деятельности школьников. Вместе с тем здесь важную роль играют задания, связанные с принятием решений в реальных (в нематематических) ситуациях.

В конечном счете, овладение искусством вероятностно-статистических рассуждений, способствует рассмотрению стохастики не только как системы понятий и фактов, а как специфической методологии, охватывающей соответствующие умозаключения в их взаимосвязи.

9.3. Специфика стохастической линии проявляется и в том, что изучение понятий и методов происходит в форме открытия новых инструментов познания окружающего мира, чем создается благоприятная почва для эвристической деятельности учащихся. У педагогов появляется возможность использования новых, непривычных для уроков математики, подходов к обучению.

Содержательно-методические линии «пронизывают» курс изучаемой дисциплины на протяжении всех лет его изучения. В рамках школьного курса, в соответствии с требованиями ФГОС мы выделяем следующие **этапы начальной стохастической подготовки.**

Этапы подготовки	Требования ФГОС к предметным результатам изучения стохастического компонента курса математики
Пропедевтический (начальная школа)	- овладение основами логического и алгоритмического мышления, пространственного воображения и математической речи, измерения, пересчета, прикидки и оценки, наглядного представления данных и процессов, записи и выполнения алгоритмов; - приобретение начального опыта применения математических знаний для решения учебно-познавательных и учебно-практических задач; -умение работать с таблицами, схемами, графиками и диаграммами, цепочками, совокупностями, представлять, анализировать и интерпретировать данные;
Основная школа	- овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; - формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; - развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;
Старшие классы полной средней школы	Базовый уровень: - сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; -умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин; Профильный уровень: - владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей;

	- исследования случайных величин по их распределению.

Таблица 9.1

В соответствии с выделенными этапами, может быть предложено следующее содержание материала начальной стохастической подготовки .

Этапы подготовки	**Содержание изучаемого стохастического материала**
Пропедевтический (начальная школа)	Решение комбинаторных задач с помощью таблиц и графов. Чтение информации, заданной с помощью линейных диаграмм. Первоначальные представления о сборе и накоплении данных. Запись данных, содержащихся в тексте, в таблицу. Понятие о случайном эксперименте. Понятия «чаще», «реже», «возможно», «невозможно», «случайно». Истинные и ложные высказывания. Достоверное, невозможное, случайное события, вероятность, обработка результатов эксперимента, анализ случайных данных.
Основная школа	Перебор вариантов исхода эксперимента («дерево» вариантов). Комбинаторные формулы. Относительная частота и статистическая вероятность. Варианты и их частоты. Вариационный ряд, мода, медиана, среднее наблюдаемых значений. Вычисление классической вероятности в простейших случаях
Старшие классы полной средней школы	Базовый уровень: Статистическая, классическая, геометрическая вероятности и их вычисление в простейших случаях. Дискретные случайные величины, табличное и геометрическое представление закона распределения. Простейшие числовые характеристики ряда распределения и вариационного ряда. Профильный уровень: Основные модели вероятностей: статистическая, классическая, геометрическая. Общие свойства. Вычисление вероятностей на основе определения и использования комбинаторных формул и на основе использования соответствующих теорем.

	Распределение дискретных случайных величин. Ряд и многоугольник распределения. Числовые характеристики ряда распределения. Вариационный ряд. Полигон, гистограмма. Ввыборочные средняя и дисперсия. Понятие о точечных и интервальных оценках параметров распределения.

Таблица 9.2

9.4. Среди задач, поставленных Концепцией развития математического образования, особая роль отводится обеспечению обучающимся, имеющим высокую мотивацию и проявляющим выдающиеся математические способности, всех условий для развития и применения этих способностей. «Математическое образование должно обеспечивать каждого обучающегося развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне, используя присущую математике красоту и увлекательность… Возможность достижения высокого уровня подготовки должна быть обеспечена развитием системы специализированных общеобразовательных организаций и специализированных классов, системы дополнительного образования детей в области математики».

В классах с предпрофильной, профильной и углубленной математической подготовкой в качестве отдельной инновационной содержательно-методической линии может быть выделена **линия задач исследовательского характера.** В свою очередь, здесь на первое место выходят задачи с параметрами. Именно такие задачи позволяют в полной мере проверить знание основных разделов школьной математики, выяснить уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности.

На сегодняшний день остаются актуальными проблемы отсутствия системности знаний у учащихся, умения переносить полученные знания на аналогичные или иные ситуации, недостаточной самостоятельности мышления. Эти проблемы во многом связаны со слабым использованием в образовательном процессе потенциала внутрипредметных связей. Именно при решении заданий с параметрами интегрируются знания, умения, навыки из:

а) математической логики (конъюнкция, дизъюнкция предикатов, отрицание предиката);

б) теории множеств: пересечение множеств (решения систем), объединение множеств (решения совокупности), дополнения множеств;

в) алгебры (делимость многочленов, разложение на множители, метод неопределенных коэффициентов и др.);

г) геометрии (преобразования симметрии, параллельного переноса, и др.), аналитической геометрии (поиск коэффициентов в уравнении линии, условие пересечение линий, взаимного расположении прямых и др.);

д) математического анализа (условия монотонности и экстремумов функции, свойства непрерывных функций и др.).

Таким образом, задачи с параметрами представляют собою важный системообразующий фактор в процессе формирования математической компетентности учащихся. Их решение направлено на реализацию следующих целей:

- подготовка к ЕГЭ (задания повышенной и высокой сложности) и к обучению в вузе;
- формирование у учащегося интереса к предмету, развитие их математических способностей;
- развитие исследовательской и познавательной деятельности учащихся;
- обеспечение условий для самостоятельной творческой работы.

II. ЛИНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ: СОДЕРЖАТЕЛЬНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОМПОНЕНТ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

1.Задачи с параметрами: общие положения

1.1. В самом общем случае **задача с параметром** есть задача $P(x,a)$, в которой требуется :
а)получить информацию о множестве всех возможных значениях параметра *a*, при условии, что имеется информация о множестве всех значений *x*;
б)получить информацию о множестве всех возможных значениях x при условии, что имеется информация о множестве всех значений параметра *a*;
в) получить информацию о всех возможных парах значений (*x*, *a*), отвечающих условию задачи.

Формально, $P(x,a)$ есть функция двух переменных, но с величиной x обычно обращаются именно как с *переменной* (неизвестной) величиной; что же касается значения параметра *a*, то оно считается *фиксированным*, хотя и неизвестным.

Собственно математические основы решения соответствующих задач заложены в свойствах функций двух переменных. Фактически, задача с одним параметром есть задача о нулях, знаках, экстремальных свойствах таких функций. Преподавателю математики при этом необходимо владеть основами их дифференциально-интегрального исчисления.

1.2. Опорными фактами для решения ряда задач с параметрами служат следующие базовые положения из математического анализа.

1. Теорема о существовании корня уравнения $f(x)=0$ в случае непрерывной функции f, принимающей на концах отрезка значения разных знаков.

2. Теорема о единственности корня уравнения *f(x)=g(x)* (или отсутствии такового) в случае, когда функции *f* и *g* имеют различный характер монотонности.

3. Теорема о существовании корня уравнения с параметром: $a=f(x)$: корень существует тогда и только тогда, когда значение параметра a содержится во множестве значений функции f.

1.3. Приведем **классификацию методов решения и типов задач с параметрами**. Мы выделяем среди основных следующие методы их решения.

I. Общие методы:

1. Аналитический.

2. Аналитико-графический.

Последний метод иногда называют графическим, но саму по себе ссылку на изображенный график функции (взаимное расположение графиков функций) нельзя признать достаточной аргументацией каких-либо выводов. График, безусловно, служит важным инструментом поиска решения и иллюстрацией к рассуждениям, однако сами рассуждения строятся на использовании свойств функций. На эти свойства необходимо в стандартных случаях (напр., в случае основных элементарных функций) делать ссылки либо их (свойства) в более сложных случаях устанавливать (см. частные методы ниже).

II.Частные методы:

1) метод мажорант (метод оценки) в уравнениях и неравенствах;

2) использование свойств функций (свойства непрерывности, монотонности, интервалы знакопостоянства и др.);

3) исследование расположения корней квадратного уравнения, которое необходимо при решении многих задач, как непосредственно связанных с квадратным трехчленом, так и сводящихся к нему на каком-либо этапе;

4) использование метода интервалов, «шаблонных» приемов решения

уравнений и неравенств с модулями вида

$$|y| = R,\ |y| < R,\ |y| > R\ ,$$

стандартные «ходы» такие, как , прием выделения полного квадрата, преобразование линейного тригонометрического выражения к виду

$$A\sin t + B\cos t = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(t+\varphi)$$

и др.

Традиционно задачи с параметрами представлены следующими основными типами:

1) решение уравнений и неравенств в зависимости от значений параметра;

2) нахождение значений параметра, для которых уравнение имеет заданное количество решений;

3)нахождение значений параметра, для которых множество решений уравнений или неравенств обладает заданной характеристикой.

1.4. Решение задач с параметрами, как правило, невозможно путем следования стандартному алгоритму и **требует от учащегося** догадки, «переноса знаний» в новую ситуацию, словом – **элементов математического творчества**. Поэтому рекомендации для учащихся здесь могут носить лишь самый общий характер.

Прежде всего, полезно изучить приводимые в различных пособиях готовые образцы решений, поскольку используемые в них приемы могут быть в дальнейшем применены в аналогичных ситуациях.

Не стоит сразу браться за сложные задачи: начинать тренинг следует с «почти стандартных» случаев (случаи линейных, квадратных уравнений и неравенств параметрами и т.п.).

