Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

Ю.В.Родионов, А.Д.Нахман

ВВЕДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2017

УДК 372.851

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензенты:
доктор технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» С.В.Плотникова;
заведующая кафедрой общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», кандидат филологических наук доцент Т.В.Мирзаева

Родионов, Ю.В. Введение в дифференциальное и интегральное исчисление функций комплексного переменного: учебное пособие / Ю.В.Родионов, А.Д.Нахман– «Инновации в образовании». Специальный выпуск. Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2017. –83 с.

Пособие представляет собою краткий курс лекций по основам дифференциально-интегрального исчисления функций комплексного переменного. Приведены фундаментальные теоретические положения. Представлена подборка типовых задач для активного обучения и самостоятельного решения. Материал адресован студентам инженерных направлений вузовской подготовки и способствует формированию ряда общекультурных и общепрофессиональных компетенций. Пособие может быть использовано также преподавателями математики для подготовки к проведению лекций и практических занятий.

Введение

В условиях перехода на актуализированные ФГОС высшего образования и существенного возрастания объёма осваиваемой студентом информации повышается интерес к кратким курсам лекций, которые вводят студента в круг рассматриваемых проблем и создают необходимые предпосылки для дальнейшей самостоятельной проработки материала. В частности, сказанное относится к курсу математики, который изучается бакалаврами инженерных направлений подготовки при ограниченном объёме часов контактной работы с преподавателем и смещении акцентов на самостоятельную работу.

Теория функций комплексного переменного на большинстве направлений подготовки не изучается как отдельная дисциплина, а включена в состав курса высшей математики. Вместе с тем данная теория существенно обогащает учащегося новыми для него математическими идеями, расширяет возможности использования методов математического моделирования, что, в конечном счете, способствует развитию общекультурных (ОК) и общепрофессиональных (ОПК) компетенций бакалавра.

№	Индекс компетенции / Структурной составляющей компетенции	Формулировка компетенции / Структурные составляющие компетенции (результаты обучения)
1	**2**	**3**
1	**ОПК-1**	способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического моделирования, теоретического и экспериментального исследования;
2	**ОПК-2**	способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат;
	С1-(ОПК-1, ОПК-2)	знание основных понятий и методов теории комплексных чисел, элементарных функций комплексного переменного, дифференциального

№	Индекс компетенции / Структурной составляющей компетенции	Формулировка компетенции / Структурные составляющие компетенции (результаты обучения)
1	**2**	**3**
		и интегрального исчисления, позволяющее представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира;
	С2-(ОПК-1, ОПК-2)	умение применять методы комплексного анализа для объективного научно-исследовательского анализа, моделирования и решения поставленных физико-математических задач в профессиональной деятельности;
	С3-(ОПК-1, ОПК-2)	умение выявлять математически обоснованные закономерности и причинно-следственные связи на основе информации, представленной в различных формах (в таблицах, диаграммах, графиках);
	С4-(ОПК-1, ОПК-2)	умение строить математические модели различных явлений, процессов и систем при изучении естественнонаучных дисциплин и в профессиональной деятельности, проводить необходимые расчеты в рамках построенной модели;
	С6-(ОПК-1, ОПК-2	владение навыками использования математических методов (аналитических и графических) для получения характеристик исследуемой модели и анализа результатов исследования;
	С7-(ОПК-1, ОПК-2)	умение осуществлять математическую обработку опытных данных и оценивать правомерность и точность достигнутых результатов.

Именно на решение задач формирования перечисленных структурных составляющих данных групп компетенций и направлен материал настоящего пособия.

Глава 1. Комплексные числа

1.1. Задача о расширении множества действительных чисел

1^0. Процесс освоения понятия числа состоит из нескольких этапов.

а) Рассмотрение натуральных чисел, т.е. чисел, употребляемых при счете. Их множество обозначается буквой N: $\mathrm{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

б) *Расширение* N до множества Z всех целых чисел; необходимость такого расширения возникает, т.к. во множестве N не всегда выполнима операция вычитания; например, $(2-5) \notin \mathrm{N}$. Итак, вводится множество $\mathrm{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, при этом $\mathrm{N} \subset \mathrm{Z}$.

в) *Расширение* Z до множества Q всех рациональных чисел, т.е. множества всех дробей вида $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathrm{Z}$, $n \neq 0$. В классе чисел Q (в отличие от Z) всегда выполнимо деление на любое целое n, $n \neq 0$. Поскольку каждое целое число m есть дробь со знаменателем, равном единице, то $\mathrm{Z} \subset \mathrm{Q}$. Заметим, что всякое рациональное число есть либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь.

г) Извлечение корня n-ой степени (действие, обратное возведению в натуральную степень) не всегда выполнимо в Q.

Дополним множество Q всевозможными десятичными непериодическими дробями (иррациональными числами). В полученном множестве **R** всех действительных чисел уже всегда возможно извлечение корня нечетной степени; корень четной степени может быть извлечен из любого *неотрицательного* действительного числа. Ясно, что $\mathrm{Q} \subset \mathbf{R}$.Остается невыполнимым извлечение корня четной степени из отрицательного числа; например $\sqrt{-1}$ не существует в **R**. Следовательно, требуется дальнейшее *расширение* **R** до такого множества **C**, в котором оказалось бы выполнимым и указанное действие (например, были бы разрешимы квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами).

Построением **C** (так чтобы $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$) мы и будем заниматься в главе I.

1.2. Мнимая единица. Комплексные числа

1^0. В выбранной прямоугольной системе координат точка (1,0) соответствует числу 1 на числовой оси абсцисс (оси действительных чисел), а точка (0,1) –числу 1 на оси ординат. Чтобы отличать по написанию эти две единицы, последнюю обозначим буквой *i* и назовем мнимой единицей. Итак, точка (0,1) отождествляется с мнимой единицей; всякое же другое число оси ординат ,отвечающее точке (0,y), теперь естественно записать в виде yi и назвать чисто мнимым числом; сама ось OY будет далее называться мнимой осью (тогда как OX-действительная ось).

2^0. Произвольную упорядоченную пару x, y действительных чисел («комплекс» из двух действительных чисел), соответствующую точке (x,y) координатной плоскости, назовем комплексным числом.

Перейдем к так называемой алгебраической записи (форме) комплексного числа.

3^0. Произвольная точка (x, y), расположенная в прямоугольной системе координат XOY, есть конец радиус вектора

$$\vec{z} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \tag{1.2.1}$$

где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ - единичные направляющие вектора координатных осей OX (конец вектора расположен в точке 1 этой оси) и OY (конец вектора $\bar{e}_2$ расположен в точке i). Соответственно, по аналогии с векторной записью (1.2.1) для *точки* z с координатами (x, y) будем употреблять запись

$$z = x + y \cdot i \tag{1.2.2}$$

и говорить теперь, что z - это *комплексное число вида (1.2.2*)

Итак, между точками (x, y) и комплексными числами вида (1.2.2) установлено взаимно однозначное соответствие. Сама же плоскость (со введенной в ней прямоугольной системой координат) называется *комплексной* плоскостью. В частности, для действительного числа x естественна запись $x = x + 0 \cdot i$, что соответствует точке $(x, 0)$; и теперь мы не делаем различия между действительными числами x и комплексными числами вида $x + 0 \cdot i$. Для чисто мнимого $y \cdot i$., соответствующего точке $(0, y)$, употребима запись $y \cdot i = 0 + y \cdot i$, т.е. любое $y \cdot i \in \mathbf{C}$.

Итак, множество **C** всех комплексных чисел содержит своим подмножеством R.

4^0. Числа вида $z = x + y \cdot i$ и $\bar{z} = x - y \cdot i$ называются *комплексно-сопряженными.* Они изображаются точками, симметричными относительно оси OX.

Модулем комплексного числа называется длина (модуль) радиус - вектора точки (x, y), т.е.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.2.3}$$

В частности, модуль действительного числа $x = x + 0 \cdot i$ есть $\sqrt{x^2}$, т.е. он равен абсолютной величине числа x; аналогично

$$|y\, i| = \sqrt{y^2} = |y|.$$

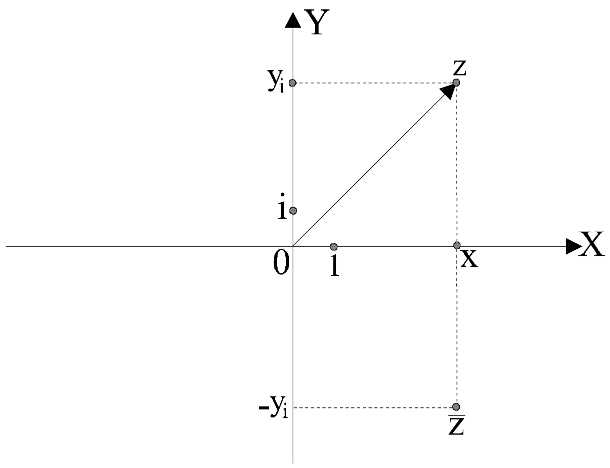

Рис.1.2.1

5^0. Действительной частью числа $z = x + yi$ называется x, а мнимой частью - число y; применяем обозначения $x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$.

Комплексные числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называются равными, если совпадают их действительные и мнимые части. Другими словами

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}. \qquad (1.2.4)$$

Геометрически, соотношение $z_1 = z_2$ означает совпадение соответствующих точек комплексной плоскости.

Комплексные числа не сравниваются, т.е. во множестве **C** не вводятся отношения "больше" и "меньше".

1.3. Алгебраические операции над комплексными числами

1^0. В параграфе 1.2. мы отожествили любое комплексное число $z = x + y i$ с радиус - вектором точки (x, y). В связи с этим операция сложения комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ вводятся по аналогии с такой же операцией над векторами, которая, в свою очередь, выполняется *покоординатно*. Итак, полагаем по определению

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i,$$

Другими словами, сложение комплексных чисел выполняется по такому же правилу, как над многочленами.

Сумма большего количества комплексных чисел находится аналогичным образом: если $z_k = x_k + y_k i \quad (k = 1,2,\ldots,n)$, то

$$z = \sum_{k=1}^{n} z_k \text{ определяется в виде } z = \sum_{k=1}^{n} x_k + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) i.$$

Поскольку привычные свойства коммутативности и ассоциативности операции сложения справедливы для действительных чисел, они (эти свойства) на основании введенных определений будут сохраняться и для комплексных чисел:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

2⁰. *Вычитание* комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению. А именно,

$$z = z_2 - z_1, \quad \text{если} \quad z_2 = z + z_1.$$

Установим существование, единственность разности и способ ее нахождения. Пусть $z = x + yi$, тогда по определению равенства комплексных чисел соотношение

$$x_2 + y_2 i = (x + yi) + (x_1 + y_1 i)$$

будет означать, что

$$\begin{cases} x_2 = x + x_1 \\ y_2 = y + y_1 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = x_2 - x_1 \\ y = y_2 - y_1 \end{cases}.$$

Итак, действительная и мнимая части разности $z = z_2 - z_1$ определены однозначным образом, при этом получена формула

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i.$$

Имеем аналогию с разностью векторов, вычитание которых выполнялось покоординатно. Можно также сказать, что вычитание производится по такому же правилу, как для многочленов.

Алгебраическая сумма n комплексных чисел $(n > 2)$ определяется путем выполнения действий в том порядке, в каком они записаны. Например,

$$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = ((z_1 - z_2) - z_3) + z_4.$$

Однако, и в этом случае действует ассоциативный закон (возможность группировки), т.к. этот закон справедлив для действительных и для мнимых частей соответствующих комплексных чисел. Так, в приведенном примере возможен и такой порядок действий:

$$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = (z_1 - z_2) + (z_4 - z_3).$$

3^0.Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ определим в виде

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i \qquad (1.3.1)$$

Имеем, в частности, квадрат комплексного числа z^2 (т.е. произведение zz) в виде $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$; следовательно, $i^2 = 0 - 1 + 0i,\ i^2 = -1$.

В связи с таким свойством числа i его удобно *обозначать* в виде $i = \sqrt{-1}$; ясно, что $i \notin \mathbf{R}$; теперь становится понятно, почему число i названо *мнимой* единицей. Заметим, что умножение (1.3.1.) комплексных чисел выполняется по правилу умножения многочленов с заменой i^2 на –1.

Легко проверить справедливость коммутативного и ассоциативного законов

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1,$$
$$(z_1 \cdot z_2) z_3 = z_1 \cdot (z_2 z_3),$$

а также дистрибутивного закона умножения относительно сложения:

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Полезен следующий факт:

$$z\cdot\bar{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2+(xy-yx)i=x^2+y^2=|z|^2. \quad (1.3.2)$$

4^0. Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Именно,

$$z=\frac{z_1}{z_2}, \text{ если } z_1=z\cdot z_2, \text{ где } z_2\neq 0. \quad (1.3.3)$$

Нетрудно проверить, что частное (1.3.3) может быть найдено по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{|z_2|^2}z_1\cdot\bar{z}_2$$

5^0. Выполняя сложение (вычитание), умножение и деление комплексных чисел, придерживаемся привычных свойств и порядка действий. Например:

$$(i-5)\left(2i+\frac{3}{2+i}\right)=(i-5)\frac{2i(2+i)+3}{2+i}=(i-5)\frac{4i+2i^2+3}{2+i}=$$

$$=\frac{(i-5)(4i+1)}{2+i}=\frac{-9-19i}{2+i}=\frac{-(9+19i)(2-i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{-(37+29i)}{4+1}=\frac{-37}{5}-\frac{29}{5}i.$$

1.4. Комплексные числа в тригонометрической форме

1^0. Совместим стандартным образом прямоугольную и полярную системы координат: полярную ось направим по оси OX, полюс системы совмещаем с точкой $O(0,0)$; выбираем в обеих системах одинаковые единицы масштаба; ось OY направляем по лучу $\varphi=\frac{\pi}{2}$. В этом случае прямоугольные координаты (x,y) и полярные координаты (ρ,φ) одной и той же точки z связаны соотношениями

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}.$$

Теперь комплексное число $z = x + yi$ принимает вид $z = \rho\cos\varphi + (\rho\sin\varphi)\cdot i$ или

$$z = \rho(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi). \qquad (1.4.1)$$

Форма записи (1.4.1) комплексного числа называется *тригонометрической.*

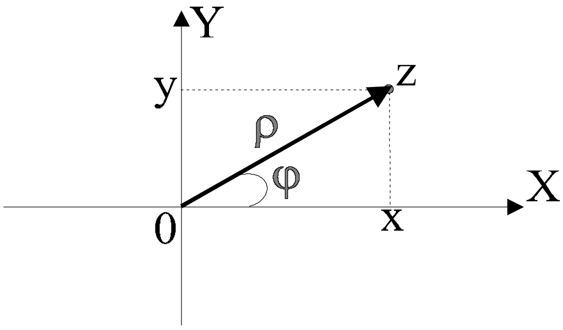

Рис. 1.4.1

2^0. Связь полярных и прямоугольных координат точки M может быть также представлена в виде

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, $\rho = |z|$ есть модуль числа z; число φ назовем аргументом z. Обозначим через arg z одно из возможных значений $\varphi: -\pi < \arg z \le \pi$; это значение назовем главным значением аргумента; иногда главное значение рассматриваем в интервале $[0,2\pi)$; совокупность всех значений φ имеет вид

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Очевидно, что $\arg(\pm\, iy) = \pm\frac{\pi}{2}$ (случай $x = 0,\ \ y \ne 0$),

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x > 0; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ при } x < 0,\ y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ при } x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Для точки $z = 0$ значение аргумента не определено; очевидно, что $|0| = 0$.