Учащемуся необходимо овладеть простейшими логическими понятиями и приемами, в частности, отличать системы неравенств (уравнений) от их совокупности, необходимые условия - от достаточных. Так, например, целые корни многочлена с целыми же коэффициентами (если при этом коэффициент при старшей степени равен единице) необходимо содержатся среди делителей свободного члена; тогда подстановка возможных корней в уравнение (неравенство) позволяет получить определенную информацию об искомом параметре.

«Ключ» к решению многих задач с параметрами содержится в геометрических интерпретациях. Так, например, если изобразить графики функций, содержащихся в левой и правой части рассматриваемого уравнения, то абсциссы точек пересечения графиков будут корнями уравнения, а их (точек) количество указывает на число решений. Такие интерпретации часто существенно упрощают анализ задачи.

Нередко подстановка конкретного значения параметра и «тестирование» этого значения на предмет того, содержится ли оно среди искомых значений, позволяет нащупать путь решения задачи.

Заключительным этапом решения задач с параметрами является запись ответа; важность его правильной записи особенно значима в тех случаях, где присутствует «ветвление» решения (см. ниже параграф 3). В подобных случаях формирование ответа - это сбор ранее полученных результатов, и здесь следует не только не забыть отразить в ответе все возможные случаи для рассматриваемого параметра, но и упростить, по возможности, ответ при наличии «смыкающихся» случаев.

2. Квадратическая функция

2.1. Исследование поведения квадратической функции (в частности, нахождение ее нулей и интервалов знакопостоянства) лежит в основе ре

шения многих задач с параметрами. Речь идет о функции

$$y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$$

Заметим, что при $a = 0$ имеем линейную функцию $y = bx + c,\ b \neq 0.$ Если значение коэффициента a не задано, то рассмотрение случая $a = 0$ является обязательным, а «потеря» этого случая является источником типичных ошибок.

Пример. При каких значениях параметра a уравнение $(2a-1)x^2 + 2x - 1 + 2a = 0$ имеет единственное решение? Найти это решение.

Анализ решения. Поскольку в условии не сказано, что уравнение квадратное, то возможны случаи :

1) $2a-1=0$ – уравнение линейное; очевидно, что оно имеет единственное решение;

2) $2a-1\neq 0$ - уравнение квадратное; в этом случае совпадение корней (единственность решения) гарантируется условием : дискриминант уравнения $D=0$.

Решение. В первом случае $2a-1=0$ или $a=0{,}5$ и тогда получаем линейное уравнение $2x=0$, откуда x=0. Во втором случае дискриминант (найденный по «четной» формуле) имеет вид $D=1-(2a-1)^2$ и, следовательно, $D=0$, $(2a-1)^2=1$, откуда $a=0$ или $a=1$. При этом $x=-\dfrac{1}{2a-1}$. В первом случае имеем $x=1$, а во втором $x=-1$.

Получаем «ветвящийся» ответ :

x=0 при $a=0{,}5$;

x=1 при $a=0$;

$x=-1$ при $a=1$.

2.2. Расположение нулей (корней) квадратного трехчлена. Значительная часть задач с параметрами сводится к условию, что нули квадратного трехчлена расположены в некотором заданном интервале (возможно, бесконечном). В основе решения таких задач лежат следующие теоретические положения.

1) Функция вида $y=Ax^2+Bx+C$ $(A\neq 0)$ непрерывна на всей числовой оси; следовательно, между точками, в которых она принимает значения разных знаков, расположен корень этого квадратного трехчлена. В частности, если, например, ордината y_0 вершины (x_0,y_0) параболы отрицательна, а в некоторой точке $x_*>x_0$ значение $y_*=y(x_*)>0$, то между точками x_0 и x_* имеется ровно один корень квадратного трехчлена.

2) Рассмотрим тот частный случай, когда корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена должны быть расположены в конечном интервале (a,b). Изобразив на координатной плоскости соответствующие параболы

$y = Ax^2 + Bx + C$ при $A > 0$ и при $A < 0$ (что мы предоставляем читателю), мы приходим к следующим условиям (необходимым и достаточным для расположения x_1 и x_2 в (a,b).

1) При $A < 0$:

$$D = B^2 - 4AC \geq 0; \tag{2.2.1}$$

$$x_0 = -\frac{B}{2A} \in (a,b), \quad y_0 = y(x_0) \geq 0; \tag{2.2.2}$$

$$y(a) < 0, \quad y(b) < 0 \tag{2.2.3}$$

2) При $A > 0$:

$$D = B^2 - 4AC \geq 0;$$

$$x_0 = -\frac{B}{2A} \in (a,b), \quad y_0 = y(x_0) \leq 0; \quad y(a) > 0, \quad y(b) > 0.$$

Условие (2.2.1) необходимо и достаточно для существования действительных корней. Установим необходимость остальных условий для расположения корней в интервале (a,b). Ограничимся случаем 1); рассуждения в случае 2) – аналогичны.

Первое из условий (2.2.2) необходимо выполнено (поскольку x_0 обязательно расположено между x_1 и x_2), а второе – следует из соотношений $A < 0$ и (2.2.1), если учесть, что $y_0 = -\frac{D}{4A}$. Наконец, условия (2.2.3) вытекают из неравенства $y_0 = y(x_0) \geq 0$ и известного факта монотонности квадратного трехчлена при $x > x_0$ и $x < x_0$.

Убедимся теперь, что условия (2.2.2) и (2.2.3) также и достаточны для расположения корней в интервале (a,b). Случай $y(x_0)=0$ уже означает существование двух совпадающих корней на (a,b). Если же $y(x_0) > 0$, то в каждом из интервалов (a, x_0), (x_0, b), в силу условий (2.2.3) и согласно, рассуждению п.1, существует по одному корню квадратного трехчлена.

Итак, при $A < 0$ условия (2.2.1) - (2.2.3) оказываются необходимыми и достаточными для расположения корней в интервале (a, b).

2.3. Приведем **задачи** другого типа, **связанные с расположением параболы**, и в частности, нулей квадратного трехчлена.

Задача 1. При каком значении параметра k неравенство

$$x^2 - (4k+1)\,x + 4k^2+2k-6 \geq 0$$

выполняется для любого x из интервала $(-\infty, 5]$?

Анализ задачи. Интервал $(-\infty, 5]$ должен содержаться во множестве решений неравенства. Следовательно, достаточно найти это множество и «погрузить» в него указанный интервал.

Решение. Найдём корни квадратного трёхчлена. Имеем дискриминант

$$D=(4k+1)^2 - 4(4k^2+2k-6) = 25 \text{ и } x_{1,2} = \frac{4k+1\pm 5}{2},$$

так что $x_1 = 2k-2$ и $x_2 = 2k+3$. Поскольку ветви параболы

$$y= x^2 - (4k+1)\,x + 4k^2+2k-6$$

обращены вверх, то решением неравенства являются два луча:

$$(-\infty, 2k-2] \quad \text{и} \quad [2k+3, +\infty).$$

Теперь данный луч $(-\infty, 5]$ должен целиком содержаться в $(-\infty, 2k-2]$, откуда $2k-2 \geq 5$, или $k \geq 3{,}5$.

Задача 2. Найти все значения a, при которых множество решений неравенства $x^2-(2x-3)a \geq 0$ содержит отрезок $[3;6]$.

Анализ задачи. Рассмотрение всевозможных расположений параболы

$$y=x^2-2ax-3a$$

относительно отрезка $[3;6]$ может подсказать ключ к решению. Так, если абсцисса x_0 вершина параболы расположена вне отрезка $[3;6]$ (или совпадает с одним из его концов), то в силу монотонности квадратической функции на соответствующих лучах (левее и правее x_0) ее знак совпадет со знаком значения $f(3)$ и $f(6)$ соответственно. Если же x_0 расположена внутри отрезка, то неравенство $y \geq 0$ может быть выполнено на $[3;6]$ тогда и только, когда вершина параболы расположена в верхней полуплоскости или на оси абсцисс, так что дискриминант квадратного трехчлена должен быть не больше нуля.

Решение. Найдем абсциссу вершины параболы: $x_0 = a$. Из приведенного анализа задачи вытекает рассмотрение следующих трех случаев.

$$\begin{cases} a \leq 3, \\ f(3) = 9-9a \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 < a < 6, \\ D = 4a^2+12a \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 6, \\ f(6) = 36-15a \geq 0. \end{cases}$$

Решением первой системы неравенств является множество $(-\infty,1]$ значений параметра a. Вторая и третья системы неравенств, как легко проверить, решений не имеют.

Ответ: $a \in (-\infty,1]$.

Задача 3. При каких значениях параметра a множество значений функции $f(x) = ax^2 + x + 1$ содержит отрезок $[-1;1]$.

Как и в предыдущих двух задачах, имеем «погружение», на этот раз – отрезка $[-1;1]$ во множество значений функции. Следовательно, найдем множество значений $E(f)$.

Случай 1: $a = 0$. Имеем линейную функцию $f(x) = x + 1$, для которой

$$E(f) = (-\infty;+\infty), \text{ так что } [-1;1] \subset E(f).$$

Случай 2: $a \neq 0$. Имеем квадратный трехчлен, графиком которого является парабола

$$y = ax^2 + x + 1$$

с вершиной

$$x_0 = -\frac{1}{2a}; \qquad y_0 = \frac{4a-1}{4a} = 1 - \frac{1}{4a}.$$

Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх и отрезок $[-1;1]$ оси ординат должен быть «не ниже» y_0:

$$\begin{cases} 1-\dfrac{4}{a}\le -1 \\ a>0 \end{cases}, \text{ откуда } \frac{4}{a}\ge 2 \text{ , и, следовательно, } \quad 0<a\le 2\,.$$

Если же a < 0, то ветви параболы направлены вниз и отрезок $[-1;1]$ должен быть «не выше» y_0 :

$$\begin{cases} 1-\dfrac{4}{a}\ge 1 \\ a<0 \end{cases},$$

а решением этой системы, очевидно, являются все $a<0$.

Объединяя результаты всех трех рассмотренных случаев, имеем окончательно

Ответ: $a\in(-\infty,2]$.

2.4. Использование **теоремы Виета**. Следует обратить внимание учащихся, что теорема Виета применима, если предварительно наложить (проверить) условие: дискриминант квадратного трехчлена $D\ge 0$. Весьма частым приемом при ее использовании является формула выделения полного квадрата

$$(x_1)^2+(x_2)^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\,.$$

Приведем соответствующий

Пример 1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2\text{-}2ax+a^2\text{-}a=0$$

больше, чем 12?

Решение. Если D - дискриминант уравнения, то

$$\frac{1}{4}D=a^2-a^2+a=a\,,$$

так что действительные корни уравнения существуют при $a\ge 0$. Далее, по теореме Виета получаем

$$x_1+x_2=2a \;\text{ и }\; x_1\cdot x_2=a^2\text{-}a.$$

Следовательно,

$$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}=(x_1+x_2)^2\text{-}2x_1\cdot x_2=2a^2+2a.$$

Итак, согласно условию задачи, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 2a^2 + 2a > 12, \\ a \geq 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} (a+3)(a-2) > 0, \\ a \geq 0, \end{cases}$$

Решая которую, получаем $a > 2$.

Пример 2. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение? Найти это значение.

Решение. Убедимся, что уравнение имеет действительные корни, вычислив дискриминант $D = a^2 + 8$, так что $D > 0$ при всех значениях *a*. С учетом области определения $\sqrt{a^2 - 4a}$ получаем существование корней при любом $a \in (-\infty;0] \cup [4;+\infty)$.

Теперь, согласно теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{a^2 - 4a}\,, \;\; x_1 x_2 = -a - 2\,,$$

и тогда

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2a + 4\,.$$

Осталось найти наименьшее значение функции $f(a) = a^2 - 2a + 4$ на множестве $(-\infty;0] \cup [4;+\infty)$. При этом абсцисса вершины соответствующей параболы *a*=1, так что $f(a)$ убывает при $a < 1$ и возрастает при $a > 1$. Следовательно при $a \leq 0$ имеем $f(a) \geq f(0) = 4$, а при $a \geq 4$ получаем $f(a) \geq f(4) = 12$. Значит, наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения, равное 4, достигается при $a = 0$.

3. «Ветвление» ответов

Решить уравнение или неравенство, содержащее параметр (параметры) - это значит для каждого допустимого значения параметра (каждой допустимой системы значений параметров) найти множество всех решений данного уравнения или неравенства.

Более подробно, фиксировав значение параметра, решаем данную задачу известными (соответствующими типу задачи) методами. Но получаемый ответ может определяться допустимыми для данных операций значениями параметров (например, при необходимости деления обеих частей уравнения на выражение, содержащее параметр, надо выделить тот случай, когда это выражение равно нулю). Отсюда и возникает так называемое ветвление ответов. Поясним сказанное примерами.

3.1. ***Уравнения.***

Пример 1. Решить уравнение

$$(a-1)\cdot x^2+2\cdot(2a+1)\cdot x+4a+3=0. \qquad (3.1.1)$$

Анализ задачи. На первый взгляд, следует применять формулу решения квадратного уравнения. Однако, лишь при $a\neq1$ оно – квадратное, а при $a=1$ уравнение является линейным. Значит, целесообразно рассмотреть уравнение (2.1.1) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1) $a=1$; 2) $a\neq1$. Этими двумя случаями и буден порожден «ветвящийся» ответ.

Решение. 1) При $a=1$ уравнение имеет вид $6x+7=0$, и из него получаем

$x=-\frac{7}{6}$.

2) Из множества значений параметра $a\neq1$ выделим те значения, при которых дискриминант уравнения (3.1.1) обращается в ноль:

$$\frac{D}{4}=(2a+1)^2-(a-1)(4a+3).$$

После упрощений получаем $\frac{D}{4}=5a+4$.

Из условия $\frac{D}{4}=0$ находим $a=-\frac{4}{5}$, и в этом случае квадратное уравнение будет иметь единственный корень (более точно – два совпадающих корня). В случае $a<-\frac{4}{5}$, будет $D<0$ и уравнение корней не имеет; если же $a>-\frac{4}{5}$ (но $a\neq1$), то $D>0$, и уравнение обладает двумя различными действительными корнями. Осталось найти эти корни. Имеем при $D\geq0$

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1},$$

причем при $a = -\frac{4}{5}$ (случай $D = 0$), получаем $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: 1) если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет;

2) если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$;

3) если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$;

4) если $\begin{cases} a > -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases}$ то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 2. Решить уравнение $\left|x^2 - 1\right| + \left|a(x-1)\right| = 0$.

Решение. Ввиду неотрицательности модулей данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left|x^2 - 1\right| = 0, \\ \left|a(x-1)\right| = 0. \end{cases} \qquad \text{Имеем} \quad \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ a(x-1) = 0. \end{cases}$$

При $a \neq 0$ второе уравнение системы, а значит, и система, имеет единственное решение $x = 1$. Если же $a = 0$, то из второго уравнения получаем, что x – любое действительное число, а из первого уравнения – $x = \pm 1$. Следовательно, в этом случае система имеет два решения: $x = 1$ или $x = -1$.

Ответ: если $a \neq 0$, то $x = 1$; если $a = 0$, то $x = \pm 1$.

3.2. Неравенства. Особенностью решения неравенств с параметрами является то, что нули исследуемой функции обычно зависят от параметра и, следовательно, приходится рассматривать их «взаимоотношения», т.е различные случаи их расположения.

*Пример*1. При всех значениях параметра a решить неравенство $ax - 3x^2 < 0$.

Решение. Имеем $x(a - 3x) < 0$, откуда нулями функции $f(x) = x(a - 3x)$ являются $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{a}{3}$. Теперь возникают следующие три возможных случая расположения нулей на числовой оси.

1)Точка x_2 расположена правее x_1, т.е. $a > 0$. Графиком функции $f(x)$ является парабола, ветви которой обращены вниз, и, следовательно, $f(x)$ отрицательна при $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{a}{3}; \infty)$.

2)Точка x_1 расположена правее x_2, т.е. $a < 0$. В этом случае получаем $x \in (-\infty; \frac{a}{3}) \cup (0; \infty)$.

3) Наконец, остается случай совпадающих корней, т.е. $a = 0$. Имеем тогда $-3x^2 < 0$ и, следовательно, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Этот ответ можно «соединить» с ответом, найденным в п.2.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{a}{3}; \infty)$ при $a > 0$;

$x \in (-\infty; \frac{a}{3}) \cup (0; \infty)$ при $a \le 0$.

Пример 2. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$\frac{(5 \cdot 0{,}2^x - 0{,}2^a)x}{x - a - 1} > 0.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{(0{,}2^{x-1} - 0{,}2^a)x}{x - a - 1} > 0,$$

заметим, что точка $x = a + 1$, которая служит одним из нулей числителя, не содержится в области определения неравенства. Ввиду убывания показательной функции вида $y = 0{,}2^t$, содержащаяся в числителе дроби функция $f_1(x) = 0{,}2^{x-1} - 0{,}2^a$ и $f_2(x) = x - a - 1$ имеют разные знаки. Следовательно ,

$$f_3(x) = \frac{0{,}2^{x-1} - 0{,}2^a}{x - a - 1} < 0 \text{ при всех } x \ne a + 1,$$

а значит неравенство выполнено лишь при $x<0$. Остается проанализировать расположение точек $x=0$ и $x=a+1$ на числовой оси.

Случай 1. Точка $x=0$ - левее точки $x=a+1$, т.е. $a+1>0$, или $a>-1$. В этом случае все $x<0$ являются решениями неравенства. Теми же самыми остаются все решения неравенства в том случае, если $a+1$=0, т.е. $a=-1$.

Случай 2. Точка $x=0$ расположена правее точки $x=a+1$, т.е. $a<-1$. В этом случае все $x<a+1$, $a+1<x<0$ являются решениями неравенства.

Итак,

$$x\in(-\infty,0) \text{ при } a\geq -1;$$

$$x\in(-\infty,a+1)\cup(a+1,\ 0), \text{ если } a<-1.$$

4.Трансцендентные уравнения и неравенства

4.1. Иррациональные уравнения, содержащие параметр, как и обычные иррациональные уравнения, решаются с помощью, вообще говоря, неравносильных преобразований (получения уравнения-следствия). Так, при возведении в квадрат обеих частей уравнения вида

$$\sqrt{f(x,a)}=g(x,a)$$

возникает ограничение на знак его правой части, в результате чего найденные корни $x=x(a)$ должны удовлетворять условию $g(x,a)\geq 0$.

Пример 1. Решить уравнение $x-\sqrt{a-x^2}=1$.

Решение: Приведем уравнение к виду

$$\sqrt{a-x^2}=x-1$$

и потребуем $x-1\geq 0$ или $x\geq 1$. В результате возведения в квадрат обеих частей уравнения получим $a-x^2=(x-1)^2$, так что, в частности, оказывается выполненным условие существования квадратного корня $a-x^2\geq 0$. Далее, выполняя тождественные преобразования, получим

$$x^2-x+0{,}5(1-a)=0;$$

дискриминант этого уравнения $D = 2a - 1$. Теперь:

1) при $a > 0{,}5$ имеем $x_{1,2} = 0{,}5\cdot(1 \pm \sqrt{2a-1})$;

2) при $a = 0{,}5$ получим $x = 0{,}5$;

3) при $a < 0{,}5$ уравнение не имеет действительных корней.