3^0. Умножение, возведение в натуральную степень (т.е. умножение числа z на себя n раз) и деление комплексных чисел удобно выполнять, записав эти числа в тригонометрической форме.

Пусть

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Используя правила умножения комплексных чисел и соответсвующие формулы тригонометрии, легко установить, что

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \qquad (1.4.2)$$

и

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi),\ n = 1,2,\ldots \qquad (1.4.3)$$

Имеет место также соотношение

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right),\ \rho_2 \neq 0 \qquad (1.4.4)$$

Иначе говоря: при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются; при делении - модули делятся, а аргументы вычитаются; при возведении в степень $n \in N$ - модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на n.

4^0. Выясним геометрический смысл соотношений: а) $|z - z_0| = \rho$, б) $|z - z_0| < \rho$, в) $|z - z_0| > \rho$, где $\rho > 0$ и z_0 - фиксированное комплексное число.

Записав $z = x + yi$, $z_0 = x_0 + y_0 i$ и выполняя вычитание, имеем $|z - z_0| = |(x - x_0) + (y - y_0) i| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Следовательно, равенство $|z - z_0| = \rho$ означает, что $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$. Получили уравнение окружности радиуса ρ с центром в точке (x_0, y_0).

Итак, *геометрический образ уравнения* $|z - z_0| = \rho$ - это *все точки окружности с центром* z_0 *радиуса* ρ.

Аналогично $|z - z_0| < \rho$ означает, что $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2$, т.е. геометрическим образом этого неравенства служит *множество всех внутренних точек круга* ; $|z - z_0| > \rho$ - *множество всех точек,* расположенных *вне круга*; центр круга и радиус - те же: z_0 и ρ соответственно.

1.5. Извлечение корня из комплексного числа. Алгебраические уравнения

1^0. Пусть $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Корнем n-ой степени из числа z назовем число $w = \sqrt[n]{z}$, обладающее свойством $w^n = z$. Установим, что при всяком $z \neq 0$ существует ровно n различных значений корня, которые имеют вид

$$w_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad (1.5.1)$$

здесь ρ и φ - соответственно, модуль и аргумент числа z, т.е. $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$; значение $\sqrt[n]{\rho}$ понимается как *арифметический* корень из положительного числа ρ, так что $\sqrt[n]{\rho} > 0$.

2^0. Итак, мы доказываем формулу (1.5.1). Если

$$w = |w|\left(\cos\Phi + i\sin\Phi\right)$$

- тригонометрическая форма числа w, то, по определению, $w^n = z$, т.е. в силу (1.4.4),

$$|w|^n\left(\cos n\Phi + i\sin\Phi\right) = \rho\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

Значит, $|w|^n = \rho$, откуда $|w| = \sqrt[n]{\rho}$ (имеется в виду принятое во множестве действительных чисел извлечение арифметического корня). Аргументы $n\Phi$ и φ равных комплексных чисел могут (находясь под знаком косинуса и синуса) отличаться лишь на величину периода $T = 2\pi k, k \in Z,$ так что

$$n\Phi = \varphi + 2\pi k, \text{ откуда } \Phi = \Phi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}; k \in Z.$$

Покажем, что достаточно рассмотреть $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Для этого, прежде всего, выясним, как расположены точки (1.5.1) на комплексной плоскости. Во-первых, все они имеют один и тот же модуль, равный $\sqrt[n]{\rho}$, а значит находятся на окружности с центром в начале координат радиуса $\sqrt[n]{\rho}$. Во-вторых, при $k = 0$ точка w_0 имеет полярный угол $\Phi_0 = \dfrac{\varphi}{n}$, а полярный угол следующей точки w_1 отличается на величину $\dfrac{2\pi}{n}\cdot 1$, т.е. $\Phi_1 = \dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}$.

Далее, $\Phi_2 = \dfrac{\varphi + 2\pi\cdot 2}{n} = \left(\dfrac{\varphi}{n} + \dfrac{2\pi}{n}\right) + \dfrac{2\pi}{n} = \Phi_1 + \dfrac{2\pi}{n}, \ldots, \Phi_{n-1} = \Phi_{n-2} + \dfrac{2\pi}{n}$,

$\Phi_n = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi, \ldots$ Таким образом, каждая следующая точка w_k получается из предыдущей w_{k-1} поворотом против часовой стрелки на величину $\dfrac{2\pi}{n}$, а точка w_n совпала с w_0 (совершен поворот на 2π). С дальнейшим ростом k опять получаем точки $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$. При отрицательных k, т.е. $k = -1, -2, \ldots$ имеем обход тех же точек по часовой стрелке, т.е. в обратном порядке: $w_{n-1}, w_{n-2}, \ldots, w_0$. Итак, только n различных точек получаемых, например при $k = 0, 1, \ldots, n-1$, соответствуют операции извлечения корня n-ой степени; см.рис.1.5.1. Формула (1.5.1) установлена. Заметим, что $\sqrt[n]{0} = 0$ можно понимать как n совпадающих значений, равных нулю.

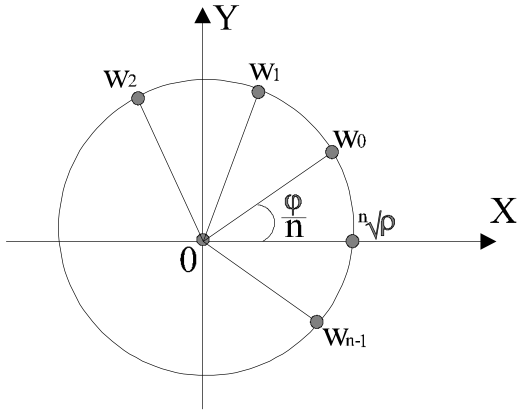

Рис. 1.5.1

3^0. Непосредственно из определения корня n-ой степени вытекают привычные свойства соответствующей операции, например,

$$\sqrt[n]{z \cdot \eta} = \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{\eta}; \quad \sqrt[n]{\frac{z}{\iota}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{\iota}}, \ \iota \neq 0.$$

Эти равенства следует понимать как *совпадение множеств* значений выражений в левых и правых частях.

4^0.В качестве примера установим, что $\sqrt{-a^2} = \pm a \cdot i$, $a > 0$. Действительно, $(a\,i)^2 = a^2 \cdot i^2 = -a$ и $(-a\,i)^2 = a^2 \cdot i^2 = -a$. Значит (по определению квадратного корня) оба значения $\pm a\,i$ служат результатом извлечения корня. В силу п.1^0 мы должны получить ровно два различных результата. Следовательно, других значений $\sqrt{-a^2}$ нет.

Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$w^2 + d^2 = 0, \text{ где } d \in \mathbf{R}, d > 0.$$

Оно равносильно равенству $w=\sqrt{-d^2}$ или, в свою очередь $w_{1,2}=\pm d\,i$, если воспользоваться результатом решения последнего примера.

5^0. Теперь мы можем получить формулу для решений квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1.5.2}$$

с произвольными коэффициентами $(a\neq 0)$. Выделяя полный квадрат, имеем

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=0.$$

Рассмотрим только случай $4ac-b^2>0$, или, что то же самое, $D=\left(b^2-4ac\right)<0$, т.к. при $D\geq 0$ формула корней

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \tag{1.5.3}$$

нам известна. При $\alpha^2=\dfrac{-D}{4a^2}$ в силу результата п.4^0 получаем

$$x_{1,2}+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{-D}\,i}{2a},\ \text{или}\ \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{-D}\,i}{2a}. \tag{1.5.4}$$

Теперь мы можем решать (по формуле (1.5.4)) квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, или, что то же самое, пользоваться формулой (1.5.3) при любых значениях D.

Заметим, что запись $\sqrt{D}$ (или $\sqrt{-D}$ в (1.5.4)) понимаются как арифметическое значение корня, т.к. двузначность операции извлечения корня уже учтена знаком ±.

6^0. Итак, любое квадратное уравнение, в силу (1.5.3) имеет ровно два корня (при $D=0$ корни совпадают; в этом случае говорят, что корень x_1 имеет кратность, равную двум). В силу примеров п.5^0 можно предположить, что каждое кубическое уравнение имеет ровно три корня, уравнение четвертой степени - ровно четыре корня и т.д. Кроме того, среди корней уравнения с действительными коэффициентами комплексные числа присутствуют сопряженными парами: вместе с числом вида $z_1 = a + bi$ корнем служит и $z_2 = a - bi$.

Такая гипотеза оказывается верной. А именно, в курсе алгебры доказывается что

а) каждое алгебраическое уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

имеет в **C** ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность;

б) если коэффициенты уравнения $a_k \left(k = 0, 1, \ldots, n\right)$ - действительные числа, то комплексные числа присутствуют во множестве корней сопряженными парами.

Глава 2. Элементарные функции комплексного переменного

2.1. Понятие функции комплексного переменного

1^0. *Окрестностью* U_0 точки $z_0 = x_0 + y_0 i$ называется множество всех точек некоторого круга на комплексной плоскости с центром z_0. Если $\varepsilon > 0$ - радиус этого круга, то употребляем также термин "ε - окрестность" и обозначение $U(z_0;\varepsilon)$. Иными словами,

$$U_0 = U(z_0;\varepsilon) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Множество G точек комплексной плоскости называется *открытым*, если каждая его точка является *внутренней,* т.е. содержится в G вместе с некоторой окрестностью.

Например, кольцо, т.е. множество вида

$$U(a;\iota,R) = \{z : \iota < |z - a| < R\}, \qquad (2.1.1)$$

где a - фиксировано, $\iota, R > 0$, является, очевидно открытым множеством.

Для сравнения, заметим, что если в (2.1.1) неравенство записать в виде $\iota \le |z - a| < R$, то свойство "открытости" нарушается, т.к. точки окружности $|z - a| = \iota$ содержатся во множестве лишь с "частью" окрестности, см. рис.2.1.1.

Точки, обладающие подобными свойствами, называются граничными. Более точно, точка z_0, не принадлежащая G, такая, что любая её окрестность содержит бесконечное множество точек из G, называется граничной для открытого множества G.

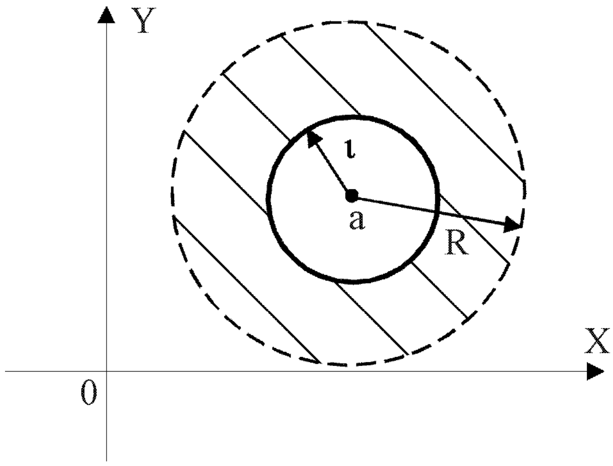

Рис.2.1.1

2^0. Множество G называется связным, если две его любые точки можно соединить некоторой ломаной, целиком лежащей в G. Открытое связное множество G называется областью.

Множество, состоящее из области G и ее границы называется замкнутой областью.

Как правило, мы будем рассматривать ограниченные области (замкнутые или нет), т.е. области, содержащиеся в некотором круге $U(a;R)$.

3^0. О п р е д е л е н и е. Пусть G - некоторое множество комплексных чисел. Говорят, что на множестве G (области определения G) задана *функция* вида $w = f(z)$, если каждому $z \in G$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w. В последнем случае мы говорим, что функция f *многозначна.*

Если, в частности, все значения w - действительные числа, то говорим о *действительнозначной функции комплексного переменного.* Если G - множество на "действительной оси" (оси абсцисс), т.е. $z = x \in R$, то $w = f(x)$ - *комплекснозначная* функция действительного переменного.

Так, функция вида $w = \mathrm{Arg} z, z \neq 0$ (т.е. $z \in C \setminus \{0\}$) является многозначной (действительнозначной) функцией, т.к.

$w = w_n = \arg z + 2\pi n,\ \ n \in Z,$ и при каждом n мы получаем новое значение w_n, отличное от любого w_m, $m \neq n$.

Другая знакомая нам функция - это $w = z^n, z \in C(n = 1,2,\ldots)$. Так как результат умножения определяется однозначным образом (в данном случае - умножения z на себя n раз), то указанная функция однозначна.

Многозначной (именно, n - значной) является и функция вида

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \varphi = \arg z,$$
$$k = 0,1,\ldots,n-1; z \in C \setminus \{0\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать в основном, функции однозначные, если не оговорено противное.

4^0. Поскольку $w = f(z) = f(x + yi)$ определяется парами значений (x, y), то можно говорить об f как функции двух действительных переменных, заданной на некотором множестве G. В то же время $w = u + vi$, тогда $u = \operatorname{Re} f(x + yi) = u(x,y)$, $v = \operatorname{Im} f(x + yi) = v(x,y)$ - две действительнозначные функции действительных переменных x и y. Таким образом,

$$w = f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y), \tag{2.1.2}$$

т.е. задание $f(z)$ есть задание пары функций $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, и этим облегчаются многие формулировки и доказательства в теории функций комплексного переменного.