Условию $x \ge 1$ не удовлетворяет второй из случаев; значение (в случае $a > 0{,}5$)

$$x_2 = 0{,}5\ (\ 1 - \sqrt{2a-1}\,) \le 0{,}5$$

и, следовательно, также не удовлетворяет ограничению на корни исходного уравнения.

Наконец, $x_1 = 0{,}5\ (\ 1 + \sqrt{2a-1}\,)$ (случай $a > 0{,}5$) удовлетворит условию $x \ge 1$, если

$$0{,}5\ (\ 1 + \sqrt{2a-1}\,) \ge 1 \text{ или } \sqrt{2a-1} \ge 1,$$

откуда получаем $a \ge 1$.

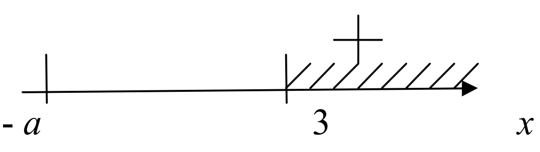
Итак, при $a \ge 1$ имеем $x = 0{,}5\cdot(1 + \sqrt{2a-1})$; при $a < 1$ уравнение не имеет решений.

Пример 2. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$\sqrt{x-3}(x+a) \ge 0\,.$$

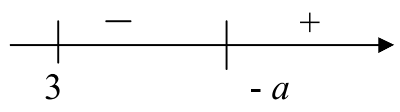
Решение. Область определения неравенства: $x \ge 3$. Чтобы применить метод интервалов, рассмотрим все возможные случаи расположения точки $x = -a$ и знаки $f(x) = \sqrt{x-3}(x+a)$ в соответствующих интервалах.

Случай 1: $-a < 3$ (то есть $a > -3$)



Имеем в этом случае $x \ge 3 > -a$, то есть $x + a \ge 0$, а тогда $f(x) \ge 0$ при $x \in [3;+\infty)$.

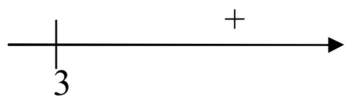
Случай 2: $-a > 3$ (то есть $a < -3$)



В этом случае $x+a < 0$ при $x \in (3;-a)$ и $f(x) < 0$; $x+a \ge 0$ при $x \in [-a;+\infty)$ и

$f(x) \geq 0$. Значит $f(x) \geq 0$ при $x = 3$ и $x \in [-a;+\infty)$.

Случай 3: $a = -3$.



Имеем $f(x) = \sqrt{x-3}(x+a) \geq 0$ при всех $x \in [3;+\infty)$.

Объединяя случаи 1 и 3, имеем :

$x \in [3;+\infty)$ при $a \geq -3$;

x=3 либо $x \in [-a;+\infty)$ при $a < -3$.

4.2. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства, содержащие параметр. В задачах, содержащих показательную функцию, ограничение на параметр возникает ввиду того, что значения показательной функции – положительны. Приведем следующий

Пример. При каких значениях параметра r уравнение

$$15 \cdot 10^x - 20 = r - r \cdot 10^{x+1}$$

не имеет корней?

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$15 \cdot 10^x + 10r \cdot 10^x = r + 20 \quad \text{или} \quad 10^x(15 + 10r) = r + 20.$$

В случае $15 + 10r = 0$,т.е. $r = -1{,}5$, имеем при всех x неверное соотношение 0=–1,5+20, т.е. убеждаемся в отсутствии корней . В противном случае

$$10^x = \frac{r+20}{10r+15}.$$

Поскольку все значения показательной функции положительны, то решений нет при

$$\frac{r+20}{10r+15} \leq 0,$$

т.е. $r \in [-20, -1{,}5)$. Окончательно, $r \in [-20, -1{,}5]$.

Особенностью решения логарифмических уравнений и неравенств с параметрами является наличие области определения, что вносит определенные условия на параметр.

Пример 1. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2 - \log_{a^2}(1 + x) = 3\log_a \sqrt{x-1} - \log_{a^2}(x^2 - 1)^2.$$

Решение. Легко проверить, что уравнение определено при $x > 1$; при этом $a > 0$, $a \neq -1$ и $a \neq 1$.

Преобразуем уравнение следующим образом

$$\log_a a^2 + \log_a(x^2 - 1) = \log_a(\sqrt{x-1})^3 + \log_a \sqrt{x+1},$$

$$\log_a(a^2(x^2 - 1)) = \log_a((\sqrt{x-1})^3\sqrt{x+1}),$$

$$a^2(x^2 - 1) = (x - 1)\sqrt{(x-1)(x+1)},$$

$$a^2(x - 1)(x + 1) = (x - 1)\sqrt{(x-1)(x+1)}.$$

Так как на области определения $x \neq -1$ и $x \neq 1$, то можно сократить обе части уравнения на $(x-1)\sqrt{x+1}$. Тогда

$$a^2\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1},$$

и после возведения в квадрат обеих частей получим

$$a^4(x + 1) = x - 1 \text{ или } x(1 - a^4) = a^4 + 1.$$

При $a \neq -1$ и $a \neq 1$ имеем

$$x = \frac{1+a^4}{1-a^4}.$$

Для того чтобы значения x являлось решением уравнения, должно выполняться условие $x > 1$, то есть

$$\frac{1+a^4}{1-a^4} > 1.$$

Осталось решить полученное для параметра a неравенство:

$$\frac{1+a^4}{1-a^4} - 1 > 0, \text{ или } \quad \frac{2a^4}{1-a^4} > 0.$$

Так как $a > 0$, то полученная дробь положительна, если $1 - a^4 > 0$, то есть при $0 < a < 1$.

Итак, при $0 < a < 1$ найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: при $a \le 0$, $a = 1$ уравнение не определено;

при $a > 1$ уравнение не имеет решений;

при $0 < a < 1$ решениями являются $x = \dfrac{1+a^4}{1-a^4}$.

Пример 2. Найти все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции

$$y = \log_{a+1}(a^x - a^{ax+2})$$

имеются двузначные натуральные числа, но не содержится ни одного трехзначного натурального числа.

Решение. Область определения будет найдена в результате решений неравенств

$$a^x - a^{ax+2} > 0 \text{ и } a+1 > 0,\ a+1 \neq 1$$

Последние два условия, очевидно, выполнены при всех заданных положительных значениях a.

Вообще говоря, рассмотрение должно содержать случаи всех положительных значений a, в том числе и $a = 1$. Однако область определения данной функции, определяемая решениями неравенства $a^x > a^{ax+2}$ при $a = 1$ - пуста.

В случае $a > 1$ имеем область определения , т.е. множество решений неравенства $a^x > a^{ax+2}$, в виде $x > ax + 2$, или $x(1-a) > 2$. Поскольку рассматривается случай $1 - a < 0$, то меняем знак неравенства при делении на $1 - a$:

$$x < 2/(1-a).$$

Получаем отсюда, что при $a > 1$ значения x всегда отрицательны, а тогда область определения не может вообще содержать натуральных чисел.

В случае же $0 < a < 1$ имеем $x < ax + 2$, т.е. $x(1-a) < 2$. Поскольку $1 - a > 0$, то приходим к неравенству

$$x < 2/(1-a).$$

Потребуем одновременно, чтобы правая граница значений x превышала число 10, но не превышала числа 100, т.е.

$$2/(1-a) > 10 \text{ и } 2/(1-a) \le 100 \, (0 < a < 1).$$

Тогда множество меньших значений x содержит хотя бы одно натуральное двузначное число (по меньшей мере, число 10), но не может содержать трехзначных чисел (поскольку значения x оказались левее точки 100).

Решаем первое неравенство с учетом условия $0 < a < 1$:

$$1-a < 0{,}2 \text{ или } a > 0{,}8$$

В случае второго неравенства имеем

$$1-a > 0{,}02 \text{ или } a \le 0{,}98.$$

Окончательно получаем $a \in (0{,}8,\, 0{,}98]$.

Ответ: $a \in (0{,}8,\, 0{,}98]$.

4.3. Задачи с параметрами, содержащие тригонометрические функции.

Особенности решения таких задач состоят в ограничении на возможные значения функций $y = \sin x,\ y = \cos x \quad (y \in [-1{,}1])$ и существующих связях между тригонометрическими функциями. Продемонстрируем сказанное в следующем примере.

Пример. При каких значениях параметра *a* уравнение

$$\cos x - \frac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \cos x + a}$$

имеет хотя бы одно решение?

Анализ задачи. Решения x существуют при ограничении

$$\cos x - \frac{1}{2} \ge 0, \quad \text{то есть} \quad \cos x \ge \frac{1}{2}.$$

Указанное ограничение предстоит использовать, если в решении будет введена соответствующая замена переменных. Параметр a следует, далее, выразить из преобразованного уравнения, в результате чего станет возможным определить условия, при которых уравнение имеет решения.

Решение. В результате возведения в квадрат имеем:

$$(\cos x - \frac{1}{2})^2 = \cos 4x - \cos x + a.$$

В частности, те решения, которые будут найдены, удовлетворяют области определения уравнения

$$\cos 4x - \cos x + a \geq 0.$$

Теперь имеем

$$\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = \cos 4x - \cos x + a,$$

откуда, понижая степень, получим

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1}{4} = \cos 2 \cdot 2x + a.$$

Далее, по формуле косинуса двойного угла, будем иметь

$$\frac{1+\cos 2x}{2} + \frac{1}{4} = 2\cos^2 2x - 1 + a$$

или

$$\frac{7+2\cos 2x}{4} = 2\cos^2 2x + a; \; a = \frac{-8\cos^2 2x + 2\cos 2x + 7}{4}.$$

Значит, значения параметра a должны принадлежать множеству значений $E(f)$ функции

$$f(x) = \frac{-8\cos^2 2x + 2\cos 2x + 7}{4} \text{ при условии } \cos x \geq \frac{1}{2}.$$

Неравенство $\cos x \geq \frac{1}{2}$ имеет решения $-\frac{\pi}{3} + 2\pi\kappa \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$,

откуда

$$-\frac{2\pi}{3} + 4\pi\kappa \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 4\pi\kappa, \kappa \in Z, \text{ или } -\frac{1}{2} \leq \cos 2x \leq 1.$$

Теперь

$$a \in E(g(t)), \text{ где } g(t) = \frac{-8t^2 + 2t + 7}{4} \text{ при } t = \cos 2x.$$

Осталось решить стандартную задачу на поиск наибольшего и наименьшего значений функции $g(t)$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, которая решается с использованием производной. Имеем $g'(t)=\frac{1}{2}-4t$; критическая точка

$$t_0=\frac{1}{8}\in\left[-\frac{1}{2};1\right];\text{ при этом } g\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{57}{32};g(1)=\frac{1}{4};g\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Значит,

$g_{наименьшее}=\frac{1}{4}$; $g_{наибольшее}=\frac{57}{32}$; $E(g)=\left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right]$, и, наконец, $a\in\left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right]$.