Например $w = z^2$ может быть представлено в виде (2.1.2) следующим образом:

$$z^2 = (x + y\,i)^2 = x^2 - y^2 + 2x\,y\,i.$$

5^0. Комплекснозначная функция вида $w = f(n)$, $n \in N$ называется последовательностью комплексных чисел. Множество ее значений имеет вид $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$. Согласно (2.1.2)

$$w = f(n) = w_n = x_n + i y_n,\ n = 1,2,\ldots,$$

т.е. одновременно с $f(n)$ задаются две последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

6^0. Непрерывное отображение γ некоторого отрезка $[\alpha,\beta]$ действительной оси во множество комплексных чисел называется путем (кривой) γ. Иначе говоря, путь-это комплекснозначная функция $z=\gamma(t)$ действительного переменного, причем $x(t)=\mathrm{Re}\,\gamma(t)$ и $y(t)=\mathrm{Im}\,\gamma(t)$ -непрерывные на $[\alpha,\beta]$, действительнозначные функции. Точки $a=\gamma(\alpha)$ и $b=\gamma(\beta)$ называются, соответственно, началом и концом пути; если $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$, то путь называется замкнутым.

Путь γ называется гладким, если в представлении $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ функции $x(t)$ и $y(t)$ обладают на $[\alpha,\beta]$ непрерывными производными, причем $\gamma'(t)\neq 0$ при всех $t\in[\alpha;\beta]$; здесь $\gamma'(t)=x'(t)+iy'(t)$.

Путь γ называется кусочно-гладким, если $\gamma\,(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$ (в указанном выше смысле) и $[\alpha,\beta]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых $\gamma\,(t)$ определяет гладкий путь.

7^0. Область D на плоскости называется односвязной, если её граница есть один (непрерывный) путь без самопересечений (возможно, замкнутый). Область, не являющаяся односвязной, называется многосвязной. Область называется n-связной, если её граница состоит из n (n>1) непересекающихся (непрерывных) путей; некоторые из них могут вырождаться в точку.

2.2. Предел функции. Непрерывность

1^0. Определение предела функции $f(z)$ в точке z_0 (внутренней во множестве G, где определена $w = f(z)$) вводится совершенно аналогично соответствующему понятию для функции действительного переменного. Именно, *число* $w_0 = u_0 + i\,v_0$ *есть предел* $w = f(z)$ в точке z_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что

$$|w - w_0| < \varepsilon \text{ как только } 0 < |z - z_0| < \delta .$$

Иными словами, для любой окрестности $U(w_0;\varepsilon)$ найдется некоторая окрестность $U(z_0;\delta)$, такая что

$$w \in U(w_0;\varepsilon) \text{ как только } z \in U(z_0;\delta), z \neq z_0 .$$

Употребляется привычное обозначение:

$$w_0 = \lim_{z\to z_0} f(z). \tag{2.2.1}$$

2^0. Соотношение (2.2.1), эквивалентно, очевидно, следующему:

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} |f(z) - w_0| = 0 . \tag{2.2.2}$$

Поскольку для любых действительных переменных u, v значения $\sqrt{u^2 + v^2}$ стремятся к нулю тогда и только тогда, когда одновременно $u \to 0, v \to 0$, то согласно определению модуля и соотношению (2.1.2) предельный переход вида (2.2.2) равносилен тому, что одновременно

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0.$$

Другими словами, предельный переход совершается по отдельности в действительной и мнимой части функции $w = f(z)$. Отсюда вытекает, что простейшие свойства пределов (вынесение постоянного множителя за знак предела, предельный переход в сумме, произведении и т.п.) переносятся и на случай функций комплексного переменного.

3^0. По аналогии с (2.2.2) говорят, что

$$w_0 = \lim_{z\to\infty} f(z),$$

(понятие "предела на бесконечности"), если

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| f(z) - w_0 \right| = 0.$$

В частности, для последовательности комплексных чисел $\{w_n\}$ число w_0 называется ее пределом, если

$$\lim_{n\to\infty} |w_n - w_0| = 0 \tag{2.2.3}$$

или, что то же самое, одновременно

$$u_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad v_0 = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

4^0. Говорят, что последовательность w_n имеет бесконечный предел, и записывают

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \infty,$$

если

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| = +\infty.$$

Изобразить соответствующее "значение" бесконечного предела невозможно, однако условно говоря, дополняют комплексную плоскость "бесконечно удаленной точкой", а ее "окрестностью" называют внешность круга $|w| > R$ достаточно большого радиуса $R > 0$. Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется расширенной.

Аналогично, говорят, что

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty,$$

если

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} |f(z)| = +\infty.$$

Запись

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$$

(бесконечный предел на бесконечности) означает, что

$$\ell\mathrm{im}_{|z|\to+\infty} \left| f(z) \right| = +\infty .$$

5^0. Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, внутренней для области определения G, если

$$\ell\mathrm{im}_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \tag{2.2.4}$$

Другими словами, непрерывность в точке z_0 есть возможность предельного перехода под знаком функции при $z \to z_0$.

Согласно п.2^0 для $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ непрерывность в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ означает, что

$$\ell\mathrm{im}_{\substack{x\to x_0\\ e\to e_0}} u(x,y) = u(x_0, y_0), \qquad \ell\mathrm{im}_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v(x_0, y_0),$$

т.е. имеем непрерывность действительной части u и мнимой части v как функций от x и y.

6^0. Как в случае функций действительного переменного, определению (2.1.3) можно придать иную форму. Если обозначить $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = f(z) - f(z_0)$, то непрерывность функции f в точке z_0 означает, что

$$\ell\mathrm{im}_{\Delta z\to 0} \Delta w = 0,$$

т.е. бесконечно - малому приращению аргумента (в точке z_0) соответствует бесконечно малое приращение функции f.

7^0. Функция $f(z)$ называется непрерывной в области G, если она непрерывна в каждой точке z этой области.

Поскольку непрерывность f равносильна непрерывности ее действительной части u и мнимой v, то многие свойства непрерывных функций действительного переменного переносятся и на изучаемый случай. Так, вместе с $f(z)$ и $g(z)$ непрерывными будут (в их общей области непрерывности G) $f(z)+g(z)$, $f(z)\cdot g(z)$ и $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ (за исключением точек, в которых $g(z)=0$). Справедливо утверждение о непрерывности сложной функции и др.

8^0. Понятия предела и непрерывности функции в точке z_0 вводились в предположении, что z_0 - внутренняя точка рассматриваемого множества G. Если же z_0 - граничная точка, то в определении (2.2.2) потребуем: $|z-z_0|\to 0$ (т.е. точка z приближается к z_0 так, что при этом сохраняется условие $z\in G$).

Функция $w=f(z)$ называется непрерывной в замкнутой области $\overline{G}$, если $f(z)$ определена в $\overline{G}$ и для каждой точки $z_0\in\overline{G}$ (включая граничные точки) выполнено равенство (2.2.4); подразумевается, что точка z может стремиться к z_0 (см.(2.2.4)) любым образом, но не покидая замкнутой области $\overline{G}$.

2.3 Комплексная экспонента.
Тригонометрические функции

1^0. Выше уже были определены некоторые из элементарных функций комплексного переменного: бесконечнозначная $w=Argz$, однозначная $w=z^n$, $n\in Z$ и n -значная $w=\sqrt[n]{z}$, $n\in Z$. В основу определения комплекснозначной показательной функции положим известное свойство соответствующей (действительнозначной) функции $\phi(x)$ (например, $\phi(x)=e^x$) в случае действительного переменного: $\phi(x+y)=\phi(x)\cdot\phi(y)$. Комплекснозначная $\phi(y)=\cos y+i\sin y$ обладает (см. параграф 1.4) этим же свойством:

$$\phi(x+y)=\cos(x+y)+i\sin(x+y)=$$
$$=(\cos x+i\sin x)\cdot(\cos y+i\sin y)=\phi(x)\cdot\phi(y).$$

В силу указанной причины положим по определению

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y,\ \ y \in R. \tag{2.3.1}$$

Равенство (2.3.1) называется формулой Эйлера. Согласно (2.3.1) имеем, в частности,

$$e^0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,\ e^{\pi i} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,\ e^{i\pi/2} = i$$

и т.д. Заметим также, что

$$|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1.$$

Определив комплексную экспоненту в случае чисто мнимого показателя, естественно положить в основу определения в общем случае комплексного показателя все то же упомянутое свойство свойство возведения в степень: $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$. Итак, примем для всякого $z = x + iy$, по определению,

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y),\ \ x, y \in R. \tag{2.3.2}$$

В частности, случай действительного переменного $z = x + i0$, приводит к равенству $e^z = e^x$, так что (2.3.2) является обобщением понятия показательной функции (с основанием, равным числу e) на комплексный случай. С выходом в комплексную плоскость экспонента приобретает некоторые новые непривычные свойства: она периодична с периодом $T = 2\pi i$ т.к.

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} =$$

$$= e^x(\cos(y + 2\pi i) + i\sin(\cos(y + 2\pi) =$$

$$= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z,$$

ее значения могут быть отрицательными действительными числами (см. приведенные выше примеры), однако сохраняется свойство $e^z \neq 0$ при любых z; в самом деле равенство $e^z = 0$ при каком либо z противоречило бы очевидному соотношению $|e^z| = e^x \cdot |e^{iy}| = e^x \cdot 1 > 0$.

2^0. Если в формулу Эйлера(2.3.1) подставить $(-y)$ вместо $y \in R$, то получим

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \qquad (2.3.3)$$

ввиду четности косинуса и нечетности синуса. Складывая и вычитая равенства (2.3.1) и (2.3.3), будем иметь:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2},$$

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Полученные соотношения положим в основу определения тригонометрических функций

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad (2.3.4)$$

и

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (2.3.5)$$

Из этого определения и $2\pi i$ - периодичности комплексной экспоненты следует, что обе функции $w = \cos z$, $w = \sin z$ обладают периодом $T = 2\pi$; кроме того на основании (2.3.4) и (2.3.5) легко проверить, что для всех z

$$\cos(-z) = \cos z, \ \sin(-z) = -\sin z.$$

Сохраняются привычные формулы для тригонометрических функций:

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2;$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

их доказательство основано на соотношениях (2.3.4) и (2.3.5) и может быть предоставлено читателю. Справедливы также формулы приведения и основное тригонометрическое тождество . Однако, при переходе к комплексному аргументу может нарушаться привычная ограниченность единицей модулей значений $\sin z$ и $\cos z$. Например, согласно (2.3.4)

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$$

- действительное число, большее единицы.

3^0. По определению полагаем

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

во всех точках z, где знаменатель соответствующей дроби не обращается в ноль. Гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс определяется, соответственно, в виде

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z + e^z}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2};$$

$$\operatorname{th} z = \frac{shz}{c\,hz}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{chz}{s\,hz},$$

в последних двух случаях исключаются из рассмотрения те значения z, для которых знаменатели обращаются в ноль.

2.4 Логарифмическая и показательная функция. Обратные тригонометрические функции

1^0. Логарифмом (натуральным логарифмом) числа z называется число w, обладающее свойством $e^w = z$, где $z \neq 0$. Установим существование и найдем формулу для вычисления логарифма.

Положим $w = u + i\,v$, тогда согласно (2.5.9) и (2.5.4)

$$e^{u+i\,v} = e^u \cdot e^{i\,v} = e^u(\cos v + i \sin v).$$

Если $z = |\,z\,| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то равенство $e^w = z$ означает, что

$$e^u(\cos v + i\sin v) = |\,z\,|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Модули равных комплексных чисел тоже равны:

$$e^u = |\,z\,|, \text{ откуда } u = \ell n|\,z\,|$$

(имеется в виду "обычный" логарифм действительного числа); что же касается аргументов, то они могут отличаться на $2\pi k$:

$$v = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Следовательно,

$$w = \ell n|z| + i(\varphi + 2\pi k), \text{ или, коротко, } w = \ell n|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z,$$

где $\varphi = \arg z$. Обозначая логарифм символом $\mathrm{Ln}\,z$ (употребление заглавной буквы означает многозначность результата), мы получили, что

$$\mathrm{Ln}\,z = \ell n|z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in z\,.$$

Функция вида $w = \mathrm{Ln}\,z$ называется логарифмической; она определена при всех $z \neq 0$ и многозначна. При $k = 0$ получаем так называемое главное значение логарифма

$$\ell n\, z = \ell n|z| + i \arg z\,.$$

2^0.В основу определения показательной функции положим известное (для действительного переменного) свойство

$$a^x = \left(e^{\ell n\, a}\right)^x = e^{x\,\ell n\, a}, \quad a > 0\,.$$

Положим по определению для *любых комплексных* $a \neq 0$ и z

$$a^z = e^{z\,\mathrm{Ln}\,a}\,.$$

Эта функция также оказывается многозначной в силу многозначности логарифма.

3^0. Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу. Именно, если $z = \sin w$, то число w называется арксинусом числа z; обозначение:

$$w = \mathrm{Arc}\sin z.$$

Если рассмотреть z как переменную величину, то речь уже идет о функции вида $w = \mathrm{Arc}\sin z$. Аналогично, если $z = \cos w$, то получаем арккосинус

$$w = \mathrm{Arc}\cos z;$$

если $z = \mathrm{tg}\, w$, то

$$w = \mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\, z;$$

для $z = \mathrm{ctg}\, w$ имеем

$$w = \mathrm{Arcctg}\, z.$$

(арктангенс и арккотангенс соответственно).

6^0. На оснований определений обратных тригонометрических функций получаются следующие формулы для вычисления их значений

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$

$$\mathrm{Arctg}\, z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz},$$

$$\mathrm{Arcctg}\, z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}.$$

Глава 3. Дифференцирование и интегрирование функций комплексной переменной

3.1. Понятие производной

1^0. Определение производной формально не отличается от случая функций действительного переменного. Однако, на самом деле, условие дифференцируемости функций комплексного переменного является более ограничительным в сравнении с упомянутым случаем, что будет ясно из дальнейшего.

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в точке $z = x + yi$ и некоторой ее окрестности. Пусть x и y получают, соответственно, приращения Δx и Δy. Тогда $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$ - соответствующее приращение переменной z. При переходе от точки z к точке $z + \Delta z$ (значения Δx, Δy предполагаем столь малыми, что точка $z + \Delta z$ расположена в той же окрестности) значение $w = f(z)$ получает некоторое приращение $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

О п р е д е л е н и е. Пусть существует предел вида

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \tag{3.1.1}$$

Он называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$ либо w', $\frac{dw}{dz}$, $\frac{df}{dz}$. Функция же $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z.

Заметим, что в случае функции действительного переменного $\varphi(x)$ существование производной есть существование предела $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$, когда Δx приближается к нулю вдоль оси абсцисс. В случае же (3.1.1) Δz приближается к нулю в комплексной плоскости по *любому* пути. Это и является причиной появления некоторых новых дополнительных свойств дифференцируемых функций в сравнении со случаем функций действительного переменного.

2^0. Из свойств пределов и определения (3.1.1) вытекает, что дифференцируемость $f(z)$ в точке z эквивалентна равенству

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) = \alpha(z, \Delta z),$$

где $\alpha(z, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Следовательно, существование производной равносильно соотношению

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z. \tag{3.1.2}$$

Выражение $dw = f'(z)\Delta z$ называется *дифференциалом* $f(z)$ в точке z.

Если $\Delta z \to 0$, то из (3.1.2) вытекает, что $\Delta w \to 0$, а это означает: дифференцируемость в точке z влечет за собою *непрерывность* $f(z)$ в той же точке.

3^0. Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной $f'(z_0) \neq 0$, считая для определенности, что $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 и некоторой ее окрестности U_0. Если W_0 - образ этой окрестности (при отображении функцией f), то для любой кривой $\gamma \subset U_0$ ее образ $\Gamma \subset W_0$; обозначим $w_0 = f(z_0)$.

Пусть $z \to z_0$ вдоль кривой γ, тогда (в силу непрерывности $w = f(z)$, см. п.2^0) $w \to w_0$ вдоль Г. Комплексные числа Δz и Δw изображаются векторами секущих к кривым γ и Г соответственно; следовательно $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta w$ - углы наклона этих векторов к соответствующим осям абсцисс. Поскольку при делении аргумента комплексных чисел вычитаются, то согласно (3.1.1)

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \arg\left(\underset{\Delta z \to 0}{\ell im} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \underset{\Delta z \to 0}{\ell im} (\arg \Delta w) - \underset{\Delta z \to 0}{\ell im} (\arg \Delta z) = \Phi - \varphi,$$

где Ф и φ- углы наклона (к осям абсцисс) уже соответствующих *касательных* (касательная - это предельное положение секущей). Итак, $\alpha = \arg f'(z_0)$ - угол, на которой относительно точки 0 повернулась касательная (к произвольной кривой γ в точке z_0) при отображении $w = f(z)$.

В определении (3.1.1)

$$|f'(z_0)| = \underset{\Delta z \to 0}{\ell im} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}, \text{ т.е. } |\Delta w| \sim \text{const} \cdot |\Delta z| \; (f'(z_0) \neq 0),$$

где const и есть $|f'(z_0)|$. Следовательно, бесконечно малое расстояние между точками z_0 и $z = z_0 + \Delta z$ преобразуются в бесконечно малое расстояние между w_0 и $w = w_0 + \Delta w$, так что отношение этих расстояний (при произвольности пути, по которому точка z приближается к z_0) остается постоянным.

Итак, в данной точке z_0 отображение f обладает постоянством угла поворота касательных и постоянством коэффициента растяжения (сжатия); см. рис. 3.1.1.

Отображение с такими свойствами называется *конформным.*

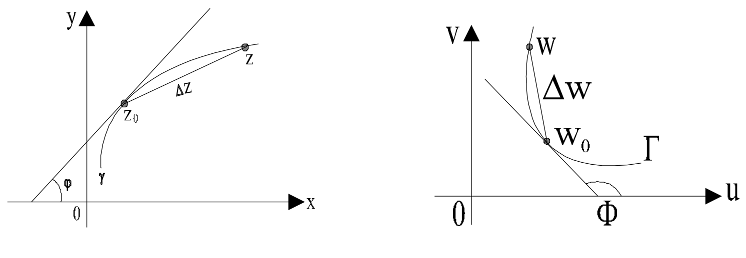

Рис.3.1.1

3.2. Правила дифференцирования

1^0. Из определения (3.1.1) производной и привычных свойств пределов (сохраняющихся при переходе к случаю функций комплексного переменного) вытекают и привычные правила дифференцирования:

а) если $f(z) = C$, где $C = \text{const}$ (постоянное комплексное число), то

$$f'(z) = 0;$$

б) $\left(C \cdot f(z)\right)' = C \cdot f'(z), \qquad C = \text{const};$

в) $\left(f(z) + g(z)\right)' = f'(z) + g'(z);$

г) $\left(f(z) \cdot g(z)\right)' = f'(z) g(z) + f(z) \cdot g'(z);$

д) $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)' = \dfrac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$ в точках, где $g(z) \neq 0$.

2^0. Справедливо правило дифференцирования сложной функции:

$$\left(\varphi\left(f(z)\right)\right)' = \varphi'\left(f(z)\right) \cdot f'(z).$$

Если $w = f(z)$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие области G (в комплексной плоскости точек z) на $\widetilde{G}$ (в комплексной плоскости точек w), то определено (однозначное) обратное соответствие $z = \varphi(w)$, называемое обратной функцией. Справедлива формула:

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

3^0. Сохраняется и таблица производных:

1) $z' = 1;$

2) $\left(z^{\alpha}\right)' = \alpha z^{\alpha - 1};$

3) $\left(\sin z\right)' = \cos z;$

4) $(\cos z)' = -\sin z$;

5) $(\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$;

6) $(\operatorname{ctg} z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$;

7) $\left(e^z\right)' = e^z$;

8) $\left(a^z\right)' = a^z \operatorname{Ln} a$;

9) $(\operatorname{Arc}\sin z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

10) $(\operatorname{Arc}\cos z)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$;

11) $(\operatorname{Arc}\operatorname{tg} z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$;

12) $(\operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z)' = -\dfrac{1}{1+z^2}$.

Здесь производные многозначных функций понимаются как производные, вычисленные при каждом фиксированном k, $k \in Z$.

Эти формулы могут быть выведены в точности также, как в случае функций действительного переменного. Могут быть использованы также связи (между собою) функций комплексных переменных. Например, $\left(a^z\right)' = \left(e^{z\operatorname{Ln} a}\right)' = e^z\,(z\operatorname{Ln} a)' = e^z \operatorname{Ln} a$, и т.д.

3.3. Условия дифференцируемости

1^0. Пусть $z = x + i\,y$, и $w = f(z)$ определена в точке z и в некоторой ее окрестности. Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y).$$

Необходимое условие дифференцируемости f в точке z содержится в следующем утверждении.

Т е о р е м а 1. Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке z. Тогда существуют частные производные функций u и v то обеим переменным в точке (x,y), причем в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{3.3.1}$$

Соотношения (3.3.1) называется условиями Коши-Римана-Эйлера-Даламбера (чаще говорят: условия Коши - Римана).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует $f'(z)$, определяемая как предел вида (3.1.1). В параграфе 3.1. отмечалось (см. п.1^0), что характер стремления к нулю величины $\Delta z=\Delta x+i\,\Delta y$ может быть произвольным. Выберем, в частности, случаи

1) $\Delta y=0$, т.е. $\Delta z=\Delta x$, тогда $\Delta z\to 0$ означает, что $\Delta x\to 0$;

2) $\Delta x=0$, т.е. $\Delta z=i\Delta y$, тогда $\Delta z\to 0$ одновременно с $\Delta y\to 0$.

В обоих случаях переход от точки z к точке Δz вызывает приращение $\Delta w=\Delta u(x,y)+i\,\Delta v(x,y)$. В первом случае каждое из приращений Δu и Δv *есть приращение по переменной x*, следовательно

$$\begin{aligned} f'(z)&=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u+i\,\Delta_x v}{\Delta x}=\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+i\,\frac{\Delta_x v}{\Delta x}\right)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

При этом само существование $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ вытекает из существования пределов действительной и мнимой части (при $\Delta z\to 0$) функции ("разностного отношения") $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$, тогда как сама эта функция имеет предел по условию теоремы.

Аналогично, во втором случае, $\Delta u = \Delta_y u, \quad \Delta v = \Delta_y v$, т.е.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y u + i\Delta_y v}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y\to 0}\left(\frac{\Delta_y v}{\Delta y} + \frac{i}{i^2}\frac{\Delta_y u}{\Delta y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Правые части соотношений (3.3.2) и (3.3.3) совпадают, т.к. выражают собою одну и ту же $f'(z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

По определению равенства комплексных чисел имеем отсюда соотношения (3.3.1), что и требовалось доказать.

2^0. З а м е ч а н и е 1. Как известно, дифференцируемость в точке (x, y) функций u и v (как функций от двух переменных), есть условие более жесткое, чем существование частных производных по обеим переменным. Она (дифференцируемость) означает, что полные приращения Δu и Δv могут быть представлены в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\Delta y}\cdot\Delta y + \alpha_1\cdot\Delta x + \alpha_2\cdot\Delta y, \tag{3.3.4}$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\Delta y + \beta_1\cdot\Delta x + \beta_2\cdot\Delta y, \tag{3.3.5}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ - является бесконечно малыми (стремятся к нулю) при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

В результате более детального рассмотрения можно было бы доказать, что для дифференцируемой в точке z функции f не только существуют указанные в (3.3.1) частные производные, но функции u и v *дифференцируемы* в точке (x, y).

З а м е ч а н и е 2. Как установлено выше, $f'(z)$ можно вычислить по любой из указанных в (3.3.2), (3.3.3)формул, например,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так, для

$$e^{z} = e^{x + i y} = e^{x} (\cos y + i \sin y)$$

имеем $u(x, y) = e^{x} \cos y$, $v(x, y) = e^{x} \sin y$. Значит,

$$\left(e^{z}\right)' = \left(e^{x} \cos y\right)'_{x} + i \left(e^{x} \sin y\right)'_{x} = e^{x} \cos y + i e^{x} \sin y = e^{z},$$

и мы получили еще одно доказательство формулы 7) таблицы производных.

3^0. Достаточное условие дифференцируемости $f(z)$ в точке z содержится в следующем утверждении.

Т е о р е м а 2. Если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) и выполнены условия Коши-Римана (3.3.1), то $f'(z)$ существует в точке $z = x + i y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}$$

Следует установить, что существует его предел при $\Delta z \to 0$. Согласно условию теоремы Δu и Δv можно представить в виде (3.3.4) и (3.3.5) соответственно. Поэтому

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\Delta y\right) + \left(\alpha_1 + i\beta_1\right)\Delta x + \left(\alpha_2 + i\beta_2\right)\Delta y}{\Delta x + i\,\Delta y}$$

(3.3.6)

Заметим, что

$$\left|\frac{(\alpha_1 + i\beta_1)\Delta x + (\alpha_2 + i\beta_2)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}\right| \le$$

$$\le \left|\alpha_1 + i\alpha_1\right|\cdot\frac{|\Delta x|}{|\Delta x + i\Delta y|} + \left|\alpha_2 + i\beta_2\right|\cdot\frac{|\Delta y|}{|\Delta x + i\Delta y|}.$$

(3.3.7)

В правой части (3.3.7)

$$|\Delta x| \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \qquad |\Delta y| \le \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

и

$$|\Delta x + i\,\Delta y| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Значит правая часть не превосходит бесконечно малой величины

$$|\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2|,$$

а тогда выражение под знаком модуля в левой части (3.3.7) есть "комплексная" бесконечно малая, которую обозначим через γ: $\gamma \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Далее, заменим $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ в числителе дроби (3.3.6):

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta y+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\Delta y\right)}{\Delta x+i\,\Delta y}+\gamma=$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot(\Delta x+i\,\Delta y)+i\,\frac{\partial v}{\partial x}\cdot(\Delta x+i\,\Delta y)}{\Delta x+i\,\Delta y}+\gamma=\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\Delta x}+\gamma.$$

Значит при $\Delta z\to 0$ (а тогда $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, и, следовательно, $\gamma\to 0$)

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}\to\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x},$$

т.е. существует предел вида (3.1.1); именно, он равен $\frac{\partial u}{\partial x}+i\,\frac{\partial v}{\partial x}$. Существование $f'(z)$ доказано.

4^0. Согласно теоремам 1 и 2 замечанию 1 п.2^0, *дифференцируемость u,* v *в точке* (x,y) *и выполнимость условий Коши-Римана* (3.3.1) *необходимы и достаточны для существования производной* $f'(z)$.

5^0. О п р е д е л е н и е. Функция $w=f(z)$, дифференцируемая в точке z_0 и некоторой ее окрестности, называется *аналитической (или голоморфной) в точке* z_0.

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области G, называется *аналитической (голоморфной) в этой области.*

Точки z комплексной плоскости, в которых однозначная $f(z)$ является аналитической, называются *правильными* точками этой функции, а все остальные точки (в частности, те, где $f(z)$ не определена) - *особыми* для $f(z)$.

Согласно п.4^0 критерием аналитичности $f(z)$ в данной точке z (в данной области G) является дифференцируемость u, v и выполнимость условий Коши-Римана (3.3.1) в этой точке и некоторой ее окрестности (в области G).

Например, исследуем вопрос о дифференцируемости (аналитичности) функции $w = \bar{z}^2$. Имеем:

$$w = (x - y\,i)^2 = x^2 - y^2 - 2\,xy\,i, \text{ т.е. } u = (x, y) = x^2 - y^2, \quad v = -2\,xy.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

Проверяем условия Коши-Римана (3.3.1):

$$\begin{cases} 2x = -2x \\ -2y = 2y \end{cases}; \text{ отсюда получаем } x = y = 0.$$

Итак, в единственной точке $z = 0$ условия Коши-Римана выполнены, и, следовательно, в этой точке $w = \bar{z}^2$ имеет производную. Однако, функция ни в одной точке не аналитична (точка дифференцируемости - единственная, и не существует ее окрестности, где дифференцируемость сохраняется).

3.4. Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части

1^0. В различных вопросах математики и ее приложениях рассматривается так называемое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0.$$

Всякая функция $\sigma = \sigma(x, y)$, удовлетворяющая этому уравнению называется гармонической.

Пусть $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ - функция, аналитическая в некоторой области G. Докажем, что в этом случае $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ - гармонические функции. Следует отметить, что из дальнейшего рассмотрения будет следовать существование и непрерывность в G всех частных производных второго порядка функций u и v (будет доказано, что аналитическую функцию f в область G можно дифференцировать сколь угодно много раз). Поэтому тождества (условия Коши-Римана, выполненные в области G)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.4.1}$$

можно продифференцировать - первое по x, а второе по y, при этом смешанные частные производные второго порядка оказываются равными. Имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \, \partial x}. \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \, \partial x}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ а тогда } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Если теперь первое из тождеств (3.4.1) продифференцировать по y, а второе по x и сложить (почленно), то будем иметь

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

что и требовалось доказать.