5. Задачи на «отсечение» корней

Особенность таких задач состоит в том, что некоторые из получаемых корней уравнения следует «отсечь» согласно условию задачи или (и) области определения уравнения. Соответственно, возникают специальные условия на параметр.

5.1. *Пример* 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$(ax^2-4x+1)(x^2-4x-5)=0$$

имеет три действительных различных корня?

Анализ задачи. Возможно не более четырех различных корней уравнения. Следовательно, первый из перемножаемых многочленов должен иметь либо ровно один корень (или два совпадающих), либо два различных действительных корня, один из которых совпадет с корнем второго многочлена.

Решение. Многочлен $P(x)=x^2-4x-5$ имеет два различных корня $x_1=5$ и $x_2=-1$. Следовательно, для многочлена $Q(x)=ax^2-4x+1$ возможны три следующих случая.

$Q(x)$ – многочлен первой степени, т.е. $a=0$, так что его корнем служит $x_3=\frac{1}{4}$ – число, отличное от x_1 и x_2. В этом случае имеем ровно три различных корня.

2) Корни многочлена $Q(x)$ при $a \neq 0$ совпадают и отличны от x_1 и x_2:

$$D = 0;\ 4-a=0;\ a = 4.$$

В этом случае

$$Q(x) = 4x^2 - 4x + 1 \text{ и } x_3 = x_4 = \frac{1}{2}.$$

3) Один из корней квадратного трехчлена $Q(x)$ равен x_1 (либо x_2), а другой отличен от x_2 (либо от x_1). Имеем при $x = 5$

$$Q(5) = 25a - 20 + 1 = 0;\ a = \frac{19}{25}.$$

Легко проверить, что второй корень $Q(x)$ отличен от $x_2 = -1$.

В случае же $x = -1$ имеем

$$Q(-1) = a + 4 + 1 = a + 5;\quad a + 5 = 0;\ a = -5;$$

в этом случае второй корень $Q(x)$ отличен от $x_1 = 5$.

Ответ: $a \in \{-5, 0, \frac{19}{25}, 4\}$.

5.2. Перейдем к рассмотрению дробно-рациональных уравнений, содержащих параметр. Особенность их решения состоит в наличии неравносильных преобразованиях к уравнению вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ - некоторый многочлен. Неравносильность, в свою очередь, обусловлена случаями обращения знаменателя дроби в ноль, что и служит «поводом» для отсечения корней.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$$

имеет единственное решение?

Анализ задачи. Квадратный трехчлен, записанный в числителе дроби, имеет, вообще говоря, не более двух действительных корней (возможно, совпадающих). Единственность корня возможна, если его дискриминант равен нулю (и при этом корень содержится в области определения уравнения), или если дискриминант больше нуля, но один из корней не входит в область определения.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Имеем дискриминант уравнения $D = a^2–4$, отсюда $D = 0$, если $a = \pm 2$; в обоих случаях найденный единственный корень уравнения ($x = 1$, $x = -1$ соответственно) содержится в области определения. Если же «запретный» $x = -3$ есть корень уравнения $x^2—ax+1 = 0$, то подставив это значение, получаем $a = -\frac{10}{3}$, причем при таком значении a второй корень квадратного уравнения (как легко проверить) отличен от $–3$.

Ответ: $a = \pm 2$ или $a = -\frac{10}{3}$.

Пример 3. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} + \frac{a^2 - 3}{a(x+1)(x+2)} = 0 \quad .$$

Решение. При a=0 уравнение не определено. Если $a \neq 0$, то в результате преобразований (и, в частности, приведения к общему знаменателю) получаем, что числитель дроби

$$x^2+2\,(1-a)\,x + a^2 - 2a - 3 = 0 \text{ при условии } (x+1)(x+2) \neq 0.$$

Дискриминант уравнения $\frac{D}{4} = (1-a)^2 - (a^2 - 2a - 3) = 4$. Следовательно, его корни $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 3$.

Исключим теперь из рассмотрения такие значения x, при которых $x_1+1=0$, $x_1+2=0$, $x_2+1=0$, $x_2+2=0$. А именно, исключаем случаи

1) $(a+1)+1=0$, т.е. $a = -2$; таким образом, при $a = -2$ - x_1-посторонний корень уравнения;

2) $(a+1)+2=0$, т.е. $a = -3$; таким образом, при $a = -3$ - x_1 - посторонний корень уравнения ;

3) $(a–3)+1=0$, т.е. $a=2$; таким образом, при $a=2$ x_2 - посторонний корень уравнения ;

4)наконец, $(a-3)+2=0$, т.е. $a=1$; значит, при $a=1$ x_2 - посторонний корень уравнения.

Следовательно, при $a=-2$ надо вычислить только x_2: $x_2=-5$; при

$a=-3$ получаем $x_2=-6$.

При $a=2$ имеем $x_1=3$, а при $a=1$ получаем $x_1=2$.

Окончательно имеем:

если $a=3$, то $x=-6$;

если $a=-2$, то $x=-5$;

если $a=0$, то корней нет;

если $a=1$, то $x=2$;

если $a=2$, то $x=3$;

в остальных случаях уравнение имеет пару корней

$$x_1=a+1,\ x_2=a-3.$$

6. Задачи с параметрами на тему «Применение производной»

Здесь можно выделить два основных класса задач: задачи на исследование свойств функции (в том числе на нахождение области значений) и задачи на тему «Касательная». К первому классу примыкают задачи на нахождение множества значений функции.

6.1. Следует иметь в виду, что условие касания прямой $y=kx+b$ графика функции $y=f(x)$ в точке x_0 равносильно выполнению одновременно следующих двух условий:

$f'(x_0)=k$ и $kx_0+b=f(x_0)$ (совпадение ординат в точке касания x_0).

Приведем примеры соответствующих задач с параметрами.

Пример 1. При каком значении параметра a прямая $y=1-2x$ является касательной к графику функции $y=ax^2+2x-1$?

Решение. Согласно только что сформулированным условиям имеем в точке x касания одновременно выполненными условия

$$(ax^2+2x-1)'=-2) \quad \text{и} \quad 1-2x=ax^2+2x-1.$$

Следовательно, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2ax + 2 = -2 \\ ax^2 + 4x = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{a} \\ a\dfrac{4}{a^2} - \dfrac{8}{a} = 2 \end{cases},$$

откуда $a = -2$.

Пример 2. Найти значение $b - 5a$, если (при соответствующих значениях параметров a и b) прямая $y = b - ax$ является касательной к графику функции

$$y = \frac{\log_{-a}(x^2 - 5x - a)}{\log_{-a} e}$$

в точке $x = 5$.

Решение. Данная функция определена, если $x^2 - 5x - a > 0$, $a < 0, a \neq -1$. Далее, $y = \ln(x^2 - 5x - a)$, $y' = \dfrac{2x - 5}{x^2 - 5x - a}$, и, согласно геометрическому смыслу производной, имеем

$$\frac{2x - 5}{x^2 - 5x - a} = -a, \; x = 5,$$

откуда $\dfrac{5}{-a} = -a$, т.е. $a = \pm\sqrt{5}$, или, с учетом условий на параметр, $a = -\sqrt{5}$.

Далее, касательная при $x = 5$ должна иметь общую точку с графиком функции, т.е. $y(5) = -5a + b$ или $\ln(-a) = -5a + b$, откуда для $a = -\sqrt{5}$ имеем $\ln\sqrt{5} = 5\sqrt{5} + b$, так что $b = \ln\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$.

Окончательно получаем уравнение касательной в виде $y = -x\sqrt{5} + \ln\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$ и $b - 5a = \dfrac{1}{2}\ln 5$.

6.2. Задачи на экстремальные свойства функции. Как правило, речь идет об интервалах монотонности и экстремумах функции и об ее наибольшем и наименьшем значении; важно, чтобы учащиеся не путали понятия максимума (минимума) и наибольшего (наименьшего) значения функции.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. При каком значении параметра a наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^3+7x^2+1$$

на отрезке $[a, 6{,}97]$ равно $11{,}25$.

Решение. Воспользуемся стандартным алгоритмом поиска наибольшего значения функции на отрезке. Найдем производную: $f'(x)=x(x^2-9x+14)$. Среди критических точек $x=0, x=2, x=7$ только первые две расположены левее $6{,}97$. Исследуя знаки производной, получаем: $f'(x)<0$ при $x\in(-\infty,0)$ и при $x\in(2, 6{,}97]$, а также $f'(x)>0$ при $x\in(0,2)$. Следовательно, $x=0$ оказывается точкой минимума функции, а $x=2$ - точкой максимума. Тогда для $x\in[0, 6{,}97]$ все значения $f(x)\le f_{\max}=f(2)=9$, и, следовательно, на этом отрезке не может быть точки, в которой значение функции равно $11{,}25$. Значит, возможен лишь случай расположения точки a левее нуля. Значение функции, равное $11{,}25$ наводит на мысль рассмотреть $x=-1$; действительно, $f(-1)=11{,}25$. Поскольку функция убывает при $x\in(-\infty,0)$, то такое значение аргумента - единственное. Итак, выбрав левым концом отрезка $a=-1$, имеем на этом отрезке (а именно, в точке a) значение функции, равное $11{,}25$ наибольшим.

Ответ: $a=-1$.

Пример 2**.** Найти значения параметра a, $a\ne 0$, для которых при всех x любое значение функции

$$f(x)=a^2\cos^3 76x+12a\sin^2 38x\cos^2 38x$$

не превосходит $4\sin^4 3x+4\cos^4 3x+2\sin^2 6x+3a$.

Решение. Если использовать формулу синуса двойного угла, то условие задачи можно переписать в виде неравенства

$$a^2\cos^3 76x+3a\sin^2 76x\le 4(\sin^4 3x+\cos^4 3x+2\sin^2 3x\cos^3 3x)+3a$$

или неравенства

$$a^2\cos^3 76x+3a(1-\cos^2 76x)\le 4(\sin^2 3x+\cos^2 3x)^2+3a,$$

ему равносильного, которое должно быть выполнено при всех x. Положим $t=\cos 76x$; очевидно, что t пробегает весь отрезок $[-1,1]$. Получаем тогда неравенство

$$a^2t^3+3a-3at^2\le 4+3a \text{ или } a^2t^3-3at^2-4\le 0 \text{ при } t\in[-1,1].$$

Другими словами, если обозначить $f(t)=a^2t^3-3at^2-4$, то все значения этой функции, а значит и ее наибольшее на $[-1,1]$ значение, должны не превосходить нуля.

Поскольку наибольшее значение может быть достигнуто в концевых точках отрезка или критических точках функции, то потребуется, в частности, сравнить с нулем

$$f(-1)=-a^2-3a-4 \text{ и } f(1)=a^2-3a-4.$$

Очевидно, что при всех a справедливо неравенство $f(-1)=-a^2-3a-4\le a^2-3a-4=f(1)$, а поэтому достаточно рассмотреть $a^2-3a-4\le 0$. Решением последнего неравенства являются все $a\in[-1,4]$.

Далее, $f'(t)=3at(at-2)$. В критической точке $t=0$, лежащей на данном отрезке, имеем $f(0)=-4$, так что выполнено условие $f(0)<0$. Если же $t=\dfrac{2}{a}, a\ne 0$, то полученная критическая точка расположена на отрезке $[-1,1]$ при условии $-1\le\dfrac{2}{a}\le 1$, т.е. $|a|\ge 2$. В этом случае вычисляем также $f(\dfrac{2}{a})=-4-\dfrac{4}{a}$ и остается потребовать $-4-\dfrac{4}{a}\le 0$, откуда $a\le -1$, либо $a>0$. Совмещая это условие с ранее наложенными требованиями $-1\le a\le 4$, $|a|\ge 2$, получаем $a\in[2,4]$.

В оставшемся еще нерассмотренном случае $|a|<2$ критическая точка $t=\dfrac{2}{a}$ не лежит на отрезке $[-1,1]$. Принимая во внимание тогда условие $-1\le a\le 4$, приходим к результату $-1\le a<2$.

Объединяя ответы, полученные в обоих случаях и учитывая, что по условию $a \neq 0$, имеем окончательно $a \in [-1{,}0) \cup (0{,}4]$.

Пример 3. При каких значениях параметра *a* функция

$$f\ (x) = 8ax - a\sin 4x - 7x - \sin 5x - a$$

возрастает при всех *x*?

Решение. Условие $f'(x) \geq 0, x \in (-\infty;+\infty)$ служит достаточным для возрастания. Имеем, $f'(x) = 8a - 4a\cos 4x - 5\cos 5x - 7$.

Теперь неравенство $8a - 7 + (4a\cos 4x + 5\cos 5x) \geq 0$ должно быть выполнено, при всех *x*, так $4a\cos 4x + 5\cos 5x \leq 8a - 7$. Наименьшее значение

$$p(x) = 4a\cos 4x + 5\cos 5x$$

достигается, если одновременно $\cos 4x = 1$; $\cos 5x = 1$, что, в свою очередь, возможно, например, при $x = 0$. Имеем: $p(0) = 4a + 5$, так что неравенство $4a\cos 4x + 5\cos 5x \leq 8a - 7$ принимает вид $4a + 5 \leq 8a - 7$, откуда $a \geq 3$.

Ответ: $a \geq 3$.

6.3. Следующая задача связана с отысканием **множества значений функции.**

Пример 1**.** При каких значениях параметра *a* уравнение $\sqrt{x-1} = \sqrt{x-5} + a$ имеет корни?

Решение. Изучим

$$f\ (x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x-5}, \text{ поскольку } a = \sqrt{x-1} - \sqrt{x-5}.$$

Удобно преобразовать $f(x)$ к виду

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x-1} - \sqrt{x-5}\right)\left(\sqrt{x-1} + \sqrt{x-5}\right)}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-5}}, \quad f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-5}}.$$

На области определения $D(f) = [5;+\infty)$ имеем убывание (к нулю) значений $f(x)$; при этом $f(5) = 2$. Итак, $E(f) = (0;2]$, а $a \in (0;2]$.

Ответ: $(0;2]$.

7. Задачи, сводящиеся ко введению параметра

Порой, постановка задачи такова, что в условии речь не идет о параметрах, однако в процессе анализа задачи возникают необходимость нахождения значений именно некоторых параметров. Приведем примеры таких заданий.

Пример 1 . Доказать, что при всех действительных значениях x и y имеет место неравенство

$$x^2+10y^2-6xy+10x+10y^2-26y+30>0.$$

Решение. Функцию двух переменных

$$\phi(x,y)=x^2+10y^2-6xy+10x+10y^2-26y+30$$

можно рассматривать и как квадратный трехчлен относительно переменной x, обращаясь с y как с *параметром* («параметризованный» квадратный трехчлен). В этом случае неравенство следует переписать виде

$$x^2+(-6y+10)x+(10y^2-26y+30)>0$$

и теперь достаточно доказать, что полученный трехчлен

$$f_y(x)=x^2+(-6y+10)x+(10y^2-26y+30)$$

с положительным старшим коэффициентом обладает отрицательным (при всех значениях y) дискриминантом

$$\frac{D}{4}=(3y-5)^2-(10y^2-26y+30)=-(y^2+4y+5).$$

Но и в самом деле при всех значениях y имеем соотношение

$$-(y^2+4y+5)<0$$

(дискриминант последнего трехчлена отрицателен), откуда вытекает, что $f_y(x)<0$ для всех x при каждом значении параметра y . Таким образом, функция $\phi(x,y)$, введенная выше, оказывается отрицательной для всех пар значений x и y, что и требовалось установить.

Среди задач, сводящихся ко введению параметра, особое место занимают задачи на делимость многочленов. Начнем с задачи, в которой параметры присутствуют явно.

Пример 2. При каких значениях a и b многочлен

$P(x)=x^4-ax^2+bx-12$ делится нацело на $T(x)=x^2-2x-3$.

Решение. На основании определения делимости многочленов можно записать тождество $P(x) = T(x)q(x)$, в котором через $q(x)$ обозначено частное от деления. Находя корни многочлена $T(x)$, разложим его на множители:
$T(x) = (x-3)(x+1)$. Теперь

$$x^4 - ax^2 + bx - 12 = (x-3)(x+1)q(x);$$

в записанном *тождестве* удобно выбрать значения $x = 3$ и $x = -1$. В обоих случаях правая часть тождества обращается в ноль; в первом случае имеем $81 - 9a + 3b - 12 = 0$, во втором – $1 - a - b - 12 = 0$.
Приходим, следовательно, к системе уравнений для нахождения a и b:

$$\begin{cases} -3a + b = -23 \\ -a - b = 11 \end{cases}, \text{ откуда находим } a = 3,\ b = -14.$$

Продемонстрированный здесь метод решения называется *методом неопределенных коэффициентов*. Он же применяется и при решении следующей задачи.

Пример 2. Многочлен $P(x)$ делится нацело на $x-1$ и на $x+1$, а при делении на $x-3$ дает остаток, равный 8. Найти остаток от его деления на

$$x^3 + 3x^2 - x - 3.$$

Учащийся, владеющий теоремой Безу, сразу сделает заключение, что из условия задачи вытекают соотношения

$$P(1) = P(-1) = 0 \text{ и } P(3) = 8.$$

Если же эта теорема не знакома, то на основании определения делимости многочленов с остатком можно заключить, что

$$P(x) = (x-1)q_1(x),$$

$$P(x) = (x+1)q_2(x),$$

$$P(x) = (x-3)q_3(x) + 8,$$

$$P(x) = (x^3 + 3x^2 - x - 3)q_4(x) + r(x) \quad ;$$

здесь $q_k(x),\ k = 1,2,3,4$ - соответствующие частные от делений, остаток $r(x)$ от деления на многочлен третьей степени есть многочлен степени, меньшей третьей (т.е. не выше второй), так что $r(x) = ax^2 + bx + c$ и

$$P(x) = (x^3 + 3x^2 - x - 3)q_4(x) + ax^2 + bx + c \quad .$$

Таким образом, задача сведена к нахождению *параметров* (именно, *a*, *b*, *c*) в тождестве в последнем тождестве. Для их нахождения достаточно выбрать значения переменной *x* равные именно 1, -1 и 3. Заметим, что многочлен $x^3 + 3x^2 - x - 3$ при каждом из этих значений оказывается равным нулю. Последовательно полагая $x = 1,\ x = -1,\ x = 3$, имеем систему уравнений для a, b и c:

$$\begin{cases} 0 = a - b + c \\ 0 = a + b + c \\ 8 = 9a - 3b + c \end{cases},$$

откуда получаем $a = 1,\ b = 0,\ c = -1$. Значит искомый остаток

$$r(x) = x^2 - 1.$$

8. Разные задачи с параметрами

Пример 1. Доказать, что при всех $p \neq 0$ имеет место неравенство

$$(1 + ctg\, x)\sin^3 x + (1 + tg\, x)\cos^3 x < \frac{p^4 + 1}{p^2} \qquad (8.1)$$