2^0. Пусть теперь известна действительная часть $u = u(x, y)$ аналитической функции $w = f(z)$. Тогда, зная частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, мы из условий Коши-Римана (3.4.1) сможем найти и $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Теперь функцию $v(x, y)$ по ее полному дифференциалу можно восстановить в виде криволинейного интеграла по произвольной траектории интегрирования, расположенной в области G (этот факт был доказан в интегральном исчислении):

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + C, \qquad (3.4.2)$$

где (x_0, y_0) - любая фиксированная точка в области G; C - произвольная постоянная. Аналогично, если известна мнимая часть $v = v(x,y)$ аналитической функции $f(z)$, то из условий Коши-Римана мы определяем $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$; следовательно,

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + C.$$

Например, найдем аналитическую функцию $f(z)$, действительная часть которой имеет вид

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + 2(x-y).$$

Поскольку $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, то достаточно определить $v(x,y)$ по формуле (3.4.2). Согласно условиям Коши-Римана (3.4.1) найдем для этого частные производные

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 - y^2 + 2(x-y)\right)'_x = 2x + 2$$

и

$$\frac{\partial v}{dx} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\left(x^2 - y^2 + 2(x-y)\right)'_y = 2y + 2\,.$$

Так как найденные выражения определены (непрерывны как функции от x и y) во всей комплексной плоскости, то в (3.4.2) можно выбрать, например, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Значит

$$v(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)}(2Y+2)\,dX+(2X+2)\,dY+C. \qquad (3.4.3)$$

Траекторию интегрирования ONM выберем, как показано на рисунке (3.4.1); координаты точек: $0(0,0)$; $N(x,0)$; $M(x,y)$. Интеграл (3.4.3) запишем в виде суммы двух: по отрезку ON (на котором $y=0$, и, следовательно, $dy=0$) и NM (на котором $X=x$ постоянен , а значит $dx=0$):

$$v(x,y)=\int\limits_0^x(0+2)\,dX+\int\limits_0^y(2x+2)\,dy+C=2x+(2x+2)\,Y\Big|_0^y+C=$$
$$=2x+2xy+2y+C.$$

Следовательно,

$$f(z)=x^2-y^2+2(x-y)+(2x+2xy+2y)i+Ci=$$
$$=\left(x^2-y^2+2i\,xy\right)+2\left(x-y+i(x+y)\right)+Ci=$$
$$=(x+iy)^2+2\left(x+iy+i(x+iy)\right)+C_i=z^2+2(z+iz)+Ci.$$

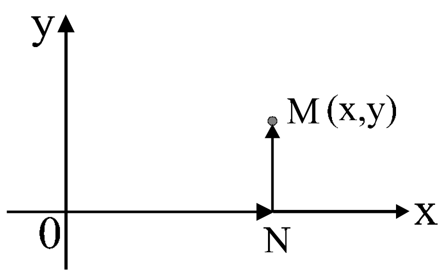

Рис.3.4.1

3.5. Интеграл от функции комплексного переменного

1^0. Понятие интеграла функции $w=f(z)$ по линии L вводится аналогично понятию криволинейного интеграла функции действительного переменного.

Пусть дуга $\cup AB$ линии L задается параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta;$$

при этом точка $M(x,y)$ совершает движение из положения A в положение B при изменении t от α до β. Будем считать, что $x'(t)$ и $y'(t)$ существуют и непрерывны на отрезке$[\alpha,\beta]$. Иными словами, дуга $\cup AB$ задается с помощью уравнения

$$z = z(t), \quad \text{где } z(t) = x(t) + i\,y(t), \quad \alpha \le t \le \beta;$$

при этом $z'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]$.

Пусть, далее, $f(z)$ непрерывна в открытой области G и $\cup AB \subset G$. Разобьем произвольным образом эту дугу на части точками $z_0, z_1, \dots, z_n$ в направлении от A к B, при этом z_0 совпадает с точкой A, z_n с точкой B. На каждой из частичных дуг $\cup z_{k-1}z_k$ произвольным образом выберем по точке η_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ и составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta z_k, \tag{3.5.1}$$

где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ - вектор, идущий из точки z_{k-1} в точку z_k; см. рис.3.5.1. Обозначим через s наибольшую из длин этих векторов (хорд): $s = \max\limits_{k} |\Delta z_k|$.

Сумма (3.5.1) называется интегральной, а предел вида

$$\lim_{s \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\eta_k)\Delta z_k \tag{3.5.2}$$

- интегралом от функции $f(z)$ по дуге $\cup AB$; он обозначается символом $\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz$.

Можно доказать, что при сформулированных выше условиях на функцию $f(z)$ и дугу линии L предел (3.5.2) существует и не зависит от способа разбиения $\cup\, AB$ на части точками z_k и от выбора "промежуточных" точек η_k.

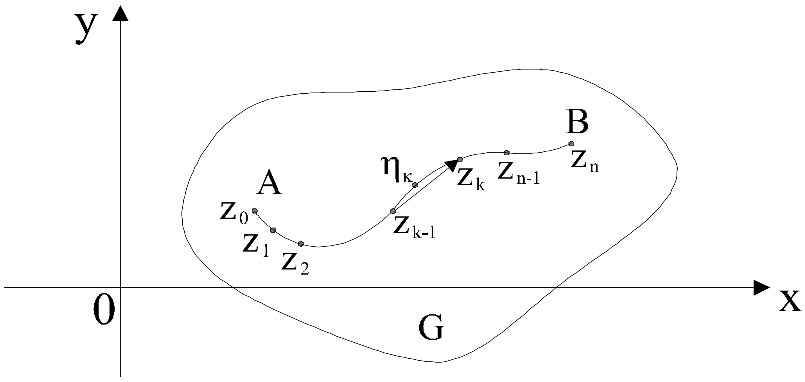

Рис.3.5.1

2^0. Из определения п.1^0 вытекают привычные свойства интеграла:

1) $\int\limits_{\cup AB} \left(f_1(z)+f_2(z)\right)dz=\int\limits_{\cup AB} f_1(z)\,dz+\int\limits_{\cup AB} f_2(z)\,dz;$

2) $\int\limits_{\cup AB} \lambda\cdot f(z)\,dz=\lambda\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz,$ где $\lambda=\text{const};$

3) $\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz=-\int\limits_{\cup BA} f(z)\,dz,$

где $\cup\, BA$ - та же самая дуга, но с противоположным направлением обхода (от точки B к точке A);

4) если C - произвольная точка на $\cup\, AB$, то

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz=\int\limits_{\cup AC} f(z)\,dz+\int\limits_{\cup CB} f(z)\,dz,$$

5) $\int\limits_{\cup AB} dz=Z-z_0$,

где z_0 и Z - комплексные числа, изображаемые, соответственно, точками A и B;

6) $\left| \int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz \right| \le M \cdot \ell$,

где M - любая постоянная, определяемая условием $|f(z)| \le M$, $z \in \cup AB$; ℓ - длина L.

Докажем, например свойство 5). Имеем для $f(z)=1$ интегральную сумму (3.5.1) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta z_k = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \ldots + z_{n-1} - z_{n-2} + z_n - z_{n-1} =$$
$$= z_n - z_0 = Z - z_0,$$

а тогда и предел (3.5.2) от постоянной $Z - z_0$ равен $Z - z_0$. Свойство 5) установлено.

3^0. Вычисление интеграла (3.5.2) сводится к вычислению определенного интеграла комплексной функции действительной переменной t:

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt. \qquad (3.5.3)$$

Действительно, произвольное слагаемое в интегральной сумме (3.5.1) имеет вид

$$f(\eta_k)\Delta z_k = f(\eta_k)(\Delta x_k + i\,\Delta y_k),$$

при этом приращения Δx_k и Δy_k функций $x(t)$ и $y(t)$ (при изменении z от z_{k-1} до z_k) могут быть приближенно представлены в виде дифференциалов:

$$\Delta x_k \approx x'(t_k)\Delta t_k; \quad \Delta y_k \approx y'(t_k)\Delta t_k;$$

здесь t_k - аргумент функции $z(t)$ такой что $z_k = z(t_k)$ и $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Значение $f(\eta_k)$, ввиду непрерывности f, можно приближенно заменить на $f(z_k) = f(z(t_k))$, если $|\Delta z_k|$ достаточно мало; в свою очередь, это достигается (по причине непрерывности $z(t)$) выбором достаточно малых Δt_k. Итак,

$$f(\eta_k)\Delta z_k \approx f(z(t_k))(x'(t_k)+y'(t_k))\Delta t_k =$$
$$= f(z(t_k))\cdot z'(t_к)\Delta t_k.$$

Следовательно, при $\max|\Delta t_k| \to 0$, поведение интегральных сумм (3.5.1) и

$$\sum_{k=1}^{n} f(z(t_k))\cdot z'(t_k)\Delta t_k \tag{3.5.4}$$

совпадает; сумма же (3.5.4) является интегральной для определенного интеграла в правой части (3.5.3). Такова схема доказательства (3.5.3).

4^0. Формальная подстановка

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \quad \text{и} \quad dz = dx + i\,dy$$

и вычисление произведения

$$f(z)\,dz = u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\big(v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy\big)$$

приводят нас также к формуле

$$\int\limits_{\cup AB} f(z)\,dz = \int\limits_{\cup AB} u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int\limits_{\cup AB} v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy, \quad (3.5.5.)$$

доказательство которой (подобно п.3^0) производится сравнением интегральных сумм для криволинейных интегралов в правой части (3.5.5) с суммой (3.5.1).

Например, вычислим интеграл (он потребуется нам в дальнейшем)

$$J = \oint\limits_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n\,dz,$$

где n - любое целое число; вычисление ведется вдоль окружности $|z-z_0| = R$ (z_0 и $R>0$ - данные числа) в направлении обхода против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. Имеем окружность с центром в точке $z_0 = x_0 + i\,y_0$ радиуса R, следовательно,

$$\begin{cases} x - x_0 = R\cos t \\ y - y_0 = R\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi .$$

Иначе говоря, $z - z_0 = R(\cos t + i\sin t)$ или $z = z_0 + Re^{it}$; тогда $dz = iRe^{it}dt$. При $n \ne -1$ имеем

$$J = \int_0^{2\pi} \left(Re^{it}\right)^n \cdot iRe^{it}dt = iR^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = iR^{n+1}\left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(e^{i(n+1)2\pi} - 1\right) = \frac{R^{n+1}}{n+1}\left(\cos 2(n+1)\pi + i\sin 2(n+1)\pi - 1\right) = 0.$$

Если $n = -1$, то

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i .$$

Итак,

$$\int_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dt = \begin{cases} 0, & n \ne -1, \quad n - \text{целое} \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}.$$

3.6. Интегральная теорема Коши

1^0. Пусть L - замкнутый контур, целиком расположенный в области G. Будем считать, что L задан уравнением $z = z(t)$ с непрерывной $z'(t)$, т.е. контур гладкий или хотя бы кусочно-гладкий.

Т е о р е м а К о ш и. Пусть f аналитична в G, и контур L ограничивает односвязную область $D \subset G$. Тогда

$$\oint_L f(z)\,dz = 0.$$

Эту теорему легко доказать при дополнительном предположении, что $f'(z)$ - непрерывна. В силу формул (3.3.2) и (3.3.3) тогда будут непрерывными в G все частные производные первого порядка функций

$u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$ и $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$. При этих предположениях к каждому из криволинейных интегралов в представлении (см.(3.5.5))

$$\oint_L f(z)\,dz=\oint_L u(x,y)\,dx+(-v(x,y))\,dy+i\oint_L v(x,y)\,dx+u(x,y)\,dy \quad (3.6.1)$$

можно применить формулу Грина:

$$\oint_L u\,dx+(-v)\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial(-v)}{dx}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy \quad (3.6.2)$$

и

$$\oint_L u\,dx+u\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy; \quad (3.6.3)$$

обход контура L в криволинейных интегралах происходит против часовой стрелки.

Согласно условиям Коши-Римана (3.4.1) интеграл в правой части (3.6.3) равен нулю и это же верно для двойного интеграла в (3.6.2), т.к.

$$\frac{\partial(-v)}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0.$$

Следовательно, равны нулю и оба криволинейных интеграла; они остаются нулевыми, если изменить направление обхода L на противоположное.

Теперь, в силу равенства (3.6.1), получаем утверждение теоремы.

2^0. Заметим, что свойство непрерывности $f'(z)$ вытекает из аналитичности $f(z)$, что будет доказано в дальнейшем. Однако, доказательство будет опираться на теорему Коши, а тогда сама она должна быть установлена иными (гораздо более объемными) рассуждениями, которые мы не приводим

3.7. Теорема Коши для многосвязной области

1^0. Пусть контуры L_1, $L_2, \ldots, L_n$ и L задаются также, как и в параграфе 3.6, являются замкнутыми и расположены в области G. Предположим, далее, что все L_j находятся внутри L, ограничивают односвязные области и на каждом из L_j и L направление обхода выбрано против часовой стрелки.

Т е о р е м а. Если $f(z)$ аналитична в области G, то

$$\oint_L f(z)\,dz = \oint_{L_1} f(z)\,dz + \oint_{L_2} f(z)\,dz + \ldots + \oint_{L_n} f(z)\,dz. \tag{3.7.1}$$

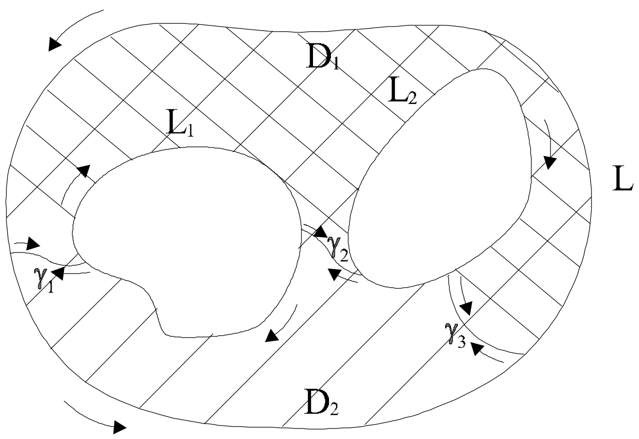

Рис. 3.7.1

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения проведем для случая $n = 2$, (см.рис.3.7.1). Соединим контуры L, L_1, L_2 гладкими кривыми γ_1, γ_2, γ_3. При этом область D, ограниченная линией L, оказалась разбитой на две односвязные области D_1 и D_2 с границами Γ' и Γ'', обходимыми в положительном направлении (т.е. в том направлении, при котором области D_1 (при обходе Γ') и D_2 (обход Γ'') остаются слева). По теореме Коши для односвязной области

$$\int\limits_{\Gamma'} f(z)\,dz = 0, \qquad \int\limits_{\Gamma''} f(z)\,dz = 0;$$

следовательно

$$\int\limits_{\Gamma'} f(z)\,dz + \int\limits_{\Gamma''} f(z)\,dz = 0, \text{ т.е. } \int\limits_{\Gamma'\cup\Gamma''} f(z)\,dz = 0.$$

Но объединение границ Γ' и Γ'' состоит из L (обходимой против часовой стрелки), L_1 и L_2 (обход - по часовой стрелке) и γ_1, γ_2, γ_3, обходимых дважды в противоположных направлениях, что показано на рисунке. Следовательно (свойство 4) п.2^0 параграфа 3.5.)

$$\oint\limits_{-L_1} f(z)\,dz + \oint\limits_{-L_1} f(z)\,dz + \int\limits_{-\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{-\gamma_2} f(z)\,dz +$$
$$+ \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz + \oint\limits_{L} f(z)\,dz = 0, \tag{3.7.2}$$

где знак "-" перед обозначением контура указывает на обход по часовой стрелке. Согласно свойству 3) п.2^0 параграфа 3.5 интегралы по $-\gamma_1$ и γ_1 отличаются только знаком и поэтому взаимно уничтожаются; то же самое верно для интегралов и по $-\gamma_2$ и γ_2. Теперь, меняя направление обхода по $-L_1$ и $-L_2$ получаем (3.7.2) в виде

$$-\oint\limits_{L_1} f(z)\,dz - \oint\limits_{L_2} f(z)\,dz + \oint\limits_{L} f(z)\,dz = 0,$$

а это и есть утверждение теоремы при $n = 2$. Общий случай $n \ge 2$ доказывается точно также: записываем равенство типа (3.7.2), содержащее интегралы по всем $-L_j$, $-\gamma_j$, γ_j и L $(J = 1, 2, \ldots, n)$, и откуда и вытекает (3.7.1).

2^0. Если сохраняются предположения п.1^0 для границ двусвязной области L (внешней) и ℓ (внутренней), то важным следствием теоремы является (см.рис.3.7.2) равенство

$$\int_L f(z)\,dz = \int_\ell f(z)\,dz$$

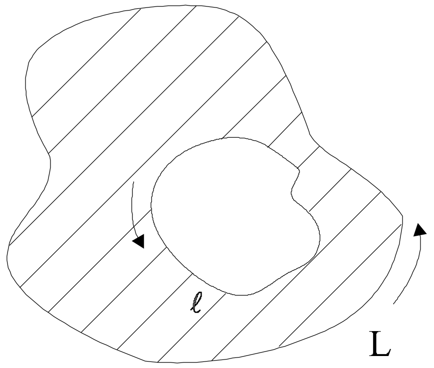

Рис. 3.7.2.

3.8. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.

1^0. Докажем следующее утверждение. Пусть $f(z)$ непрерывна в области G.

Интеграл по всякому замкнутому контуру L, расположенному в области G, равен нулю, тогда и только тогда, когда интеграл по любой дуге (расположенной в G) зависит только от положения начальной и конечной точек дуги.

Действительно, пусть

$$\oint_L f(z)\,dz = 0 \text{ для любого } L \subset G.$$

Выберем произвольную дугу γ_1, соединяющую точки z_0 и z. Всякая другая дуга γ_2, соединяющая эти же точки, образуют вместе с γ_1 замкнутый контур (см. рис. 3.8.1), поэтому

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{-\gamma_2} f(z)\,dz = 0,$$

где знак "-" перед γ_2 означает путь от z к z_0. Меняя направление на γ_2, имеем

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz - \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0 \text{ или } \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz,$$

т.е. независимо от пути интегрирования $\int\limits_{\cup z_0 z} f(z)dz$ - один и тот же.

В указанном случае этот интеграл удобнее обозначить в виде

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(z)dz.$$

Обратно, если L - произвольный замкнутый контур в G, то в случае независимости интеграла от пути, соединяющего любые z_0 и z имеем

$$\oint\limits_{L} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int\limits_{-\gamma_2} f(z)\,dz = \int\limits_{z_0}^{z} f(z)\,dz + \int\limits_{z}^{z_0} f(z)\,dz$$

Последние два интеграла можно вычислить (согласно предположению) вдоль отрезка прямой, соединяющего z_0 и z, а тогда они отличаются лишь знаком. Значит,

$$\oint\limits_{L} f(z)\,dz = 0.$$

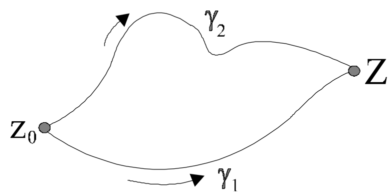

Рис.3.8.1

2^0. В частности, из теоремы Коши вытекает, что интеграл аналитической функции вдоль любой дуги, соединяющей z_0 и z, зависит лишь от положения z_0 и z; z_0 и z и упомянутые дуги предполагаются расположенными в области аналитичности функции f.

3^0. Т е о р е м а . В предположениях п.2^0. функция

$$\Phi(Z) = \int_{Z_0}^{Z} f(s)\,ds$$

является аналитической в G и

$$\Phi'(Z) = f(Z). \qquad (3.8.1)$$

Д о к а з а т е л ь т в о. Пусть z - произвольна, $z \in G$. В силу независимости интеграла от пути (см.п.2^0) для любого приращения Δz имеем

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = \frac{\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} =$$
$$= \frac{1}{\Delta z}\left\{\int_{Z_0}^{Z+\Delta Z} f(s)ds - \int_{Z_0}^{Z} f(s)ds\right\} = \frac{1}{\Delta z}\int_{Z}^{Z+\Delta Z} f(s)ds. \qquad (3.8.2)$$

В последнем интеграле траекторией интегрирования можно выбрать отрезок прямой, соединяющей z и $z+\Delta z$. В этом случае (свойство 5 пункта 2^0 параграфа 3.5)

$$\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \Delta z .$$

Оценим, используя (3.8.2) и свойство 6 п.2^0 параграфа 3.5, следующее выражение:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds - f(z)\cdot\Delta z\right| =$$
$$\frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds - f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} ds\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_{z}^{z+\Delta z} (f(s) - f(z)ds)\right| \le$$
$$\le \frac{1}{|\Delta z|}\cdot\left(\max|f(s) - f(z)|\right)\cdot|\Delta z| \le \max|f(s) - f(z)|;$$

здесь наибольшее значение модуля разности значений функции берется по всем $s \in [z, z+\Delta z]$, а так как f аналитична (а значит и непрерывна), то указанное значение можно сделать меньшим любого $\varepsilon > 0$ для достаточно малых $|\Delta z|$. По определению предела это означает, что

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = f(z).$$

Последнее соотношение равносильно (3.8.1). Ввиду произвольности $z \in G$ имеем, в частности, аналитичность $\Phi(z)$ в G. Теорема доказана.

4^0. Утверждение п.3^0 означает, что "интеграл с переменным верхним пределом"

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds \qquad (3.8.3)$$

есть первообразная для $f(z)$. Для другой первообразной $F(z)$ имеем

$$\left(\Phi(z) - F(z)\right)' = f(z) - f(z) = 0,$$

откуда действительная и мнимая части $U(x,y)$ и $V(x,y)$ разности $\Phi(z) - F(z)$ обладает свойством (см.(3.3.2)

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

По условиям Коши-Римана имеем также

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Следовательно полные дифференциалы $dU = 0$, $dV = 0$, откуда постоянными оказываются $U(x,y)$ и $V(x,y)$. Вместе с ними постоянна и разность $\Phi(z) - F(z)$. Таким образом,

$$\Phi(z) = F(z) + C, \qquad (3.8.4)$$

где C - некоторое постоянное комплексное число.

5^0. Имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z} f(s)\,ds = F(z) - F(z_0) \qquad (3.8.5)$$

где $F(z)$ - любая первообразная аналитической функции f.

Действительно, при $z = z_0$ в (3.8.4) получаем

$$0 = F(z_0) + C, \text{ т.е. } C = -F(z_0).$$

Теперь, согласно (3.8.4), получаем

$$\Phi(z) = F(z) - F(z_0).$$

Вспоминая определение (3.8.3), приходит к формуле (3.8.5).

3.9. Формула Коши

1^0. Пусть функция $f(z)$ однозначна и аналитична в области G, L - контур, ограничивающий односвязную область D, целиком лежащий в G и обходимый против часовой стрелки; характер линии L описан в п.1^0 параграфа 3.6. Тогда для любой точки z_0, лежащей в D (т.е. расположенной внутри L) имеет место следующая интегральная формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}. \tag{3.9.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем в D окружность $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$ столь малого радиуса ρ, чтобы

$$\left| f(z) - f(z_0) \right| < \varepsilon; \tag{3.9.2}$$

это возможно т.к. $f(z)$, будучи аналитической, является и непрерывной в D. Обозначим через γ указанную окружность, выберем на ней направление обхода против часовой стрелки и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 1 \tag{3.9.3}$$

согласно примеру 2 п.5^0 параграфа 3.5. Теперь по теореме Коши для двухсвязной области (п.2^0 параграфа 3.7) имеем

$$\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} = \oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0}. \tag{3.9.4}$$

Указанная теорема применима, поскольку $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z-z_0}$ аналитична вместе с $f(z)$ в области D, из которой исключена точка z_0, так что, в частности, $\varphi(z)$ аналитична в области между контурами γ и L и на самих этих контурах.

Оценим разность между интегралом (3.9.1) и $f(z_0)$, воспользовавшись (3.9.3) и (3.9.4):

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - f(z_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - f(z_0)\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{dz}{z-z_0}\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|. \tag{3.9.5}$$

Оценивая модуль интеграла (свойство 6 п.2^0 параграфа 3.5), имеем правую часть (3.9.5) не превосходящей

$$\frac{1}{2\pi|i|}\cdot\frac{\varepsilon}{\rho}\cdot 2\pi p = \varepsilon,$$

поскольку имеет место неравенство (3.9.2) и соотношение $|z-z_0| = \rho$ на окружности γ. Теперь, в силу произвольности ε имеем левую часть полученного неравенства

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)\,dz}{z-z_0} - f(z_0)\right| < \varepsilon$$

равной нулю. Следовательно, формула (3.9.1) доказана.

2^0. В предположениях п.1^0 в любой точке z_0 производная $f'(z)$ также оказывается аналитической функцией и имеет место формула

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}.$$

(3.9.6)

Результат (3.9.6) может быть получен из формулы Коши (3.9.1) путем формального дифференцирования (по z_0) под знаком интеграла; точного доказательства мы не приводим.

3^0. Более общим (при тех же предположениях) является следующее утверждение: для любого *n* в каждой точке $z_0 \in D$ существует производная $f^{(n)}(z_0)$ и для нее справедливо соотношение

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz. \tag{3.9.7}$$

4^0. Т е о р е м а М о р е р а. Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области G и интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру равен нулю, то $f(z)$ аналитична в G.

Это утверждение является обратным к свойству, что интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции равен нулю. Выше мы установили, что функция

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$$

является аналитической (при условиях теоремы этот интеграл не зависит от пути, соединяющего точки z_0 и z), причем доказательство сохранилось бы, если $f(z)$ требовать лишь непрерывной в G; далее, было установлено, что $F'(z)=f(z)$. Согласно результату п.3^0 параграфа 3.8 аналитической будет и $F'(z)$, совпадающая с $f(z)$, а это и есть доказываемый результат.

5^0. Неожиданной, на первый взгляд, является следующая

Т е о р е м а Л и у в и л л я. Пусть функция $f(z)$ аналитична во всей комплексной плоскости и существует постоянная M такая, что для всех z выполнено неравенство $|f(z)| \le M$. Тогда $f(z)$ тождественно равна постоянной.

Другими словами, аналитическая во всей плоскости функция, отличная от постоянной, не может быть ограничена по модулю; так, например, можно указать точки, в которых $|\sin z|$ сколь угодно велик.

Д о к а з а т е л ь с т в о мы не приводим, отметим лишь, что оно основано на формуле (3.9.6).

6^0. Важным приложением теоремы Лиувилля является так называемая *основная теорема алгебры*: всякое уравнение вида

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет хотя бы один корень.

Действительно, предположим противное. Тогда знаменатель дроби

$$f(z) = \frac{1}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0} \tag{3.9.8}$$

всегда отличен от нуля, а значит (вычислением производной) убеждаемся, что $f(z)$ аналитична во всей плоскости. Далее, очевидно, что

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}} = 0,$$

т.е. $|f(z)| < 1$ для достаточно больших $|z|$, например, в области, где $|z| > R$ с достаточно большим R. В круге $|z| \le R$ модуль $f(z)$ также ограничен, т.к. $f(z)$ непрерывна в круге. Получается, что аналитическая $f(z)$ имеет ограниченный модуль, а тогда, по теореме Лиувилля, $f(z) = \text{const}$. Но это противоречит ее определению (3.9.8), чем и доказана теорема.

Глава 4. Ряды комплексных чисел.

Степенные ряды комплексного переменного

В настоящей главе мы рассматриваем бесконечные суммы (ряды) комплексных членов.

4.1. Числовые ряды

1^0. Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $w_1, w_2, w_3, ..., w_n, ...$. Формально составленная бесконечная сумма вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n + ...$$

или, коротко,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \tag{4.1.1}$$

называется числовым рядом; общий член последовательности $\{w_n\}$ называется общим членом ряда (4.1.1).

Обозначим через

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n$$

n - ую частичную сумму ряда (4.1.1); при этом, по определению, $S_1 = w_1$.

Если существует предел вида

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

то числовой ряд называется сходящимся, а в противном случае – расходящимся.

Число S назовем суммой сходящегося ряда; говорят также, что ряд (4.1.1) сходится к сумме S и применяют запись

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n.$$

2^0. Установим некоторые свойства сходящихся рядов. Так, на случай рядов комплексных чисел легко переносятся свойства рядов действительных чисел.

Пусть $w_n = u_n + iv_n$, $n = 1,2,...$, так что u_n - действительная а v_n – мнимая части w_n . Ряд (4.1.1) тогда можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + iv_n).$$

Используя только что отмеченные свойства, получаем следующее утверждение.

Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{4.1.2}$$

составленные из действительных и мнимых частей последовательности w_n, то сходится и ряд (4.1.1).

Верно и обратное: если сходится ряд (4.1.1), то имеет место сходимость обоих рядов (4.1.2).

3^0. Для ряда (4.1.1) сохраняется необходимый признак сходимости ряда: если ряд сходится, то существует предел (при $n \to \infty$) его общего члена w_n, причем

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0.$$

Обратное утверждение неверно. Действительно, ряд с общим членом $w_n = \dfrac{1}{n} + i\cdot 0$ является расходящимся гармоническим рядом. Значит, утверждение, обратное сформулированному в теореме, неверно.

Сохраняется, очевидно, и достаточный признак расходимости:

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| \neq 0$$

(или если этот предел не существует), то ряд расходится.

Наряду с (4.1.1) рассмотрим ряд из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} | w_n |. \tag{4.1.3}$$

Имеет место следующий результаь: *если сходится ряд* (4.1.3)*, то сходится и ряд* (4.1.1).

Как и в случае рядов с действительными членами, ряд (4.1.1) называется в этом случае абсолютно сходящимся. Заметим, что утверждение, обратное сформулированному, неверно.

На примере ряда из действительных чисел легко показать, что числовой ряд может сходиться, тогда как ряд из модулей расходится. В этом случае сходимость ряда (4.1.1) называют условной.

Т е о р е м а. Ряд (4.1.1) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся оба ряда (4.1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во первых, из сходимости (4.1.3) вытекает абсолютная сходимость обоих рядов (4.1.2), поскольку $|u_n| \le |w_n|, |v_n| \le |w_n|$. Остается установить обратное утверждение. Заметим, что при каждом n наибольшее из двух чисел $|u_n|$ и $|v_n|$ не превосходит их суммы $|u_n| + |v_n|$, а тогда

$$|w_n| = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \le \sqrt{(max\{|u_n|, |v_n|\})^2 + (max\{|u_n|, |v_n|\})^2} =$$

$$= (max\{|u_n|, |v_n|\})\sqrt{2} \le (|u_n| + |v_n|)\sqrt{2}.$$

Если теперь абсолютно сходятся оба ряда (4.1.2), то будет сходящимся и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|u_n| + |v_n|)\sqrt{2}.$$

Согласно теореме сравнения знакоположительных рядов будем иметь тогда сходимость (4.1.3), чем и завершается доказательство теоремы.

Как следует из результата теоремы , достаточные условия сходимости ряда из модулей (4.1.3) являются одновременно и достаточными условиями сходимости ряда комплексных чисел (4.1.1). Поэтому признаки сходимости знакоположительных рядов, выступают здесь признаками сходимости (абсолютной) рядов с комплексными членами. Уточним последнюю мысль.

Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{| w_n |}$$

(будем называть его числом Коши). Если $K < 1$, то ряд (4.1.1) сходится абсолютно. Если же $K > 1$, то ряд (4.1.1) расходится (признак Коши).

Стоит отметить, что при $K > 1$ ряд из модулей (4.1.3) расходится ввиду того, что не выполнен необходимый признак сходимости, но тогда не могут стремиться к нулю и члены w_n; таким образом и ряд (4.1.1) оказывается расходящимся.

Аналогично обстоит дело и с "числом Даламбера"

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{| w_{n+1} |}{| w_n |}:$$

если $D < 1$, то ряд (4.1.1) сходится абсолютно; если же $D > 1$, то (4.1.1) расходится (признак Даламбера).

4.2. Степенные ряды

1^0. Пусть $\{z^n\}$, $n = 1,2,\ldots$, - последовательность степенных функций, $\{\alpha_n\}$, $n = 0,1,\ldots$ - последовательность комплексных чисел.

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \qquad (4.2.1)$$

называется *степенным*; для (4.2.1) употребляем также обозначение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке $z_0 = 0$, т.к. все его частичные суммы $S_n(z_0) = a_0$, и, следовательно, предел последовательности $\{S_n(z_0)\}$ существует и равен a_0. Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

Т е о р е м а А б е л я. Если степенной ряд (4.2.1) сходится в некоторой точке $z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в круге $U(0;\ |z_0|) = \{z\colon\ |z| < |z_0|\}$. Если же z_0' – точка расходимости, то ряд (4.2.1) расходится при всех z таких, что $|z| > |z_0'|$.

2^0. Из теоремы Абеля вытекает, что всякая точка сходимости z_0 степенного ряда ближе к началу координат, чем любая точка расходимости (если такая имеется). Следовательно, должно существовать некоторое "пограничное" расстояние *R*, такое что при $|z| < R$ (т.е. в каждом таком круге) имеет место абсолютная сходимость, а при $|z| > R$ (вне круга) – расходимость ряда (4.2.1).

Число *R* называется *радиусом сходимости* степенного ряда, область $U(0,R)$ – его кругом сходимости, см. рис. 4.2.1.

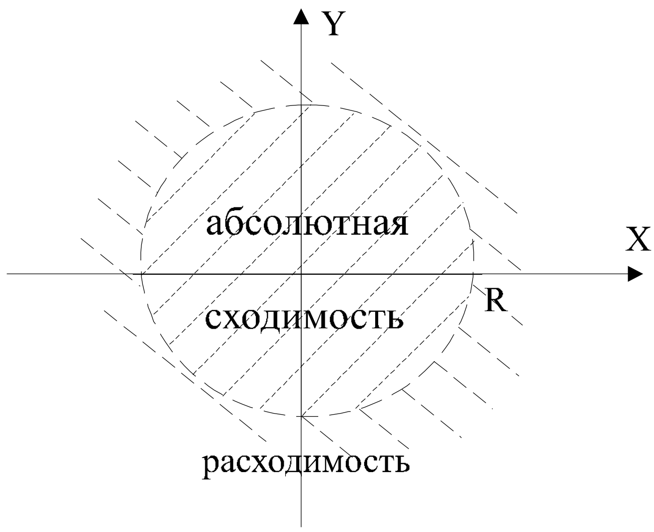

Рис. 4.2.1

При всяком $0 < \rho < R$ ряд (4.2.1) будет сходится и равномерно в круге $|z| \le \rho$ (определение равномерной сходимости функциональных рядов действительного переменного дословно переносится на случай степенных рядов комплексного переменного).

Радиус сходимости R степенного ряда (4.2.1) можно найти по одной из формул

$$R = \frac{1}{D} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{K},$$

если существует соответствующее "число Даламбера"

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ или "число Коши" } K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \qquad (4.2.2)$$

Формулы (4.2.2) остаются справедливыми, если $D = 0$ или $(K = 0)$- тогда $R = \infty$, т.е. областью сходимости ряда является вся комплексная плоскость. Если же $D = +\infty$ $(K = +\infty)$, то $R = 0$, т.е. "областью" сходимости является единственная точка $z_0 = 0$.

3^0. Рассмотрим теперь ряд по степеням разности $(z - z_0)$, где z_0 – данное комплексное число:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + \ldots + C_n (z - z_0)^n + \ldots \qquad (4.2.3)$$

Если произвести в (4.2.3) замену переменных $s = z - z_0$, то из вышеприведенных результатов будет вытекать, что *областью сходимости* (4.2.1) *является некоторый круг* $|z - z_0| < R$; имеют место формулы для радиуса сходимости (4.2.2).

Глава 5. Задачный материал

5.1. Задачи для активного обучения

Пример 1 (*действия с комплексными числами*). Вычислить

$$\left(\frac{2i}{1-i}-4i\right)(-1+2i)+\operatorname{Im}(1-i)^2.$$

Решение. Учитывая порядок действий, установленный для действительных чисел, имеем:

$$1)\ \frac{2i}{1-i}=\frac{2i\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i-2i^2}{1+1}=\frac{2+2i}{2}=1+i;$$

$$2)\ 1+i-4i=1-3i;$$

$$3)\ (1-3i)\cdot(-1+2i)=2i+3i-1-6i^2=5i-1+6=5+5i;$$

$$4)\ \operatorname{Im}(1-i)^2=\operatorname{Im}\left(1-2i+i^2\right)=\operatorname{Im}(-2i)=-2;$$

$$5)\ \left(\frac{2i}{1-i}-4i\right)(-1+2i)+\operatorname{Im}(1-i)^2=5i+5-2=3+5i.$$

Пример 2 (*приведение к тригонометрической форме комплексного числа*). Записать в тригонометрической форме числа

а) $z=-\sqrt{3}-i$; б) $z=3i$.

Решение. а) Находим (1.4) модуль комплексного числа:

$$|z|=\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=2.$$

Так как $x=-\sqrt{3}<0$, $y=-1<0$, т.е. точка расположена в третьей четверти, то получаем $\varphi=-\pi+arctg\frac{1}{\sqrt{3}}=-\pi+\frac{\pi}{6}=-\frac{5\pi}{6}$. Записываем z в тригонометрической форме, учитывая, что $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$, $-\sin\alpha=\sin(-\alpha)$:

$$z=2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right);$$

б) Находим модуль $|z|=\sqrt{0^2+3^2}=3$. Для числа $z=3i$ имеем $x=0,\ y=3>0$ (точка расположена на оси *OY*), тогда $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Получаем тригонометрическую форму $z=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

П р и м е р 3 (*вычисление корня n-й степени из комплексного числа*). Вычислить и изобразить на комплексной плоскости значения

а) $w=\sqrt[3]{-1-i}$; б) $w=\sqrt[4]{5i}$.

Решение: а) Для $z=-1-i$ имеем $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Точка z расположена в 3-ей четверти: $\varphi=\arg z=-\pi+arctg1=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$. Имеем

$$w_k=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)\right), k=0,1,2.$$

Следовательно,

$$w_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),\ w_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right),$$

$$w_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12}\right).$$

Тогда

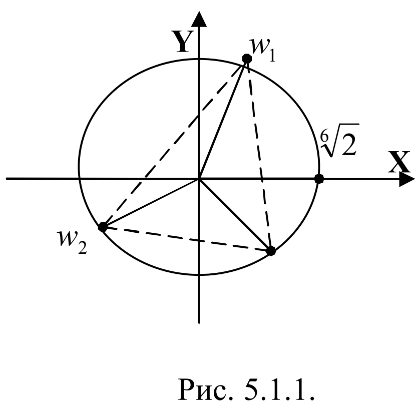

Рис. 5.1.1.

б) Для $z=-5i$ имеем $|z|=\sqrt{(-5)^2}=5$, по расположению точки z на оси OY (в нижней полуплоскости) видим, что $\varphi=\arg z=-\frac{\pi}{2}$. Теперь согласно формуле (2.2) получаем

$$w_k=\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}\right)\right), k=0,1,2,3.$$

Следовательно,

$$w_0=\sqrt[4]{5}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right),\ w_1=\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right),\ w_2=\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right),$$

$$w_3=\sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}\right).$$

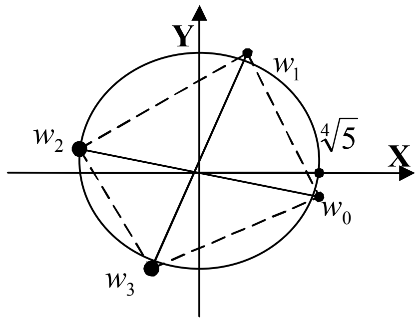

Рис. 5.1.2

П р и м е р 4 (*в ы ч и с л е н и е к о р н я n-й с т е п е н и и з к о м п л е к с н о г о ч и с л а*). Вычислить

а) $\sqrt{a^2}$, б) $\sqrt{-a^2}$, где $a>0$ - действительное число.

Р е ш е н и е. а) Запишем число a^2 в тригонометрической форме:

$$a^2=a^2(\cos 0+i\sin 0).$$

Имеем

$$\sqrt{a^2}=a\left(\cos\frac{0+2\pi k}{2}+i\sin\frac{0+2\pi k}{2}\right), k=0;1.$$

Получаем при $k=0$ $\sqrt{a^2}=a$; при $k=1$ $\sqrt{a^2}=a(\cos\pi+i\sin\pi)=-a$. Заметим, что во множестве действительных чисел рассматривалось лишь одно, положительное значение (арифметическое значение) корня, а именно, $\sqrt{a^2}=a$.

б) $\sqrt{-a^2}=\pm a\cdot i, a>0$. Действительно, $(ai)^2=a^2\cdot i^2=-a$ и $(-ai)^2=a^2\cdot i^2=-a$. Значит (по определению квадратного корня) оба значения $\pm ai$ служат результатом извлечения корня. Поскольку мы должны получить ровно два различных результата, то других значений $\sqrt{-a^2}$ нет.

П р и м е р 5 (*вычисление корня n-й степени из комплексного числа*). Вычислить и изобразить на комплексной плоскости значения $\mathrm{w}=\sqrt[3]{8-8\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$.

Р е ш е н и е. Для $\mathrm{z}=8-8\sqrt{3}\mathrm{i}$ имеем $|z|=\sqrt{8^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2}=16$; $\mathrm{tg}\varphi=-\frac{8\sqrt{3}}{8}=-\sqrt{3}$, поэтому $\varphi=\arg\mathrm{z}=-\frac{\pi}{3}$. По формуле (1.5.1) имеем

$$w_k=\sqrt[3]{16}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\right)\right), k=0,1,2.$$

Следовательно,

$$w_0=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right),\ w_1=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right),$$

$$w_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right).$$

Поскольку мы условились считать (для любого w) $-\pi<\arg w\le\pi$, то в случае w_2 исключим под знаком тригонометрических функций период 2π. Тогда

$$w_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)\right).$$

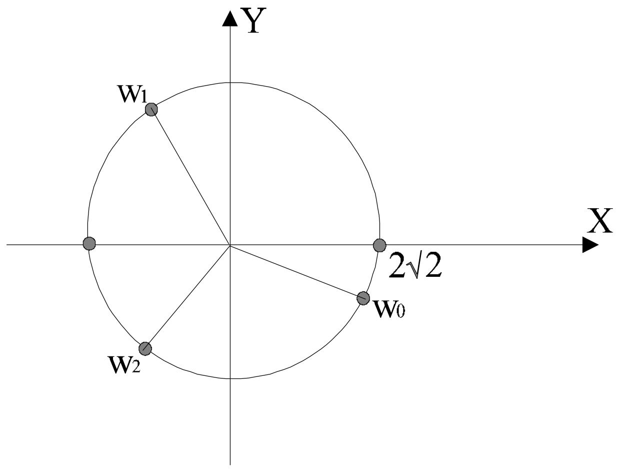

Рис.5.1.3

П р и м е р 6 (*а л г е б р а и ч е с к о е   у р а в н е н и е*). Решить уравнение $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$.

Р е ш е н и е. Имеем квадратное уравнение относительно величины x^2

$$\left(x^2\right)^2 + 10x^2 + 9 = 0.$$

Имеем

$$\left(x^2\right)_1 = -9, \left(x^2\right)_2 = -1.$$

В свою очередь, каждое из этих уравнений имеет по два корня:

$$x_{1,2} = \pm 3i, x_{3,4} = \pm i.$$

П р и м е р 7 (*а л г е б р а и ч е с к о е   у р а в н е н и е*). Решить уравнение $x^3 + 64 = 0$.

Р е ш е н и е. Записав условие в виде $x^3 + 4^3 = 0$, имеем по формуле суммы кубов

$$(x+4)\left(x^2 + 4x + 16\right) = 0.$$

Имеем $x_1 = -4$, и остается найти решения квадратного уравнения $x^2 + 4x + 16 = 0$, для которого дискриминант $\mathrm{D} = -48 < 0$. Получаем

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}i}{2} \quad \text{или} \quad x_{3,4} = -2 \pm 2\sqrt{3}i.$$

Пример 8 (*вычисление значения комплексной экспоненты*). Вычислить $e^{1-i\frac{\pi}{4}}$.

Решение. Используя определение функции e^z, получим

$$e^{1-i\frac{\pi}{4}} = e\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{e\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Пример 9 (*вычисления значений тригонометрический функций комплексного переменного*). Вычислить значения а) $w = \sin\frac{\pi i}{2}$; б) $w = \cos^2\frac{2}{i}$.

Решение: а) Имеем

$$w = \sin\frac{\pi i}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}}{2i} = -i \cdot \frac{\left(e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{2}}\right)}{2}.$$

б) По формуле $\cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2}$ имеем

$$\cos^2\frac{2}{i} = \frac{1+\cos\frac{4}{i}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{4}{i}.$$

Здесь

$$\cos\frac{4}{i} = \frac{e^{i\cdot\frac{4}{i}} + e^{-i\cdot\frac{4}{i}}}{2} = \frac{e^4 + e^{-4}}{2}.$$

Следовательно,

$$\cos^2\frac{2}{i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e^4 + e^{-4}\right).$$

Пример 10 (*логарифмическая функция*). Вычислить 1) $\mathrm{Ln}(-1)$; 2) $\mathrm{Ln}\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{i}-2\right)$; 3) $\mathrm{i}^{-\mathrm{i}}$

Решение. 1)Так как $-1=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi$, то

$$\mathrm{Ln}(-1)=\ell n1+\mathrm{i}(\pi+2\pi k)=\mathrm{i}\pi(1+2k),\quad k=0,\pm1,\ldots$$

2) Запишем $z=2\sqrt{3}\,\mathrm{i}-2$ в тригонометрической форме. Так как $|z|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4$; $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$; $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то φ - угол второй четверти, именно $\varphi=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$. Следовательно,

$$\mathrm{Ln}\left(2\sqrt{3}\,\mathrm{i}-2\right)=\ell n4+\mathrm{i}\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)=2\ell n2+\mathrm{i}\pi\left(\frac{2}{3}+2k\right),\quad k=0,\pm1,\ldots$$

3) $\mathrm{i}^{\mathrm{i}}=e^{-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}}$ по определению показательной функции.

При этом $\mathrm{i}=\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}$, значит $\mathrm{Ln}\,\mathrm{i}=\ell n1+\mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{2}+2\pi k\right)=\pi\left(\dfrac{1}{2}+2k\right)\mathrm{i}$.

Теперь $-iLni=\pi\left(\dfrac{1}{2}+2k\right)$, а тогда

$$i^{-i}=e^{\pi\left(\frac{1}{2}+2k\right)},\ k=0,\pm1,\ldots$$

Пример11 (*исследование дифференцируемости и аналитичности функции*). Найти точки, в которых функция $f(z)$:

а) дифференцируема; б) аналитична.

1) $f(z)=z^2$; 2) $f(z)=z\cdot\mathrm{Im}\,z$; 3) $f(z)=\bar{z}+z^2$.

Решение: 1) Выделим действительную и мнимую части $u(x,y)=\mathrm{Re}\,f(z),\ v(x,y)=\mathrm{Im}\,f(z)$:

$$f(z)=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi,\quad \text{т.е.}\quad u(x,y)=x^2-y^2,\ v(x,y)=2xy.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\frac{\partial v}{\partial x}=2y,\frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

Условия Коши-Римана выполнены, очевидно, при всех x и y, т.е. во всех точках комплексной плоскости функция $f(z)$ дифференцируема. Следовательно, по определению, $w=z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости.

2) Рассмотрим $f(z)=z\cdot\operatorname{Im}z$. Имеем:

$$f(z)=(x+yi)\cdot y=xy+iy^2,\ \text{т.е. } u(x,y)=xy, v(x,y)=y^2.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\frac{\partial u}{\partial y}=x,\frac{\partial v}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial y}=2y.$$

Проверяем условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} y=2y \\ -x=0 \end{cases};\ \text{отсюда получаем}\quad x=y=0.$$

Итак, в единственной точке $z=0$ условия Коши-Римана выполнены, и, следовательно, в этой точке функция $f(z)$ имеет производную. Значит, функция ни в одной точке не аналитична (точка дифференцируемости - единственная, и не существует ее окрестности, где дифференцируемость сохраняется).

Пример 12 (*вычисление интеграла*). Вычислить интеграл $J=\int\limits_L |z|\cdot\bar{z}\,dz$, вдоль дуги окружности $|z|=4$, обходимой против часовой стрелки от точки $z_1=-4i$ до $z_2=4i$ (рис. 5.1. 4).

Решение. Окружность $|z|=4$ имеет центр в начале координат и радиус $r=4$, поэтому ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin y \end{cases},\ \text{т.е. } z=\cos t+i\sin t.$$

При этом $\bar{z}=\cos t-i\sin t$, $dz=(-\sin t+i\cos t)dt=i(\cos t+i\sin t)dt$. Подставляя $|z|=4$, и учитывая что $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ на дуге $\cup z_1z_2$, имеем

$$J=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4\cdot(\cos t-i\sin t)\cdot i\cdot(\cos t+i\sin t)dt=4i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=4it\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\pi i$$

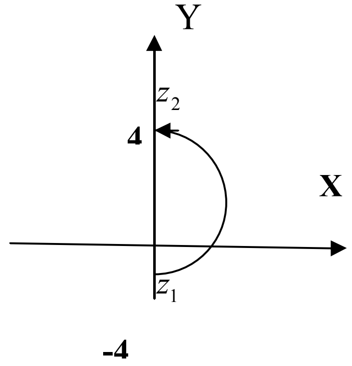

Рис. 5.1.4

5.2. Задачи для самостоятельного решения

1^0. *Упражнения к главе 1.*

1. Изобразить данные и сопряженные к ним числа точками плоскости

а) $1+i$;   б) $-2-3i$;   в) 5;   г) $-1+2i$;   д) $-4i$.

2.Вычислить

а) $(2+i)(-4+3i)+\mathrm{Im}(5-i)$;   г) $\frac{3+4i}{i}+\frac{5i}{2+i}$;

б) $\frac{37i}{6-i}-i\cdot|-3+4i|$;   д) $i\cdot\mathrm{Re}(2+3i)^2-\frac{1}{2i}$;

в) $(2i(2-i))^2$;   е) $[\frac{4+i}{i^3}-\mathrm{Im}(i\cdot(3-4i))]^2$

3. Доказать равенства

а) $\frac{6-i}{3+4i}=\frac{13+41i}{-25+25i}$;   б) $\mathrm{Re}\left(\frac{9-7i}{2-3i}\right)=3$;   в)

$$|\bar{z}+z|^2+|\bar{z}-z|^2=4|z|^2.$$

4. Что можно сказать о двух комплексных числах, если их сумма и разность одновременно представляют собой: а) действительные числа; б) чисто мнимые числа?

5. При каком действительном значении a выражение $3i^3 - 2ai^2 + (1-a)i + 5$ будет числом а) действительным; б) чисто мнимым; в) равным нулю?

6. Найти комплексное число z из уравнения $(2-3i)\cdot z = -1-5i$.

7. Найти $|\bar{z}|$ и $\arg\bar{z}$, если $z = \dfrac{\bar{z}_1}{z_2}$, $z_1 = i,\ z_2 = 1 + i\sqrt{3}$.

8. Найти модуль и аргумент (главное значение) комплексных чисел

$$z_1 = 1-3i,\ z_2 = 1+\sqrt{2}i,\ z_3 = \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot i,\ z_4 = 1-\sqrt{2}.$$

9. Записать в тригонометрической форме числа

$$z_1 = -2i, z_2 = 5, z_3 = \sqrt{3} - i, z_4 = \frac{-1+i}{2}.$$

10. Изобразить множества точек z, для которых

а) $|z+3i| \le 3$; б) $|z+i-1| > 1$; в) $\operatorname{Re}\dfrac{2z}{i} < 0$; г) $\operatorname{Im} z^2 < 2$; д) $|z| \le \left|2\sqrt{3}i - 2\right|$.

11. Доказать равенства а) $\dfrac{2+i}{3-i} = \dfrac{13+4i}{17-9i}$; б) $|\bar{z}+z|^2 + |\bar{z}-z|^2 = 4|z|^2$.

12. Найти действительные числа x и y из уравнений

а) $(5x+2y)i - x + y = 1$; б) $2x + 7y - (5-2x)i + 12 = 3yi$.

13. Даны числа

$$z_1 = -9i,\quad z_2 = -2,\quad z_3 = -(1+i),\quad z_4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

Выполнить указанные действия:

а) z_2^4; б) $z_1 \cdot z_2$; в) $\dfrac{z_2 z_3}{z_1}$; г) $\dfrac{z_4^2}{z_3}$.

14. Найти все значения а) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}-i}{25}}$; б) $\sqrt[4]{-8}$; в) $\sqrt[4]{1}$; г) $\sqrt[4]{i^3}$.

15. Решить уравнения и изобразить на комплексной плоскости множества решений:

а) $z^2+4z+53=0$; б) $2z^2-z-1=0$; в) $z^4+i=0$; г) $z^4+z^2=2$;

д) $z^4+26z^2+25=0$; е) $z^3+8i=0$; ж) $z^3+2z^2+2z+1=0$; з) $iz^4+1=0$.

2^0. *Упражнения к главе 2.*

1. Вычислить значения: а) $e^{i\pi}$; б) e^{i-1}; в) $\sin\dfrac{\pi i}{2}$; г) $\cos^2\dfrac{2}{i}$;

д) $\operatorname{ch}(-3i)$; е) $\operatorname{sh} i^3$; ж) $\operatorname{tg}\left(\sqrt{3}-i\right)$.

2. Найти а) $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$, б) $\operatorname{Ln}5(4i-3)$, в) $-i\operatorname{Ln}(-e)$;

г) i^{1+i}; д) 3^{-i}; е) 2^{-1}.

3. Вычислить значения: а) cos (3-i)cos(3+i) - sin (i-3)sin (i+3),

б)Arcsin i , в) Arccos 0.

4. Вычислить значения производной данной функции в данной точке z:

а) w=sin 2i z, z=0; б) w=z tg(i-z), z=i.

3^0. *Упражнения к главе 3*

1. Найти точки, в которых данная $w=f(z)$:

а) дифференцируема;

б) аналитична:

1) $w=e^{1-2z}$; 2) $w=\dfrac{\cos z}{2}$; 3) $w=\bar{z}^2-z+1$;

4) $w=\dfrac{\bar{z}}{z}$; 5) $w=z\left(|z|-1\right)$; 6) $w=\operatorname{Re}z^2$.

2. Найти угол поворота α и коэффициент растяжения k при отображении $w=f(z)$ в точке z_0, если

1) $w=z^2-1+i,\quad z_0=1$; 2) $w=i-e^z,\quad z_0=-i\pi$.

3. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_L z\operatorname{Im}(z-i)\,dz$ вдоль линии $z=x+ix^2$ от точки $z_1=1+i$ до точки $z_2=-1+i$;

2) $\int\limits_L z\,|\,z\,|\,dz$ вдоль дуги окружности $z=2e^{i\varphi}$ в направлении против часовой стрелки от точки $z_1=2$ до точки $z_2=2i$;

3) $\int\limits_L \left(1-z^2\right)dz$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки:

а) $z_1=i-1$ и $z_2=1-i$; б) $z_1=-2$ и $z_2=4i$;

4) $\int\limits_L \left(z-2\operatorname{Re}z\right)dz$ вдоль ломанной, соединяющей точки $z_1=2$, $z_2=2+2i$, $z_3=2i$.

4. Вычислить интеграл по замкнутому контуру L в направлении против часовой стрелки:

1) $\oint\limits_L \dfrac{\sin iz}{z-\dfrac{\pi i}{2}}\,dz$; L – окружность $|\,z\,|=2$;

2) $\oint\limits_L \dfrac{ze^{-z}}{z^2+1}\,dz$; L – окружность: а) $|\,z-i\,|=1$; б) $|\,z+1\,|=1$;

в) $|\,z-3i\,|=1$;

3) $\oint\limits_L \dfrac{\cos(z-i)}{(z-i)^3}\,dz$; L – окружность $2|\,z\,|=3$;

4) $\oint\limits_L \dfrac{z+i}{z(z-2)^2}\,dz$; L – окружность $|\,z-2\,|=1{,}9$;

5) $\oint\limits_L \dfrac{e^{i\pi z}}{\left(z^2-1\right)^2}\,dz$; L – окружность $|\,z+2\,|=2$.

4^0. *Упражнения к главе 4.* Найти область сходимости степенного ряда комплексного переменного:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}z^{2n}}{n!}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}n^2(z-i)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z+i+1)^{n-1}}{n\sqrt{n}+1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{2n}z^{2n-1}$; 5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+1)^n}{n\ln^4 n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Араманович, И.Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И.Г. Араманович, Г.А. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.

2. Маркушевич, А.И. Введение в теорию аналитических функций / А.И. Маркушевич, Л.А. Маркушевич. – М. : Просвещение, 1977. – 320 с.

3 Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 640 с.

4. Шабат, Б.В. Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1985. – Ч. 1. – 336 с.

5. Сидоров, Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. – М. : Наука, 1989. – 478 с.

6. Нахман, А.Д. Элементы теории функций комплексного переменного/А.Д.Нахман.-Тамбов: Издательство ТГТУ, 2006. – 155 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Глава 1. Комплексные числа.

1.1. Задача о расширении множества действительных чисел

1.2. Мнимая единица. Комплексные числа

1.3. Алгебраические операции над комплексными числами

1.4. Комплексные числа в тригонометрической форме

1.5. Извлечение корня из комплексного числа. Алгебраические уравнения

Глава 2. Элементарные функции комплексного переменного

2.1. Понятие функции комплексного переменного

2.2. Предел функции. Непрерывность

2.3 Комплексная экспонента. Тригонометрические функции

2.4 Логарифмическая и показательная функция. Обратные тригонометрические функции.

Глава 3. Дифференцирование и интегрирование функций комплексной переменной

3.1.Понятие производной

3.2.Правила дифференцирования

3.3.Условия дифференцируемости

3.4.Гармонические функции. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части.

3.5.Интеграл от функции комплексного переменного

3.6.Интегральная теорема Коши

3.7.Теорема Коши для многосвязной области.

3.8. Первообразная. Формула Ньютона-Лейбница.

3.9.Формула Коши

Глава 4. Ряды комплексных чисел.

Степенные ряды комплексного переменного

4.1. Числовые ряды

4.2. Степенные ряды

5. Задачный материал

5.1. Задачи для активного обучения

5.2. Задачи для самостоятельного решения

Список литературы