Решение. Заметим, что правая часть (8.1) не зависит от *x*, а левая – от *p*. Следовательно, достаточно найти такое число, которое «разграничивает» левую и правую части: левая меньше этого числа, правая – больше (возможно также, что одна из частей неравенства совпадет с этим числом). Если, реализуя этот план, правую часть записать в виде $p^2 + \dfrac{1}{p^2}$, то получим при всех $p \neq 0$, что

$$p^2 + \frac{1}{p^2} \geq 2 \quad . \qquad (8.2)$$

Действительно, соотношение (8.2) есть прямое следствие стандартного соотношения

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \ \ (a>0) \quad \text{при } a=p^2.$$

Осталось оценить левую часть (8.1) сверху тем же числом 2. Для этого, раскрывая скобки, выделим в отдельное слагаемое сумму кубов, а затем попытаемся вынести общий множитель:

$$(1+ctg\,x)\sin^3 x+(1+tg\,x)\cos^3 x=\sin^3 x+\cos^3 x+$$
$$\frac{\cos x}{\sin x}\sin^3 x+(1+ctg\,x)\sin^3 x+(1+tg\,x)\cos^3 x=\sin^3 x+\cos^3 x+$$
$$\frac{\cos x}{\sin x}\sin^3 x+\frac{\sin x}{\cos x}\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x+\cos^2 x-\sin x\cdot\cos x)+$$
$$+(\sin x+\cos x)\sin x\cdot\cos x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cdot\cos x+\sin x\cdot\cos x)=$$
$$=\sin x+\cos x.$$

Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ не превосходят числа 1 и при этом одновременно не обращаются в единицу, то при всех x имеет место оценка

$$\sin x+\cos x<2.$$

Итак, левая часть доказываемого неравенства (8.1) при всех значениях переменной x оказывается меньше числа 2, а правая его часть, согласно (8.2) не меньше 2, то при всех значениях x и всех $p\neq 0$ неравенство (8.1) установлено.

Пример 2. При каких значениях параметра a все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие неравенству $y>5(x-a)^2-\sqrt{9-a^2}$, одновременно удовлетворяют и $y>x^2-3$?

Решение. Задача «при каком соотношении m и n все решения неравенства $y>m$ одновременно являются решениями неравенства $y>n$» имеет очевидный ответ: $n\leq m$. Тогда в данном примере потребуем, чтобы $x^2-3\leq 5(x-a)^2-\sqrt{9-a^2}$ при всех x, или

$$4x^2-10ax+5a^2+3-\sqrt{9-a^2}\geq 0.$$

Найдем дискриминант

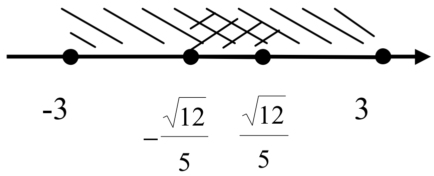
$$D = 100a^2 - 16(5a^2 + 3 - \sqrt{9-a^2}) = 20a^2 + 16\sqrt{9-a^2} - 12.$$

Дискриминант меньший либо равный нулю определит искомый параметр:

$$5a^2 - 12 + 4\sqrt{9-a^2} \le 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{9-a^2} \le 12 - 5a^2,$$

Очевидны требования

$$\begin{cases} 12 - 5a^2 \ge 0, \\ 9 - a^2 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \le \dfrac{12}{5}, \\ a^2 \le 9. \end{cases} \Leftrightarrow \quad a^2 \le \frac{12}{5}$$

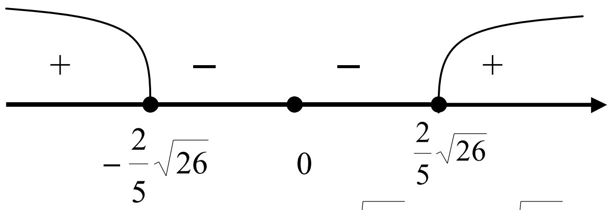


откуда $-\sqrt{\dfrac{12}{5}} \le a \le \sqrt{\dfrac{12}{5}}$. Далее,

$$9 - a^2 \le \frac{144 - 120a^2 + 25a^4}{16}, \text{ откуда}$$

$$25a^4 - 104a^2 \ge 0$$

На рисунке изображены решения этого неравенства:

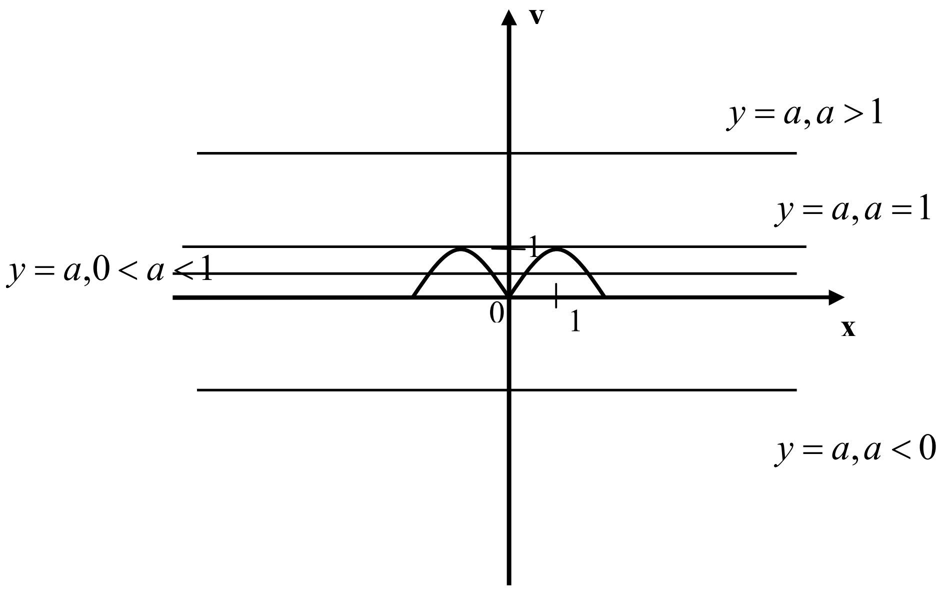


С учетом условия $-\sqrt{\dfrac{12}{5}} \le a \le \sqrt{\dfrac{12}{5}}$ имеем

Ответ: $a = 0$.

Пример 3. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

Решение. Построим графики функции $y = \sqrt{2|x| - x^2}$ и прямую $y = a$, параллельную оси OX:



Анализ их взаимного расположения (предоставим его читателю)приводит к следующему ответу.

Ответ: Если $a<0$, или $a>1$, то решений нет;

если $a=0$, то имеются 3 решения;

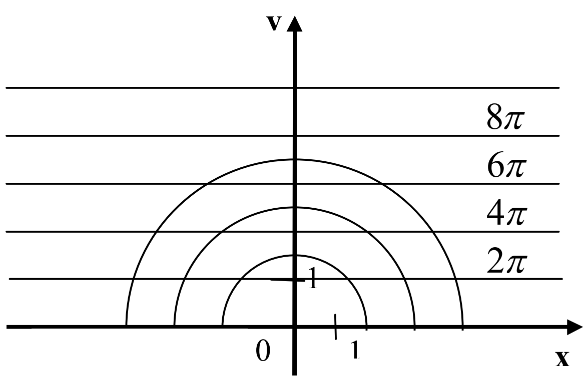
если $a=1$, то имеются 2 решения;

если $0<a<1$, то имеем 4 решения.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2-x^2})=1$ имеет ровно 8 решений.

Решение. Имеем $\sqrt{a^2-x^2}=2\pi k$, $k\in Z$. Рассмотрим функции $y=\sqrt{a^2-x^2}$ и $y=2\pi k$.

Первая из них задает семейство полуокружностей с центром в точке с координатами $(0;0)$, вторая - семейство прямых параллельных оси абсцисс.



Число корней будет равно числу 8, если радиус полуокружности будет больше 6π и меньше

8π , то есть $6\pi < r < 8\pi$. Заметим, что r есть $|a|$.

Ответ. $-8\pi < a < -6\pi$ или $6\pi < a < 8\pi$.

Пример 5. При каком значении параметра *a* область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 4x + a} + \sqrt{x - 3}$ состоит из одной точки?

Решение. Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ -x^2 + 4x + a \geq 0 \end{cases}.$$

Второе неравенство приводится к виду $x^2 - 4x - a \leq 0$ или $x \in [x_1; x_2]$ где $x_1 = 2 - \sqrt{4 + a}, x_2 = 2 + \sqrt{4 + a}$. Пересечение полученного отрезка с лучом $[3;+\infty)$ в одной точке возможно, если $x_2 = 3$ (в противном случае пересечений либо нет, либо в пересечении содержится бесконечно много точек).

Итак, $2 + \sqrt{4 + a} = 3$, откуда *a* =-3.

Ответ: -3.

Пример 6. При каких значениях параметра *a* числа $(2^a - 1)$ и $(3^a - 3)$ являются решениями неравенства

$$a^{\frac{2x+4}{x-1}} \geq a^{\frac{4x+8}{x+1}} ?$$

Решение. Решаем данное неравенство. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1: *a*>1; тогда

$$2(x+2)\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x+1}\right) \geq 0; \quad \frac{2(x+2)(3-x)}{(x-1)(x+1)} \geq 0; \; x \in [-2;-1) \cup (1;3].$$

При *a* >1 числа $(2^a - 1)$ >1 и $(3^a - 3) > 0$, следовательно они могут быть заключены только в $(1;3]$ то есть

$$\begin{cases} a \rangle 1 \\ 1 \langle 2^a - 1 \leq 3 \\ 1 \langle 3^a - 3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \rangle 1 \\ 2 \langle 2^a \leq 4 \\ 4 \langle 3^a \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \rangle 1 \\ 1 \langle a \leq 2 \\ \log_3 4 \langle a \leq \log_3 6 \end{cases},$$

так что $a \in (\log_3 4; \log_3 6]$.

Случай 2: 0 < *a* < 1;

$$\frac{2(x+2)}{x-1} \le \frac{4(x+2)}{x+1}$$

(решаем то же неравенство, но с противоположным знаком), откуда $x \in (-\infty;-2] \cup (-1;1) \cup [3;+\infty)$. При $0 < a < 1$ имеем , очевидно

$$0 < \left(2^a - 1\right) < 1 \text{ и } -2 < \left(3^a - 3\right) < 0,$$

то есть эти числа могут быть расположены только в промежутке $(-1;1)$:

$$\begin{cases} 0 \langle a \langle 1 \\ -1 \langle 2^a - 1 \langle 1; \\ -1 \langle 3^a - 3 \langle 1 \end{cases} \begin{cases} 0 \langle a \langle 1 \\ 0 \langle 2^a \langle 2 \ ; \\ 2 \langle 3^a \langle 4 \end{cases} \begin{cases} 0 \langle a \langle 1 \\ a \langle 1 \\ \log_3 2 \langle a \langle \log_3 4 \end{cases} \text{, откуда } a \in (\log_3 2;1).$$

Ответ: $a \in (\log_3 2;1) \cup (\log_3 4;\log_3 6]$.

Пример 7. При каких значениях параметра *a* многочлен

$$p(x) = ax^2 + 3x + 2a^2 - 3$$

имеет два различных целых корня?

Решение. Потребуем $a \neq 0$ (иначе многочлен обладает одним корнем) и дискриминант

$$D = 9-4a(2a^2-3) \geq 0 \ .$$

Согласно теореме Виета

имеем: $$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{3}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2a^2 - 3}{a} \end{cases},$$

причем оба эти числа обязаны быть целыми. Число $-\dfrac{3}{a}$ является целым при $a = \pm 1;\pm 3$. Тогда число $\dfrac{2a^2-3}{a}$ при каждом из таких a – тоже целое (что легко проверить). Но условию $D \geq 0$ удовлетворяет только $a = \pm 1,3$.

Ответ: $\pm 1,3$.

КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1.Теоретические упражнения.

1) Сформулировать условия на параметры a и b при которых уравнение

$ax+b=a+1$

- имеет бесконечное множество решений;
- не имеет решений.

2) Сформулировать условия на параметры a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax+by=0 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

- имеет бесконечное множество решений;
- имеет единственное решение.

Существуют ли значения параметров a и b, при которых данная система не имеет решений?

3)При всех значениях параметров a и b решить неравенство $|x+b| > -a^2$.

4) При каких значениях параметров a , b и c линия $y = ax^2 + bx + c$ имеет ровно одну общую точку с осью абсцисс?

5) Найти все числа p и q такие, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ равны p и q.

6) При каких значениях параметров p и q квадратный трехчлен

$$y = x^2 + px + q$$

обладает только

- положительными корнями;
- отрицательными корнями?

7) Если функция $y = f(x)$ нечетна и монотонна, то при каких значениях параметра a уравнение $f(|x|) + f(a) = 0$ может иметь лишь нечетное количество корней?

8) По какой причине в определении показательной функции $y = a^x$ (определяемой на множестве всех действительных чисел) исключаются случаи $a = 0$

и $a < 0$?

9) Функцию $y = a^x$ как функцию параметра a исследовать на монотонность.

10) Функцию $y = \log_a x$ как функцию параметра a исследовать на монотонность.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. При каждом значении параметра a решить уравнение $(a^2 - 1)x = a+1$.

2. При каждом значении параметра a решить неравенство $|x+3| > -a^2$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - x + 4 = 0$ имеет единственное решение?

4.При каких значениях параметра a неравенство $(x-a)(x-2) \le 0$ имеет единственное решение?

5. При каком значении параметра k наименьшее значение функции $f(x) = x^2+6x+1$ равно $k+4$?

6 .При каком значении параметра k корни трёхчлена $x^2 - 2k\,x + (k^2 - 4)$ находятся справа от точки $x = -6$?

7. В зависимости от значения параметра a найти число корней уравнения $x + \sqrt{x + \frac{1}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} + \frac{1}{4} = a.$

8. Найти критические точки функции $f(x) = (2x-1)\sqrt[4]{x-a}$.

9. Найти все действительные значения a, при которых область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_{5+4a-a^2}(5-a) - \log_{5+4a-a^2}(4+\sin x)}$$

совпадает с множеством всех действительных чисел.

10. При каких значениях параметра a неравенство $9^{x^2} + 2(a-1)3^{x^2} + a^2 - 2 > 0$ выполнено для всех x?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письмо Минобрнауки России от 17.06.2013 г. № 08-733 «О концепции математического образования» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.informio.ru/update/school (дата обращения 1.03.2014).

2. Концепция развития Российского математического образования [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения 1.03.2014).

3. Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся (2009 г.) Организация Экономического Сотрудничества и Развития (ОЭСР) [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.oecd.org/edu/pisa (дата обращения 1.03.2014).

4. Нахман, А.Д., Иванова И.Ю. Содержательный аспект математической компетентности обучающихся: монография. Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2013. 172 с.

5. Ефремова Н.Ф. Тестовый контроль в образовании: учебное пособие. М.: Университетская книга, Логос, 2007. 540 с.

6. Кнобель А.Ю. Влияние государственных расходов на качество образования в России. М.: Издательство Ин-та Гайдара, 2011. 164 с .

7. Аверина, И.В. Уровневая модель системы мероприятий по реализации концепции развития российского математического образования [Электронный ресурс] / И. В. Аверина, А. Д. Нахман //Актуальные инновационные исследования: наука и практика. –2014. – № 1. – Режим доступа: http://www.actualresearch.ru .pdf (дата обращения 21.06.2014).

8. Концепция развития российского математического образования. Проект МГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.msu.ru/science/mathobr.html (дата обращения 21.06.2014).

9. Нахман, А.Д. Инновационные содержательно-методические линии курса математики [Текст]: монография / А.Д. Нахман. – Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации». – 2012. – 112 с.

10. Нахман, А.Д. Булевы алгебры как основа для изучения математической логики, теории множеств, теории вероятностей [Текст] /А.Д. Нахман // Вестник ТГТУ. – 2005. – Т.11. – №1Б. – С.246-253.
11. Нахман, А.Д. Технологические приемы решения вероятностных задач// [Электронный ресурс] /А.Д.Нахман //Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 3. – Режим доступа: http://www.science-education.ru/109.pdf (дата обращения 21.06.2014).
12. Типовое положение об учебно-методических объединениях в системе общего образования. – Режим доступа: http://www.edu.ru/
13. Нахман А.Д. Математическое моделирование как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики // Вестник Тульского ГУ, "Современные образовательные технологии". – 2014. – Вып.13.С.93-96.
14. А.Д.Нахман. Математическая логика и теория алгоритмов: методические указания и контрольные задания. Тамбов, Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2011. - 16 с.
15. Нахман А.Д., Иванова И.Ю. Преподавание математики в условиях реализации федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования: учебно-методический комплект по элементам математического анализа.– Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2012. – 115 с.
16. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. -М: МЦНМО , 2000 -892 С.
17. Единый государственный экзамен 2006. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся. Рособрнадзор, ИСОП - М.: Интеллект-Центр, 2006 . 272 с.
18. Королева Т.М., Маркарян Е.Г., Нейман Ю.М. Пособие по математике в помощь участникам централизованного тестирования. - М.: Центр тестирования МО РФ. 2004. 188 с.

19. Нахман А.Д. Математика. Рекомендации по оцениванию заданий ЕГЭ повышенного и высокого уровня сложности. Метод. пособие. - Тамбов: ТОИПКРО, 2006. - 72 с.
20. Нахман А.Д. Функции и их свойства. Задачи для подготовки к ЕГЭ/ Метод. пособие. - Тамбов: ТОИПКРО, 2006. – 61 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

I. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ КОНЦЕПЦИИ ПРЕДМЕТНОЙ ОБЛАСТИ «МАТЕМАТИКА»

1. Понятийное поле концепции

2. Государственная итоговая аттестация: проблемы и пути решения

3.Модель системы математического образования в условиях реализации Концепции

4. Система мероприятий по реализации Концепции: трехуровневая модель

5. Совершенствование кадрового потенциала. Роль системы повышения квалификации в реализации Концепции

6 .Меры по совершенствованию математического образования в системе «школа-вуз»

7. Преемственность математической подготовки в контексте реализации основных идей Концепции

8. Основные направления деятельности региональных учебно-методических объединений в области математики

9. Инновационные содержательно - методические линии курса математики

II. ЛИНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ: СОДЕРЖАТЕЛЬНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ КОМПОНЕНТ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

1.Задачи с параметрами: общие положения

2. Квадратическая функция

3. «Ветвление» ответов

4.Трансцендентные уравнения и неравенства

5. Задачи на «отсечение» корней

6. Задачи с параметрами на тему «Применение производной»

7. Задачи, сводящиеся ко введению параметра

8. Разные задачи с параметрами

КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1.Теоретические упражнения.

2. Задачи для самостоятельного решения

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК