Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ИННОВАЦИОННОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ

Монография

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2017

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор ФБГОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
Г.М. Куликов,
доктор технических наук, профессор ФБГОУ ВО ВО «Тамбовский государственный технический университет»
П.В.Монастырёв,
кафедра общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рекомендовано научно-техническим советом ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»

УДК 372.851

Нахман, А.Д. Инновационное проектирование системы стохастической подготовки: монография / А.Д. Нахман – «Инновации в образовании». Специальный выпуск. Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2017. – 135 с.

В монографии вводится понятие инновационного содержания и инновационных содержательно-методических линий курса математики. На основе принципов образовательной инноватики выстраивается содержательный компонент стохастической подготовки от начального уровня общего образования до уровня высшего профессионального образования. В работе представлен также обширный задачный материал.

Монография адресована исследователям, занимающимися вопросами образовательных инноваций.

ВВЕДЕНИЕ

В условиях возрастания значимости стохастических представлений как в профессиональной деятельности, так и в обыденной жизни, необходимости (в соответствии с требованиями ФГОС) формирования у обучающихся представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, актуализируется проблема преемственности в обучении стохастике, в установлении необходимых связей между частями учебного предмета «Математика» на разных ступенях его изучения.

В этой связи ***возникает необходимость*** развития теоретических представлений о роли и месте вероятностно-статистических знаний и умений в общей системе математической подготовки, выявление принципов, определяющих структуру и содержание стохастической подготовки в контексте преемственности этой подготовки, выстраивании на основе этих принципов содержательного компонента от начального уровня общего образования до уровня высшего профессионального образования.

Реализация прикладной направленности курса математики в системе «Школа-вуз» - одна из наиболее актуальных задач, поставленных (в соответствии с Федеральным законом "Об образовании в Российской Федерации") перед системой образования Федеральными Государственными Образовательными стандартами (ФГОС), и Концепцией развития математического образования, принятая правительством РФ в 2013 г. (далее – «Концепция…»). Значительным потенциалом в решении данной задачи обладает стохастическая содержательно-методическая линия. В настоящее время наблюдается возрастание значимости стохастических представлений как в профессиональной деятельности, так и в обыденной жизни. Федеральные государственные стандарты общего и профессионального образования, а также «Концепция…», утверждают необходимость формирования у обучающихся представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер. В частности, в «Концепции…» отмечается, что «…выбор содержания математического образования на всех уровнях образования продолжает устаревать и остается формальным и оторванным от жизни, нарушена его преемственность между уровнями образования». В этой связи актуализируется проблема преемственности в обучении стохастике, в выстраивании «сквозной» стохастической содержательно-методической линии, в установлении необходимых связей

между частями учебного предмета «Математика» на разных ступенях его изучения.

Актуальность темы исследования обусловлена также

-противоречием между необходимостью приобретения обучающимися системных знаний и умений в области теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов и фрагментарностью и низкой функциональностью реально усваиваемого содержания стохастического материала;

- необходимостью преодоления кажущейся изолированности (по отношению к «классическому» математическому материалу) стохастических понятий и фактов.

Анализ современного состояния исследований в данной области. Общие (для различных образовательных областей, и в частности, математики) проблемы преемственности в обучении рассматривали такие выдающиеся психологи, педагоги и методисты, как Ж. Пиаже, Л. С. Выготский, С. Л. Рубинштейн, И.Я. Гальперин, Я. А. Коменский, И.Г. Песталоцци, К Д. Ушинский и др. В работах указанных авторов обеспечение преемственности в обучении на различных его этапах понимается как обеспечение связи между отдельными сторонами, этапами и ступенями обучения, расширение и углубление знаний, приобретаемых на предшествующих этапах обучения, развертывание всего учебного процесса на новом этапе обучения в соответствии с содержанием, формами и методами обучения, которые были приоритетными на его предыдущих этапах.

В современных исследованиях преемственность рассматривается, как с содержательных, так и с деятельностно-процессуальных позиций. Различных аспектов проблемы преемственности в обучении математике касаются Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович, Г. И. Саранцев, и др. Активно ведется разработка различных стратегий реализации преемственности при обучении математике с учетом специфики данного предмета следующими авторами: В.А.Барташев, Л.С.Выгодский, И.А. Лурье и др. Отметим следующие исследования:

1. Нешков, К.И. Некоторые вопросы преемственности в обучении математике [Текст] /К.И. Нешков //Преемственность в обучении математике: сб. – М.: Просвещение, 1978. – С. 27-36.

2. Выготский, Л.С. Избранные психологические исследования [Текст] /Л.С. Выготский. – М.: АПН РСФСР, 1956. – 519с.

3. Хинчин, А.Я. Педагогические статьи [Текст] /А.Я. Хинчин. – М.: АПН РСФСР, 1963. – 302с.

4. Лурье, И.А. Преемственность при изучении измерений в курсе математики [Текст] /И.А. Лурье //Преемственность в обучении математике: сб. – М.: Просвещение, 1978. – С.41-51.
5. Туркина, В.М. Различные подходы к осуществлению преемственных связей в обучении математике [Текст] /В.М. Туркина //Математический вестн. педвузов ВолгоВят. региона: период. сб. науч.-метод. работ. – Киров: Изд-во Вят. ГПУ, 2001. – Вып. 3. – С. 218-224.
6. Батаршев, В.А. Педагогическая система преемственности в общеобразовательной и профессиональной школе [Текст] /В.А. Батаршев. – СПб.: Издво инс-та профтехобраз. РАО, 1996. – 90с.
7. Пышкало, А.М. Преемственность в обучении математике [Текст] /А.М. Пышкало. – М.: Просвещение, 1978. – 239с.
8.Столбцова Е.С.Обучение элементам стохастики на основе принципа преемственности между начальной и средней школой/ Вестник Таганрогского института имени А.П. Чехова, -2016.- с.346-356

Другая сторона проблемы - вопросы обучения стохастике на различных ступенях общего и профессионального образования стали предметом исследования ряда авторов: Е.А. Бунимовича, Б.В. Гнеденко, А. Плоцки, В.Д. Селютина, и др. Имеется ряд школьных учебников и задачников, содержащих соответствующий материал (Г.В.Дорофеев, Ю.Н.Макарычева, Н.Г.Миндюк и др.).

В то же время ***исследований проблемы преемственности изучения именно стохастического материала,*** относительно нового для общеобразовательной подготовки, явно недостаточно. В частности, остаются нерешенными проблемы
-«встраивания» инновационной стохастической линии в общую систему традиционно осваиваемых учащимися математических знаний умений и навыков (ЗУН);
-формирования у учащихся способностей установить связь между стохастическими ЗУН и реализации их при решении задач практического или прикладного характера;
-обеспечения преемственности между школьной и вузовской стохастической подготовкой.

Целью работы является разработка теоретических и методических основ реализации преемственности в изучении стохастики, выстраивание «сквозной» стохастической содержательно-методической линии в курсе математики, разработка содержательного и процессуального компонентов системы непрерывной стохастической подготовки.

В соответствии с обозначенной целью должны быть решены следующие задачи:

-формулировка принципов, определяющих структуру и содержание непрерывной стохастической подготовки;

-выработка рекомендаций, направленных на обеспечение как преемственности подготовки между уровнями образования, так и практико-прикладной ориентированности изучаемого вероятностно-статистического материала;

-выявление интегративных свойств стохастической линии.

Научная новизна работы состоит в развитии теоретических представлений о роли и месте вероятностно-статистических знаний и умений в общей системе математической подготовки, в выявлении принципов, определяющих структуру и содержание стохастической подготовки в контексте преемственности этой подготовки, выстраивании на основе этих принципов содержательного компонента от начального уровня общего образования до уровня высшего профессионального образования.

Методологической основой исследования являются системный подход, принципы единства традиционного и инновационного, теории и практики, идеи гуманизации и гуманитаризации математического образования.

Используются следующие теоретические методы:

- анализ базовых понятий исследования ;
- моделирование (моделирование внедрения стохастической линии в образовательный процесс);
- прогнозирование (метод позволяет прогнозировать результаты практического использования результатов исследования).

Практическая значимость. Разработаны:

1) вопросы содержания стохастической подготовки, распределённые по уровням образования (начальная школа, основная школа, старшая школа, уровень профессионального образования);
2) технологические приёмы изучения вероятностно-статистического материала (в соответствии с уровнями образования),
3) банк оригинальных контрольно-измерительных материалов;
4) программа повышения квалификации преподавателей математики общеобразовательных учреждений в области теории вероятностей, математической статистики, теории случайных процессов.

Обзор результатов.

Инновации уверенно вторгаются в сферу образования. Накопившиеся в этой сфере проблемы могут быть решены только путем реализации новых

подходов. До настоящего времени не преодолены, и – более того – обостряются противоречия между

- бурным развитием науки и реальными познавательными возможностями учащихся;
- стандартизированным обучением и индивидуальными способностями и интересами учащихся;
- между тенденциями к специализации обучения и задачей разностороннего развития личности;
- между господствующим в школе репродуктивным обучением и потребностью общества в людях с развитыми творческими способностями.

Обновление содержания образования во многом может способствовать разрешению названных противоречий, и следовательно, служит одним из основных направлений инновационной политики в области образования. Привнесению инновационности в содержание образования, в свою очередь, способствует выделение в нем содержательно-методических линий, интегрирующих современные научные взгляды, традиционные понятия и факты данной предметной области и смежных предметных областей. Примером может служить стохастическая содержательно-методическая линия. Стохастические знания, вероятностное мышление, умение строить научно обоснованные прогнозы, как нельзя востребованы в современных условиях. Однако, включение, согласно требованиям ФГОС, элементов стохастики в содержание основных образовательных программ школьного курса до сих пор должным образом не подкреплено соответствующим методическим обеспечением. Более того, нет единства во мнении, какой именно вероятностно-статистический материал, в каком объеме и на каком уровне абстрагирования и сложности должен быть представлен в школьном курсе математики.

В главе 1 настоящей монографии (параграф 2) анализируются требования ФГОС к начальной вероятностно-статистической подготовке учащихся и предлагаются вопросы содержания такой подготовки. Акцент сделан на логико-стохастический блок содержания в курсе математики начальной школы, поскольку, по мнению автора, соответствующие понятия и факты, вторгающиеся в жизнь ребенка с раннего детства, существенно разнообразят математический материал, делают его более интересным и приближенным к реальным жизненным ситуациям. Изучение стохастики в наибольшей степени отвечает требованиям компетентностного подхода к содержанию математического образования. Представленный в работе обширный задачный

материал (в основном, оригинальные задачи) служит непосредственным инструментом реализации такого подхода.

Введение стохастической содержательно-методической линии в школьный курс математики должно быть подкреплено соответствующей методической готовностью педагогов. Обеспечение такой готовности может быть достигнуто в рамках системы повышения квалификации учителей. Параллельно с этим решаются задачи обновления и углубления знаний в области понятий, фактов, методов стохастики, стимулирования самообразовательной деятельности педагогов. В параграфе 3 анализируются основные направления инновационная деятельности по введению новой стохастической содержательно-методической линии в школьный курс математики. Предлагается, в частности, модульная программа «Методика преподавания комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе математики». Содержание программы охватывает основы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики и вопросы проектирования образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики. В содержании программы нашли отражение современные научные взгляды и подходы в соответствующей предметной области.

Реализации модульной программы предполагает использование таких инновационных форм, как занятия в режиме видиоконференций, проведения круглых столов, сочетание аудиторных занятий, дистанционного обучения и самостоятельной работы, ориентированной на включение освоенного методического инструментария в реальную практику для решения конкретных проблем в своей профессиональной деятельности. Предусматривается разработка слушателями банка задач по стохастике, подготовка коллективных презентаций уроков, создание и размещение образовательного ресурса (конспекта занятия) в сети интернет.

В качестве основных инновационных форм контроля предусматривается прохождение итогового тестирования по дистанционному курсу, защита разработок дидактических и методических материалов и др.

В параграфе 9 обосновывается тезис о том, что именно стохастика обладает определенным интегрирующим потенциалом курса математики, т.е. способствует укреплению внутрипредметных связей. Установлены, в частности, связи конкретных разделов курса стохастики с вопросами алгебры и анализа.

Современная математика рассматривает такие объекты, как высказывания, события, подмножества данного множества в качестве элементов булевой

алгебры, а, соответственно, «степень» истинности, вероятность, меру – в качестве функций , определенных на этих элементах. В параграфе 10, продолжающем тему внутрипредметных связей, анализируется понятие булевых алгебр как общей основы для изучения теории множеств, математической логики и теории вероятностей. Изучение булевых алгебр отвечает целям формирования математической культуры слушателей, устранению дублирования одних и тех же положений, но в рамках разных теорий.

Методическим особенностям решения задач на вычисление вероятностей посвящен параграф 10. Предлагается, в частности, алгоритмизация процесса решения стандартных задач.

Глава 2 посвящена основам вероятностно-статистической теории. Приведен материал, предназначенный для изучения слушателями курсов повышения квалификации. Рассмотрены основные вероятностные схемы, понятия и факты, связанные со случайными величинами и выборочные характеристики распределений количественных признаков генеральных совокупностей.

В главе 3 представлен задачный материал, а именно – образцы решения типовых задач и задачи для самостоятельного решения.

Таким образом, предлагаемая работа представляет собою синтез научно-методического исследования и учебного пособия. Исследователь найдет здесь для себя понятие инновационной содержательно-методической линии и познакомится со вновь вводимой стохастической линией, ее ролью и значением в курсе математики, а также проследит наличие генерируемых ею внутрипредметных связей. Преподаватель-практик, в свою очередь, может почерпнуть теоретический и задачный материал для своих лекций и уроков, а также методические приемы обучения стохастике.

Глава 1. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ КАК ИННОВАЦИОННАЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1. Понятие инновационных содержательно-методических линий

1.1 Инновационное содержание и инновационные содержательно - методические линии. Происходящий в последние десятилетия процесс формирования информационного общества ориентирует систему образования на новые образовательные результаты, требует от нее способности гибко реагировать на

запросы личности, на изменение потребностей экономики, рост инновационной активности и профессиональной мобильности человека.

Одним из основных направлений инновационной политики в области образования является обновление его содержания.

Содержание образования традиционно понимается как совокупность систематизированных знаний, умений и навыков, взглядов и убеждений, отражающая определенный уровень развития познавательных сил и практической подготовки. Содержание образования мы называем инновационным, если оно

-является актуальным, востребованным, соответствует современным целям образования;

- обладает определенной новизной, интегрирует формально-знаниевый и личностно-деятельностный подходы, является, развивающим, вариативным, смысловым (см., напр., работу [1] и библиографию в ней);

- является практически реализуемым и способным повышать эффективность деятельности субъектов образования.

При этом эффективность и реализуемость инновационного содержания возможны, если разработаны

а) вопросы содержания, в той или иной степени приближенные к новым результатам, полученным в соответствующей предметной области, к ее современному состоянию;

б) технологические приемы изложения учащимся вопросов содержания;

в) задачный материал, по возможности приближенный к реальным задачам, возникающим в соответствующей предметной области;

г) контрольно-измерительные материалы для оценки степени усвоения учащимися теоретического содержания, а также и степени сформированности операциональных умений.

В каждой учебной дисциплине области присутствуют фундаментальные понятия, вокруг которых группируется некоторое содержание (другие понятия, связанные с базовым, суждения и действия, необходимые для их усвоения и т.д.); при этом с каждым новым обращением учащихся к этим понятиям происходит обогащение представлений о них. Соответствующий блок содержания представляет собой некое целостное образование с многочисленными внутренними связями, с использованием специальных методов и определяет специфику методики изучения материала.

В подобных случаях об указанном целостном образовании говорят как об определенной *содержательно - методической линии* в программе изучения данной дисциплины. В контексте инновационного содержания

соответствующую содержательно - методическую линию будем называть *инновационной*.

1.2 Стохастическая линия как инновационная. Начиная со второй половины прошлого века наблюдается все более возрастающий интерес к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики. Изучение различного рода случайных явлений, стохастических отклонений от нормы является важным средством предотвращения чрезвычайных ситуаций, техногенных катастроф, выпуска некачественной и ненадежной продукции и т.п.

С развитием современных средств вычислительной микропроцессорной техники расширяются возможности хранения, поиска и обработки больших массивов вероятностно-статистической информации о реальных объектах, выявления причинно-следственных связей между процессами и явлениями. Методы теории вероятностей и математической статистики, применяемые, например, к анализу ошибок разного рода измерений, находят все большее применение в физике, биологии, экологии, социологии, в телефонии и процессах обслуживания, адаптивного управления и т. д. По этой причине *стохастические знания становятся неотъемлемым компонентом инновационного содержания образования* – как общего, так и профессионального. Без минимальной вероятностно-статистической грамотности нельзя в наши дни адекватно воспринимать разнообразную социальную, политическую, экономическую информацию, выдвигать и оценивать гипотезы и принимать обоснованные решения. Без соответствующей подготовки невозможно полноценное изучение естественнонаучных и социально-экономических дисциплин уже школьном курсе.

Указанными соображениями определяются критерии отбора содержания дисциплин, разработка и внедрение новых, интерактивных методик преподавания, изменения в требованиях к математической подготовке ученика. Когда речь идет не только об обучении математике, но и формировании личности с помощью математики, необходимость развития у всех школьников вероятностной интуиции и статистического мышления становится насущной задачей. Изучение вероятностно-статистического материала необходимо уже в школьном курсе в рамках самостоятельной содержательно-методической линии.

Стохастическая линия строится как объединение трех взаимосвязанных составляющих – элементов комбинаторики, теории вероятностей и статистики и

включается в обучение как в основной, так и в старшей школе и направлена на формирование способностей

- применять классическую, статистическую и геометрическую модели вероятности при решении прикладных и практических задач;
- прогнозировать наступление событий на основе вероятностно-статистических методов;
-использовать полученные умения для решения задач в смежных дисциплинах.

Если в высших учебных заведениях основной акцент делается на изучение математического аппарата для исследования вероятностных моделей, то в школе учащихся, прежде всего, необходимо ознакомить с процессом построения модели, учить их анализировать, проверять адекватность построенной модели реальным ситуациям, развивать вероятностную интуицию.

Одна из главных особенностей вероятностно-статистической линии в школе состоит в тесной связи отвлеченных понятий и структур с окружающим миром. Поэтому математическая деятельность школьников не должна ограничиваться изучением только готовых вероятностных моделей. Напротив, процессы построения и истолкования моделей рассматриваются как ведущие формы математической деятельности школьников. Вместе с тем здесь важную роль играют задания, связанные с принятием решений в реальных (в нематематических) ситуациях.

В конечном счете, овладение искусством вероятностно-статистических рассуждений, способствует рассмотрению стохастики не только как системы понятий и фактов, а как специфической методологии, охватывающей соответствующие умозаключения в их взаимосвязи.

2. Начальная стохастическая подготовка

2.1 Специфика стохастической линии проявляется и в том, что *изучение понятий и методов происходит в форме открытия новых инструментов познания окружающего мира, чем создается благоприятная почва для эвристической деятельности учащихся*. У педагогов появляется возможность использования новых, непривычных для уроков математики, подходов к обучению.

Вероятностная линия отражает глубокое внутреннее единство эмпирического и теоретического уровней познания мира случайного; соответственно этому при разработке инновационного содержания стохастического материала, следует учитывать *два имеющихся в учебно-*

методической литературе подхода. Первый, теоретико-множественный, состоит в широком использовании теории меры и функционального анализа. Множество событий здесь рассматривается как алгебра (борелевская алгебра) на которой строится неотрицательная, нормированная, аддитивная (счетно-аддитивная) функция. Здесь уместен именно аксиоматический подход. Однако, такая формализация отодвигает практическую сторону дела на второй план.

Альтернативный подход основан на интерпретации основных положений теории вероятностей и математической статистики в виде реальных и модельных экспериментов (бросание монет и игральных костей, игры в карты, выборки шаров из урн, схема независимых испытаний, бросание точек на отрезок, задачи лотерей и рулеток, задачи стрельб и т. д.). При втором подходе на первый план выступают интуиция, логика и эвристика. Классическая вероятность, относительная частота, геометрическая вероятность здесь не выглядят явно взаимосвязанными, теория смотрится как бы не вполне математической, утрачиваются возможности продемонстрировать глубину современных теоретико-функциональных идей и методов.

Изучение стохастики на начальном этапе базируется на втором подходе, но, вместе с тем, преподаватель должен постоянно обращать внимание школьников на имеющиеся общие свойства различных моделей вероятности, на аналогии между действиями над событиями и над множествами, над событиями и над высказываниями и т.п. Учащийся должен обратить внимание на широкое использование фактов и методов алгебры и математического анализа в стохастической теории (вопросы укрепления внутрипредметных связей посредством стохастического материала, представлены ниже) .

2.2 Учащемуся, владеющему основами алгебры и математического анализа, доступно освоение ***следующих вопросов содержания*** начальной подготовки.

1) Элементы комбинаторики.
2) Алгебра событий, σ - алгебра.
3) Статистическая, классическая и геометрическая модели вероятности.
4)Аксиоматический подход к понятию вероятности.
5) Вероятность суммы и произведения событий.
6)Схемы гипотез и Бернулли.
7)Предельные теоремы в схеме Бернулли.
8)Распределения дискретных случайных величин (ДСВ).
9)Функция распределения. Плотность распределения непрерывной случайной величины (НСВ).
10) Моменты распределения.

11)Стандартные распределения ДСВ и НСВ
12) Многомерные случайные величины, элементы теории корреляции.
13) Предельные теоремы теории вероятностей.
14) Выборочные характеристики случайных величин и точечное оценивание.
15) Интервальное оценивание неизвестных параметров законов распределения случайных величин.
16) Проверка статистических гипотез.
17) Исследование статистической зависимости между случайными величинами.

Изучение вопросов 1-8 и 14 (объем изучаемого материала и уровень его сложности может варьироваться) возможно уже в рамках школьного курса математики, что подтверждается успешной практикой преподавания элементов стохастики в школах России в течение последних лет (базовый, профильный и углубленный уровни изучения математики). Инновационной нам представляется идея ознакомления учащихся с элементами стохастики уже в рамках начальной школы; реализации этой идеи посвящены два следующих параграфа.

2.3 Содержательно-методические линии «пронизывают» курс изучаемой дисциплины на протяжении всех лет его изучения. В рамках школьного курса, в соответствии с требованиями ФГОС мы выделяем следующие ***этапы начальной стохастической подготовки***.

Этапы подготовки	***Требования ФГОС к предметным результатам изучения стохастического компонента курса математики***
Пропедевтический (начальная школа)	- овладение основами логического и алгоритмического мышления, пространственного воображения и математической речи, измерения, пересчета, прикидки и оценки, наглядного представления данных и процессов, записи и выполнения алгоритмов; - приобретение начального опыта применения математических знаний для решения учебно-познавательных и учебно-практических задач; -умение работать с таблицами, схемами, графиками и диаграммами, цепочками, совокупностями, представлять, анализировать и интерпретировать данные;

Основная школа	- овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; - формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; - развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;
Старшие классы полной средней школы	*Базовый уровень:* - сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; -умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин; *Профильный уровень*: - владение умениями составления вероятностных моделей по условию задачи и вычисления вероятности наступления событий, в том числе с применением формул комбинаторики и основных теорем теории вероятностей; - исследования случайных величин по их распределению.

В соответствии с выделенными этапами, может быть предложено следующее содержание материала начальной стохастической подготовки .

Этапы подготовки	***Содержание изучаемого стохастического материала***
Пропедевтический (начальная школа)	Решение комбинаторных задач с помощью таблиц и графов. Чтение информации, заданной с помощью линейных диаграмм. Первоначальные представления о сборе и накоплении данных. Запись данных, содержащихся в тексте, в таблицу. Понятие о случайном эксперименте. Понятия «чаще», «реже», «возможно», «невозможно», «случайно». Истинные и ложные высказывания. Достоверное, невозможное, случайное события, вероятность, обработка результатов эксперимента, анализ случайных данных.
Основная школа	Перебор вариантов исхода эксперимента («дерево» вариантов). Комбинаторные формулы. Относительная частота и статистическая вероятность. Варианты и их частоты. Вариационный ряд, мода, медиана, среднее наблюдаемых значений. Вычисление классической вероятности в простейших случаях
Старшие классы полной средней школы	*Базовый уровень:* Статистическая, классическая, геометрическая вероятности и их вычисление в простейших случаях. Дискретные случайные величины, табличное и геометрическое представление закона распределения. Простейшие числовые характеристики ряда распределения и вариационного ряда. *Профильный уровень:* Основные модели вероятностей: статистическая, классическая, геометрическая. Общие свойства. Вычисление вероятностей на основе определения и использования комбинаторных формул и на основе использования соответствующих теорем. Распределение дискретных случайных величин. Ряд и многоугольник

	распределения. Числовые характеристики ряда распределения. Вариационный ряд. Полигон, гистограмма. Ввыборочные средняя и дисперсия. Понятие о точечных и интервальных оценках параметров распределения.

2.4 Понятие «начальная стохастическая подготовка» предполагает ***дальнейшее углубление и развитие вероятностно-статистических знаний*** в рамках обучения в колледжах и на младших курсах вузов. Вышеприведенные вопросы содержания могут быть также предложены для углубленного изучения преподавателям математики в учреждениях повышения квалификации, поскольку внедрение стохастической линии в школьный курс высвечивает проблему готовности учителей к успешной реализации этой линии. Возникает противоречие между необходимостью проведения в школе уроков по элементам стохастики и недостаточным уровнем теоретической и практической подготовленности к этому большинства школьных учителей. Хотя курс теории вероятностей и математической статистики традиционно присутствует в программах всех математических факультетов университетов и педагогических вузов, соответствующие знания педагогов нуждаются в существенном обновлении.

Особое место в вопросах формирования готовности преподавать курс стохастики занимает проблема готовности именно методической. Школьников нельзя ориентировать на вузовские варианты построения курса теории вероятностей – напротив, вузовский материал должен быть переосмыслен и адаптирован к условиям школы, в связи с чем учителю необходимо овладеть специфической методикой, направленной на формирование особых, недетерминированных представлений у учащихся.

Обеспечение такой готовности может быть достигнуто в рамках системы повышения квалификации учителей. Параллельно с этим решаются следующие задачи:

- обновление и углубление знаний в области понятий, фактов, методов стохастики;
- осуществление самоконтроля степени усвоения материала;
- стимулирование самообразовательной деятельности педагогов.

3. Инновационная деятельность учреждений повышения квалификации по введению стохастической содержательно-методической линии

3.1 Основные направления инновационная деятельности по введению новой стохастической содержательно-методической линии в школьный курс математики мы рассмотрим на примере деятельности ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования» (далее – Тамбовский ИПКРО). Такими направлениями являются:

1)разработка модульной программы «Методика преподавания комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе математики»;

2)Разработку дистанционного курса «Реализации стохастической линии в школьном курсе математики»;

3)инновационные формы подготовки слушателей;

3) проектирование (совместно со слушателями) образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики.

3.2 Модульная программа (авторы А.Д.Нахман и И.Ю.Иванова) разработана с учетом основных направлений, выдвинутых в Концепции модернизации российского образования, и требований ФГОС нового поколения. В их числе:

- введение государственной итоговой аттестации (ГИА) за курс основной школы и единого государственного экзамена (ЕГЭ), контрольно-измерительные материалы которых содержат вопросы стохастики;
- введение предпрофильной подготовки и профильного обучения на старшей ступени школы;
- личностная ориентация содержания математического образования;
- деятельностный характер образования, направленность содержания образования на формирование общих учебных умений и навыков, обобщенных способов учебной, познавательной, коммуникативной, практической, творческой деятельности, на получение учащимися опыта этой деятельности;
- формирование ключевых компетенций – готовности учащихся использовать усвоенные знания, умения и способы деятельности на уроках математики в реальной жизни для решения практических задач;
- обучение использованию современных информационных технологий.

Программа предназначена для учителей математики, работающих в 5-11 классах как общеобразовательных, так и профильных школ; для преподавателей учреждений СПО и НПО и ориентирована на подготовку слушателей к

педагогической деятельности в условиях развития новой модели современного образования.

Целью программы является повышение уровня профессиональной компетентности слушателей, связанной с:

- реализацией целей предпрофильного и профильного обучения;
- совершенствованием предметных умений (расширение теоретических знаний и практических умений в области стохастики);
- применением современных технологий обучения для решения различных дидактических и методических задач при обучении математики;
- реализацией требований к результатам освоения учащимися образовательных программ (предметные знания, ключевые компетентности, социальный опыт) в соответствии с ФГОС нового поколения;
- организацией исследовательской работы при обучении математике;
- повышением уровня коммуникативных компетенций.

Ожидаемые результаты: в результате освоения модуля «Методика преподавания комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в школьном курсе математики»

***слушатели должны*:**

− формулировать цели обучения, учитывая необходимость формирования у учащихся элементов стохастического мышления;

- определять содержание обучения в соответствии с поставленными целями и требованиями государственного стандарта;

- овладеть практическими навыками по решению прикладных задач с использованием ИКТ;

− разрабатывать материалы для проведения экспертной деятельности, педагогического мониторинга, тестового контроля;

- решать задачи различного уровня сложности, в том числе из контрольно-измерительных материалов ГИА и ЕГЭ.

При этом предполагается развитие информационно-математической, информационно-коммуникационной, прогностической компетенций а также инновационной мобильности.

Содержание программы охватывает основы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики и вопросы проектирования образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики. В содержании программы нашли отражение современные

научные взгляды и подходы в отношении теории вероятностей и математической статистики.

Программа имеет практическую направленность. Из общего объема часов 70% приходится на практическую подготовку.

Программа содержит один модуль содержания, состоящий из четырех блоков. Дистанционное сопровождение обучения позволяет проектировать образовательный процесс с учетом индивидуальной траектории освоения курса слушателями. Обучающийся может изучать модуль самостоятельно в удобном для него темпе и сосредоточиться на наиболее важных и (или) трудных для него вопросах.

3.3 В результате освоения содержания, предусмотренного модульной программой, возможно ***достижение одного из следующих уровней готовности к деятельности.***

Уровни готовности к деятельности: *на базовом уровне:* а) знание основных формул комбинаторики, бинома Ньютона; б) владение понятиями суммы и произведения событий, классической, статистической, геометрической вероятности, умение использовать формулы комбинаторики и основные вероятностные схемы в решении задач; в) владение понятиями дискретных и непрерывных случайных величин (ДСВ и НСВ), умением строить законы распределения и находить числовые характеристики; г) умение строить вариационный ряд, находить относительные частоты вариант, моду, медиану, выборочные среднюю и дисперсию ; е) понимание особенностей организации процесса обучения на этапе введения элементов комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в школьный курс математики; умение анализировать внутрипредметные связи.
Формы контроля: — тест; — решение задач в рабочей тетради; — зачет.
— *на повышенном уровне:* умение анализировать содержание федерального государственного образовательного стандарта основного и среднего (полного) общего образования, выявлять особенности, относящиеся к предмету «Математика», и, в частности, к стохастике; умение решать комбинаторные задачи повышенного уровня сложности; владение аксиомами вероятности; знание предельных терем в схеме Бернулли и закона больших чисел;
— *на продвинутом уровне:* умение отбирать содержание стохастического материала для обучения на базовом, профильном и углубленном уровнях, проектировать внеурочную деятельность; умение анализировать внутрипредметные связи (теория множеств – математическая логика – алгебра событий), владение специальными распределениями дискретных и непрерывных случайных величин, умение доказывать основные теоремы курса теории вероятностей .

3.4. Методические рекомендации. Теория вероятностей и математическая статистика являются важнейшими разделами образовательной области

«Математика». Вероятностно-статистический материал заявлен как одна из центральных содержательных линий в ФГОС для средней школы (базовый и профильный уровни). На эти обстоятельства следует обратить внимание слушателей при знакомстве с материалом модуля.

В ходе проведения лекций, помимо систематического изложения курса теории вероятностей и математической статистики, следует уделить внимание обсуждению требований к результатам освоения, к структуре и условиям реализации стохастической линии в курсе математики.

На практических занятиях проводится обсуждение как содержания курса, так и методики его преподавания в школе. Наряду с решением задач, слушателям предлагается разработать как свои задания по изучаемым темам, так и конспекты соответствующих уроков.

3.5. Содержание обучающих элементов (аудиторные занятия)

Блок 1. Элементы комбинаторики

ОЭ-1. Кортежи. Прямые произведения. Размещения, перестановки, сочетания.

Лекция

Кортежи. Прямые произведения. Размещения, перестановки, сочетания. Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики (на примере темы «Комбинаторика).

***Практическое занятие* № 1.** Анализ стохастической линии в содержании федерального государственного образовательного стандарта основного и среднего (полного) общего образования. Решение задач на комбинаторные формулы.

***Практическое занятие* № 2.** Решение комбинаторных задач. Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся.

ОЭ-2. Свойства биномиальных коэффициентов. Бином Ньютона.

Лекция

Свойства биномиальных коэффициентов. Формула бинома Ньютона. Треугольник Паскаля.

Блок 2. Случайные события

ОЭ-3 . Алгебра событий. Вероятность суммы и произведения.

Лекция

Алгебра событий. Классическая вероятность. Относительная частота и статистическая вероятность. Геометрическая вероятность. Понятие об аксиомах вероятности. Схема гипотез.

ОЭ-4. Классические вероятностные схемы.

Лекция

Схема гипотез. Формулы полной вероятности и Бейеса. Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли.

Лекция

Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики (на примере темы «Случайные события»)

Блок 3. Случайные величины

ОЭ- 5. Распределения дискретных и непрерывных случайных величин (ДСВ и НСВ)

Лекция

Ряд распределения ДСВ. Числовые характеристики. Функция распределения.

Плотность распределения НСВ. Числовые характеристики НСВ.

ОЭ -6. Специальные распределения.

Лекция

Распределения биномиальное, Пуассоновское, равномерное, нормальное.

Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики (на примере темы «Случайные величины»)

Блок 4. Статистическое распределение выборки

ОЭ -7. Выборка. Вариационный ряд.

Лекция

Вариационный ряд. Полигон. Гистограмма. Эмпирическая функция распределения. Числовые характеристики ряда.

Лекция

Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики (на примере темы «Статистическое распределение выборки»)

Практическое занятие

Итоговая аттестация.

3.6 Содержание обучающих элементов **(***самостоятельная работа* (СР) *и дистанционное обучение* (ДО) **)**

№ Пп	№	Наименование темы	Форма обучения	Вид контроля
	ОЭ-1, ОЭ-2	Размещения, перестановки, сочетания	ДО, СР	Решение задач в рабочей тетради
	ОЭ-1, ОЭ-2	Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики (на примере темы «Комбинаторика»)	ДО, СР	Создание и размещение о образовательного ресурса (конспекта занятия) в сети интернет
	ОЭ-3	Алгебра событий Классическая вероятность Относительная частота и статистическая вероятность Геометрическая вероятность Понятие об аксиомах вероятности	ДО, СР	Решение задач в рабочей тетради
	ОЭ-4	Схема Бернулли Предельные теоремы в схеме Бернулли	ДО, СР	Решение задач в рабочей тетради
	ОЭ-3,4	Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики (на примере темы «Случайные события»)	ДО, СР	Создание и размещение образовательного ресурса (конспекта занятия) в сети интернет
	ОЭ-5,6	Специальные виды распределений: распределения биномиальное, Пуассоновское, равномерное, нормальное	ДО, СР	Решение задач в рабочей тетради

	ОЭ-5,6	Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики (на примере темы«Случайные величины»)	ДО, СР	Создание и размещение образовательного ресурса (конспекта занятия) в сети интернет
	ОЭ-7	Вариационный ряд. Характеристики ряда. Полигон. Гистограмма. Эмпирическая функция распределения.	ДО, СР	Решение задач в рабочей тетради
	ОЭ-7	Проектирование образовательных технологий для обеспечения качества подготовки учащихся в области стохастики (на примере темы «Статистическое распределение выборки)	ДО, СР	Создание и размещение образовательного ресурса (конспекта занятия) в сети интернет
	ОЭ-3,4	Вероятность произведения и суммы событий. Схема гипотез	ДО, СР	Тестирование
	ОЭ-7	Закон больших чисел. Статистические оценки параметров распределения	ДО, СР	Тестирование

3.7. Инновационные формы реализации модульной программы. Формы и методы проведения занятий по программе выбираются в соответствии с поставленными целями. Занятия проводятся в режиме видиоконференций и организованы в форме лекций, семинарских и практических занятий; итоговое занятие проводится в форме круглого стола. Самостоятельная работа слушателей предусматривает использование таких программных средств как Microsoft Word, Microsoft Excel, Microsoft Power Point, Internet Explorer, а также Интернет-ресурсов.

Освоение программы предусматривает сочетание аудиторных занятий, дистанционного обучения и самостоятельной работы, ориентированной на

включение освоенного методического инструментария в реальную практику для решения конкретных проблем в своей профессиональной деятельности.

Предусматривается разработка слушателями банка задач по стохастике, подготовка коллективных презентаций уроков.

3.8. Инновационные формы контроля:

1) прохождение итогового тестирования по дистанционному курсу,
2) решение задач в рабочей тетради,
3) защита разработок дидактических и методических материалов.

4. Элементы математической логики и стохастики в начальной школе: компетентностный подход

4.1 Реализация компетентностного подхода в процессе обучения – одно из важнейших требований, выдвинутых перед школой Концепцией модернизации российского образования на период до 2010 года, образовательными стандартами и другими документами. Указанный подход предполагает не только усвоение учеником отдельных знаний и умений, но овладение ими в комплексе в соответствии с заданными социальными требованиями (нормами) к образовательной подготовке ученика [2].

Основная инновационная идея, заложенная нами в проект «Математическая логика и стохастика в начальной школе», состоит в реализации компетентностного подхода посредством включения (уже в начальных классах школы) стохастической содержательно-методической линии в изучаемый математический материал.

Выделяя общие черты, которые присутствуют в определениях компетенций, предлагаемых разными авторами, будем понимать под образовательными компетенциями те взаимосвязанные знания, умения, навыки и опыт деятельности, овладение которыми необходимо учащемуся для использования во всех сферах дальнейшей жизни и которыми обеспечивается способность к решению реальных задач. Другими словами , понятие образовательных компетенции отражает общую готовность учащегося устанавливать связи между знанием, умением, навыком и ситуацией, сформировать процедуру решения проблемы.

Перечень компетенций, формируемых в процессе обучения, нуждается, как известно [2], в детализации как по возрастным ступеням обучения, так и по

учебным предметам. По этой причине в настоящей работе рассмотрение ограничивается:

-этапом начального обучения (начальная школа);

- преимущественно, уровнем предметных компетенций, имеющих конкретное описание и возможность формирования в рамках учебного предмета «математика»;

-выделением в математике блока содержания, условно называемого нами логико-стохастическим (о глубоких внутрипредметных связях понятий математической логики и теории вероятностей речь идет ниже);

-анализом возможностей реализации компетентностного подхода в рамках дополнительного образования.

Именно форма дополнительного образования (например, кружковая работа) выбрана нами не случайно – она позволяет воспользоваться концепциями сразу нескольких образовательных программ (среди которых наше внимание привлекает, в первую очередь, программа «Школа 2100») может служить своеобразной опытно-экспериментальной базой для реализации самых смелых идей.

4.2 Логико-стохастический блок в математике наиболее приближен к тем жизненным ситуациям, с которыми учащийся уже имеет дело и будет неизбежно сталкиваться в будущем. Новые информационная среда и технологии, экономические отношения, рано вторгающиеся в жизнь школьника, обусловливают необходимость его введения в мир современных понятий, политических, финансово-экономических, статистических терминов, графических моделей тех или иных процессов и т.п. В свою очередь, теория множеств, математическая логика, комбинаторные методы, вероятностно-статистическая теория являются тем математическим материалом, который во многом описывает указанные стороны действительности; при этом, естественно, описание имеет присущие математике качество универсальности и абстрактную, символическую форму.

Содержание соответствующих выделенному логико-вероятностному блоку предметных компетенций, по нашему мнению, должно включать в себя, в первую очередь

- базовые понятия и факты;
- математические приемы и алгоритмы;
- математический язык.

Овладение элементами логики и стохастики лежит в основе формирования общепредметных компетенций – способностей решать проблемы, требующие

переноса знаний, умений, навыков, полученных в процессе освоения данного предмета, в другие предметы или образовательные области. Их содержание включает в себя

- владение методами научного познания мира, проведение наблюдений, измерений и опытов, обработка и объяснение результатов экспериментальных работ;
- умение вести самостоятельную познавательную деятельность, основанную на усвоении способов приобретения математических знаний из различных источников информации;
- математическую грамотность, т.е. способность определять и понимать роль математики в мире, высказывать хорошо обоснованные математические суждения;
- умение применять математические знания в нестандартных ситуациях.

Переход к высшему, метапредметному уровню предполагает формирование в процессе обучения таких ключевых компетенций как информационные (освоение современных информационных технологий, адаптация в информационном пространстве современного мира), общекультурные (познания в области национальной и общечеловеческой культуры, духовно-нравственных основ жизни человека) коммуникативные (владение средствами коммуникации, способами взаимодействия с окружающими и удалёнными людьми, навыками работы в группе, умением задавать вопросы, вести дискуссию и др.), социально-правовые и трудовые (овладение учеником знаниями и опытом в гражданско-общественной деятельности, в социально-трудовой сфере, в области семейных отношений и обязанностей, в вопросах экономики и права, в профессиональном самоопределении).

4.3 Как известно, непосредственное проявление компетентностного подхода в образовании – это ***обновление*** его ***содержания*** в ответ на соответствующий социальный заказ. Вероятностно-стохастическая линия уже находит свое отражение в действующих образовательных стандартах как на базовом, так и на профильном уровне. Однако изучение соответствующего материала предполагается начать с 5-го класса, тогда как понятия и факты логико - стохастического содержания вторгаются в жизнь и деятельность учащегося с раннего детства («истина и ложь», «правдоподобно-неправдоподобно», «достоверно-случайно-невозможно», «маловероятно» и др.). Среди имеющихся путей разрешения указанного противоречия отметим

образовательную систему «Школа 2100» [3], которая включает в программу по математике четырехлетней (начальной школы) элементы стохастики, представленные в виде элементов комбинаторики, теории графов, наглядной и описательной статистики, начальных понятий теории вероятностей. « Такое содержание учебного материала – отмечается в программе – способствует развитию внутрипредметных и межпредметных связей (в частности, математики и естествознания), позволяет осуществлять прикладную направленность курса, раскрывает роль современной математики в познании окружающей действительности, формирует мировоззрение.»

Мы предлагаем дальнейшие шаги в указанном направлении. Так, наш вариант соответствующей образовательной программы направлен на формирование образовательных компетенций, основанных на овладении понятиями, фактами, математическим языком, приемами и алгоритмами относящимися к логико - стохастической линии. Программа включает следующие блоки содержания:

- *логико-множественный* (множества и операции над множествами, высказывания и операции над ними, таблицы истинности);
- *наглядно-функциональный* (таблицы, графики, диаграммы, формулы);
- *комбинаторный* (перебор вариантов, комбинаторные формулы) ;
- *вероятностно-статистический* (случайные события, вероятность, обработка результатов эксперимента).

Так, первоклассники знакомятся с понятиями истинных и ложных высказываний, достоверных невозможных, случайных событий.

Во втором классе вводятся логические операции отрицания высказывания и эквиваленции двух высказываний и строятся соответствующие таблицы истинности. Здесь же учащиеся получают первоначальные представления о четких и нечетких высказываниях. Происходит дальнейшее развитие представлений о случайных событиях: вводятся понятия событий совместных и несовместных, полных и неполных групп событий.

Учащимся третьего класса вполне доступны такие логические операции над высказываниями как конъюнкция дизъюнкция и импликация высказываний., построение сложных высказываний и составление таблиц истинности для формул алгебры высказываний. Здесь же вводятся следующие действия над событиями: сумма и произведение событий, переход к противоположному событию. Пропедевтикой понятия вероятности события могут служить сравнение (на интуитивном уровне) степеней возможности появления события , шансов выигрыша в игровых ситуациях.

Однако переход к количественной характеристики степени объективной

возможности появления события предполагает уточнения понятия элементарных исходов испытания, непосредственный подсчет количества исходов и подсчет с помощью правила умножения.

Статистический материал в третьем классе содержит понятия о группировке одинаковых числовых данных, частотах и таблице распределения частот, относительной частоте, а также табличной и геометрической интерпретации (на координатной плоскости в виде полигона частот) соответствий между числовыми данными и их частотами.

Элементы математической логики в четвертом классе представлены в виде понятия предиката, предикатов в математике (уравнения, неравенства) и их множеств истинности. Здесь же вводятся логические операции над предикатами и рассматриваются соответствующие им множества истинности. Комбинаторный материал представлен в виде понятий упорядоченных и неупорядоченных соединений, размещений, сочетаний. Предполагается активное использование в решениях задач формул числа перестановок и количества размещений по два элемента и сочетаний по два элемента. Комбинаторные формулы находят здесь свое новое применение в связи с введением понятия классической вероятности случайного события. Учащиеся знакомятся также с простейшими формулами теории вероятностей.

В четвертом классе происходит также развитие представлений об анализе случайных данных, вариационном ряде, его моде, медиане, размахе варьирования, нахождении выборочной средней.

5. Элементы математической логики и стохастики в начальной школе: задачный материал

Приобретению первичных навыков научного познания мира с помощью логико-стохастических методов способствуют предлагаемые нами задачи на проведение анализа наблюдений, измерений, опытов и их обработки вероятностно-статистическими методами. Приведем примеры таких заданий (см. [4]).

5.1 Первый класс.

Числовые величины в динамике.

Задача 1. Расположите членов семьи «бабушка, я, мама»

а) в порядке возрастания возраста;

в) в порядке убывания возраста.

Задача 2. Расположите школьные оценки порядке их улучшения: «пятерка, двойка, четверка, тройка».

Задача 3. В течение года цена на бензин (в рублях) изменялась следующим образом:

	Весна	*Лето*	*Осень*	*Зима*
Цена за 1 литр	*17*	*18*	*17*	*16*

В какое время года бензин был самый дорогой? Начиная с какого времени года цена стала падать? В какое время года цена была наименьшей? На сколько рублей 1 литр бензина зимой стал дешевле, чем летом?

Сравнение величин .

Задача 1. В какое время года бывает самая длинная? Самая короткая ночь? Сколько часов (примерно) длится эта ночь?

Задача 2. Что выгоднее купить: две порции мороженного по 4 рубля или одну порцию за 3 рубля и еще одну за 5 рублей?

Множества. Подмножества.

Задача 1. Бабушка принесла с рынка 3 огурца, 4 персика, 2 баклажана и 3 груши. Сгруппируйте множество покупок (используя их общие признаки) в два подмножества. Сколько элементов получилось в каждом подмножестве?

Задача 2. Старший брат скачал из Интернета биографические данные следующих известных людей: Э.Успенский, А.Пугачева, В.Шаинский, Л.Толстой, В.Ленин, П.Чайковский, В.Жириновский. Он создал 3 папки: «Писатели», «Композиторы и музыканты» , «Политики». Как он должен заполнить эти папки? В какой из них больше всего фамилий известных людей?

Задача 3. Мама разрешила сделать две покупки в магазине канцтоваров, так чтобы стоимость каждой покупки не превышала 10 рублей, но дала всего 15 рублей. Какие пару предметов из следующих ученик может купить:
1)тетрадь – 5 руб.

2)маркер – 8 руб.
3)папка-файл – 10 руб.
5)книжка-раскраска 12 руб.
4)авторучка – 3 руб.

Как надо выложить эти товары на витрину (слева направо), чтобы их цены были расположены в порядке убывания?

Соответствие между множествами.

Задача. Даны два множества
A: кафе, отделение почтовой связи, парк отдыха, зоопарк
B: мороженное, зебра, бандероли, карусель.

Установите соответствие между множествами A и B, B и A. Является ли каждое из этих соответствий однозначным?

Таблицы.

Задача. В настольной игре потеряли кубик. Как заменить его с помощью разноцветных фишек? (Составить таблицу соответствия количества очков и цвета фишек).

Множества. Таблицы.

Задача. Среди следующих множеств назовите пустые:
а) множество целых чисел на числовом отрезке от 1 до 9;
б)множество учеников, находящихся в школе после 12 ночи;
в) множество чисел, больших, чем 7, среди чисел, образующих множество {1, 3, 4, 6, 7};
г)множество съедобных грибов среди 6 мухоморов, 3 поганок и 4 маслят, найденных в лесу учеником 1 класса. Составьте таблицу в соответствии с данными п.г)

Число съедобных грибов	
Число несъедобных грибов	

Высказывания .

Задача 1. Среди следующих высказываний назовите высказывания ложные:

а) дедушка учится в первом классе;

б) (7-5)+(2+4)=8;

в) кошка – домашнее животное;

г) морковь растет на деревьях.

Приведите свои примеры истинных и ложных высказываний.

Задача 2. Измените одно слово в предложении так, чтобы высказывание «Зимою часто бывают морозы» стало ложным.

Виды событий.

Задача 1. Назовите виды следующих событий:

A: в феврале следующего года будет 30 дней;

B: во втором классе у меня будет пятерка по математике;

C: гражданин США знает английский язык;

D: в словаре на букву «ш» имеется слово «шына».

Задача 2. Охарактеризуйте каждое из следующих событий (Достоверное? Невозможное? Случайное?):

а) сумма числа очков, выпавших на двух игральных кубиках (игральных костях) окажется больше двенадцати;

б) сумма числа очков, выпавших на двух игральных кубиках (игральных костях) равна двум;

в) поезд «Москва-Тамбов» завтра придет с опозданием;

г) вес купленной груши не превысит 2 кг.;

д) Вини-Пух в гостях у Кролика откажется от обеда.

Придумайте свои примеры достоверных, невозможных и случайных событий.

5.2 Второй класс

Первоначальные представления о сборе и накоплении данных. Группировка данных по заданному признаку.

Задача 1. Брошено два игральных кубика. Перечислите все возможные различные варианты получения суммарного числа очков, равного 8. Сколько будет таких вариантов, если кубики пронумерованы (первый и второй).

Задача 2. Сгруппируйте следующие предметы по их общему признаку в два множества A и B: огурец, футбольный мяч, красное яблоко, глобус, еловая ветка, зеленый карандаш, Имеются ли общие предметы в этих двух множествах? Что можно сказать о множестве общих предметов?

Задача 3. В слове «продавец» выделить гласные и согласные – твердые и мягкие. Подсчитать их количество и записать данные в следующую таблицу

Число гласных	
Число мягких согласных	
Число твердых согласных	

Проиллюстрировать результаты с помощью линейной диаграммы.

Запись данных в таблицу. Запись и чтение информации с помощью линейных диаграмм.

Задача. В классе 5 мальчиков ростом 1 м. 50 см., 4 мальчика ростом 1 м. 40 см. и 1 мальчик ростом 1 м. 20 см. Запишите данные задачи в таблицу. Каков рост самого высокого мальчика ? Каков рост самого низкого мальчика? Назовите частоту роста 1 м. 20 см. Постройте линейную диаграмму и полигон частот.

Операции над множествами.

Задача 1. В парке растут ель, клен, береза, сосна, дуб, липа. Найти дополнение множества A хвойных деревьев в парке до множества C всех деревьев в парке.

Пусть множество B = {клен, дуб, липа}. Найти объединение $A \cup B$ и дополнение полученного множества до множества C.

Пусть множество E = {ель, клен, береза, липа}. Найти пересечения $A \cap E$ и $B \cap E$.

Задача 2. Мама поручила Вове сделать в течение дня следующие дела: пообедать, выучить уроки, пропылесосить ковер, погулять с собакой, полить цветы. Вова пообедал и погулял с собакой. Назовите дополнение множества B заданий, выполненных Вовой, до множества A всех поручений? Назовите количество элементов во множествах A и B.

Простейшие комбинаторные задачи.

Задача 1. Четверым учащимся разрешили сесть за парты (по двое, причем порядок расположения за партой не важен) по своему усмотрению. Сколько у них имеется вариантов рассаживания?

Задача 2. В алфавите языка острова Чунга-Чанга всего 4 буквы: А, О, П,Т, причем каждое слова начинается с буквы А и состоит из 4 букв. Сколько всего различных слов возможно в этом языке? Изменится ли ответ в задаче, если каждое слово будет начинаться с буквы О

Задача 3. Король острова Чунга-Чанга (см. предыдущую задачу) издал указ о том, что теперь все слова теперь состоят из двух букв. Сколько теперь слов в этом языке, если

1) все слова начинаются с буквы А;
2) слова могут начинаться с любой буквы.

Задача 4. Мальчики Коля, Саша и Сережа добились высоких и примерно одинаковых результатов в легкой атлетике, поэтому они надеются войти в тройку призеров в школьных соревнованиях. Сколько существует вариантов распределения между ними призовых мест?

Задача 5. Мальчик собирается на улицу. Он должен надеть майку, рубашку, свитер. Но он решил рассмешить друзей. Сколькими способами он может одеться так, чтобы друзья над ним посмеялись.

Высказывания.

Задача 1. Среди следующих предложений выберите высказывательные.

1.Сколько примеров по математике было задано?
2.На завтра задано 4 примера по математике.
3.Число 7 больше числа 8.
4.Ура!
5. Новый год начнется 1 января.

Задача 2. Среди следующих высказываний выберите пары, в каждой из которых одно высказывание является отрицанием другого. Для каждого ли из этих высказываний найдется такая пара?

А: футбольный матч длится дольше, чем хоккейный:

B: в реке вода стоячая, а в озере – проточная;
C: в озере вода стоячая, а в реке – проточная ;
D: хранить деньги в сбербанке выгоднее, чем дома;
E: доллар – американская валюта;
F: хоккейный матч длится дольше, чем футбольный.

Задача 3. Среди следующих высказываний выберите пары, для которых эквиваленция является истинной.

1. *A*: «Летние каникулы заканчиваются 1 августа».
2. *B*: «В слове собака три буквы «а» ».
3. *C*: «Россия находится в северном полушарии».
4. *D*: «(19- 8)+(13-4)=21»
5. *E*: «5(6+2)=(17-7)(11-7)».

Первоначальные представления о четких и нечетких высказываниях.

Задача 1. Среди следующих высказываний выберите правдоподобные.

1. Первоклассник физически сильнее шестиклассника.
2. Овчарка имеет характер более злобный, чем пудель.
3. В ближайшем магазине компьютер стоит дешевле, чем набор маркеров.
4. Если на карточках записать числа 10, 20, 25, 30,50, 60 и взять карточку наугад, то обнаружится число, оканчивающееся нулем.
5. Профессиональный спортсмен – заядлый курильщик.

Задача 2. Среди двух следующих высказываний выберите более правдоподобное:

1) *A:* «мне разрешают играть во дворе с друзьями ежедневно с 5 до 6 часов вечера»;

B: «мне разрешают играть во дворе с друзьями с 5 до 6 часов утра»;

2) *A:* «бабушка утверждает, что молоко полезнее пепси-колы»;

B: «бабушка утверждает, что кока-кола полезнее пепси-колы».

Виды случайных событий.

Задача 1. Образуют ли полную группу следующие события:

A: друзья Витя и Коля, живущие в разных концах города, в пятницу опоздают к началу первого урока?

B: друзья Витя и Коля (по-прежнему живущие в разных концах города), в пятницу оба придут в школу вовремя.

Если события А и В полной группы не образуют, то назовите то событие (те события), которого здесь недостает, чтобы группа событий стала полной.

Задача 2. Будут ли несовместны события А и В, если

1. Событие А состоит в том, что наугад взятое число больше 10, В – в том, что это число меньше 12

2. Событие А состоит в том, что на первом канале телевидения в 21 час начнется информационная программа «Время», а событие В – в том, что в тот же день на первом канале телевидения в 21 час 5 мин. начнется демонстрация последней серии фильма про Гарри Потера.

Придумайте свои примеры пар несовместных и пар совместных событий.

Задача 3. Выяснить, являются ли несовместными пары следующих событий .

1) А – батарея сотового телефона не разрядится в течение недели,

В – батарея сотового телефона разрядится через четыре дня.

2)На 10 карточках написаны числа от 1 до 10. Событие С – число, написанное на наугад выбранной карточке число больше суммы чисел 3 и 4,

Е – это число равно 9.

Задача 4. Образуют ли полную группу следующие события:

А – найденный в лесу гриб имеет ценные питательные качества (полезен для употребления в пищу);

В – найденный в лесу гриб окажется несъедобным.

Задача 5. Являются ли несовместными следующие события:

А: в ноябре произойдет сезонное снижение цены на сахар;

В: в ноябре цена на сахар повысится.

Образуют ли события А и В полную группу?

Ответ: А и В несовместны, но полной группы не образуют.

5.3 Третий класс

Группировка данных. Распределение частот.

Задача 1. У ученицы в дневнике за четверть выставлены следующие оценки: математика -5, русский язык -5 , природоведение -5. физкультура – 4, музыка – 4, изобразительное искусство -3. Составить таблицу оценок и их частот. Какова мода вариационного ряда? Построить полигон частот.

Задача 2. Проходя по четной стороне улицы улице, школьник, подсчитывал этажность домов. У него получилось следующее:

дом № 2 – 3 этажа
дом № 4 – 3 этажа
дом № 6 – 2 этажа
дом № 8 – 1 этаж
дом № 10 – 2 этажа
дом № 12 – 2 этажа
дом № 14 – 3 этажа
дом № 16 – 1 этаж
дом № 18 – 6 этажей
дом № 20 – 9 этажей
дом № 22 – 9 этажей
дом № 24 – 9 этажей
дом № 26– 9 этажей
дом № 28 – 9 этажей
дом № 30 – 9 этажей

Сгруппируйте в таблицу данные об одинаковой этажности (в качестве элементов первой строки выбрать число этажей) По полученной таблице распределения частот определить:
а)размах варьирования; б)моду вариационного ряда. Построить полигон частот.

Логические операции над высказываниями.

Задача 1. Даны высказывания:

A – «В слове «буква» две гласных буквы», B – «остров – это часть суши, окруженная водой».

1)Каков характер истинности высказываний $A \wedge B$ и $A \vee B$?

2)Изменить высказывание A так, чтобы конъюнкция $A \wedge B$ стала ложной.

3)Можно ли так изменить высказывание A, не меняя при этом высказывания B, чтобы дизъюнкция $A \vee B$ стала ложной?

Задача 2. Даны высказывания:

A – «Апельсин – это овощ», B – «красный свет горит – проезд закрыт».

1)Каков характер истинности высказываний $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \wedge \overline{B}$?

2) Придумать свой пример пары высказываний таких, чтобы
а) их конъюнкция была ложным высказыванием, а дизъюнкция – истинным;

б) их конъюнкция и их дизъюнкция были бы истинными высказываниями;

3) Существуют ли два таких высказывания, чтобы их конъюнкция была высказыванием истинным, а дизъюнкция – ложным?

Задача 3. Даны высказывания:

A – «Лед – это твердое состояние воды», B – «пар – это газообразное состояние воды».

Каков характер истинности высказываний $A \to B$, $\overline{A} \to B$, $A \to \overline{B}$, $\overline{A} \to \overline{B}$.

Задача 4. Определитель неизвестный характер высказывания (A или B), соответствующий указанной строке таблицы истинности. Приведите примеры таких высказываний.

а)

A	B	$A \wedge B$
Истинно	*?*	*Истинно*

б)

A	B	$A \vee B$
Ложно	*?*	*Истинно*

в)

A	B	$A \to B$,
Истинно	*?*	*Истинно*

г)

A	B	$A \to B$,
?	*Ложно*	*Истинно*

Задача 5. Составьте таблицы истинности для следующих сложных высказываний: $A \vee \overline{B}$, $A \wedge (A \vee \overline{B})$, $\overline{A} \to B$, $A \to \overline{B}$, $\overline{A} \to \overline{B}$.

Задача 6. На основании составления таблиц истинности сделайте вывод о равносильности или неравносильности следующих сложных высказываний:

а) $\neg(\overline{A} \vee B)$ и $A \wedge \overline{B}$

б) $\neg(A \wedge B)$ и $A \to \overline{B}$,

в) $A \vee \overline{B}$ и $\overline{A} \to \overline{B}$

Действия над событиями. Противоположные события.

Задача 1. Среди следующих событий выберите пары противоположных.

A – маме переводят зарплату на пластиковую карту;

B – 1 декабря будет солнечный день;

C– 1 декабря пойдет снег;

D – найденный в лесу гриб окажется пригодным для приготовления жаркого;

E – маме переводят зарплату на счет в сбербанке;

F – найденный в лесу гриб окажется несъедобным.

Задача 2. Событие А – меня накажут за случайно разбитый бокал, В –никто не заметит, что бокал разбит. Являются ли события А и В несовместными? Противоположными?

Задача 3. Даны события *A* – в воскресный день по 1 каналу телевидения пройдет фильм «Властелин колец» , *B* - в воскресный день по 1 каналу телевидения будет показан фильм «Шрек-1». Выразить как результат действий над событиями А и В следующие события:

1) *C* – оба фильма «Властелин колец» и «Шрек-1» пройдут в воскресный день по 1 каналу;

2) *D* – хотя бы один из фильмов «Властелин колец» и «Шрек-1» пройдут по 1 каналу;

3) *E* – ни один из этих фильмов не будет продемонстрирован;

4) *F* – в воскресный день по 1 каналу состоится показ только фильма «Властелин колец»;

5) *H* – состоится показ только фильма «Шрек-1»;

6) *J* – ровно один и этих двух фильмов будет показан в воскресенье по 1 каналу.

Задача 4. Ученик решил только одну из четырех заданных задач. Учитель вызывает к доске решить наугад им выбранную задачу. Что вероятнее для ученика – получить положительную оценку или двойку? Сколько надо было решить задач, чтобы шансы получить положительную оценку и двойку сравнялись?

Действия над событиями. Интуитивное представление о вероятности.

Задача 1. В 3-А классе проводится книжная лотерея, в которой из 25 билетов выигрышных 12 штук, а 3-В классе из 30 билетов – 15 выигрышных. В каком из классов шанс выигрыша выше?

Задача 2. Два двоечника опоздали на урок и решили до звонка поупражняться в подбрасывании игрального кубика. Один из них предложил такие условия игры: «бросаем кубик по 1 разу; если выпадает четное число очков, то выигрываю я, а если число очков делится на три – то ты». Справедливы ли такие условия игры? Возможны ли здесь тупиковые (ничейные) ситуации? Перечислить их.

Испытания. Элементарные исходы испытания. Нахождение количества исходов.

Задача 1. В кошельке три купюры: 10 рублей, 50 рублей и 100 рублей. Наугад выбирают две купюры. Сколько существует в этом случае вариантов извлечения? Какова максимальная стоимость покупки возможна в каждом из этих случаев?

Задача 2. Мальчик решил подарить маме букет из трех цветов, в котором должны быть две гвоздики. У продавца оказалось три гвоздики разного цвета и три розы: белая, розовая и желтая. Сколько вариантов формирования букета имеется у мальчика?

Задача 3. Сколько существует различных результатов опыта при одновременном подбрасывании игрального кубика (игральной кости) и монеты?

Задача 4. Брошено два игральных кубика. Сколько исходов благоприятствует событиям

A: сумма очков на кубиках равна 3,

B : сумма очков на кубиках равна 4

Функциональная зависимость и различные способы ее задания.

Задача 1. Размер коммунальных платежей (в рублях) вычисляется по формуле $y=700+x$, где x – стоимость потребленной электроэнергии. Изобразить на координатной плоскости график указанной зависимости (1 ед. масштаба соответствует 100 рублям). Определить по графику (и проверить путем непосредственных вычислений), сколько стоила потребленная электроэнергия, если коммунальный платеж составил а)970 рублей; б) 700 рублей.

Как изменится расчетная формула, если семье ежемесячно предоставляется субсидия в 250 руб.? Составить таблицу платежей по месяцам первого квартала, если стоимость потребленной электроэнергии составила в январе 150 рублей, в феврале 120 рублей, в марте – 90 рублей.

Задача 2. Дачный участок имеет прямоугольную форму, x – его длина, y – ширина. Записать формулу, по которой можно вычислить длину забора, которым следует огородить участок. Вычислить длину забора, если x=35 м., y=20 м.

Как изменится формула для длины возводимого забора, если по ширине участка с одной стороны забор уже поставлен соседом? Какова будет в этом случае длина возводимого забора при тех же значениях x и y.

Задача 3. По проекту в строящемся доме в каждой квартире площадь зала вдвое больше, чем площадь спальной комнаты. У прораба на компьютере вирус уничтожил часть данных. Помогите их восстановить.

	Длина спальни	*Ширина спальни*	*Площадь спальни*	*Площадь зала*
Кв.№ 32	*4*	*3*		
Кв.№ 33		*3*	*9*	
Кв.№ 34	*4*			*32*

5.4 Четвертый класс.

Проценты

Задача 1. В составе ткани 25% синтетического волокна первого типа и 15% синтетического волокна второго типа, а остальное – чистая шерсть. Чего больше в этой ткани: синтетики или шерсти?

Задача 2. Столовый уксус – это уксусная кислота, разведенная водой. Сколько граммов кислоты содержится в 200 г. 6-ти процентного уксуса?

Задача 3. В дневнике ученика 2 отличные оценки, что составляет 40% от общего количества оценок. Сколько оценок в дневнике ученика?

Задача 4. В начале сентября 1 мешок картофеля на рынке стоил 300 руб., а в конце – подешевел на 20%. Сколько стоил 1 мешок картофеля в конце месяца?

Задача 5. Банк начисляет 10% годовой прибыли от суммы вклада. На сколько увеличится вклад в конце года, если в начале года сумма вклада составляла 30 тысяч рублей?

Задача 6. Банк начисляет 10% годовой прибыли от суммы вклада; проценты капитализируются. Достаточно ли будет положить в банк 50 тысяч рублей, чтобы через два года на счете было не менее 60 тысяч рублей?

Круговые и столбчатые диаграммы (построение и чтение).

Задача. В городе 20% учащейся молодежи, 50% работающего населения, остальные жители – пенсионеры. Сколько процентов пенсионеров в городе? Построить круговую диаграмму, изображающую соответствующие доли населения в городе.

Сколько тысяч учащейся молодежи в городе, если все население составляет 50 тысяч человек? Найти в этом случае количество работающих и пенсионеров и построить соответствующую столбчатую диаграмму.

Графики, интерполяция, экстраполяция.

Задача. Стоимость проезда в такси зависит от длины маршрута следующим образом

Километраж	*До 10 км*	*11 км*	*12км*	*13 км*	*14 км*
Стоимость	*60*	*70*	*80*	*90*	*100*

Изобразить зависимость графически. Соединить полученные точки координатной плоскости. Каков характер имеет зависимость стоимости проезда от времени при длине маршрута от 10 км.? Сколько будет стоить проезд 15 км? 20 км?

Функциональная зависимость и различные способы ее задания; интерполяция, экстраполяция.

Задача 1. Папа готовит автомобиль к покраске. За час он обрабатывает 2 квадратных дециметра поверхности. Каков вид зависимости площади (в $дм^2$)

обработанной поверхности от времени (в часах) работы? Составить таблицу значений, полученных по истечении получаса, 2 часов, 4 часов, 6 часов. Изобразить точки на координатной плоскости; соединить их. Определить по графику, а затем и по расчетной формуле, сколько $дм^2$ поверхности будет обработано через 5 часов работы? Через 7 часов?

Задача 2. Я решил «прикольным образом» покрасить пол в моей комнате в два разных цвета, разделив его по диагонали. Хватит ли мне литровой банки зеленой краски на половину комнаты, если размеры комнаты таковы: длина 5 м, ширина 3 м., а расход краски составляет 1 л. на 10 $м^2$

Мама разрешит мне осуществить этот план, если я запишу формулу для расчета расхода краски в виде зависимости ее количества (в литрах) от площади окрашиваемой поверхности (в $м^2$). Какова должна быть эта формула?

Предикаты. Множества истинности.

Задача 1. Предикат P(x) задан следующим образом: «x – любимое блюдо моей кошки». Сформируйте множество истинности предиката, если x – элемент следующего множества

M={поп-корн, куриный окорочок , капуста,
морковь, рыба, зеленый лук, чипсы, сосиска}

Решить ту же задачу для предиката P(x): «x – любимое блюдо моего кролика».

Задача 2. Найти множество истинности предиката $P(x)$: «x является геометрической фигурой», если $P(x)$ задан на множестве

M={телевизор, квадрат, банкомат, джинсы, треугольник, прямоугольник,
достоверное событие}

Задача 3. Предикат $P(x)$ определен следующим образом: $2x>5$. Принадлежат ли множеству истинности числа $x=0$, $x=3$, $x=2$?

Задача 4. Предикат P(x) определен в виде $x-1<5$ на множестве {2, 5, 6, 7}. Указать его множество истинности. Указать множество истинности предиката $\overline{P}(x)$

а) не находя его вида;

б)определив предварительно вид предиката $\overline{P}(x)$.

Задача 5. Предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на множестве натуральных чисел определены в виде: $P(x)$: $x<12$, $Q(x)$: $x \geq 8$. Найти множество истинности предикатов $\overline{Q}(x)$ и $P \wedge Q$.

Задача 6. Предикат P зависит от двух переменных x и y и определяется в виде $y=x+1$. Какие из следующих точек координатной плоскости принадлежат множеству его истинности:

(3,4) ; (4,3); (15, 16)); (16,16); (20, 21).

Случайные выборки. Анализ случайных данных.

Задача 1. В течение 20 часов каждый час замерялось напряжение в электросети. Получены следующие данные (в вольтах):

210, 210, 200, 210, 220, 220, 220, 210, 230,
210,210, 210, 180, 220, 200, 200, 220, 200, 230.

Расположить значения в порядке их возрастания. Построить таблицу распределения частот и относительных частот. Построить полигон относительных частот. Найти среднее напряжение в сети за весь период наблюдения.

Задача 2. В течение месяца ежедневное время пребывания в сети Интернет составило:

1 час, 0,5 часа, 0,5 часа, 0,5 часа, 2 часа, 1,5 часа, 1 час, 2 часа, 2 часа, 1 час, 0,5 часа, 1 час, 1 час, 1 час, 1час, 0,5 часа, 1 час, 0,5 часа, 1 час, 1 час, 1 час, 1 час, 1 час, 1 час, 2 часа, 1 час, 1 час, 1 час, 0,5 часа, 2 часа.

Расположить варианты (представляющие собою ежедневное время пребывания в Интернете) в порядке возрастания с указанием их частот.

Найти относительную частоту каждой варианты. Определить:

а) количество часов, подлежащих оплате за весь месяц;

б) моду вариационного ряда;

в) размах варьирования;

г) среднее ежедневное время пребывания в Интернете.

Соединения. Простейшие комбинаторные формулы.

Задача 1. Ученику мама оставила следующий обед : салат, борщ, плов и пирожное. Он обязательно начнет обед с пирожного, а все остальное съест в

произвольном порядке. Найти число всевозможных вариантов обеда этого ученика.

Задача 2. Трое друзей решили поехать в Москву в одном купе поезда. Однако в кассе есть только два места в одном купе: одна полка верхняя и одна нижняя. Сколько есть различных вариантов распределения между друзьями мест в этом купе?

Задача 3. Старший брат должен сдать два экзамена по выбору. Экзамены проводятся по физике, биологии, истории, географии. Сколько у него есть вариантов выбора пары экзаменов?

Относительная частота события. Статистическая вероятность.

Задача 1. В классе 20 учащихся имели сотовые телефоны. 5 человек потеряли свои сотовые телефоны, а 10 человек постоянно забывают заряжать батарею. Найти относительную частоту события:

а)данный ученик потерял свой телефон;

а) данный ученик постоянно и беспрепятственно может пользоваться сотовой связью.

Задача 2. В городе *N* проводился предварительный мониторинг политических предпочтений различных слоев населения. Трижды опрашивались случайным образом сформированные группы по 200 человек. В первой группе за представителей партии «Яблоко» высказалось 10 человек, во второй – 11, а в третьей – 9 человек. Какой может быть (примерно) статистическая вероятность победы этой партии в городе на предстоящих выборах?

Классическая вероятность события.

Задача 1. В библиотеке имеется 50 учебников по математике, среди которых десять – новых. Какова вероятность, что старосте класса останется старый учебник, если учебники распределяют случайным образом?

Задача 2. Новоселы по жребию выбирают квартиры в новом доме (все квартиры одинаковы). Карточки с записанными на каждой из них номерами от 1 до 20 помещают в пакет, из которого наугад извлекают одну из них. Какова вероятность, что номер квартиры первого из участников розыгрыша будет кратен числу 5? Числу 4?

Задача 3. Участников квартета усаживают на сцене в произвольном порядке. Какова вероятность, что они расположатся в таком порядке (слева направо): Мартышка, Осел, Козел и косолапый Мишка?

Задача 4. В картридже принтера заканчивается краска, поэтому дефекты печати возможен на каждой странице с вероятностью 50 %. Какова вероятность, что на первых трех распечатанных страницах окажется дефект печати?

Задача 5. Двое друзей поутру отравились на рыбалку на разные водоемы. Вероятность того, что первый вернется с богатым уловом, равна ½, а для второго эта вероятность равна ¼. Какова вероятность того, что
а)оба вернутся с богатым уловом;
б) только первый из них вернется с богатым уловом.

6. Элементы математической логики и стохастики в начальной школе: практические задания по темам курса

В настоящем параграфе мы приводим содержание некоторых практических заданий (см. [4]), в том числе, по темам, не представленным в действующих в в настоящее время в начальной школе программах (например, «Школа 2100» и др.), учебниках, задачниках.

6.1. Первый класс.

Понятия «дешевле, дороже».
Задание. В ближайшем к дому киоске «Роспечати» изучите ценники на авторучки (только те которые стоят ровно некоторое количество рублей, без копеек). Запишите цены трех разных авторучек. Какова цена самой дорогой? Какова цена самой дешевой? Запишите цены в порядке их возрастания. А затем запишите цены в порядке их убывания. На сколько рублей самая дорогая авторучка отличается в цене (дороже) самой дешевой?

Понятия множества и подмножества.
Задание. В течение 15 минут понаблюдайте на ближайшей к школе автобусно-троллейбусной остановке, какие виды транспорта здесь останавливаются.

Проанализируйте следующим образом множество X всех этих видов транспорта:
а)из каких элементов оно состоит?
б)назовите все подмножества множества X;
в)назовите число элементов во множестве X;
г)назовите число n элементов в каждом из полученных подмножеств.

Понятие высказываний. Истинные и ложные высказывания.
Задание. Прочтите пол-страницы или страницу сказки (например, «Колобок»). Запишите высказывательные предложения (высказывания). Какие из них истинные, а какие ложные?

Классификация событий.
Задание. Спланируйте свой ближайший выходной день. Какие события с вами могут произойти? Запишите, какие из этих событий произойдут достоверно (достоверные), а какие могут произойти или не произойти (случайные). Придумайте одно- два события, которые в вами точно не произойдут (невозможные).

Таблицы.
Задание. Проведем голосование по поводу мероприятия во время ближайших каникул. Заполним следующую таблицу. За какое мероприятие высказалось большинство учащихся?

Сходить в кино	
Сходить в парк культуры	
Сходить в театр кукол	
Сходить в музей	

Таблицы. Изображение пар на координатной плоскости.
Задание. Класс разбивается на четыре равные (примерно равные) группы.
Каждой группе поручается составить для себя график дежурства:
а)в виде таблицы : фамилия – день недели;
б)в виде числовой таблицы: порядковый номер в группе – номер дня недели;

в)в виде пар точек на плоскости с координатами, соответствующими таблице п.б).

6.2 Второй класс.

Сведение данных в таблицу (***работа со строками и со столбцами, подсчет суммы нескольких ячеек***).

Задание 1. Производится опрос: как учащиеся добираются до школы. Данные заносятся в следующую таблицу

Средство передвижения	
Пешком	
На автобусе	
На троллейбусе	
На автомобиле	
	Всего

Учащимся предлагается изобразить полученную информацию в виде линейной диаграммы. Далее задаются следующие вопросы (ответы используют полученную таблицу и линейную диаграмму):

1)Сколько всего ребят опрошено?

2)Каким способом добираются до школы большая часть учащихся?

3)Какой способ передвижения пользуется «наименьшей популярностью»?

4)Как изменятся результаты таблицы, если родители (бабушки, дедушки) всех учащихся купят автомашины?

Прогнозируемый ответ: уменьшится число учащихся, которые добираются на автобусе и троллейбусе.

Задание 2. Пронаблюдайте погоду в течение четырех недель месяца. Данные наблюдений занесите в следующую таблицу.

Погода	Недели месяца				*Всего*
	Первая	*Вторая*	*Третья*	*Четвертая*	
Ясно					
Пасмурно					
Переменная					

облачность					

Используя таблицу, ответьте на следующие вопросы:

1) В течение какой недели было больше всего ясных дней?

2)Были (или не были) в течение месяца недели с одинаковым числом

а)пасмурных дней?

б)ясных дней?

2) Сколько всего пасмурных дней было за четыре недели?

3) Сколько всего пасмурных дней было за четыре недели?

4) Какая погода преобладала в этом месяце?

Комбинаторные задачи.

Задание 1. Класс разбивается на группы по 5-6 человек в каждой. В каждой группе составляют всевозможные пары дежурных по классу. Сколько получилось различных вариантов? Какую закономерность вы заметили?

Прогнозируемый ответ: в каждой группе из 5 человек получилось по 10 вариантов пар, а в каждой группе из 6 человек получилось по 15 вариантов пар.

Задание 2. Из кукольного театра вам надо добраться до парка культуры (дело происходит в г. Тамбове). Составьте всевозможные варианты вашего маршрута. Сколько получилось различных вариантов?

Придумайте сами небольшое путешествие по району, где вы живете. Запишите все варианты маршрутов. Сколько получилось различных вариантов?

Задание 3. В ближайшее воскресенье (или в ближайший праздничный день) запишите все блюда, которые вы съедите за обедом. Представьте себе, что мама (бабушка,…) вам разрешила бы есть их в любом порядке. Составьте все возможные меню вашего обеда. Сколько вариантов у вас получилось?

Высказывания.

Задание 1. Класс разбивается на группы по 4-5 человек. Каждый человек в группе произносит по два высказывания: одно истинное и одно – ложное. Записать все произнесенные высказывания парами, так чтобы их эквиваленция была истинной.

Задание 2. Класс разбивается на группы по 4-5 человек. Каждый учащийся произносит по 1- 2 обещанию. Заполнить таблицу, в первой колонке которой

собрать все правдоподобные обещания, а во второй – неправдоподобные. Какое из обещаний наиболее неправдоподобно?

Частоты.

Задание 1. Класс разбивается на группы по 4-5 человек. Каждый учащийся подбрасывает монету по два раза. Фиксируется (записывается) число выпадений герба. Затем эксперимент повторяется с четырехкратным подбрасыванием монеты. Данные по каждой группе и всему классу сводятся в следующую таблицу.

	Первая	*Вторая*	*Третья*	*Четвертая*	*Всего*
Число подбрасываний					
Число гербов(частота выпадения)					

Какую закономерность относительно количества выпадения герба можно заметить в каждой группе? А по результатам всего класса?

Прогнозируемый ответ: частоты примерно равны половине числа подбрасываний монеты.

Задание 2. Каждый учащийся подбрасывает по одному разу игральный кубик (игральную кость). Результаты по всему классу сводятся в следующую таблицу

	1очко	*2 очка*	*3 очка*	*4 очка*	*5 очков*	*6 очков*
Частота Выпадения						

Какую закономерность относительно частоты (количества) выпадения каждого числа очков можно заметить?

Прогнозируемый ответ: эти частоты мало отличаются (примерно равные).

Таблица распределения частот.

Задание. Возьмите у родителей квитанции о квартплате за истекший календарный год. Запишите (по месяцам) стоимость израсходованной

электроэнергии. Составьте соответствующую таблицу. Затем расположите стоимости в порядке их возрастания, определите частоту каждой из них и составьте соответствующую таблицу (вариационный ряд) Определите (если таковая имеется) стоимость с наибольшей частотой. В каком месяце уплачена наибольшая, а в каком – наименьшая сумма? Как вы думаете, почему именно в эти месяцы вы заплатили больше всего и меньше всего соответственно? Определите размах варьирования стоимости электроэнергии.

6.3 Третий класс.

Высказывания. Игра-шутка.

Класс разбивается на пары. Первый участник пары записывает в тетради посылку импликации «если ….», а второй (не зная, что записал первый), заключение «то…». Затем оба записывают полученную импликацию и определяют, истинна она или ложна.

(*Например, «если два больше трех, то попугая можно научить говорить» - истинное высказывание*).

Далее, две соседние пары участников игры обмениваются высказываниями, определяют истинность импликации, и наиболее смешную из двух фраз записывают на доске. Наконец, класс голосованием определяет самое смешное из всех записанных (и пронумерованных) на доске высказываний.

Результаты голосования заносятся в таблицу и изображаются на координатной плоскости в виде полигона частот.

Далее результаты голосования изображаются в виде столбчатой (линейной) диаграммы.

Заметим, что задача носит комплексный характер и при ее решении актуализируются знания из разных областей курса:

- определение характера истинности простейших (атомарных) высказываний;

- построение импликаций;

- определение характера истинности импликации;

- построение таблиц и полигонов частот;

- построение диаграмм;

-определение моды вариационного ряда («фраза-победитель» имеет наибольшую частоту).

Можно также предложить учащимся подобное задание с построением дизъюнкций и конъюнкций высказываний.

Функции двух переменных.

Задание. Измерьте длину и ширину каждого из основных помещений вашей квартиры. Данные занесите в следующую таблицу.

	Зал	*Спальня*	*Кухня*	*Ванная комната*	*Лоджия*	*. . .*
Длина						
Ширина						
Площадь						

Определите площадь каждого помещения и полезную площадь (сумму площадей всех жилых комнат) квартиры. За отопление какой из комнат вы платите больше всего? Меньше всего? Почему?

6.4 Четвертый класс

Проценты.

Задание. Узнайте у родителей (или близких знакомых), какой процент по рублевым вкладам выплачивает банк, в котором они держат свои счета. Сколько денег будет на счету по истечении двух лет хранения вклада, если положить на счет первоначально 1000 рублей.

Диаграммы. Графики.

Задание. Изучите программу какого-либо канала телевидения на ближайший воскресный день. Изобразите на круговой диаграмме долю передач
а)информационных;
б)музыкальных;
в)юмористических;
г)художественных фильмов;
д)других.
Выразите (приближенно) эти доли в процентах от общего количества передач. Изобразите эти доли на круговой диаграмме.

Диаграммы. Графики(интерполяция и экстраполяция).

Задание. Запишите температуру воздуха за окном квартиры в 9 часов вечера и в 7 часов утра. Считая, что температура изменяется (в зависимости от времени, прошедшего с начала наблюдения) по линейному закону (т.е. зависимость

изображается на координатной плоскости в виде прямой), определить приближенно температуру, которая
а)была в 2 часа ночи;
б)была 11 часов, 1 час, 3 часа ночи и 5 час утра.

Какой может в этом случае быть температура воздуха в 9 час. утра?

Относительная частота. Вероятность события.

Задание. Понаблюдайте из окна квартиры (школы) в течение 2 – 5 минут транспортный поток и запишите, сколько проехало мимо автомобилей, сколько среди них иномарок, сколько всего легковых автомобилей, сколько – такси . Найти относительную частоту

а)числа легковых автомобилей в транспортном потоке;

б)такси в транспортном потоке;

в)такси – среди легковых автомобилей;

г)иномарок – в транспортном потоке.

С какой вероятностью вы можете прогнозировать, что первой среди проезжающих мимо машин окажется такси.

На основе результатов наблюдения и свойства устойчивости относительной частоты определите, каким приблизительно может оказаться процент иномарок в составе городского транспорта.

Комбинаторные формулы.

Задание. Сходите в парк культуры и подсчитайте количество имеющихся там аттракционов. Сколько различных вариантов развлечений вы можете устроить, если родители выдали вам деньги

а) только на два аттракциона;

б)на три аттракциона.

Подсчеты произвести непосредственно и с помощью формулы числа сочетаний.

Построение вариационного ряда. Числовые характеристики выборки.

Задание. В течение двадцати дней пронаблюдайте и запишите рублевый курс доллара. Расположите варианты в порядке их возрастания и составьте соответствующий вариационный ряд. Определите размах варьирования курса доллара, моду и медиану вариационного ряда. Найдите среднемесячный курс доллара.

7. Образовательная инноватика и инновационные проекты: понятийное поле

7.1 Основные понятия инноватики.

Новшество (новация) - идея, метод, средство, технология или система, ***инновация*** **-** это результат реализации новых идей и знаний с целью их практического использования для удовлетворения определенных запросов потребителей.

Инноватика – теория инноваций; изучает формирование инноваций от зарождения инновационной идеи до ее реализации и выработки инновационных решений.

Образовательная инноватика изучает природу, закономерности возникновения и развития образовательных инноваций, их связи с традициями прошлого и будущего в отношении субъектов образования.

Объект образовательной инноватики – процесс возникновения, развития и освоения целенаправленных изменений, вносящие в образование новые элементы, и вызывающие его переход в новое состояние .

Предмет образовательной инноватики – система отношений, возникающих в инновационной образовательной деятельности, направленной на становления личности субъектов образования (учащихся, педагогов, администраторов).

Инновационная политика в образовании - направление деятельности государственных, региональных, муниципальных органов по реализации приоритетных целей в сфере управления инновациями в образовании.

Инновационная деятельность - комплекс принимаемых мер по обеспечению инновационного процесса на том или ином уровне образования.

Инновационная деятельность в образовании – форма профессиональной деятельности субъектов образования по обновлению компонентов педагогического процесса: смысла, целей, содержания образования, форм, методов, технологий, средств обучения, системы управлении и т.п. Такое обновление относится ***к функциям инновационной деятельности.***

Инновационный процесс - последовательная цепь событий от новой идеи до ее реализации в конкретном продукте, услуге или технологии и дальнейшее распространение нововведения. Инновационный процесс в образовании обеспечивается совокупностью последовательных действий, направленных на целенаправленное изменение элементов образовательной системы с целью её качественной трансформации.

***Компоненты инновационного процесса*:**

- новации;
- апробация, внедрение, введение новации в практическую деятельность (собственно инновация);
- диффузия инноваций, т.е. распространение уже освоенной, реализованной инновации в новых местах и условиях.

7.2 Инновационные проекты

Инновационная разработка – оформленная в соответствии с требованиями к принятому жанру (проект, программа, концепция, учебник, учебное пособие, методические рекомендации) инновация. Содержит описание основных инновационных изменений, предлагаемых к внесению в образование на разных уровнях или внесенных и экспериментально апробируемых.

Проект – прототип, прообраз предполагаемого или возможного объекта, состояния.

Инновационный проект - форма организации и целевого управления инновационной деятельностью.

Инновационный образовательный проект есть теоретически обоснованная программа осуществления или распространения инновации, форма организации и целевого управления инновационной деятельностью**.**

Управление инновационными проектами – раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий методы, формы, средства наиболее эффективного и рационального управления нововведениями.

Классификация инновационных проектов по уровню научно-прикладной значимости:
- *модернизационный* (когда конструкция прототипа или базовая технология кардинально не изменяются);
-*новаторский (улучшающие инновации),* когда конструкция и базовая технология существенным образом отличается от прежнего (добавление новых качеств);
-*опережающий* (инновации, основанные на опережающих решениях);
-*пионерные*, когда появляются ранее не существовавшие конструкции и технологии, выполняющие прежние или новые функции.

Уровень значимости проекта определяется сложностью, длительностью, составом исполнителей, масштабом, характером продвижения результатов инновационного процесса.

7.3 Различие инновационных проектов по основным типам.

По ***предметно - содержательной структуре*** и по ***характеру инновационной деятельности*** образовательные проекты подразделяются на реализационно-исследовательский, экспериментальный, научно-методический, проекты системного обновления (системных инноваций) в образовательных учреждениях и на уровне муниципалитета либо региона:

-проект, преимущественно ориентированный на создание и адаптацию моделей (программ, технологий) известного, уже существующего типа, квалифицируется как ***реализационно-исследовательский;***

-проект, ставящий основной целью формирование таких моделей и технологий в области образования, результаты осуществления которых не очевидны и требуют подтверждения, квалифицируется как э***кспериментальный***;

-проект, основными целями которого является распространение инновационного опыта, полученного в ходе осуществления реализационного или экспериментального проекта, внедрение образовательным учреждением собственных научно-методических разработок в региональную систему образования, квалифицируется как ***научно-методический***.

По ***уровню решения*** инновационные проекты подразделяются на *международные республиканские; региональные; отраслевые; отдельного образовательного учреждения.*

По ***характеру целей*** проекты подразделяются на

конечные - отражают цели, решения проблемы в целом и *промежуточные*.

По ***периоду реализации*** проекты подразделяются на

-долгосрочные;

-среднесрочные;

*-краткосрочные****.***

По ***виду удовлетворяемых потребностей*** проекты могут быть ориентированы на *удовлетворение существующих потребностей* или на *создание новых потребностей.*

С точки зрения ***масштабности решаемых задач*** инновационные проекты подразделяются на

- *монопроекты*, выполняемые, как правило, одной организацией (одним подразделением) и отличающиеся постановкой однозначной инновационной цели (например, создание конкретной технологии), жесткими временными и финансовыми рамках осуществления, и требующие координатора или руководителя проекта;
- *мультипроекты* – представляются в виде комплексных программ, объединяющих ряд монопроектов, направленных на достижение сложной инновационной цели (создание научно-методического комплекса, решение

крупной технологической проблемы); здесь требуются координационные подразделения;

-*мегапроекты* – многоцелевые комплексные программы, объединяющие ряд мультипроектов, связанных между собой одним деревом целей; требуют централизованного финансирования и руководства из координационного центра. На основе мегапроектов могут достигаться решение региональных и федеральных проблем конкурентоспособности отечественных научно-методических продуктов и технологий.

Структуризация проекта есть его системное представление его в виде компонентов и организация связей и отношений между ними. Состав проекта не остается неизменным в процессе его реализации и развития, в нем могут появляться новые элементы или объекты и из его состава могут удаляться. Проект возникает, существует и развивается как открытая система, т.е. определенном окружении, которое называется *внешней средой;* в свою очередь, *внешняя среда формируется рядом факторов: научно-технических, социально-экономических* и др.

***Зоны проекта*:**

- *зона реализации проекта*, в которой объединены знания и опыт по реализации определенных идей и в которой принимаются решения по формированию персонала проекта и управлению проектом;

- *нормативно - правовая зона проекта*, ориентированная на соответствующие нормативно-правовые акты;

-*финансовая зона*, создаваемая финансированием проекта (инвестициями в проект);

- *технологическая зона*, объединяющая технологии осуществления проекта;

- *зона сбыта* интеллектуального продукта, полученного в результате реализации проекта.

Логическая структура проекта - комплекс взаимосвязей между работами, последовательность выполнения работ.

Структурирование направлено на решение следующих задач:

1) *переход от общих целей к конкретным заданиям;*

2) *разделение объекта на поддающиеся управлению блоки;*

3) *распределение ответственности;*

4) *оценка необходимых затрат средств, времени, материальных ресурсов;*

5) *создание единой базы* для планирования, составления смет и контроля за затратами; увязка работ по проекту с системой ведения бухгалтерских счетов.

***Основные участники инновационного проекта*:**

заказчик – будущий пользователь результатов проекта (в широком смысле речь может идти об общественном заказе, в узком – об юридическом или физическом лице);

инвестор – юридические, физические лица, которые вкладывают финансовые средства, обеспечивают проект материальными и интеллектуальными ресурсами (заказчик и инвестор могут совпадать);

руководитель проекта – юридическое или физическое лицо, которому заказчик делегирует полномочия по руководству работ по проекту;

проектировщик – разработчик проекта;

команда проекта **-** создается на период работ.

***Оформление инновационных проектов*:** *название проекта, аннотация, исполнители; сроки выполнения; объем финансирования, адресные данные, банковские реквизиты* и т.п.

Содержание проекта включает характеристику ожидаемых результатов и оценку имеющегося у разработчиков задела. Форма их изложения должна обеспечивать экспертизу результатов.

Рабочая группа и управление проектом. Рабочая группа, решает новые задачи, отличные от тех, что решаются уже существующими функциональными подразделениями. Между рабочей группой и всей организацией существует устойчивая связь, поскольку результат реализации проекта должен быть интегрирован в имеющуюся структуру.

В составе группы могут быть выделены технический ("рабочий") руководитель и научный руководитель. Руководители образуют ***координационную группу,*** в задачи которой входит определение цели проекта, постановка задачи контроль за реализацией проекта (качество, время, расходы) и др. Четкая формулировка проблемы и постановка задачи важна для осмысления проекта и установления этапов выполнения, создания модели обмена информацией, определения ожидаемых результатов, разработки рекомендаций после завершения работ.

Среди ***методик управления*** рабочей группой выделяются: планирование (особенно планирование бюджета и контроля над затратами) управление информационными потоками, процедуры организации совещаний по проекту, принятия решений и т.п.

8. Основные характеристики инновационного проекта «Элементы стохастики и математической логики в начальной школе»

Настоящий инновационный образовательный проект - теоретически обоснованная программа осуществления инноваций в области ***пропедевтики основных понятий и фактов стохастики и математической логики в начальной школе.***

8.1 Актуальность проекта. Современная концепция школьного математического образования ориентирована, прежде всего, на учет индивидуальности ребенка, его интересов и склонностей. С точки зрения формировании личности, необходимость развития у школьников вероятностной интуиции и логического мышления становится актуальной задачей. Логико-стохастический блок содержания наиболее приближен к тем жизненным ситуациям, с которыми учащийся уже имеет дело и будет неизбежно сталкиваться в будущем, поэтому именно в нем заложен значительный потенциал для формирования образовательных компетенций.

Реализация логико-стохастической линии направлена на разрешение ***противоречий*** между

-необходимостью адаптации учащихся в современной изменившейся социально-экономической обстановке и недостаточной разработанностью методик формирования компетенций ;

-возрастающими требованиями к уровню знаний учащихся и отсутствием у значительной части учащихся интереса к обучению;

-необходимостью возможно более раннего ознакомления учащихся с логико-стохастическими подходами к оценке тех или иных практических ситуаций и отсутствием детальной разработки соответствующих программ и дидактических материалов, адаптированных к условиям школы, в особенности - начальной.

Разрешение указанных противоречий – задача, отвечающая с требованиям ФГОС второго поколения, согласно которым предметные результаты освоения основной образовательной программы начального общего образования с учетом специфики содержания предметной области «Математика» должны отражать:

1) использование начальных математических знаний для *описания и объяснения окружающих предметов, процессов, явлений, а также оценки их количественных и пространственных отношений*;

2) *овладение основами логического и алгоритмического мышления*, пространственного воображения и математической речи, *измерения, пересчета,*

прикидки и оценки, наглядного представления данных и процессов, записи и выполнения алгоритмов;

3) *приобретение начального опыта применения математических знаний для* решения учебно-познавательных и *учебно-практических задач*;

4) умение выполнять устно и письменно арифметические действия с числами и числовыми выражениями, решать текстовые задачи, умение действовать в соответствии с алгоритмом и строить простейшие алгоритмы, исследовать, распознавать и изображать геометрические фигуры, *работать с таблицами, схемами, графиками и диаграммами, цепочками, совокупностями, представлять, анализировать и интерпретировать данные.*

Выделенные (нами, курсивом) положения стандарта во многом могут быть реализованы посредством введения элементов комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики в курс математики в виде одной из сквозных содержательно-методических линий, что, в частности, которая дает возможность накопить определенный запас представлений о статистическом характере окружающих явлений и их свойствах.

Формировать эти представления необходимо, начиная с раннего возраста. Уже в начальной школе учащемуся доступны некоторые вероятностные понятия («чаще», «реже», «невозможно», «возможно» и др.), простейшие комбинаторные задачи, элементы наглядной и описательной статистики. Соответствующие задачи основаны на реальных сюжетах, имеют практическую направленность, их использование формирует умение принимать оптимальные решения, развивает элементы творческой деятельности. Следовательно, освоение именно логико-стохастической линии содействует возрастанию интереса к самой образовательной области «математика», пропаганде ее значимости и универсальности.

8.2. Целевой компонент проекта, научная новизна и практическая значимость. На основе компетентностного подхода ***ставится цель*** разработать и апробировать содержание и методику преподавания пропедевтического курса «Элементы математической логики и стохастики».

Достижение указанной общей цели может быть реализовано в рамках дополнительного образования (например, кружковой работы или организации специального курса) через систему следующих целей, относящихся собственно к математике.

Общеобразовательные цели: овладение учащимися знаниями, умениями и навыками, дающими представление о теоретико-множественных и логико-

веротностных подходах, методах, приемах изучения окружающей действительности.

Воспитательные цели : воспитание активности, самостоятельности, ответственности, культуры общения; воспитание эстетической, графической культуры.

Развивающие цели : формирование мировоззрения учащихся, логической и эвристической составляющих мышления, алгоритмического мышления.

*Практические цели***:** формирование умений строить математические модели реальных явлений, анализировать построенные модели, исследовать явления по заданным моделям, применять вероятностно-статистические методы к анализу процессов и прогнозированию их протекания.

В процессе продвижения к поставленной цели решаются следующие задачи:

- овладение учащимися на доступном уровне основными понятиями и фактами теории множеств, алгебры высказываний, алгебры событий;
- знакомство со способами сбора, накопления, группировки данных, и их упорядочений по заданному признаку;
- получение представлений о математическом моделировании реальных ситуаций в виде таблиц графиков, диаграмм, в терминах процентов;
- овладение простейшими методами компьютерного моделирования;
- знакомство со способами математической обработки результатов случайных выборок;
- ознакомление с понятием вероятности как математическим способом прогнозирования событий и простейшими приемами ее вычисления .

Научная новизна и теоретическая значимость проекта состоят в том, что обоснована необходимость и возможность формирования логико-стохастической культуры в процессе обучения математике в начальных классах, определены соответствующие пути и средства, разработаны содержание курса и система упражнений, предложены технологии изучения материала.

Практическая значимость состоит в том, что предложены вопросы содержания, задачи и задания практической направленности (см. параграфы 4 и 5) , методические рекомендации, которые могут быть использованы в практике работы учителей и методистами при совершенствовании программ и методических пособий для начальной школы.

Содержание и его структура. Материал разбит на логико-множественный, наглядно-функциональный, комбинаторный и вероятностно-статистический блоки содержания (см. п. 3.3). Структура математического

материала в учебной программе - концентрическая (некоторые разделы изучаются с повтором на новом уровне).

Курс может быть реализован в первом классе – в течение второго полугодия (16 учебных часов, по одному часу в неделю), втором, третьем и четвертом классах – в течение двух полугодий, по 32 часа (1 час в неделю).

Система контроля предусматривает:

- в первом классе: текущий безоценочный контроль в виде устного опроса на каждом уроке; проведение заключительного урока обобщающего повторения, на котором предлагается система тестовых заданий;
- во втором, третьем, четвертом классах: текущий контроль в виде устного опроса, рубежный контроль в форме письменных тематических самостоятельных работ, заключительный контроль в виде подборки тестовых заданий по всем изученным темам.

8.3 Компоненты инновационного процесса:

-*новации*, к которым относятся, программа логико-вероятностной подготовки, календарно-тематический план, система упражнений, методические указания, программа соответствующей переподготовки учителей начальных классов;

- *апробация, внедрение указанных новаций* в практическую деятельность и их *диффузия*.

Функции инновационной деятельности – обновление компонентов образовательного процесса: целей (указаны выше), содержания подготовки, технологий, средств обучения и контроля (указаны в настоящем параграфе).

Уровень научно-прикладной значимости можно охарактеризовать как ***модернизационный.***

Тип инновационного проекта - научно-методический (наличие авторских научно-методических разработок); ***уровень решения –*** региональный проект (ориентирован на распространение, в первую очередь, в региональной системе образования), период реализации – долгосрочный, ***масштабность проекта*** – монопроект.

Нормативно - правовая зона проекта определяется следующими нормативно-правовыми актами:

Концепция модернизации российского образования на период до 2010 г. //Вестник образования. – 2002. - №6. – с. 11-40.

2. Закон Российской Федерации «Об образовании» от 10 июля 1992 года № 3266-1 *(ред. от 27.10.2008, с изм. и доп., вступившими в силу с 01.01.2009).*

3. Федеральный государственный образовательный стандарт начального общего образования.

***Финансово – инвестиционная зона проекта*:** проект не требует специального финансирования, инновационная деятельность осуществляется в рамках бюджетного финансирования региональной системы образования.

Зона сбыта получаемого интеллектуального продукта может быть сформирована в процессе реализации проекта.

Выбираемые ***технологии и приемы обучения*** диктуются с одной стороны, целями формирования компетенций и психологическими особенностями младшего школьного возраста, а с другой стороны – спецификой математического материала.

Технологическая зона проекта объединяет следующие два вида технологий:

1)технологии изучения математического материала;

2)технологии мониторинга указанного процесса.

К первому классу технологий относятся:

- *элементы технологии укрупненных дидактических единиц (УДЕ);*

-технологии проблемного обучения, развивающего обучения, дифференцированного обучения;

- *информационные технологии, игровые технологии.*

-составление технологических карт и структурно-логических схем в процессе решения задач и др.

Ко второму классу технологий относятся:

- *«традиционные» технологии* (устный опрос, письменные контрольные работы и т.д.)

- *технологии тестового контроля*.

Реализация технологий обоих видов может сопровождаться использованием современных «электронных» средств (технологии дистанционного обучения, интернет-технологии и т.д.).

8.4 Ожидаемые результаты. Пропедевтика основных понятий и фактов стохастики и математической логики является составной частью начального этапа формирования предметной (математической) компетенции учащихся и, в широком смысле, направлена на достижение результатов, которые условно можно подразделить на следующие (очевидно, взаимосвязанные) группы умений:

- умение выстраивать пошаговое решение математических задач;
- коммуникативные умения;
- умения логически мыслить;
- прикладные умения.

Позиция "решение задач" (см. параграф 5) предполагает достижение умений анализировать проблемную ситуацию, собирать необходимые данные для разрешения проблемной ситуации, формулировать проблему, использовать различные приемы решения задач , проводить многошаговые и нестандартные рассуждения, интерпретировать результат решения проблемы, обобщать решение для анализа и решения новой проблемы, проверять правильность решения.

Коммуникативные умения включают в себя умение моделировать проблемную ситуацию с использованием различных способов представления знаний (вербального, письменного, конкретного, визуального, абстрактного), умение выражать математические понятия и идеи своими словами и рассуждениями, умения читать, слушать, интерпретировать, записывать и оценивать математические понятия и идеи, умение дискуссировать на математические темы (как устно, так и письменно), аргументировать свою позицию.

Логическое мышление предполагает наличие умений индуктивного и дедуктивного рассуждения, умений выдвигать гипотезы, оценивать аргументированные рассуждения (как других людей, так и свои собственные рассуждения), умений критического мышления, грамотного использования противоречий и контрпримеров.

Позиция "прикладные умения" близка по содержанию к позиции решения задач, но акцентирована на интеграцию математики с другими предметами. Эта позиция включает умения находить и понимать внутрипредметные связи в курсе математики, моделировать задачи из других предметных областей в математических категориях, развитие элементов системного мышления при обучении математики, а именно, умений видеть целостную картину математики, а не отдельные её фрагменты.

Конкретные же прогнозируемые результаты должны быть следующими**.** В результате изучения содержания математического материала, предусмотренного соответствующей программой учащийся должен:

знать/понимать

- значение логико-стохастических методов для решения задач, возникающих в теории и практике; возможности их применения к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение идей, методов, результатов теории множеств и комбинаторики, универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость в различных областях человеческой деятельности;

- вероятностных характер различных процессов и закономерностей окружающего мира;

уметь

- выполнять действия с множествами, событиями и логические операции с высказываниями;
- вычислять количество элементов и количество заданных упорядочений во множествах;
- вычислять вероятности событий в простейших случаях; составлять статистические распределения случайных выборок и находить их числовые характеристики;

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков; для анализа информации статистического характера;
- практических расчетов по формулам, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства;
- описания и представления графически реальных зависимостей, интерпретации графиков реальных процессов.

8.5 Логическая структура проекта может быть представлена следующей блок-схемой:

Научное обоснование проекта →
содержание курса «Элементы математической логики и стохастики» →
методическое обеспечение →
контрольно-измерительные материалы для осуществления мониторинга процесса обучения →
научно-методическое сопровождение проекта в учреждениях системы повышения квалификации работников образования и в образовательных учреждениях .

В проекте могут быть ***выделены два следующих основных блока***.

1) Научно-методический блок:

-научные разработки по теме проекта, направленные на обоснование актуальности проекта, его практической значимости, технологии его осуществления; на данном этапе имеются работы [1],[5-9] и др.;

-методические разработки по теме проекта; см., напр., [4];

- содержание подготовки, предписанное программой подготовки;

-система упражнений, практических заданий, банк тестовых заданий;

В частности, в рамках научной разработки проекта и в процессе анализа условий инновационной деятельности нами выявлены следующие психологические особенностями младшего школьного возраста:

-кратковременное неустойчивое внимание;

-небольшой объем памяти, преобладание непроизвольной памяти;

- преобладание наглядно-образного мышления, неразвитость абстрактного мышления;

-недифференцированное восприятие.

Ограничивают возможности эксперимента также невысокая степень сформированности общих учебных умений и навыков (навыки беглого чтения, устного счета, умение решать разные типы задачи и т.д.).

В этой связи система упражнений строится таким образом, чтобы обеспечить постепенный переход от манипуляции с предметами к действиям в уме; задачи не предполагают многоступенчатых действий и значительного объема вычислений, их содержание часто приближено к быту, жизни школы, бюджету семьи и т.п.. К таким задачам относятся: нахождение средней месячной квартплаты, прогнозирование цены при заданных темпах инфляции, построение сложных высказываний, составление таблиц истинности для формул алгебры высказываний и т.п.

Приобретению первичных навыков научного познания мира способствуют предлагаемые нами практические задания на проведение наблюдений, измерений, опытов и их обработки вероятностно-статистическими методами.

2) Реализационный блок. Новации, предлагаемые в настоящем проекте, прошли апробацию в МОУ Лицей №6 г. Тамбова в рамках кружковой работы в 1-4 классах. В этом инновационном образовательном учреждении среди предметов и целей деятельности важное место занимают реализация программ углубленного изучения предметов экономико-математического цикла, направленная на формирование современного уровня знаний и картины мира, высокого уровня культуры, развитие творческих способностей детей, адаптацию учащихся к жизни в обществе.

В рамках технологической зоны проекта использованы

- коллективный способ обучения, включающий в себя работу в парах сменного состава, с использованием специально разработанных дидактических материалов;

-методика «взаимного диктанта», которая реализуется в виде взаимного обмена задачами, придуманными учащимися и взаимным контролем правильности решения;

- конкурсы на наиболее интересную задачу на заданную тему, итоги которого подводят сами учащиеся и выбирают победителя голосованием;

- соревнование на скорость решения задач между группами учащихся.

Игровая форма проведения занятий предполагает коллективное сотрудничество учителя и учащихся. При формировании пар и групп учитывается уровень знаний учащихся, направленность их интересов, психологическая совместимость. В процессе коллективного труда происходит и формирование необходимых нравственных качеств.

Занятия проводятся по безоценочной системе; вместе с тем применяются различные способы поощрения лучших учащихся (напр., значки «Ты – молодец», различные призы).

Устраиваются различные соревнования и конкурсы, в которых объявляются победители, выявленные самими учащимися и т.п. Неудачи, ошибки в решениях задач, затруднения с пониманием нового материала анализируются; в результате этого анализа принимаются решения об организации повторения, использовании разноуровневых заданий, и т.п.

Широко используются современные информационные технологии: объясняемый новый материал демонстрируется в виде презентаций; первичные навыки работы с компьютером учащиеся приобретают, а затем и закрепляют при составлении (построении) таблиц (2 класс), построении диаграмм Венна и пирамидальных диаграмм (3 и 4 класс). Поисковые системы сети Интернет могут быть использованы для пополнения недостающего задачного материала с его последующей адаптацией к условиям начальной школы.

В настоящее время осуществляется сбор и систематизация информации о первых результатах этой работы. Приведем ряд уже сделанных выводов:

1) логико - статистический материал приближен к практической деятельности ребенка и в одинаковой степени понятен как более, так и менее успешным в области математики учащимся, в связи с чем у последних повышается самооценка, проявляются больший интерес к занятиям и уверенность в своих силах;
2) у «закоплексованных» учащихся появляется раскованность, смелость в суждениях, желание отстаивать свою точку зрения (положительный момент в процессе формировании коммуникативных компетенций);
3) наблюдается развитие речи, обогащение словарного запаса, достаточно свободное владение экономическими терминами (динамика цен, прибыль, рублевый курс валюты и др.);
4) у учащихся возрастает логичность суждений, аргументированность доводов.

Внедрение проекта проводится при научно-методическом сопровождении ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации».

Изданные методические материалы (напр., [4], [10-11]) используются в практической деятельности преподавателей математики в школах г.Тамбова и Тамбовской области.

9. Стохастика как средство углубления внутрипредметных связей курса математики

9.1 Введению стохастической содержательно-методической линии в курс школьной математики в значительной степени препятствует убеждение как учащихся, так и многих учителей в инородности элементов стохастики в структуре традиционного курса . Способствуют этому убеждению и два сложившихся подхода к изучению стохастического материала. Первый из них состоит в том, что стохастика включается в школьную программу в виде отдельных глав и параграфов современных школьных учебников (Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк и др.), второй – в том, что стохастика изучается в качестве дополнительного элективного курса.

Оба эти подхода ведут к обособлению стохастической содержательно-методической линии от традиционного содержания курса математики.

Вместе с тем, ряд исследователей обоснованно утверждают, (А. Плоцки и В.Д. Селютин и др.; см. напр., [15] и библиографию в ней), что именно ***стохастика обладает определенным интегрирующим потенциалом*** курса, т.к. способствует укреплению внутрипредметных связей между другими его разделами. При этом мы следуем концепции [15], понимая под ***внутрипредметными связями*** «согласованность различных компонентов познавательной деятельности (знаний, умений, форм, методов и пр.), обеспечивающую целостность изучаемого предмета» и выделяя, в первую очередь, согласованность элементов содержания.

Основные положения исследований [15] сводятся к следующему.

1. Построение любой содержательно-методической линии курса должно сопровождаться согласованием традиционных и вновь вводимых (в нашем случае – стохастических) понятий.

2. Изучение элементов стохастики, как эффективное средства укрепления внутрипредметных связей, способно «проникать в различные разделы школьного курса математики, применяться на разных этапах обучения, привлекать к анализу проблемных ситуаций широкий спектр ранее изученных

понятий и представлений, совершенствуя тем самым его внутреннюю структуру».

3. Изучение стохастики «следует осуществлять в рамках когерентно-интегративного подхода», особенностью которого является использование так называемых когерентно-стохастических задач, раскрывающих вероятностно-статистическую природу явлений окружающей действительности и допускающие возможность математической формулировки моделей проблемных стохастических ситуаций; при решении таких задач , для решения которых требуется комплексное применение изучаемых в школе математических понятий и представлений (определений, теорем и т.п.).

Ограничиваясь рассмотрением школьного курса математики, автор использует следующую дифференциацию курса на следующие содержательно-методические линии: *числовая* (комплекс понятий и представлений, связанных с изучением различных видов чисел и действий над ними, широко применяется при вычислении вероятностей и числовых характеристик случайных величин), *формально-операционная линия* (здесь посредством элементов стохастики укрепляются связи между такими разделами школьной программы, как “Дроби и проценты”, “Отношения и пропорции”, “Выражения и тождества” и др.) *линия уравнений и неравенств* (решение уравнений, доказательство или решение неравенств, тождественные преобразования и др. по-отдельности или в комплексе могут применяться при решении задач стохастики; в качестве примера здесь может быть приведена задача на нахождение вероятности одного или нескольких значений в ряде распределения дискретной случайной величины по известным моментам распределения), *функциональная линия* (реализуется, например, в построении многоугольников распределения, полигонов частот, задачах интерполяции и экстраполяции, см. [4]), *геометрическая содержательно-методическая линия* (задачи на вычисление геометрической вероятности и др.). Содержание каждой линии наполняется и углубляется посредством включения в нее стохастических задач.

9.2 Проиллюстрируем и дополним сказанное несколькими ***задачами***.

Задача 1 (линия уравнений и неравенств). Доказать, что произведение вероятностей противоположных событий не превосходит числа ¼.

При решении данной задачи учащийся доказывает, что соответствующий квадратный трехчлен $p^2 - p + \frac{1}{4} \geq 0$ при всех возможных значениях p вероятности данного события. Таким образом, путем решения вероятностной

задачи актуализируются знания учащихся в области свойств квадратного трехчлена.

Задача 2 (функциональная линия). Проведено 4 опыта. Какова должна быть вероятность p наступления события в каждом опыте, чтобы вероятность наступления его ровно в половине проведенных опытов была наибольшей?

При решении данной задачи интегрируются знания в области стандартных вероятностных схем (формула Бернулли) и дифференциального исчисления (экстремумы функции одной переменной).

Задача 3 (геометрическая линия). Муха случайным образом перемещается внутри круга радиуса R. Какова вероятность, что в данный момент она окажется внутри правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса R (размерами самой мухи пренебречь).

Вычисление геометрической вероятности в данной задаче сопряжено с вычислением отношения площадей круга и правильного треугольника, вписанного в окружность.

9.3 Ниже проанализированы ***основные внутрипредметные связи***, порождаемые курсом теории вероятностей и математической статистики. Педагогу-математику, изучающему данный курс в рамках повышения квалификации, необходимо отчетливо представлять себе эти связи и, по возможности, на их наличие обращать внимание учащихся. Указанные связи представлены в виде последовательности следующих соответствий.

Алгебра событий $\leftrightarrow$ *булевы алгебры*
(в частности, алгебра множеств, алгебра высказываний;
анализ соответствующих связей представлен в п. 8).
Аксиоматическая вероятность $\leftrightarrow$ *аддитивные (счетно-аддитивные) функции множеств, заданные на алгебре множеств.*
Непосредственное вычисление вероятностей $\leftrightarrow$ *формулы комбинаторики.*
Биномиальная схема $\leftrightarrow$ *бином Ньютона.*
Полиномиальная схема $\leftrightarrow$ *свойства многочленов.*
Теоремы Лапласа $\leftrightarrow$ *асимптотические формулы анализа,*
специальные несобственные интегралы.
Теорема Пуассона $\leftrightarrow$ *2-ой замечательный предел.*
Числовые характеристики ДСВ $\leftrightarrow$ *сходимость (суммы) числовых рядов.*
Функция и плотность распределения $\leftrightarrow$ *элементы*
дифференциально-интегрального исчисления
(условия монотонности, интегралы с переменным верхним пределом,

формула Ньютона-Лейбница).
Числовые характеристики НСВ ↔ несобственные интегралы.
Распределение Пуассона ↔ ряд Маклорена экспоненты.
Геометрическое распределение ↔ степенные ряды
(в частности, свойство почленного дифференцирования).
Нормальное распределение ↔ интеграл Эйлера-Пуассона,
преобразование несобственных интегралов.
Закон больших чисел ↔теоремы о пределах.
Статистическое распределение выборки,
гистограмма ↔интегральные суммы.
Метод моментов получения
точечных оценок ↔системы уравнений.
Регрессионный анализ ↔экстремумы
функций нескольких переменных.

Подробный анализ каждой из представленных связей может быть предложен читателю по завершении его ознакомления с соответствующими вопросами содержания курса стохастики.

10.Булевы алгебры как общая основа для изучения математической логики, теории множеств, теории вероятностей

Оптимальное соотношение степени абстрактного и конкретного в математических курсах – одна из проблем преподавания математики. Высокая степень абстрагирования адекватна современным подходам в науке, а доступность изложения является необходимым условием понимания , без которого невозможно качественное усвоение, а значит и применение фундаментальных знаний в профессиональной деятельности.

10.1 Булевы алгебры тесно связаны с важнейшими разделами математической науки такими, как теория множеств, математическая логика и теория вероятностей.

Первые попытки применения математических операций к высказываниям (операций, характерных для булевой алгебры) восходят еще к Аристотелю. Становление такого понятия, как алгебра высказываний, связано с именами Р. Декарта и Г. В. Лейбниц (17-18 века) и Д. Буля , считающегося основоположником математической логики как самостоятельной дисциплины

(«Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и теории вероятностей», 1854 г.).

Прорыв в нечеткую логику (вторая половина 20 века), значительно расширивший возможности приложений, был связан с потребностями наук, оперирующих с не полностью достоверной информацией, таких как теория управления и принятия решений, системной экологией, макроэкономикой и др. Нечеткая логика является обобщением классической булевой логики, оперирующей с двоичными числами, которые соответствуют понятиям *истина* и *ложь*. В нечеткой логике эти понятия обобщаются и на все промежуточные между истиной и ложью состояния, которым соотносятся числа из интервала [0,1], отражающие степень истинности высказывания.

Весь длительный период становления математической логики сопровождался параллельным развитием «наивной» теории множеств (принявшей черты строгой теории лишь в начале 20 века) и теории вероятностей, послужившей еще одним импульсом к рассмотрению булевых алгебр и функций на них . Первые работы в области теории вероятностей относятся к 17 веку в связи с осознанием необходимости привлечения математического аппарата к изучению массовых случайных явлений, при анализе , обработке и обобщении обширного статистического материала и в других областях человеческой деятельности.

Модели, порождаемые азартными играми, наряду с вопросами, возникавшими в демографии и теории страхования, в течение долгого времени оставались тем конкретным материалом, на котором строились понятия и методы теории вероятностей, формировался современный взгляд на вероятность как функцию на алгебре событий.

С середины 19 века – времени создания Петербургской математической школы – теория вероятностей трудами русских исследователей обретает прочную логическую и математическую основу Позиции этой науки были укреплены подведением аксиоматического «фундамента», начатого С.Н. Бернштейном и завершенного А.Н. Колмогоровым.

Современная математика рассматривает такие объекты, как высказывания, события, подмножества данного множества в качестве элементов булевой алгебры, а, соответственно, «степень» истинности, вероятность, меру – в качестве функций , определенных на этих элементах. Целям совмещения научности изложения с историческим подходом к изучаемому материалу послужило бы изучение булевых алгебр как отдельного модуля в курсе стохастики. Принцип изложения, который мы называем концентрическим,

состоит в том, что абстрактные определения и факты немедленно интерпретируются в виде конкретных объектов (упомянутых в начале параграфа), чем достигаются, в частности, цели введения основных понятий указанных дисциплин, но устраняется дублирование [5].

10.2 Представляется, что ***структура обсуждаемого материала*** может быть следующей.

1)Вводится понятие булевой алгебры как совокупности объектов произвольной природы, на которой определены две двуместные операции типа ($\vee$), (&) и одна одноместная операция ($^{-}$), и в которой выделены два особых объекта («константы») 0 и 1 .

2)Для введенных операций постулируются свойства а)идемпотентности; б)коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности каждой из операций ($\vee$), (&) по отношению к другой; в) двойного отрицания; г)законы де Моргана.

3) Постулируются действия с константами 0 и 1 (в виде $0 \vee x = x$, $1 \& x = x$).

В качестве интерпретаций булевой алгебры приводятся

1) совокупность всех подмножеств некоторого фиксированного непустого множества *X*. При этом под булевыми операциями ($\vee$), (&),($^{-}$) понимают теоретико-множественные операции объединения $A \cup B$, пересечения $A \cap B$, и дополнения $\overline{A} = X \backslash A$, где *A, B* множества. Нулем служит пустое множество $\varnothing$, а единицей само *X*.

2)Алгебра высказываний с обычной структурой (алфавит алгебры содержит набор основных логических связок: $\vee$- дизъюнкция, $\wedge$- конъюнкция, $\neg$ - отрицание,) и основными равносильностями. Роль единицы играют здесь тождественно-истинные высказывания, нуля – тождественно ложные.

3) Алгебра событий , включающая «1» в качестве достоверного и «0» в качестве невозможного событий. Булевыми операциями ($\vee$), (&),($^{-}$) являются, соответственно, сумма событий, их произведение и переход к противоположному событию

Наконец, на булевой алгебре вводится отображение λ в промежуток [0,1] которое

а) на множестве всех высказываний есть обычная функция истинности со значениями 0 и 1;

б) на множестве нечетких высказываний λ есть функция истинности со значениями между 0 и 1;

в) на множестве событий λ есть вероятность;

г)на классе всех измеримых (по Лебегу) подмножеств квадрата $[0,1]\times[0,1]$ λ есть лебеговая мера.

Общие свойства вводимой функции λ формулируются в виде аксиом (типа А.Н.Колмогорова): неотрицательности, нормированности, аддитивности. Доказывается ряд простейших теорем: значения фунции на объектах A и $\bar{A}$ в сумме составляют единицу, любое значение не превосходит единицы и др.

Соответствующее рассмотрение происходит также на основе концентрического принципа. В частности, для функции истинности (см. пп. а),б)) свойство аддитивности применяется к альтернативной дизъюнкции, при этом сложение значений 0 и 1 производится по модулю 2. Аксиомы вероятности интерпретируются, в первую очередь, на классической и геометрической вероятностях ; при этом подчеркивается различие их свойств (напр., нулевой может быть геометрическая вероятность не только невозможного, но и случайного события).

10.3 Дальнейшее ***углубление в каждую из конкретных теорий*** происходит по следующим направлениям:

1)Математическая логика: а)уточнение понятия алфавита (включающее операции импликации и эквиваленции); б)формулы, их классификация и равносильность; в)нормальные и совершенные нормальные формы; г)логическое следование и его свойства.

2)Элементы нечеткой логики: а)нечеткие множества и нечеткие высказывания; б)функция принадлежности и основные характеристики нечетких множеств; в)операции над нечеткими множествами (высказываниями) и их свойства; г)обзор современных приложений.

3)Теория вероятностей: а)свойства классической вероятности; б)схема гипотез; в) схема Бернулли; в)относительная частота, свойство устойчивости, формулировка закона больших чисел Бернулли .

4)Теория функций: лебеговская мера множеств (линейных или плоских), функции множеств (заряды), интеграл Лебега.

Ввиду того, что здесь приводится лишь концептульный подход, мы не придерживаемся точных формулировок и не обсуждаем возможную степень

строгости изложения. Объем и уровень математического материала, содержащегося в указанном модуле, может варьироваться. Так, например, на «продвинутом» уровне возможно изложение идей теории меры, возможно частичное «слияние» курсов математической логики и теории вероятностей в рамках элементов вероятностной логики (см., напр, [12]) и т.д..

10.4 Целями изучения модуля «Булевы алгебры» являются:

1) формирование математической культуры;
2) установление как внутрипредметных, так и межпредметных связей;
3) сохранение принципа дидактического историзма как средствами упомянутого выше «концентрического» изложения, так и обращением непосредственно к истории вопроса;
4) устранение дублирования одних и тех же положений, но в рамках разных теорий.

В соответствии с первой из целей слушатели должны получить представление об аксиоматическом методе построения математических дисциплин, о требованиях , предъявляемых к системам аксиом. Например, (не касаясь в подробностях вопросов независимости системы аксиом булевой алгебры), можно отметить, что в ее определении достаточно исходить только из одной одноместной и одной двухместной операций и законов двойного отрицания и де Моргана. Важно, также сформировать понимание необходимость проверки выполнимости системы аксиом в случае конкретных интерпретаций ; например , проверить соответствующие постулаты в случае алгебры высказываний, а в случае классической вероятности – справедливость соответствующих свойств для этой модели вероятности и т.д.

Целям формирования математической культуры служит также эволюция понятия аксиом (в сравнении со «школьными» представлениями об аксиомах, полученными в элементарной геометрии) , которая проявляет себя в обсуждаемом материале: теперь это не просто набор истин, принимаемых (в соответствии с нашими интуитивными представлениями) без доказательств, а набор своеобразных тестов, выполнимость которых для данной интерпретации означает справедливость всех теорем теории в области рассматриваемой интерпретации. Дальнейшая эволюция понятия происходит также при обнаружении неизоморфных булевых алгебр (полезно построение соответствующего примера).

В достижении поставленных целей значительную роль играют инновационные формы работы со слушателями. Среди них

1) самостоятельная работа, например, выполнения рефератов и презентаций на темы, связанные с историей булевых алгебр и их интерпретаций;

2) организация круглого стола, посвященного современным проблемам нечеткой логики и ее приложений;

3)придание прикладного характера изложению отдельных положений (напр., реализация функций алгебры логики в виде релейно-контактных схем, обзор современных применений вероятностных методов) и др.

11. Методические особенности решения задач на вычисление классической вероятности

Наш опыт подсказывает, что вычисление классической вероятности полезно разделить на два этапа. Первый этап – качественный анализ результатов опыта или серии опытов. Второй этап – вычисление вероятности как функции «простого» события (в схеме одного опыта) или «сложного события» (в серии опытов); см. [16].

11.1 Действия над событиями. Введению понятия вероятности предшествует классификация событий на достоверные (достоверное событие обозначаем символом E), невозможные (символ $\varnothing$) и случайные (обозначения: $A,B,C,\ldots$). Представляется полезным здесь же ввести действия над событиями (альтернативный подход представлен, напр., в [13], гл.12, параграф 1). С одной стороны, навыки декомпозиций сложного события в простейшие облегчат в дальнейшем решение вероятностных задач, с другой – в терминах действий над событиями могут быть введены понятия совместных и несовместных событий и полноты группы событий. Напомним, что:

- событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ (по определению) состоит в наступлении хотя бы одного из указанных $A_k, k = 1,\ldots,n,$ а событие $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ – в совместном наступлении всех $A_k, k = 1,\ldots,n$;
- два события (по определению) равны, если наступление каждого из них влечет за собою наступление другого.

В процессе каких-либо теоретических обоснований и при решении задач могут быть использованы переместительное и сочетательное свойства сложения

и умножения, а также распределительное свойство умножения относительно сложения

$$(A_1 + A_2)\, A_3 = A_1\, A_3 + A_2\, A_3. \qquad (10.1.1)$$

Доказательства указанных свойств и других равенств между событиями можно формализовать, если учащиеся владеют таблицами истинности для основных логических операций (о связи алгебры событий и алгебры высказываний см. параграф 9). Дело в том, что высказывание «наступит хотя бы одно из событий A_1 или A_2» («наступят оба события A_1 и A_2») истинно тогда и только тогда когда истинна дизъюнкция (конъюнкция) высказываний «наступит A_1» , «наступит A_2». Следовательно, имеет место *взаимно-однозначное соответствие между операциями сложения (умножения) событий и дизъюнкцией (конъюнкцией) соответствующих высказываний.*

Так, например, в справедливости (10.1.1) убеждаемся сравнением пятой и седьмой колонок в следующей таблице истинности (символ «И» означает: истинно высказывание, что наступит соответствующее событие; символ «Л» - ложно, т.е. событие не наступит).

A_1	A_2	A_3	$A_1 + A_2$	$(A_1 + A_2)A_3$	A_1A_3	$A_2\,A_3$	$A_1\,A_3 + A_2\,A_3$
И	И	И	И	И	И	И	И
И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	И	И	И	И	Л	И
Л	И	И	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л
Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
И	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л

С помощью введенных операций определяется теперь понятие несовместности событий A_1 и A_2 ($A_1 \cdot A_2 = \varnothing$, т.е. в результате опыта наступление одного из них исключает наступление другого), полноты группы $A_1, A_2, ..., A_n$ ($A_1 + A_2 + ...A_n = E$, т.е. в результате опыта наступление хотя бы одного из указанных событий является достоверным), а также понятие противоположных событий A и $\overline{A}$ (они несовместны и образуют полную группу: $A \cdot \overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = E$). Можно также сказать, что $\overline{A}$ состоит в

ненаступлении A : высказывание «наступит $\overline{A}$» есть отрицание высказывания «наступит A».

Нам представляется полезным решение серии упражнений, относящихся к классификации событий и действиям над событиями (задачный материал можно почерпнуть, напр., из [13], глава 12, параграф 1, п.4, а также [14]). Для начала, можно предложить учащимся привести примеры событий совместных и несовместных, образующих полную группу и не образующих таковую, примеры противоположных событий. Рассмотрим другие возможные упражнения.

Задача 1.1 Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединенных элемента; событие A_1 есть исправность первого элемента, A_2 – второго. Выразить через A_1 и A_2 следующие события : A блок пропускает ток; B блок не пропускает тока.

Здесь рассуждения состоят в следующем. Поскольку наступление события A означает исправность *хотя бы одного* из элементов, то $A = A_1 + A_2$. Событие B означает *неисправность* каждого элемента, т.е. *совместное наступление* $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, а значит, $B = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2$.

Задача 1.2 Выразить (при наличии той же электрической схемы) следующее событие C: в блоке исправен только один элемент.

Рассуждаем так: событие C равносильно одному из двух следующих: исправен первый элемент (событие A_1), и неисправен второй ($\overline{A}_2$), так что наступает $A_1\ \overline{A}_2$, или (наоборот) наступает $\overline{A}_1\ A_2$; следовательно,

$$C = A_1\ \overline{A}_2 + \overline{A}_1\ A_2 .$$

Можно, далее, предложить учащимся распространить результат на случай наступления ровно одного из трех, …, из n данных событий, доказать, что наступление ровно двух из трех данных событий есть событие

$$A = A_1\ A_2\ \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1\ A_2\ A_3$$

и т.п.

Задача 2. Доказать равенства

$$\overline{A_1 + A_2} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 , \qquad \overline{A_1 \cdot A_2} = \overline{A}_1 + \overline{A}_2 .$$

Доказательство этих равенств (аналогов логических законов де Моргана) может быть проведено с помощью таблиц истинности.

Полезно также проинтерпретировать второе равенство для элементов, *последовательно* соединенных в электрической схеме (т.е. A_1 есть исправность первого элемента, A_2 – второго).

11.2 Вычисление классической вероятности непосредственно по определению. Вероятность P понимается как некоторая численная мера $P = P(A)$ степени объективной возможности наступления данного события. Одной из наиболее употребимых является классическая модель. Здесь всякое событие рассматривается как результат некоторого опыта, имеющего конечное число элементарных исходов. Под элементарными понимаются простейшие («неразложимые») исходы опыта (простейшие случайные события), которые

а)попарно несовместны;

б)образуют полную группу;

в)равновозможны.

При этом понятия «простейшие исходы», «равновозможные исходы» следует отнести к неопределяемым. Так, равновозможность исходов означает, что объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой; о равновозможности судят на основании соображений симметрии и т.п. Часто совокупность всех элементарных исходов называют пространством элементарных исходов (см., напр., [13], гл.12, параграф 1).

Стоит обсудить с учащимися примеры простейших и «составных» исходов, равновозможных и неравновозможных исходов. Так, если опытом служит подбрасывание игрального кубика, то исходы «выпадение числа очков, кратного трем» и «не кратного трем …» не являются элементарными, ибо они не равновозможны (исходов второго типа –больше); кроме того, эти два исхода могут быть «разложены» на более простые : «3, 6 очков» и «1,2,4,5 очков».

Элементарные исходы называются благоприятствующими событию A, если в результате наступления любого из них наступает событие A. Теперь определение классической вероятности события A формулируется в виде

$$P(A) = \frac{m_A}{n},$$

где n - число *всех элементарных исходов опыта*, $m = m_A$ - число тех из них, которые благоприятствуют событию A.

В схеме *одного* опыта решение задачи на вычисление вероятности следует начинать с описания опыта и его элементарных исходов (если исходов много, то достаточно назвать лишь несколько типичных). Далее, следует провести *качественный анализ* исходов, т.е. убедиться в том, что они действительно *элементарные* в соответствии с вышеуказанными пп. а),б), в). И лишь затем *перейти к количественному анализу*, т.е. вычислению n и m.

В качестве простейших иллюстраций последовательного применения качественного и количественного анализа можно предложить классические задачи о выпадении герба на монете или 6 очков на игральном кубике. Далее

стоит распространить задачи на случаи подбрасывания двух, трех,… монет или кубиков. На этапе вычисления вероятности *непосредственно по определению* каждую такую ситуацию интерпретируют как *единичный* опыт, к элементарным исходам которого относят всевозможные *пары* (тройки,…) граней (монет, кубиков). За качественным анализом (проверка несовместности, равновозможности, полноты группы исходов) последует количественный анализ, состоящий в реализации комбинаторного принципа умножения. Так, например, при подбрасывании двух игральных кубиков число элементарных исходов есть $n = 6 \times 6 = 36$.

Весьма часто опыты можно интерпретировать как выборки одного или нескольких элементов из данной совокупности. В общем случае задача формулируется так.

Среди N предметов имеется M меченых. Случайным образом извлекается k предметов. Событие A состоит в том, что в этой выборке содержится ровно l меченых предметов. Найти $P(A)$.

Мы рекомендуем в этом, *общем* случае, установить, что *все исходы такого опыта – элементарные* , т.е. обосновать их попарную несовместность, полноту группы и равновозможность (последняя следует из того, что выборки - случайные). В дальнейших задачах, моделируемых как выборки, достаточно будет лишь сослаться на качественный анализ, проведенный в этом общем случае.

Количественный анализ мы рекомендуем провести поначалу при конкретных значениях N, M, k, l . При этом следует *выделить тот случай, когда извлекается один предмет* (k=1): *здесь число исходов равно* N, *а благоприятствует событию появления меченого предмета ровно M исходов.*

В случае $k > 1$ имеем дело с неупорядоченными выборками, а значит – с сочетаниями.

На основе рассмотрения нескольких частных случаев легко прийти к общей формуле

$$P(A) = \frac{C_M^l \cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

В случае *упорядоченных* выборок рассуждения на этапе качественного анализа сохраняются, на этапе количественного анализа оперируем уже не с сочетаниями, а с размещениями (в частности, с перестановками).

Приведем примеры заданий на выборку.

Задача 3. Для контроля в торговом предприятии отобрано 20 видеодисков, среди которых 5 нелицензионных. Однако один диск (неизвестно какой) был утерян. После этого наугад проверенный диск оказался нелицензионным.

Какова вероятность, что утерянный диск был а)нелицензионным; б)лицензионным.

Р е ш е н и е. Опыт может быть интерпретирован как *случайная выборка* 1 диска (утерянного) из 19 (непроверенных), поскольку проверенный (нелицензионный) диск исключается, очевидно, из рассмотрения. Исходы поэтому – элементарные.

Случай а). Пусть A – событие утери лицензионного диска Так как выбирается *один* предмет, то число исходов n=19 а благоприятных - $m_A = 4.$ Следовательно, $P(A) = \frac{4}{19}.$

Случай б). Выбор лицензионного диска есть событие $\overline{A}$, противоположное A. Следовательно, $P(\overline{A}) = 1 - \frac{4}{19} = \frac{15}{19}.$

Задача 4. В кооперативном доме-новостройке имеется 20 квартир, среди которых 8 расположены на крайних этажах. Квартиры распределяются по жребию. Найти вероятность того, что эти 8 квартир достанутся данным восьми семьям-переселенцам.

Р е ш е н и е . Опыт можно интерпретировать как выборки из 20 участников жеребьевки. Исходы опыта, следовательно, будут элементарными.

Для поведения количественного анализа уточним, что производятся *упорядоченные выборки* из 20 (число участников) по 20 (по числу распределяемых квартир) т.е. имеются перестановки из 20. Количество всевозможных исходов, таким образом есть n=20!

Если событие A состоит в том, что 8 квартир на крайних этажах достанутся восьми семьям-переселенцам, то число благоприятных исходов m_A можно вычислить следующим образом. Среди данных восьми семей возможно 8! способов распределения квартир на крайних этажах, и каждый такой способ сочетается с остальными 12! способами распределения квартир среди остальных 12 участников жеребьевки. Согласно принципу умножения $m_A = 8! \cdot 12!$ Итак,

$$P(A) = \frac{m_A}{m} = \frac{8! \cdot 12!}{20!} = \frac{1}{125970}.$$

11.3. Вероятности «составных» событий. Рассмотрим теперь ситуации, когда случайное событие может быть подвергнуто декомпозиции: выражено через операции сложения, умножения и отрицания (перехода к

противоположному событию) более простых событий – результатов единичного опыта. Напомним основные формулы ([18-19]).

1)*Вероятность произведения есть*

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B),$$

где $P_A(B)$ означают вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло (условная вероятность события B). Результат может быть распространен и на большее количество событий, например,

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

В связи с этими формулами обычно выделяют случай независимых событий: два события A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли другое событие, т.е. эта вероятность абсолютно постоянна в условиях данных опытов. Аналогично, события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если *каждая из вероятностей* $P_j = P(A_j)$ *остается абсолютно постоянной* в условиях данных опытов. Для *n* событий, независимых в совокупности,

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n);$$

в частности, для двух независимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

2) *Вероятность суммы двух событий* вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

Вероятность суммы *n попарно несовместных* событий вычисляется в виде

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n);$$

для случая же совместимости любой пары событий имеем

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}).$$

3) Если $A, \overline{A}$ - пара противоположных событий, то справедливо равенство

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Трансформируем задачу 1 следующим образом.

Задача 5. Блок в электрической схеме содержит два параллельно соединенных элемента, причем первый может пропускать ток (исправен) с вероятностью 0,9, а второй – с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что исправен ровно один блок?

Рассуждения начинаем с качественного анализа. Испытание схемы может быть представлено в виде серии из *двух «единичных» опытов* по испытанию каждого элемента. Результатами опытов являются события A_1 (или

$\overline{A}_1$), A_2 (или $\overline{A}_2$). Событие C, состоящее в том, что в блоке исправен только один элемент, есть (см. задачу 1.2)

$$C = A_1\ \overline{A}_2 + \ \overline{A}_1\ A_2, \text{ так что } P(C)=P(A_1\ \overline{A}_2 + \ \overline{A}_1\ A_2).$$

Вычисление последней вероятности относится уже к количественному анализу, однако остается выяснить «взаимоотношение» событий-компонентов суммы, представляющей событие C. События $A_1\ \overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$, очевидно, несовместны (в чем можно убедиться и формальным образом: $(A_1\ \overline{A}_2)(\overline{A}_1\ A_2)=(A_1\ \overline{A}_1)(\overline{A}_2\ A_2)=\varnothing$), следовательно,

$$P(C)=P(A_1\ \overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\ A_2).$$

Остается вычислить вероятность каждого произведения. По условию, $P(A_1) = 0{,}9,\ P(A_2) = 0{,}8$, следовательно, $P(\overline{A}_1) = 0{,}1,\ P(\overline{A}_2) = 0{,}2$. Вероятности всех этих событий, как мы видим, остаются постоянными в условиях испытания схемы, значит можно утверждать независимость событий A_1 и $\overline{A}_2$ а также $\overline{A}_1$ и A_2. Тогда

$$P(C)=P(A_1)P(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P(A_2)=0{,}9\cdot 0{,}2 + 0{,}1\cdot 0{,}8 = 0{,}26.$$

Решение задач на схему выборок с использованием комбинаторных формул часто вызывает затруднение у учащихся. В ряде случаев альтернативой может быть использование формулы вероятности произведения зависимых событий.

Задача 6. Ученик выучил 15 вопросов из 20, предусмотренных программой экзамена. Какова вероятность, что он знает все три вопроса, случайным образом предложенные ему на экзамене?

Имеем стандартную задачу о выборке. Однако испытание (выбор трех вопросов) может быть также представлено последовательным трехкратным (безвозвратным) выбором по одному вопросу из списка. Пусть событие A состоит в том, что ученик знает все три вопроса, и событие A_k – ученику известен k-ый последовательно выбранный вопрос; k=1,2,3. Тогда $A = A_1A_2A_3$ и, следовательно,

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3).$$

На этапе вычисления каждой из вероятностей $P(A_1), P_{A_1}(A_2), P_{A_1A_2}(A_3)$ имеем выборку одного вопроса из данной (в случае $P(A_1)$) или оставшейся (в случаях $P_{A_1}(A_2)$ и $P_{A_1A_2}(A_3)$) совокупностей. Получаем тогда $P(A_1)=\frac{15}{20}$; $P_{A_1}(A_2)=\frac{14}{19}$ так как к моменту выбора второго вопроса (по наступлении A_1) остается

14 известных ученику вопросов из 19; $P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{13}{18}$ (по наступлении A_1 и A_2 из 18 оставшихся вопросов ученик знает 13). Значит

$$P(A)=\frac{15}{20}\cdot\frac{14}{19}\cdot\frac{13}{18}=\frac{91}{228}.$$

Задача 7. Пользователь компьютера давно не обновлял вирусные базы. Новый вирус поэтому может быть обнаружен с вероятностью 0,6. Если вирус не обнаружен, то он поражает наиболее ценные файлы с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения ценных файлов?

Управление решением может быть выстроено следующим образом

ВОПРОС	ПРАВИЛЬНЫЙ ОТВЕТ
В чем состоит испытание?	«Вирусная атака».
Вероятность какого события требуется найти?	Событие *A* - поражение ценных файлов.
Можно ли событие *A* «разложить» на более простые?	Событие В – необнаружение вируса и событие С – поражение при этом ценных файлов.
Как можно выразить событие *A* с помощью действий над событиями *B* и *C*? Почему именно так?	*A=BC*, поскольку А состоит в совместном наступлении *B* и *C*.
Записать формулу для вычисления вероятности события *A*.	$P(A)=P(B)P_B(C)$
Известна ли вероятность события *B*? Если нет, то как ее найти?	Нам дана вероятность обнаружения вируса; вероятность необнаружения ищется как вероятость противоположного события: *P*(*B*)=1-0,6=0,4.
Что означает в данной задаче запись $P_B(C)$? Известна ли эта вероятность?	$P_B(C)$ есть вероятность события *C* (поражения ценных файлов) при условии, что событие *B* (необнаружение вируса) наступило. Эта вероятность дана, она равна 0,8.
Получите окончательный ответ.	$P(A)=P(B)P_B(C)=0{,}4\cdot 0{,}8=0{,}32.$

В качестве обсуждения решения стоит выяснить, зависимы ли здесь оказались события *B* и *C* (ответ: зависимы) и чему равна была бы вероятность события *C*, если бы *B* не наступило (ответ: вирус обнаружен и уничтожен, следовательно $P_{\bar{B}}(C)=0$).

В общем случае процесс управления решением задачи может быть выстроен пошагово (алгоритмизирован) следующим образом.

1.Описать *опыт* и ввести в рассмотрение *событие*, вероятность которого следует найти.

2. Если речь идет об одном опыте (иначе – перейти к пункту 3), то провести последовательно качественный и количественный анализ:

2.1 назвать исходы опыта;

2.2 установить, что они - элементарные;

2.3 назвать исходы, благоприятствующие данному событию;

2.4 найти число n всех элементарных исходов;

2.5 найти число m всех элементарных исходов;

2.6 вычислить вероятность данного события.

3.Если опыт можно представить как серию из нескольких «единичных опытов», то:

3.1 обосновать, что исходы каждого опыта – элементарные;

3.2 произвести декомпозицию данного события (представить его как результат действий над более простыми, полученными в единичных опытах);

3.3 выяснить «взаимоотношения» компонентов, полученных в декомпозиции (например, попарную несовместность, если речь идет о сумме событий);

3.4 записать формулу для вычисления вероятности «сложного события» в соответствии с декомпозицией п. 3.2;

3.5 произвести соответствующие п. 3.4 числовые выкладки.

Глава 2. ОСНОВЫ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Основными понятиями теории вероятностей являются понятия события и его вероятности. События можно разбить на три категории: достоверные (наверняка происходящие при выполнении данного комплекса условий; достоверные события обозначаем символом E), невозможные (наверняка не происходящие; невозможные события обозначаем символом $\varnothing$) и случайные (могут как произойти, так и не произойти при выполнении данного комплекса условий; обозначаются: $A,B,C,\ldots$). Читатель без труда приведет примеры достоверных, невозможных и случайных событий.

Вероятностью в общем случае называют некоторую численную меру степени объективной возможности появления данного события; таким образом, каждому событию A сопоставляется (единственным образом) некоторое число $P = P(A)$.

Возникновение теории вероятностей относят к середине 17 века и связывают с работами французских учёных Б. Паскаля и П. Ферма и голландского учёного Х. Гюйгенса. Стимулом явилась необходимость подсчета шанса выигрыша в той или иной азартной игре. Важный этап развития теории вероятностей связан с именем швейцарского математика Я. Бернулли, математически обосновавшего свойство устойчивости относительной частоты в виде закона больших чисел для схемы независимых испытаний с двумя исходами (1713 г.). Следующий период (18 в. и начало 19 в.) связан с именами А. Муавра (Англия), П. Лапласа (Франция), К. Гаусса (Германия) и С. Пуассона (Франция). Это – период, когда теория вероятностей уже находит ряд весьма актуальных применений в естествознании и технике (главным образом в теории ошибок наблюдений и измерений, развившейся в связи с потребностями геодезии, астрономии, теории стрельбы и др.). К этому периоду относится доказательство первых предельных теорем в схеме Бернулли, носящих теперь названия теорем Лапласа (1812) и Пуассона (1837); А. Лежандром (Франция, 1806) и Гауссом (1808) в это же время был разработан способ наименьших квадратов получения точечных оценок параметров уравнений регрессии (уравнений, описывающих экспериментальным образом выявленные зависимости функционального характера).

Третий период развития теории вероятностей (2-я половина 19 в.) связан, в основном, с выдающимися представителями русской математической школы П. Л. Чебышевым, А. М. Ляпуновым и А. А. Марковым. Чебышев и его ученики Ляпунов и Марков поставили и решили ряд общих задач, называемых законом больших чисел и центральной предельной теоремой; один важный случай зависимых испытаний, исследованный Марковым, впоследствии получил название цепей Маркова.

Следующий этап развития теории вероятностей характеризуется чрезвычайным расширением круга её применений, созданием системы безукоризненно строгого математического обоснования, новых мощных методов, требующих иногда применения (помимо классического анализа) средств теории множеств, теории функций действительного переменного и функционального анализа. В этот период при очень большом усилении работы по теории вероятностей за рубежом (во Франции - Э. Борель, П. Леви, М. Фреше, в Германии - Р. Мизес, в США - Н. Винер, В. Феллер, Дж. Дуб, в

Швеции - Г. Крамер) российская наука продолжает занимать значительное, а в ряде направлений и ведущее положение. В нашей стране новый период развития теории вероятностей открывается деятельностью С. Н. Бернштейна, значительно обобщившего классические предельные теоремы Чебышева, Ляпунова и Маркова и впервые в России широко поставившего работу по применениям теории вероятностей к естествознанию.

А. Я. Хинчин и А. Н. Колмогоров разработали применение методов теории функций действительного переменного к решению вероятностных проблем. Позднее они и их последователи заложили основы теории случайных процессов; вслед за этим вероятностные методы получают широкое применение в статистике.

Отдельно следует остановиться на персоне А.Н. Колмогорова, который внес величайший вклад в становление и развитие аппарата теории вероятностей. Его фундаментальные труды с успехом пользуются по сей день. Аксиоматика Колмогорова поставила вероятностно-статистическую теорию в один ряд с другими классическими направлениями математической науки.

На базе аппарата теории вероятностей появились , наряду с математической статистикой, теория случайных процессов, теория массового обслуживания и др. Так, в ряде естественнонаучных исследований последних десятилетий усилилась потребность, наряду с одномерными и многомерными случайными величинами, рассматривать случайные процессы, то есть процессы, для которых определена вероятность того или иного их течения. Примером случайного процесса может служить координата частицы, совершающей броуновское движение. В теории вероятностей случайный процесс рассматривают обычно как однопараметрическое семейство случайных величин $X(t)$; например, параметр t может является временем, протекшим с начала процесса.

Подобно тому, как случайная величина характеризуется законом распределения, случайный процесс может быть охарактеризован совокупностью совместных законов распределения для $X(t_1)$, $X(t_2)$,..., $X(t_n)$ для всевозможных моментов времени $t_1, t_2,..., t_n$ при любом $n > 0$. В настоящее время наиболее интересные конкретные результаты теории случайных процессов получены в двух специальных направлениях.

Исторически первыми изучались марковские процессы(процессы без последействия). Марковские процессы являются естественным обобщением детерминированных процессов, рассматриваемых в классической физике, когда состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет ход процесса в будущем; в марковских процессах состояние системы в момент времени t_0

однозначно определяет распределение вероятностей хода процесса при $t > t_0$, причём никакие сведения о ходе процесса до момента времени t_0 не изменяют это распределение.

Другим направлением теории случайных процессов является теория стационарных случайных процессов. Стационарность процесса, то есть неизменность во времени его вероятностных закономерностей, налагает сильное ограничение на процесс и позволяет из одного этого допущения извлечь ряд важных следствий (например, возможность так называемого спектрального разложения). В то же время схема стационарных процессов с хорошим приближением описывает многие физические явления.

Современное состояние теории вероятностей и математической статистики характеризуется широким применением методов теории функций и функционального анализа (см., напр., [19]); с другой стороны, вероятностно-статистические проблемы стимулируют развитие других ветвей математической науки.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

1. Алгебра событий

1.1 Во множестве событий введем следующие действия.

Сложение событий. Событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ называется суммой конечного количества событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если событие A состоит в наступлении хотя бы одного из указанных $A_k;\ k = 1,\ldots,n.$

Понятие суммы можно распространить и на бесконечное количество слагаемых : событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ состоит в наступлении хотя бы одного из указанных $A_k;\ k = 1,2,\ldots$

Умножение событий. Событие $B = A_1 A_2 \ldots A_n$ называется произведением конечного количества событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если оно состоит в совместном наступлении всех указанных $A_k;\ k = 1,\ldots,n.$ Понятие произведения событий можно распространить и на бесконечное число множителей, но в настоящем материале этого не потребуется.

Замечание. Знаки равенства в этих определениях употреблены в смысле обозначений. Когда же мы будем *утверждать*, что события $A=B$, т.е. A и B равны, то означать это будет следующее: если происходит событие A, то наступает и B (т.е. событие B следует из A), и наоборот, событие A следует из B.

1.2 На основании введенных определений суммы и произведения событий легко проверить

а) ***свойства коммутативности*** операций сложения и умножения

$$A_1 + A_2 = A_2 + A_1, \qquad A_1 A_2 = A_2 A_1 \ ;$$

б) ***свойства ассоциативности***

$$A_1 + A_2 + A_3 = (A_1 + A_2) + A_3 = A_1 + (A_2 + A_3),$$

$$A_1 A_2 A_3 = (A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3) \ ;$$

б)***дистрибутивное свойство***

$$(A_1 + A_2) A_3 = A_1 A_3 + A_2 A_3.$$

1.3 События A_1, A_2 называются ***несовместными***, если $A_1 A_2 = \varnothing$.

Другими словами, два события несовместны, если в результате опыта наступление одного из них исключает наступление другого.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***попарно несовместными,*** если любые два из них несовместны.

1.4 Говорят, что события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют ***полную группу,*** если

$$A_1 + A_2 + ... A_n = E \ .$$

Другими словами, события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу, если в результате опыта наступление хотя бы одного из них является достоверным.

1.5 События A и $\overline{A}$ называются ***противоположными***, если они несовместны и образуют полную группу: $A\overline{A} = \varnothing$, $A + \overline{A} = E$.

1.6 Алгеброй событий называется всякое множество событий U, в котором

-введены операции сложения и умножения, результаты выполнения которых также содержатся в U;

- содержится достоверное событие;

- вместе с каждым событием A содержится ему противоположное $\overline{A}$.

Алгебра событий, содержащая также всевозможные бесконечные суммы, называется σ-алгеброй (борелевской алгеброй).

2. Аксиомы вероятности

2.1 ***Вероятность*** будем рассматривать как некоторую ***функцию*** P ***на алгебре событий*** U (или на σ-алгебре событий), которая удовлетворяет следующим требованиям (аксиомам).

A1 (аксиома неотрицательности) : $P(A) \geq 0$ для всякого $A \in U$;

A2 (аксиома нормированности): $P(E)=1$;

A3 (аксиома аддитивности**):** $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$,

если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны;

A4 (аксиома счетной аддитивности для вероятности, вводимой на σ-алгебре событий):

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

если события $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно несовместны; числовой ряд, записанный в правой части равенства, предполагаем сходящимся.

2.2 Имеют место следующие утверждения.

***Теорема* 2.1** Для всякой пары противоположных событий $A, \overline{A}$ справедливо равенство

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Действительно, в силу соотношения $A + \overline{A} = E$ и аксиомы нормированности (см. **A1**) имеем

$$1 = P(E) = P(A + \overline{A}). \qquad (2.2.1)$$

Далее, в силу несовместности A, $\overline{A}$ и **A3** получаем

$$P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}). \qquad (2.2.2)$$

Утверждение теоремы вытекает теперь из (2.2.1) и (2.2.2).

Очевидно, в частности, что достоверное и невозможное события противоположны, а тогда

$$P(\varnothing) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

***Теорема* 2.2** Всякое событие A имеет вероятность $P(A) \leq 1$.

Для доказательства воспользуемся результатом теоремы 2.1 и неотрицательностью вероятности (аксиома **A1**), примененной к $\overline{A}$:

$$1 = P(A) + P(\overline{A}) \geq P(A).$$

3.Классическая вероятность

3.1 Будем рассматривать события A, B, C, ... как исходы некоторого опыта; число исходов считаем конечным. Каждому опыту сопоставим множество всех

его ***элементарных*** (простейших, «неразложимых») ***исходов*** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, которое дает полную информацию о предполагаемых результатах этого опыта.

Элементарными называются такие исходы ω_i опыта, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) ***группа исходов полна***, т.е. обязательно произойдет хотя бы один из ω_i;

б) исходы попарно ***несовместны***;

в)все ω_i – ***равновозможны***, т.е. объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой.

3.2 Среди элементов множества Ω имеются исходы, *благоприятствующие* событию *A*, то есть те, в результате которых событие *A* наступает.

Классической вероятностью события *A* называется отношение числа $m = m_A$ элементарных исходов, благоприятствующих *A*, к общему числу *n* всевозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

3.3 Аксиомы **A1**, **A.2** (а значит, и их следствия, представленные утверждениями теорем 2.1, 2.2), очевидно, выполнены в случае *классической модели вероятности*. Проверим для нее теперь справедливость **A3**. Начнем с рассмотрения двух несовместных событий и установим, что

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Пусть опыт имеет *n* элементарных исходов, из числа которых m_1 благоприятствует событию A_1, а m_2 исходов – A_2. Ввиду несовместности событий A_1 и A_2 событию $A_1 + A_2$ благоприятствуют ровно $m_1 + m_2$ исходов, а тогда

$$P(A_1 + A_2) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A_1) + P(A_2).$$

3.4 Утверждение п.3.3 можно распространить теперь на ***произвольное конечное количество событий***, пользуясь ассоциативным свойством сложения и действуя по индукции. Так, например, если три события A_1, A_2, A_3 попарно несовместны, то события $(A_1 + A_2)$, и A_3 также, очевидно, будут несовместными. Теперь

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P((A_1 + A_2) + A_3)) =$$

$$= P(A_1 + A_2) + P(A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3),$$

так что свойство **A3** оказывается верным и в случае трех слагаемых.

3.5 Для вычисления количества всевозможных и благоприятных исходов опыта часто пользуются следующими ***формулами комбинаторики.***

Рассмотрим произвольную совокупность из N элементов и всевозможные выборки (подмножества), содержащие k элементов; $1 \le k \le N$.

Упорядоченные выборки (важен порядок следования элементов в наборе) называют размещениями; число всевозможных размещений из N по k элементов вычисляется по формуле

$$A_N^k = \frac{N!}{(N-k)!}.$$

В частности, размещения из N по N элементов называют перестановками; число всевозможных перестановок

$$P_N = N!$$

Неупорядоченные выборки (порядок следования элементов неважен) называют сочетаниями; число всевозможных сочетаний из N по k есть

$$C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}$$

4. Относительная частота и статистическая вероятность

4.1 Понятие ***относительной частоты события*** вводится на основе анализа реально проведенных опытов. Пусть n – число опытов, причем событие A появилось $m = m_A$ раз. Тогда относительной частотой события A называют число

$$W(A) = W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

4.2 Практика показывает, что с ростом числа однотипных опытов относительная частота приобретает ***свойство устойчивости***, колеблясь относительно некоторого числа $P = P(A)$, которое называется статистической вероятностью события A. Точная формулировка указанного свойства устойчивости представлена ниже (закон больших чисел Бернулли).

4.3 Легко проверить, что относительная частота $W(A)$ удовлетворяет свойствам ***неотрицательности, нормированности*** и ***аддитивности*** (см. **А1-А3**), а тогда этим же свойствам удовлетворяет и статистическая вероятность.

5. Геометрическая вероятность

5.1 Рассмотрим следующий опыт: в некоторую ограниченную область E бросается точка, причем попадания ее в любые части, имеющие одинаковую меру (например, площадь в случае плоских областей) считаются равновозможными. Пусть событие A – ее попадание в область $A \subset E$. Если $S(A)$ и $S(E)$, $S(E) \neq 0$ – соответственно меры A и E, то ***геометрической вероятностью события*** A будем называть число

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)}.$$

5.2 Можно проверить ***справедливость свойств*** **A1-A3** в случае геометрической вероятности.

Заметим, что здесь равенства $P(A) = 1$, $P(A) = 0$ оказываются возможными и для некоторых *случайных* событий A. Так например, если E – квадрат, а случайное событие A – попадание точки на любую его диагональ, то $P(A) = 0$, поскольку диагональ имеет нулевую площадь .

6. Вероятность произведения событий

6.1 Рассмотрим способ вычисления классической вероятности произведения событий. Обозначим $P_A(B)$ вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло и будем называть ее ***условной вероятностью*** события B.

Теорема **6.1** Имеет место соотношение

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (6.1.1)$$

Доказательство. Предположим, что среди n элементарных исходов опыта ровно m благоприятствуют произведению AB, и m_A исходов благоприятствуют событию A. Тогда

$$P(AB) = \frac{m}{n} = \frac{m_A}{n} \cdot \frac{m}{m_A} = P(A) \cdot \frac{m}{m_A}. \qquad (6.1.2)$$

Остается установить, что

$$P_A(B) = \frac{m}{m_A}. \qquad (6.1.3)$$

Действительно, по наступлении A лишь те m_A исходов, которые ему благоприятствовали, оказываются возможными для дальнейшего рассмотрения, а событие B имеет тогда благоприятными исходы, благоприятные одновременно и для A. Таким образом, по наступлении A оказывается $m_B = m$, и вычисление $P_A(B)$ приводит к равенству (6.1.3).

Соединив теперь равенства (6.1.2) и (6.1.3), получаем утверждение (6.1.1).

6.2 В случае ***произведения трех и большего числа событий*** имеет место результат, аналогичный теореме 6.1. Так, например,

$$P(ABC) = P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C).$$

Доказательство проводится по индукции с использованием свойства ассоциативности умножения событий.

Замечание. Соотношение

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)},$$

имеющее место для классической вероятности при $P(A) \neq 0$, в общем случае может быть положено в основу *определения* условной вероятности события B.

6.3 Вычисление ***условной вероятности*** $P_A(B)$ предполагает, что вероятность события B зависит от того, наступило или не наступило событие A. Так, например, если среди N предметов будет ровно M ($0<M<N$) меченых (окрашенных, бракованных и т.п.) и производится безвозвратная выборка, то вероятность, что второй извлеченный предмет будет меченым (событие B) зависит от того, был ли меченым (событие A) или немеченым (событие $\overline{A}$) первый извлеченный предмет:

$$P_A(B) = \frac{M-1}{N-1}$$

(по наступлении A среди $N-1$ предметов осталось $M-1$ меченых) и

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N-1}$$

(по наступлении $\overline{A}$, осталось M меченых предметов среди $N-1$) .

Однако, если бы первый из извлеченных предметов был возвращен в исходную совокупность, то вероятность того, что второй извлеченный предмет окажется меченым не зависела бы от того, каким был первый предмет:

$$P\ (B) = P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N}.$$

Подобные ситуации отражаются в понятии ***независимых событий***: два события A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли другое событие, т.е. постоянна в условиях данных опытов.

Аналогично, события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, если каждая из вероятностей $P_j = P(A_j)$ остается постоянной в условиях данных опытов.

Из теоремы 6.1 примененной к двум независимым событиям вытекает, что

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Распространяя результат на n событий, независимых в совокупности, приходим к соотношению

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

7. Вероятность суммы совместных событий

7.1 В параграфе 5 была рассмотрена вероятность суммы попарно несовместных событий. Следующий результат в случае ***суммы любых двух событий*** A и B является более общим.

***Теорема* 7.1** $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2)$.

7.2 В частности, для ***несовместных*** A_1 и A_2 имеем $P(A_1 A_2) = P(\varnothing) = 0$, откуда следует уже известное равенство

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

8. Схема гипотез

8.1 Предположим, что событие A есть результат наступления хотя бы одного из событий H_1, H_2, ..., H_n , попарно несовместных и образующих полную группу, но при этом неизвестно, какое именно из H_i наступит. В этом случае события H_1, H_2, ..., H_n называют ***гипотезами*** по отношению к A, а сама описанная ситуация называется схемой гипотез.

8.2 В условиях п. 8.1 справедливо соотношение (называемое ***формулой полной вероятности***)

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) P_{H_k}(A). \qquad (8.1.1)$$

Доказательство. Ввиду полноты группы гипотез имеем

$$E = H_1 + H_2 + ... + H_n.$$

Учитывая очевидное представление $A = A \cdot E$ и свойства п.1.2 операций сложения и умножения , получаем тогда

$$A = AE = H_1 A + H_2 A + ... + H_n A.$$

События $H_k \cdot A,\ k = 1,2,...n$ оказываются попарно несовместными (предположив противное, мы получили бы совместность гипотез), а поэтому

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k A).$$

Чтобы установить (8.1.1), осталось применить к каждому слагаемому последней суммы формулу умножения 6.1.

В частном случае двух гипотез формула полной вероятности принимает вид

$$P(A) = P(H_1) P_{H_1}(A) + P(H_2) P_{H_2}(A).$$

8.3 Пусть выполнены условия п.8.1 и при этом событие *A наступило*. Тогда вероятность того, что событие *A оказалось следствием гипотезы именно* H_k , определяется в виде

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) P_{H_k}(A)}{P(A)}\ ,\ k=1,2,...,n, \qquad (8.3.1)$$

где $P(A) \neq 0$ –полная вероятность (8.1.1). Соотношения (8.3.1) называют ***формулами Бейеса***.

Доказательство (8.3.1) вытекает из равенства

$$AH_к = H_к A$$

(коммутативное свойство умножения), применив к которому теорему умножения, получим

$$P(A) P_A(H_k) = P(H_k) P_{H_k}(A), \quad k = 1,2,...n,$$

что и равносильно формулам Бейеса.

9. Схема Бернулли

9.1 Пусть один и тот же опыт воспроизводится *n* раз, и при этом вероятность наступления события *A* в каждом таком опыте остается неизменной, равной некоторому *p*; пусть $q = 1 - p$. Описанная ситуация независимых опытов

(независимых – по причине постоянства вероятности наступления события A) называется ***схемой Бернулли*.**

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что *событие A появится ровно k раз в n опытах* (в этом случае говорят также о k «успехах» в n опытах). Имеет место следующая

***Формула Бернулли*:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \qquad (9.1.1)$$

Доказательство. Фиксируем какие-либо k опытов. Наступление события A ровно k раз (т.е. в этих в k опытах) происходит совместно с его ненастулением (наступлением $\overline{A}$) в остальных $n-k$ опытах. Любая такая фиксированная комбинация $A_{n,k}$ имеет, очевидно, вероятность

$$P(A_{n,k}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{q \cdot \ldots \cdot q}_{n-k} = p^k \cdot q^{n-k}.$$

Событие $B_{n,k}$, состоящее в том, что A появится ровно k раз равносильно наступлению какого-либо из описанных (попарно несовместных) событий типа $A_{n,k}$, т.е. их сумме. Тогда

$$P_n(k) = P(B_{n,k}) = p^k \cdot q^{n-k} + p^k \cdot q^{n-k} + \ldots p^k \cdot q^{n-k},$$

причем слагаемых в этой сумме столько, сколько существует способов сформировать различные комбинации типа $A_{n,k}$. Это количество равно числу сочетаний C_n^k, т.е числу (неупорядоченных) выборок из n по k. Таким образом, слагаемое $p^k \cdot q^{n-k}$ повторяется C_n^k раз, и мы приходим к (9.1.1).

9.2 В условиях пункта 9.1 ***вероятность наступления события A в n опытах от k_1 до k_2 раз***, есть

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \quad .$$

Для доказательства заметим, что $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ есть вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий B_{n,k_1}, $B_{n,k_1+1,}$,…, B_{n,k_2} где $B_{n,j}$ – событие, состоящее в наличии j « успехов» (в n опытах). Таким образом, $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ будет равна сумме соответствующих вероятностей Бернулли, чем и доказано утверждение.

10. Предельные теоремы в схеме Бернулли

10.1 С ростом n $(n \to \infty)$ использование формулы Бернулли и ее следствий становится затруднительным с точки зрения громоздкости вычислений; нужны, следовательно, приближенные формулы, которые обходят эту трудность.

При больших значениях n и $0< p < 1$ значение вероятности Бернулли $P_n(k)$ можно ***приближенно*** вычислить по ***"локальной" формуле Лапласа***

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_{n,k}),$$

где

$$x_{n,k} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Приближенные значения функции $\varphi(x)$ можно найти в таблицах, имеющихся практически во всех учебных пособиях по теории вероятностей; см. ниже табл.1 в приложениях. При этом используется свойство четности функции φ: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

10.2 При больших значениях n и $0<p<1$ вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что ***событие A произойдет не менее k_1 и не более k_2 раз,*** может быть найдена ***по приближенной интегральной формуле Лапласа***

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_{k_2}) - \Phi(x_{k_1}) \ , \qquad (10.2.1)$$

где

$$x_{k_1} = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \ x_{k_2} = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \ \Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt \, .$$

Приближенные значения $\Phi(x)$ также могут быть найдены по таблицам; см. табл. 1 в приложениях. При этом используется свойство нечетности $\Phi(x)$: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

10.3 Установим, что ***вероятность отклонения относительной частоты*** $w(A)$ события A ***от*** его ***вероятности*** $p(A)$ может быть найдена по приближенной формуле

$$P(|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}), \qquad (10.3.1)$$

где Φ - как и выше - интегральная функция Лапласа.

Для ее доказательства запишем неравенство

$$|\frac{m}{n}-p|<\varepsilon$$

в равносильном виде

$$n(p-\varepsilon)<m<n(p+\varepsilon)$$

и заметим, что m есть число наступлений события A в n опытах, а поэтому можно применить приближенную интегральную формулу Лапласа (10.2.1) с

$$k_1=n(p-\varepsilon),\ k_2=n(p+\varepsilon).$$

Имеем тогда

$$x_{k_1}=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{-n\varepsilon}{\sqrt{npq}}=-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \quad \text{и} \quad x_{k_2}=\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Следовательно,

$$P(|\frac{m}{n}-p|<\varepsilon)=\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}})-\Phi(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}),$$

откуда, в силу нечетности интегральной функции Лапласа, и будет вытекать соотношение (10.3.1).

10.4 Из результатов п.10.3 может быть получен так называемый ***закон больших чисел Бернулли.***

Теорема. Пусть $w_n(A)=\frac{m_A}{n}$ – относительная частота события A в n опытах и $p(A)$ – его вероятность. Тогда для любого $\varepsilon>0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{m_A}{n}-p(A)|<\varepsilon)=1.$$

Утверждение следует из (10.3.1) и того факта, что при $n\to\infty$ его правая часть стремится к значению $2\Phi(\infty)=2\cdot 0{,}5=1$.

Закон Бернулли есть математически строгая форма свойства устойчивости относительной частоты, описанного выше. Говорят также, что ***относительная частота события A сходится по вероятности*** (при $n\to\infty$) ***к вероятности*** $p(A)$.

10.5 Пусть в схеме Бернулли от серии к серии опытов (с ростом их количества n) ***значение произведения*** $\lambda=np$ ***остается постоянным***. При сформулированных условиях имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \quad . \qquad (10.5.1)$$

Для его доказательства представим вероятность Бернулли в виде

$$P_n(k) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\, p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!}\cdot\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}\right)\cdot\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right)^{-\frac{\lambda}{n}\cdot(n-k)} . \qquad (10.5.2)$$

Заметим, что отношение $\frac{\lambda^k}{k!}$ при $n\to\infty$ остается постоянным; произведение же в скобках содержит k множителей, каждый из которых стремится к единице. Вычисляя предел последнего множителя в правой части (10.5.2), будем иметь (так называемый второй замечательный предел)

$$(1+t)^{1/t} \to e, \qquad \text{где} \quad t = -\frac{\lambda}{n} \qquad (\text{так что} \quad t\to 0).$$

Показатель степени $-\frac{\lambda}{n}(n-k) = -\lambda + \frac{k}{n}$ при этом стремится к значению $-\lambda$.

Таким образом, произведение в правой части (10.5.2) имеет своим пределом $\frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1^k \cdot e^{-\lambda}$, чем и доказано утверждение (10.5.1).

Установленный результат означает, что если вероятность p появления события A в каждом из n опытов мала, а при этом n – велико и $\lambda = np$, то имеет место приближенная формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Вероятность же того, что при достаточно большом числе опытов событие произойдет не менее m_1 и не более m_2 раз можно найти по приближенной формуле

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) \approx \sum_{k=m_1}^{m_2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1 . Ряд распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики

1.1 Случайной величиной называется числовая величина X , которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Если все возможные значения величины X можно записать в виде числовой последовательности $\{x_n\}$, n = 1, 2, ... (конечной или бесконечной), то X называется дискретной; если же возможные значения X заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина X называется непрерывно распределенной на этом интервале.

Примером дискретной случайной величины является ежедневно фиксируемый рублевый курс доллара, непрерывной – время t загрузки файла, скачиваемого из Интернета: $t \in (0, \infty)$.

1.2 Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между ее возможными значениями x_k и вероятностями

$$p_k = P(X = x_k)$$

события, состоящего в принятии величиной X значения именно x_k . Обычный способ задания такого закона – ряд (таблица) распределения, который в случае конечного числа n значений величины X (записанных в порядке возрастания) имеет вид

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \qquad (1.2.1)$$

Действительно, все события вида $A_k = \{X = x_k\}$ образуют полную группу, так что

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = E,$$

и, по аксиоме вероятности **A1**,

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1.$$

Благодаря попарной несовместности событий A_k и аксиоме **A3**, получаем тогда из последнего равенства утверждение (1.2.1).

Возможно также рассмотрение ряда распределения с бесконечным набором $\{x_1, x_2, ...x_n, ...\}$ значений X. В этом случае для соответствующих вероятностей имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

При этом мы рассматриваем распределения, для которых записанный числовой ряд является сходящимся.

1.3 Наряду с законом (рядом) распределения часто бывает удобно пользоваться числами, которые описывают случайную величину «суммарно» – так называемыми ***числовыми характеристиками*** случайной величины. Они помогают «в сжатой форме» выразить наиболее существенные черты распределения. Основными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, характеризующее среднее значение случайной величины, и дисперсия, характеризующая степень рассеяния случайной величины относительно ее математического ожидания.

Ограничимся рассмотрением дискретной случайной величины с конечным набором возможных значений.

Математическое ожидание $M(X)$ дискретной величины X определяется в виде

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k , \qquad (1.3.1)$$

дисперсия $D(X)$ – в виде

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - M(X)\right)^2 p_k . \qquad (1.3.2)$$

Из аксиомы **A1** неотрицательности вероятностей следует, что всегда $D(X) \geq 0$, а тогда можно рассмотреть характеристику рассеяния вида

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

называемую ***средним квадратическим отклонением*** . Она предпочтительней дисперсии в том смысле что оценка рассеяния теперь имеет размерность случайной величины (заметим, что дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно).

1.4 Дисперсию можно вычислить также ***по формуле***

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k - (M(X))^2 . \qquad (1.4.1)$$

Для ее доказательства выполним в (1.3.2) следующие преобразования: раскроем скобки, возводя разность в квадрат, перегруппируем слагаемые, записав три соответствующие суммы и воспользуемся определением (1.3.1) и свойством вероятностей (1.2.1). Итак,

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2p_k-2M(X)\cdot x_kp_k+(M(X))^2\cdot p_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-2M(X)\cdot\sum_{k=1}^{n}x_kp_k+(M(X))^2)\cdot\sum_{k=1}^{n}p_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-2(M(X))^2+(M(X))^2\cdot 1=\sum_{k=1}^{n}x_k^2p_k-(M(X))^2,$$

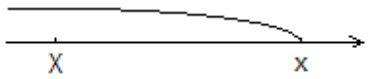
чем и установлено (1.4.1).

2. Функция распределения

2.1 Универсальным способом описания всякой случайной величины X является ***функция распределения*** (синонимы: интегральный закон распределения, интегральная функция распределения), определяемая в виде

$$F(x)=P(X<x). \qquad (2.1.1)$$

Она соотносит каждому $x\in(-\infty;+\infty)$ вероятность события, состоящая в принятии величиной X значения левее точки x.



2.2 Рассмотрим ***функцию распределения дискретной случайной величины***, обладающей конечным перечнем значений $\{x_1,x_2,...x_n\}$. Утверждается, что

$$F(x)=\sum_{k\,|\,x_k<x}p_k\ ; \qquad (2.2.1)$$

суммирование в (2.2) проводится по тем k, для которых соответствующие x_k оказываются меньшими x.

Чтобы установить соотношение (2.2.1), расположим на числовой оси значения $x_1,x_2,...,x_n$. Если аргумент x удовлетворяет соотношению $x\le x_1$, то событие $X<x$ является невозможным, и следовательно, $F(x)=0.$

В случае $x_1\le x<x_2$ событие $X<x$ равносильно событию $X=x_1,$ а тогда $F(x)=p_1.$ Если $x_2\le x<x_3,$ то событие $X<x$ равносильно наступлению хотя бы одного из двух несовместных событий $X=x_1$ и $X=x_2,$ а тогда $F(x)=p_1+p_2.$

Рассуждая таким образом и далее, мы и получаем (2.2.1). В частности, при $x_n<x$, имеем

$$F(x)=p_1+p_2+...+p_n=1.$$

В «развернутой» форме (2.2.1) принимает вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1+p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \dots & \\ p_1+p_2+\dots p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n \\ 1, & x > x_n \end{cases}.$$

Мы получаем неубывающую функцию, значения которой расположены в промежутке [0, 1], непрерывную в каждой точке слева. Ее предел на $-\infty$ равен 0, а на $+\infty$ равен 1. Эти свойства, как мы увидим ниже, распространяются на случай функции распределения произвольной случайной величины.

2.3 Установим, что в общем случае ф***ункции распределения*** $F(x)=P(X<x)$ ***обладает свойствами***:

а) $0 \le F(x) \le 1$;

б) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;

в) $F(x)$ – неубывающая функция;

г) имеют место соотношения

$$F(+\infty)=1 \qquad \text{и} \qquad F(-\infty)=0, \tag{2.3.1}$$

где, по определению, $F(\pm\infty)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$.

Доказательство. Свойство а) очевидно, так как $F(x)$ – это вероятность. Для доказательства б) представим значение $F(b)$ виде

$$F(b)=P(X<b)=P(X<a \text{ или } a \le X < b).$$

Ввиду несовместности соответствующих событий и аксиомы сложения вероятностей **А3** получим

$$F(b) = P(X<a)+P(a \le x < b).$$

Таким образом,

$$F(b)=F(a)+P(a \le x < b),$$

а это и равносильно свойству б).

Наконец, из последнего соотношения и оценки $F(a) \ge 0$ получаем, что $F(b) \ge F(a)$ при $b > a$, а это и означает неубывание функции распределения. Свойство п. г) в общем случае мы не доказываем.

2.4 Следующие свойства относятся к случаю непрерывной $F(x)$. В дальнейшем, говоря ***о непрерывной случайной величине***, будем предполагать, что $F(x)$ также и кусочно-дифференцируема.

а)Соотношение

$$P(X = x) = 0$$

имеет место для любого действительного *x*.

б)Справедливо равенство

$$\begin{aligned} &P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) = \\ &= P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \end{aligned} \qquad (2.4.1)$$

Доказательства свойств а) и б) основаны на возможности предельного перехода под знаком функции $F(x)$, обладающей свойством непрерывности. Так, свойство а) есть результат предельного перехода (при $\Delta x \to 0$) в равенстве (см. свойство б) в п. 2.3)

$$P\left(x \le X < x + \Delta x\right) = F\left(x + \Delta x\right) - F(x);$$

соотношения (2.1.4) снова следуют из свойства б) п. 2.3, поскольку вероятность принятия непрерывной случайной величиной каждого конкретного значения равна нулю.

3. Плотность распределения

3.1 Плотностью распределения (плотностью вероятности или дифференциальной функцией) назовем функцию вида

$$f(x) = F'(x).$$

Согласно принятому выше соглашению для всякой непрерывной случайной величины X плотность распределения существуют (хотя бы в виде односторонней производной) в каждой точке *x*.

Использование термина «*плотность*» оправдано следующими соображениями. По определению производной имеем (при выборе $\Delta x > 0$)

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(x < X < x + \Delta x\right)}{\Delta x}. \qquad (3.1.1)$$

Отношение, записанное под знаком предела (3.1.1) напоминает среднюю линейную плотность массы, сосредоточенной в промежутке $(x, x + \Delta x)$, и называется поэтому средней плотностью вероятности (соответствующей значениям случайной величины, заключенным в указанном промежутке); само же значение предела является как бы «плотностью вероятности» в точке *x*.

В соответствии с (3.1.1) при малых Δx справедливо приближенное равенство

$$P\left(x < X < x + \Delta x\right) \approx f(x) \cdot \Delta x \,.$$

3.2 Имеют место ***следующие свойства плотности распределения***:

а) $f(x) \geq 0$ для всех x;

б) $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)dx;$

в) функция распределения $F(x)$ восстанавливается (по известной дифференциальной функции) в виде

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx \;;$$

г) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

(так называемое свойство нормированности плотности распределения).

Свойство а) очевидно, т.к. $f(x)$ есть производная неубывающей функции.

Докажем соотношение б). Согласно определению 3.1, функция распределения $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$. Тогда применима формула Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

в правой части которой мы и узнаем значение $P\left(a < X < b\right)$, если воспользоваться соотношениями (2.4.1).

Равенства в) и г) вытекают из свойства б) и (2.3.1); заметим, попутно, что несобственный интеграл по $(-\infty, +\infty)$ здесь и в дальнейшем понимается в смысле так называемого главного значения:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{T \to +\infty} \int\limits_{-T}^{T} f(x)dx \,.$$

3.3 Числовыми характеристиками непрерывных случайных величин являются ее ***математическое ожидание***

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

и ***дисперсия***

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

при условии сходимости указанных несобственных интегралов.

Из определения $D(X)$ и свойства неотрицательности $f(x)$ вытекает оценка $D(X) \geq 0$.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется в виде

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

3.4 Для вычисления ***дисперсии*** можно воспользоваться также ***формулой:***

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2\,,$$

доказательство которой проводится с помощью рассуждений, аналогичных п. 1.4, если воспользоваться свойством нормированности 3.2 г) плотности распределения.

В случае, если $f(x)$ принимает нулевые значения вне интервала $[a, b]$, соответствующие формулы принимают вид

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx \quad \text{и} \quad D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2\,.$$

4. Специальные виды распределений

4.1 Пусть дискретная случайная величина X принимает значения, равные количеству появлений события A в n испытаниях, при условии, что в каждом вероятность $P(A)$ одна и та же, равная некоторому p; $q = 1 - p$ (схема Бернулли). Ее закон распределения называется ***биномиальным***; соответствующий ряд распределения имеет вид

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Название распределения объясняется тем, что сумма всех вероятностей представляет собой сумму всех членов разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n = 1\,.$$

Как оказывается, ***математическое ожидание биномиальной случайной величины X равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в одном испытании***

$$M(X) = np\,,$$

а её дисперсия равна произведению числа испытаний на вероятности появления и непоявления события в одном испытании

$$D(X) = npq\,.$$

Установим, например, первое из соотношений. По определению математического ожидания и согласно виду ряда распределения биномиальной величины имеем ее математическое ожидание

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}\,.$$

Заметим, что суммирование фактически производится по k=1,..., n , так как слагаемое, соответствующее значению k=0, обращается в ноль.

Преобразуем полученную сумму следующим образом:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!}\cdot p\cdot p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)}$$

(общий множитель np вынесен за знак суммы). Перенумеровав члены (то есть заменив индекс суммирования $k-1$ на k), получаем

$$M(X) = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1}p^{k-1}q^{(n-1)-(k-1)} = np\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k}p^{k}q^{(n-1)-k} =$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np\cdot 1 = np,$$

что и утверждалось

4.2 Дискретная случайная величина X распределена ***по закону Пуассона*** с параметром λ, если она принимает значения $\{0,1,2,...,m,...\}$ с вероятностями

$$p_m = P(X=m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (m = 0,1,2,...).$$

Закон Пуассона можно понимать как «предельный случай» (при $n\to\infty$, $\lambda = np = const$) биномиального закона. Так как вероятность появления события A в каждом испытании мала, то закон Пуассона называют законом редких явлений. По закону Пуассона распределены многие случайные величины,

например, число сбоев на автоматической линии, число бракованных изделий в большой партии товара и т.д.

Проверим, что сумма вероятностей в ряде распределения Пуассона

X	0	1	2	…	m	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$	…	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

равна единице, т.е. вычислим сумму ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \quad .$$

Использовав разложение Маклорена экспоненциальной функции, получаем сумму этого ряда в виде

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

что и требовалось установить.

Оперируя с суммами степенных рядов и обращаясь все к тому же разложению Маклорена, можно доказать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают между собою и и равны параметру λ этого распределения:

$$M(X) = \lambda, \ D(X) = \lambda .$$

4.3 Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***равномерному закону*** на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке. Воспользовавшись свойством нормированности плотности, нетрудно проверить, что

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$$

Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} x\Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Найдем теперь функцию распределения $F(x)$ равномерно распределенной случайной величины

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

Имеем, очевидно, при $x \le a$ значения функция распределения $F(x)$=0. При $a < x \le b$ получим:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}.$$

Наконец, при $x > b$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} 0dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} dt + \int_{a}^{x} 0dt = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Установим теперь, что математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$ случайной величины вычисляются, соответственно, по формулам

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \text{ и } D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Имеем

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2}\Big|_{a}^{b} = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Второе соотношение (формула для дисперсии) доказывается аналогично:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} =$$

$$= \frac{a^2-2ab+b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Равномерные распределения довольно часто встречаются на практике. Например, равномерно распределено на отрезке $[0;t_0]$ время ожидания транспорта, если предположить, что пассажир приходит на остановку в случайный момент времени, а транспорт ходит регулярно с интервалом t_0 мин. При компьютерном моделировании случайных явлений используется так называемый «генератор случайных чисел», который генерирует значения случайной величины, распределенной равномерно на отрезке $[0;1]$.

4.4 Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***показательному закону*** с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Указанная $f(x)$ действительно может служить плотностью, т.к. она, очевидно, неотрицательна и обладает свойством нормированности :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} e^{-\lambda x} dx = \lambda \lim_{A\to\infty} (-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^A) =$$

$$= (-\lim_{A\to\infty} e^{-\lambda A}) - (-1) = 0 + 1 = 1.$$

Найдем функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. При $x \leq 0$ имеем $F(x)=0$. При $x > 0$ получим:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0 - \frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -(e^{-\lambda x} - e^0) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно проверить, что математическое ожидание и дисперсия показательно распределенной случайной величины имеют, соответственно, значения

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

5. Нормальное распределение

5.1 Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***нормальному закону с параметрами*** a и $\sigma > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Указанная функция $f(x)$ действительно может служить плотностью некоторого распределения, т.к. она, очевидно, неотрицательна и обладает свойством нормированности. Проверим последнее свойство, воспользовавшись значением так называемого интеграла Эйлера-Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi}\ .$$

С помощью замены переменной $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1,$$

что и утверждалось.

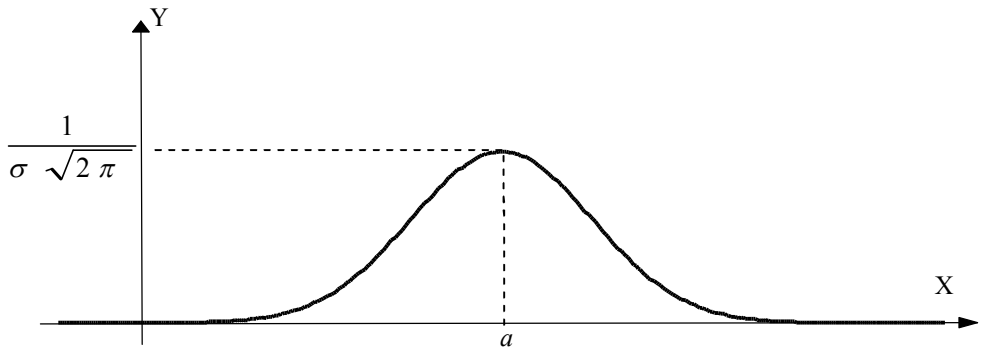
Можно установить, что соответствующая функция распределения $F(x)$ выражается через интегральную функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

следующим образом:

$$F(x) = 0{,}5 + \Phi(\frac{x-a}{\sigma})\,.$$

График плотности нормального распределения (нормальная кривая) имеет следующий вид



5.2 Вероятность попадания значений случайной величины X, распределенной по нормальному закону, ***в промежуток*** (α, β) может быть вычислена по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta-a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma})\,.$$

Действительно, если воспользоваться видом функции распределения, установленным в п. 5.1, то получим

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0{,}5 + \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - (0{,}5 + \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})) =$$

$$= \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}),$$

что и утверждалось.

5.3 Из результата п. 5.2 вытекает следующее утверждение о ***вероятности малого отклонения значений нормальной величины от параметра a***: для любого $\delta > 0$ имеет место равенство

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}).$$

Для доказательства запишем неравенство $|X - a| < \delta$ в равносильном виде $a - \delta < X < a + \delta$. Тогда, ввиду нечетности функции Лапласа, будем иметь

$$P(a - \delta < X < a + \delta) = \Phi(\frac{a + \delta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \delta - a}{\sigma}) =$$

$$= \Phi(\frac{\delta}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\delta}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}),$$

что и требовалось доказать.

В частности при $\delta = 3\sigma$ получаем так называемое правило «трех сигм»

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(\frac{3\sigma}{\sigma}) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

Смысл его состоит в следующем: практически достоверно, что абсолютная величина отклонения значений нормально распределенной X от параметра a меньше утроенного σ.

5.4 Вероятностный смысл параметров a и σ проясняется в следующем утверждении.

Нормально распределенная случайная величина имеет математическое ожидание

$$M(X) = a$$

и дисперсию

$$D(X) = \sigma^2.$$

Докажем, например, первое из соотношений. Используя снова замену переменной $z = \frac{x - a}{\sigma}$, получим

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma t)\cdot e^{\frac{-t^2}{2}}dt=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot e^{\frac{-t^2}{2}}dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t\cdot e^{\frac{-t^2}{2}}dt=a\cdot 1+0=a$$

(интеграл по симметричному промежутку от нечетной функции равен нулю), что и утверждалось.

5.5 Нормальный закон распределения достаточно часто встречается на практике. Объясняется это тем, что суммарное поведение большого количества случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, практически есть ***поведение нормальной величины***.

6. Статистическое распределение выборки

6.1 Генеральная совокупность и выборка. Пусть имеется множество, состоящее из конечного (но достаточно большого) числа некоторых объектов, причем каждый объект характеризуется единственным значением x_i некоторого количественного признака X. Такое множество называется ***генеральной совокупностью***; в свою очередь, совокупность из n случайно отобранных объектов называется ***выборкой объема*** n. Извлеченные выборки позволяют получить представление о распределении количественного признака X как некоторой случайной величины.

6.2 Пусть n_1 объектов из выборки характеризуются значением x_1, n_2 объектов – значением x_2, ..., n_k объектов – значением x_k. Числа x_1, x_2, ..., x_k называются ***вариантами***, а значения $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – ***частотами*** соответствующих вариант. Соответствие между вариантами и их частотами называется статистическим распределением выборки, а таблица вида

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

называется вариационным рядом. Значения вариант в первой строке таблицы обычно располагают в порядке их возрастания. Очевидно, что

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n.$$

Относительными частотами значений x_i называются соответствующие числа вида $w_i = \frac{n_i}{n}$; легко проверить соотношение

$$w_1 + w_2 + ... + w_k = 1.$$

Модой M_0 называют варианту, имеющую наибольшую частоту. ***Медианой*** m_e называют варианту, которая находится в середине вариационного ряда, если число вариант нечетно; медиана m_e равна среднему арифметическому двух ближайших к «середине» вариант, если их число четно. ***Размахом*** варьирования R называют разность между наибольшей и наименьшей вариантой.

6.3 Выборочной средней $\overline{x_в}$ называется среднее арифметическое всех наблюдаемых (в выборке) значений:

$$\overline{x_в} = \frac{(x_1 + ... + x_1) + (x_2 + ... + x_2) + \ldots + (x_k + ... + x_k)}{n},$$

причем в первой скобке имеется n_1 слагаемых, во второй n_2,…, в последней – n_k слагаемых. Установим, что

$$\overline{x_в} = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + ... + x_k \frac{n_k}{n} \quad \text{или} \quad \overline{x_в} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i .$$

Действительно,

$$\overline{x_в} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{x_1 n_1}{n} + \frac{x_2 n_2}{n} + ... + \frac{x_k n_k}{n} =$$
$$= x_1 w_1 + x_2 w_2 + \ldots + x_k w_k.$$

6.4 Возникает ***вопрос о количественной характеристике степени рассеивания наблюдаемых значений относительно их среднего***. Первое, что естественно сделать – это рассмотреть среднее арифметическое самих уклонений $x - \overline{x_в}$, то есть

$$\frac{((x_1 - \overline{x_в}) + ... + (x_1 - \overline{x_в})) + \ldots + ((x_k - \overline{x_в}) + ... + (x_k - \overline{x_в}))}{n}$$

или, что то же самое,

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x_в}) w_i ,$$

однако такая сумма равна нулю *для всякого* статистического распределения выборки (и следовательно, не может служить *характеристикой* рассеяния) :

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})w_i = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i - \overline{x_в}\sum_{i=1}^{k} w_i = \overline{x_в} - \overline{x_в} = 0 .$$

Очевидно, что нулевое значение вычисленной суммы получается за счёт взаимного погашения отрицательных и положительных уклонений. В этом случае естественно перейти к рассмотрению среднего арифметического *квадратов* уклонений значений x_i относительно их средней $\overline{x_в}$, называемого ***выборочной дисперсией*** $D_в$. Итак, выборочная дисперсия определяется в виде

$$D_B = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 w_i .$$

Удобнее, однако, пользоваться формулой (доказываемой способом, аналогичным приведенному в п. 1.4)

$$D_B = (x_1)^2 w_1 + (x_2)^2 w_2 + ... + (x_k)^2 w_k - (\overline{x_в})^2 .$$

Выборочным средним квадратическим отклонением называется величина

$$\sigma(X) = \sqrt{D_B} .$$

6.5 Поскольку относительные частоты

$$w_i = w(X = x_i)$$

с ростом n становятся близкими к соответствующим вероятностям

$$p_i = P(X = x_i),$$

то ***значения выборочных средних*** $\overline{x_в}$ ***становятся близкими к математическому ожиданию*** $M = M(X)$ количественного признака X. Точно также, значения выборочных дисперсий D_B становятся (с ростом n) близкими к дисперсии количественного признака $\sigma^2 = D(X)$. Точные формы этих утверждений используют понятие сходимости по вероятности и выходят за рамки настоящего материала.

7. Статистические оценки параметров распределения

7.1 Предположим, что нас интересует неизвестное значение θ некоторого параметра, характеризующего количественный признак X генеральной совокупности. Оценкой параметра θ называют значения θ^* некоторой функции от наблюдаемых (в выборках) значений, дающие первоначальное представление о величине θ.

Точечной оценкой параметра θ называют оценку, которая определяется одним числом; так, например, точечная оценка математического ожидания $\mu = M(X)$ количественного признака X генеральной совокупности есть значение выборочной средней (см. п. 6.5).

7.2 Пусть известен вид функции распределения $F(x,\theta)$ количественного признака X генеральной совокупности, но единственный параметр распределения θ остается неизвестным. Для его оценки достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Поскольку математическое ожидание μ случайной величины X также зависит от этого параметра, т.е. $\mu = M(X,\theta)$, то имеем (см. п. 6.5) следующее приближенное равенство для нахождения θ:

$$\overline{x_в} \approx M(X,\theta).$$

Если функция распределения определяется двумя неизвестными параметрами, то есть имеет вид $F(x,\theta_1,\theta_2)$, то для их оценки необходимы два уравнения. В этом случае следует пользоваться системой двух приближенных равенств

$$\begin{cases} \overline{x}_B \approx M(X,\theta_1,\theta_2) \\ D_B \approx D(X,\theta_1,\theta_2) \end{cases}.$$

Указанный способ нахождения неизвестных параметров распределения называется ***методом моментов.***

Найдем, например, методом моментов оценки a^*, b^* параметров a и b равномерно распределенного количественного признака генеральной совокупности. Имеем систему

$$\begin{cases} \overline{x}_B \approx M(X,a,b) \\ D_B \approx D(X,a,b) \end{cases},$$

или, учитывая, что для равномерного распределения

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \text{ и } D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b) \approx \overline{x}_B \\ \frac{1}{12}(b-a)^2 \approx D_B \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим искомые оценки

$$a^* = \overline{x}_B - \sigma_B\sqrt{3},\ b^* = \overline{x}_B + \sigma_B\sqrt{3}, \text{ где } \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

7.3 Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала. Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ^* называют вероятность γ, с которой отклонение $|\theta - \theta^*|$ оказывается заданно малым.

Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99; 0,995. Интервал (θ^* – δ, $\theta^* + \delta$) называют доверительным интервалом для оценки параметра θ.

Рассмотрим так называемые ***доверительные интервалы для оценки математического ожидания*** нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении σ . Пусть количественный признак X генеральной совокупности имеет нормальное распределение, т.е. распределен с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} ;$$

здесь параметр a есть значение математического ожидания, а σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины X. Предположим, что среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, и извлечена выборка объема n. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней с заданной надежностью γ. Если

$$P(|\bar{x}_в - a| < \delta) = \gamma,$$

то значение δ (радиус доверительного интервала) определяется в виде $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где число t может быть найдено из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$, по табл. 1 Приложений. Следовательно, с надежностью γ доверительный интервал

$$(\bar{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

покрывает неизвестный параметр a; точность оценки есть $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Глава 3. ЗАДАЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Классическая вероятность: типовые задачи

Задача 1.1 Подбрасываются два игральных кубика. Найти вероятность события A, состоящего в том, что суммарное число выпавших очков не будет превосходить 4.

Р е ш е н и е. Из трех рассмотренных выше моделей вероятности здесь применима классическая модель. Элементарные исходы опыта можно интерпретировать как пары чисел (1, 1), (1, 2),…; попарная несовместность, полнота группы и равновозможность исходов очевидны. Имеем общее число исходов опыта n=36. Число благоприятствующих событию A исходов найдем простым их перебором: 1+1, 1+2, 1+3, 2+1, 2+2, 3+1, т.е. m_A=6. Следовательно,

$$P(A)=\frac{6}{36},\quad \text{т.е. } P(A)=\frac{1}{6}.$$

Задача 1.2 В подъезде дома-новостройки имеется 20 квартир, среди которых 8 расположены на крайних этажах. Квартиры распределяются по жребию. Найти вероятность того, что эти 8 квартир достанутся данным восьми семьям-переселенцам.

Р е ш е н и е . Поскольку всего участников жеребьевки 20, то элементарные исходы опыта – это упорядоченные выборки из 20 по 20, т.е. перестановки. Количество всевозможных исходов, таким образом есть n=20!

Если событие A состоит в том, что 8 квартир на крайних этажах достанутся восьми семьям-переселенцам, то число благоприятных исходов m_A можно вычислить следующим образом. Среди данных восьми семей возможно 8! способов распределения квартир на крайних этажах, и каждый такой способ сочетается с остальными 12! способами распределения квартир среди остальных 12 участников жеребьевки. Следовательно, $m_A=8!\cdot 12!$ Итак,

$$P(A)=\frac{m_A}{m}=\frac{8!\cdot 12!}{20!}=\frac{1}{125970}.$$

Задача 1.3 Имеются 10 предметов, среди которых ровно 5 меченых. Случайным образом извлекают 5 предметов. Какова вероятность, что все они меченые?

Р е ш е н и е. Элементарными исходами опыта являются всевозможные выборки – сочетания из 10 предметов по 5. Найдем общее число элементарных исходов:

$$n=C_{10}^5=\frac{10!}{5!\cdot(10-5)!}=\frac{5!\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{5!\cdot 5!}=252.$$

Благоприятным для события A – извлечения пяти меченых предметов – будет единственный исход : $m=m_A=C_5^5=1$.

Итак, $P(A)=\frac{1}{252}$.

Задача 1.4 В урне 6 белых и 4 черных шара. Наудачу извлекли два шара. Найти вероятность следующих событий:

а) оба шара белых;

б) только один шар белый;

в) хотя бы один шар белый.

Р е ш е н и е . а) Событие A – оба извлеченных шара – белые. Элементарные исходы опыта – выборки.

Рассмотрим события: A_1 - первый извлеченный шар - белый, A_2 - второй шар - белый. Тогда

$$P(A_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ P_{A_1}(A_2)=\frac{5}{9}.$$

При этом $A=A_1A_2,$ то есть

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{3}.$$

б) Событие B – только один извлеченный шар – белый.

Рассмотрим события: A_1 – извлечен первым белый шар, A_2 – второй шар – белый. Поскольку надо извлечь первым белый, а вторым – черный шар (событие $A_1\overline{A}_2$) или наоборот (событие $\overline{A}_1A_2$), то $B=A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2$. Теперь

$$P(A_1)=\frac{6}{10},\ P(\overline{A}_1)=\frac{4}{10},\ P_{A_1}(\overline{A}_2)=\frac{4}{9},\ P_{\overline{A}_1}(A_2)=\frac{6}{9}.$$

События $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1A_2$ несовместны. Следовательно,

$$P(B)=P(A_1\overline{A}_2+\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)=$$

$$=P(A_1)P_{A_1}(\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(A_2)=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{9}=\frac{8}{15}.$$

в) C - хотя бы один шар белый. Данное событие противоположно тому, что оба шара черные. Следовательно,

$$P(C)=1-P(\overline{A}_1\overline{A}_2)\quad\text{или}\quad P(C)=1-P(\overline{A}_1)P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2)=1-\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{13}{15}.$$

Задача 1.5 На склад поступают детали заводов № 1 и № 2. Первый завод производит 80% стандартных изделий, завод № 2 – 60%. Наудачу взяли по одной детали каждого завода. Найти вероятности следующих событий: а) обе детали стандартны; б) только одна деталь стандартна; в) хотя бы одна деталь стандартна.

Р е ш е н и е. а) Событие A – обе детали стандартны. Введем события A_1 – произведенная заводом № 1 деталь стандартна, A_2 – деталь завода № 2 стандартна; следовательно, $A = A_1 A_2$. События A_1 и A_2, очевидно, независимы; поэтому

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48 .$$

б) Событие B – только одна деталь стандартна; $B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. События A_1 и $\overline{A}_2$, $\overline{A}_1$ и A_2 – независимы, $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$ – несовместны.
Тогда

$$P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44.$$

в) C – хотя бы одна деталь стандартна; очевидно, что $C = A_1 + A_2$, причем события A_1 и A_2 – совместны; следовательно,

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}48 = 0{,}92 .$$

Задача 1.6 По самолету выпущена ракета. Самолет может уничтожить ее с вероятностью 0,6. Если этого сделать не удается, то ракета поражает самолет с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения самолета ракетой?

Р е ш е н и е. Поражение самолета – сложное событие C, состоящее в совместном наступлении события A – неуничтожении ракеты, и события B – поражения в этом случае самолета ракетой. Следовательно, $C=AB$. Теперь

$$P(C) = P(A)P_A(B).$$

Перейдем к нахождению вероятностей. Событие A противоположно событию уничтожения ракеты, следовательно,

$$P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \quad \text{при этом} \quad P_A(B) = 0{,}8.$$

Следовательно,

$$P(C) = 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}32 .$$

Задача 1.7 На конвейер поступают 20 % изделий цеха № 1 и 80 % – цеха №2. Вероятность брака для изделия из первого цеха $P_1 = 0{,}1$; для второго цеха – $P_2 = 0{,}05$.

l) Какова вероятность, что наугад взятое изделие - бракованное ?

2) Случайно выбранное изделие оказалось с браком. Какова вероятность, что его произвел цех № 1 ?

Р е ш е н и е. Пусть A – событие, состоящее в обнаружении брака в случайно отобранном изделии. Возможны гипотезы: H_1 – выбранное изделие произведено цехом №1, H_2 – цехом № 2. Очевидно, что выполнены условия

несовместности и полноты группы H_1 и H_2. Здесь $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}8$; $P_{H_1}(A) = 0{,}1$, $P_{H_2}(A) = 0{,}05$. Тогда:

1)по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}8 \cdot 0{,}05 = 0{,}06;$$

2)по формулам Бейеса для первой из гипотез

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}1}{0{,}06} = \frac{1}{3}.$$

Задача 1.8 Компьютерной диагностике подвергается группа участников диспансеризации, среди которых 10% страдают некоторыми заболеваниями. В результате диагностики болезнь выявляется с вероятностью 0,95, и с вероятностью, равной 0,03 здоровый участник признается больным. У произвольно выбранного протестированного участника компьютер выявил заболевание. Какова вероятность, что произошла ошибка?

Р е ш е н и е . Пусть событие A состоит в том, что протестированный участник признан больным. Возможны предположения (гипотезы):

H_1 – тестируется участник, страдающий заболеванием;

H_2 – тестируется здоровый участник.

Требуется найти вероятность гипотезы H_2, при условии, что наступило событие A; следовательно применима формула Бейеса

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}.$$

По условию задачи гипотезы имеют вероятности $P(H_1)= 0{,}1$ и $P(H_2)= 0{,}9$. Соответствующие условные вероятности события имеют вид

$$P_{H_1}(A)= 0{,}95;\ P_{H_2}(A)= 0{,}03.$$

Вероятность события A находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03 = 0{,}122;$$

теперь

$$P_A(H_2) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}03}{0{,}122} = \frac{27}{122}.$$

2. Схема Бернулли: типовые задачи

Задача 2.1 Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых опытах: а) два раза; б) менее двух раз, если вероятность появления события A в одном опыте $p = 0{,}4$.

Р е ш е н и е . а) Пусть событие B состоит в появлении A ровно два раза в пяти опытах. Тогда по формуле Бернулли

$$P(B) = P_5(2) = C_5^2 (0{,}4)^2 \cdot (0{,}6)^2 = 0{,}576.$$

б) Если событие C означает появление A менее двух раз, то есть или ни разу ($k = 0$) или один раз ($k = 1$), то

$$P(C) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 + C_5^1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^4 =$$
$$= 0{,}14256 + 0{,}4752 = 0{,}61776.$$

Задача 2.2 Что вероятнее: выиграть у равносильного соперника две шахматные партии из четырех или три из шести?

Р е ш е н и е . Имеем схему Бернулли, в которой вероятность события в единичном опыте (выигрыша одной партии) $p = \frac{1}{2}, q = 1 - p = \frac{1}{2}.$ Теперь надо сравнить вероятности $P_4(2)$ и $P_6(3)$. Имеем

$$P_4(2) = C_4^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^2 = \frac{6}{16}, \quad P_6(3) = C_6^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}.$$

Следовательно, вероятность выиграть 2 партии из 4 – выше.

Задача 2.3 Вероятность того, что на странице рукописи имеется опечатка, равна 0,2. Найти вероятность того, что на 400 страницах будет ровно 104 опечатки.

Для решения задачи можно использовать формулу Лапласа, в которой $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$; тогда

$$x_{n,k} = \frac{104 - 80}{8} = 3.$$

По табл. 1 Приложений находим $\varphi(3) = 0{,}0044$. Имеем:

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(3) = \frac{0{,}0044}{8} = 0{,}00055.$$

Задача 2.4 Вероятность того, что на странице рукописи есть опечатка, равна 0,2. Найти вероятность того, что на 400 страницах будет не менее 72 и не более 104 опечаток.

Р е ш е н и е . Используем интегральную формулу Лапласа, в которой $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$; тогда

$$x_{n,k_1} = \frac{72 - 80}{8} = -1, \quad x_{n,k_2} = \frac{104 - 80}{8} = 3.$$

По табл. 1 Прил. находим $\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0{,}3413$, $\Phi(3) = 0{,}4986$. Следовательно,

$$P_{400}(72 \le k \le 104) \approx \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) + \Phi(1) = 0{,}8399.$$

Задача 2.5 Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью p=0,9544 утверждать, что относительная частота выпадения герба отклонилась от 0,5 не более, чем на 0,05?

Р е ш е н и е . Согласно приближенной формуле (10.3.1) имеем

$$0{,}9544 = P(|\frac{m}{n} - 0{,}5| < 0{,}05) \approx 2\Phi(0{,}05\sqrt{\frac{n}{0{,}5(1-0{,}5)}}),$$

где m – число появлений герба при n подбрасываниях монеты. Отсюда

$$0{,}9544 \approx 2\Phi(0{,}05\sqrt{4n}) \quad \text{или} \quad \Phi(0{,}1\sqrt{n}) \approx 0{,}4772.$$

По таблице значений интегральной функции Лапласа (см. таблицу 1 Приложений) находим значение аргумента интегральной функции Лапласа: $0{,}1\sqrt{n} \approx 2$ откуда $n \approx 400$. Итак, монету надо бросить 400 раз.

Задача 2.7 Вероятность того, что абонент неправильно наберет телефонный номер, принимается для каждого абонента равной 0,001. Определить вероятность того, что среди 500 произведенных независимо один от другого вызовов, ровно один абонент наберет неправильно телефонный номер.

Р е ш е н и е . Имеем: $n = 500$, $p = 0{,}001$, $\lambda = np = 0{,}5$. По табл. 2 Приложений находим $e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$, а тогда по формуле Пуассона

$$P_{500}(1) \approx \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6065}{1!} = 0{,}30325.$$

Задача 2.8 В течение года из аэропорта города N отправляется 1200 авиарейсов. Вероятность задержки каждого вылета по метеоусловиям равна 0,005. Какова вероятность задержки по метеоусловиям в течение года не менее 2 рейсов?

Р е ш е н и е. По условию задачи, вероятность наступления события в единичном опыте (задержки рейса по метеоусловиям) мала: p=0,005, тогда как число опытов (число рейсов) велико: n=1500. Следовательно, в расчетах возможно использование формулы Пуассона. Событие задержки не менее 2 рейсов противоположно событию задержки $k \le 1$ рейсов. Имеем $\lambda = np = 1200 \times 0{,}005 = 6$ и

$$p_{1500}(0 \le k \le 1) = p_{1500}(0) + p_{1500}(1) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 7e^{-6},$$

т.е.

$$p_{1500}(k \geq 2) = 1 - 7e^{-6} \approx 0{,}97.$$

3. Случайные величины: типовые задачи

Задача 3.1 Плотность распределения задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c \cdot x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases},$$

где c – постоянная величина. Найти значение c, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$.

Р е ш е н и е . По свойству нормированности

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} c \cdot x \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 \Big|_0^1 + 0 = \frac{1}{2} \cdot c,$$

откуда $c = 2$. Теперь

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Найдем $F(x)$. Рассмотрим все возможные случаи: $x \leq 0$, $0 < x < 1$, $x \geq 1$. Имеем

1) при $x \leq 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0;$$

2)при $0 < x < 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{-\infty}^{x} 2x \cdot dx = x^2;$$

3) при $x \geq 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{-\infty}^{1} 2x \cdot dx + \int_{1}^{x} 0 \cdot dx = 1.$$

Таким образом,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}.$$

Так как $\frac{3}{2}\in[1,+\infty)$, $\frac{1}{2}\in[0,1)$, то в соответствии с найденным видом $F(x)$ имеем

$$P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})=F(\frac{3}{2})-F(\frac{1}{2})=1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}.$$

Задача 3.2 Ряд распределения дискретной случайной величины X имеет вид

X	1	2	4
p	0,5	p_2	0,2

Определить p_2, $M(X)$ и $D(X)$.

Р е ш е н и е . Согласно свойству вероятностей

$$p_1+p_2+p_3=1,$$

имеем: $p_2 = 1 - 0{,}5 - 0{,}25$, то есть $p_2 = 0{,}25$.

Далее, вычисляем математическое ожидание и дисперсию:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3,$$
$$D(X)=(x_1)^2p_1+(x_2)^2p_2+(x_3)^2p_3-(M(X))^2,$$

то есть

$$M(X)=1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}25+4\cdot 0{,}25=2;$$
$$D(X)=1^2\cdot 0{,}5+2^2\cdot 0{,}25+4^2\cdot 0{,}25-2^2=1{,}5.$$

Задача 3.3 Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

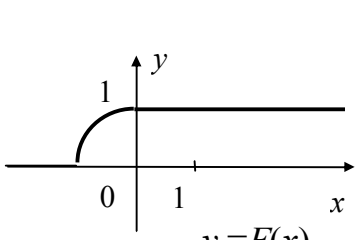
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ 1-x^2, & -1<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$.

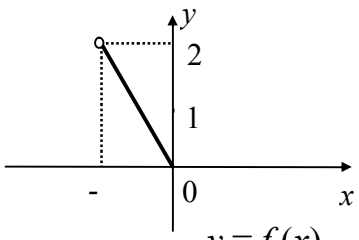
Р е ш е н и е . По определению плотности распределения имеем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ -2x, & -1<x\le 0;\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

Графики $y = F(x)$ и $y = f(x)$ изображены на рисунке:



$y = F(x)$



$y = f(x)$

Далее имеем:

$$M(X) = \int_{-1}^{0} x(-2x)dx = -\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{3};$$

$$D(X) = \int_{-1}^{0} x^2(-2x)dx - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{0} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

4. Математическая статистика: типовые задачи

Задача 4.1 Из генеральной совокупности извлечена выборка. Известен вариационный ряд

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	25	40	15	10

Указать размах варьирования, моду, медиану вариационного ряда. Найти: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию.

Р е ш е н и е . Размах

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 1{,}5 - 1{,}1 = 0{,}4.$$

Мода M_o=1,3, т.к. эта варианта обладает наибольшей частотой, равной 40. Медиана m_e=1,3, поскольку эта варианта расположена в середине вариационного ряда.

Объем выборки

$$n = 10 + 25 + 40 + 15 + 10 = 100.$$

а) По формуле вычисления выборочной средней получаем

$$\bar{x}_в = 1{,}1 \cdot \frac{10}{100} + 1{,}2 \cdot \frac{25}{100} + 1{,}3 \cdot \frac{40}{100} + 1{,}4 \cdot \frac{15}{100} + 1{,}5 \cdot \frac{10}{100} = 1{,}29.$$

б) Вычисляем выборочную дисперсию

$$D_B = (1{,}1)^2 \cdot 0{,}1 + (1{,}2)^2 \cdot 0{,}25 + (1{,}3)^2 \cdot 0{,}4 + (1{,}4)^2 \cdot 0{,}15 +$$

$$+ (1{,}5)^2 \cdot 0{,}1 - (1{,}29)^2 = 0{,}0319.$$

Задача 4.2 Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением $\sigma = 4$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\bar{x}_в$ =3,6, если объем выборки n =64 и задана надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. По табл. 1 Прил. находим t = 1,96. Найдем точность оценки $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 4}{\sqrt{64}} = 0{,}98$. Следовательно, доверительный интервал имеет вид (3,6 – 0,98; 3,6 + 0,98). Иначе говоря, с надежностью $\gamma = 0{,}95$ имеет место неравенство 2,62 < a <4,58.

5. Случайные события: задачи для самостоятельного решения

5.1 Образуют ли полную группу следующие события: A – два попадания в мишень при двух выстрелах, B – ни одного попадания при тех же двух выстрелах ?

5.2 Рассматриваются следующие события: A – первое из полученных электронных писем содержит навязчивую рекламу (СПАМ), B – второе письмо содержит СПАМ. Выразить с помощью операций сложения и умножения через события A и B и (или) им противоположные следующие события а) событие С – ни одно из писем не содержит СПАМ;

б) хотя бы одно письмо содержит СПАМ;

в) только одно письмо содержит СПАМ.

5.3 Вероятность дождливой погоды в предстоящий выходной день равна 0,7. Вероятность удачной рыбалки в дождливую погоду равна 0,8, а в ясную погоду – 0,4. Какова вероятность, что в предстоящий выходной рыбалка будет удачной.

5.4 Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридические направлений поступают на биржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,8, на вакансию юриста – 0,5. Найти вероятность, что

а) случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности;

б)вероятность того, что устроившийся на работу специалист – экономист.

5.5 Имеется 10 двадцатидолларовых купюр, из которых 4 купюры фальшивые. Наугад *поочередно* извлекают две купюры и отыскивают вероятность события *A*, состоящего в том, что обе эти купюры окажутся фальшивыми. Можно ли применять формулу Бернулли, если а) купюра после извлечения и проверки возвращается в пачку; б)выборка безвозвратная.

Найти $P(A)$ в каждом из случаев а) и б).

5.6 Вероятность продать по оптимальной цене каждый из пяти пакетов акций в период их падения равна 0,25. Какова вероятность продажи по оптимальной цене большей части пакета?

5.7 В прямоугольник вписаны две окружности равного радиуса, касающиеся друг друга внешним образом. В прямоугольник случайным образом брошена точка. Какова вероятность, что она не попадет ни в один из кругов?

5.8 В семье 5 детей; вероятность рождения мальчика в данной местности равна 0,6. Найти вероятности следующих событий:

а) в семье две девочки;

б) в семье не менее двух девочек;

в) в семье мальчиков больше, чем девочек

5.9 В данной местности левши составляют 5% населения. Какова вероятность, что в на факультете, где обучаются 400 человек, окажутся не менее 3 левшей?

5.10 Студент одинаково плохо подготовился к каждому из трех экзаменов. С какой вероятностью он сдает каждый экзамен, если хотя бы один из них он сдаст с вероятностью 0,578125

6. Случайные величины: задачи для самостоятельного решения

6.1 Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента при включении равна 0,2. Составить ряд распределения числа элементов, отказавших при включении. Найти вероятность того, что откажет не более одного элемента.

6.2 Три стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, для второго и для третьего – по 0,7. Пусть X - число попаданий в мишень при одном залпе. Составить ряд распределения X, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

6.3 В пачке из 10 театральных билетов три билета – на премьеру. Наудачу взяты 3 билета. Составить ряд распределения случайной величины X - числа билетов на премьеру среди отобранных. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых билетов окажется на премьеру.

6.4 Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,6. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадет в первый раз в мишень. Составить ряд распределения случайной величины X -числа патронов, выданных стрелку.

6.5 Испытывается 3 блока компьютера, причем вероятность отказа каждого не зависит от отказов остальных и составляет 0,1. Пусть X - число отказавших за время испытаний блоков. Составить ряд распределения X, найти ее математическое ожидание и дисперсию и вычислить вероятности событий:
а) X = 0; б) X < 3.

6.6 Случайная величина X задана на всей числовой оси функцией распределения $F(x) = \frac{2}{\pi} arctg\, x.$ Найти
а) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в промежутке [-1; 0];
б) плотность распределения $f(x)$.
6.7 Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения)

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{x}{6}, & 0<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$$

Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность распределения);
б) математическое ожидание;
в) среднее квадратическое отклонение случайной величины X;
г) вероятность попадания значений X в интервал $(0;1)$.

6.8 В течение 20 биржевых торгов курс доллара составил следующие значения (в рублях):
25,75; 25,8; 25,7; 25,7; 25,6; 25,65; 25,6; 25,65; 25,65; 25,7; 25,8;
25,8; 25,8; 25,7; 25,7; 25,7; 25,7; 25,6; 25,5; 25,65

Найти а) моду M_o б)медиану m_e в)размах варьирования R г)средний курс доллара.

6.9 Из генеральной совокупности подлежащих уценке товаров сделана выборка. Известны цены (до проведения уценки) в тыс. руб. $_i$ и частоты n_i их значений в выборочной совокупности. Найти выборочную среднюю цены и ее выборочное средне-квадратическое отклонение.

x_i	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
n_i	26	15	12	18	16	13

6.10 Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания а нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_B$=82,51, объем выборки n=11 и среднее квадратичное отклонение σ=11.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

X	0	0,5	1,0	1,5	1,645	1,96
$\varphi(x)$	0,3989	0,3521	0,2420	0,1295	0,103	0,0584
$\Phi(x)$	0,0000	0,1915	0,3413	0,4332	0,45	0,4750
X	2,0	2,50	2,80	3,0	3,5	4
$\varphi(x)$	0,0540	0,0175	0,0078	0,0044	0,0009	0,0001
$\Phi(x)$	0,4772	0,4938	0,4985	0,4987	0,4997	0.4999

Таблица 2

X	1	2	3	4	5
e^{-x}	0,36788	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахман, А.Д. Стохастическая линия как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики /А.Д. Нахман // Электронное научное издание «Актуальные инновационные исследования: наука и практика» – 2009. – № 3 - 4

2. Хуторской, А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций /А.В.Хуторской // Интернет-журнал "Эйдос".–2005.–12 декабря – http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm.

3. Образовательная система «Школа 2100» [Электронный ресурс] // http://www.school2100.ru/

4. Зайцев, В.Л. Элементы математической логики и стохастики : учебно-метод. пособие / В.Л.Зайцев, С.А. Каратеева, А.Д. Нахман. – Тамбов: ТОПКРИО, 2008. 47с.

5. Нахман, А.Д. Булевы алгебры как основа для изучения математической логики, теории множеств, теории вероятностей /А.Д. Нахман //Вестник ТГТУ. – 2005. – Т.11, №1Б. – С.246-253.

6. Нахман, А.Д. Вероятностно-статистический компонент в содержании материала профессиональной переподготовки учителей математики /

А.Д.Нахман, Н.К. Солопова // Развитие профессиональной компетентности участников образовательного процесса как ведущее условие обеспечения качества образования . Сборник материалов 9 междунар. научн.- практ. конфер. – Москва-Тамбов: ТОИПКРО – 2005. – С.372-375.

7. Нахман, А.Д. Дистанционный курс «Комбинаторика. Вероятность. Статистика» в системе профессиональной переподготовки учителей математики / А.Д. Нахман //Вестник ТулГу Серия «Современные образ.технологии в препод. естеств.-научн. Дисциплин». Тула: изд. ТулГУ,– 2007 – Вып. 6, часть 2. – С.57-59.

8. Зайцев, В.Л. Интегрированный пропедевтический курс «Начала стохастики и экономики»/ В.Л.Зайцев, С.А. Каратеева, А.Д. Нахман. // Интегрированный подход в проектировании и реализации процесса обучения в области естественно-научного образования. Сборн. Материалов областного круглого стола. Тамбов: ТОИПКРО, 2008. – С.84-86.

9. Шешерина, Г.А. Развитие предметной компетентности педагогов-математиков в системе повышения квалификации: монография/ Г.А.Шешерина, Е.И. Агаркова, А.Д. Нахман – Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2012. – 142 с.

10. Куликов, Г.М. Элементы прикладной математики: учеб. пособие / Г.М.Куликов, А.Д.Нахман, С.В.Плотникова. – Тамбов.: Изд.-во ТГТУ, 2008. – 160 с.

11. Нахман, А.Д. Элементы теории вероятностей и математической статистики /Нахман А.Д. Учебно-методические материалы (кейс) – Тамбов: ТОИПКРО, 2009. – 76 с.

12. Гиндикин, С.Г. Алгебра логики в задачах/ С.Г.Гиндикин . –М.: «Наука», 1972. – 288 с.

13. Ивашев-Мусатов О.С. Алгебра и математический анализ: учебное пособие для 11 класса школ и классов с углубленным изучением математики / О.С.Ивашев-Мусатов, Н.Я. Виленкин, С.И.Шварцбурд. – М., – МНЕМОЗИНА, 2004. – 288 С.

14. Вентцель Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Издательство Академия, 2005. –448 С.

15. Терехова, Л.А. Элементы стохастики как средство усиления внутрипредметных связей школьного курса математики / Л.А. Терехова // Вестник Тамбовского университета. Серия: Гуманитарные науки. – 2008. – Вып. 5(61). – С. 347-350.

16. Нахман А. Д. Задачи на вычисление вероятности события / А. Д. Нахман //Математика в школе. – 2011. – N 1. – С. 34-41

17. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман –М.: Высшее образование, 2008. –480 С.

18. Гнеденко, Б.В. Курс теории вероятностей: учебник для вузов / Б.В. Гнеденко – М.:ЛКИ, 2007. – 448 С.

19. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1,2 /В.Феллер – М.:Мир, 1984. Т.1 – 511 С., Т.2 – 765 С.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ
Глава 1. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ КАК ИННОВАЦИОННАЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ
1.Понятие инновационных содержательно-методических линий
2.Начальная стохастическая подготовка
3.Инновационная деятельность учреждений повышения квалификации по введению стохастической содержательно-методической линии
4.Элементы математической логики и стохастики в начальной школе: компетентностный подход
5.Элементы математической логики и стохастики в начальной школе: задачный материал
6.Элементы математической логики и стохастики в начальной школе: практические задания по темам курса
7. Образовательная инноватика и инновационные проекты: понятийное поле
8. Основные характеристики инновационного проекта «Элементы

стохастики и математической логики в начальной школе»
9. Стохастика как средство углубления внутрипредметных связей курса математики
10.Булевы алгебры как общая основа для изучения математической логики, теории множеств, теории вероятностей
11. Методические особенности решения задач на вычисление классической вероятности
Глава 2. ОСНОВЫ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ
1. Алгебра событий
2. Аксиомы вероятности
3.Классическая вероятность
4. Относительная частота и статистическая вероятность
5.Геометрическая вероятность
6. Вероятность произведения событий
Вероятность суммы совместных событий
8. Схема гипотез
9. Схема Бернулли
10. Предельные теоремы в схеме Бернулли
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
1 . Ряд распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики
2. Функция распределения
3. Плотность распределения
4. Специальные виды распределений
5.Нормальное распределение
6. Статистическое распределение выборки
7. Статистические оценки параметров распределения
Глава 3. ЗАДАЧНЫЙ МАТЕРИАЛ
1. Классическая вероятность: типовые задачи
2. Схема Бернулли: типовые задачи
3. Случайные величины: типовые задачи
4. Математическая статистика: типовые задачи
5. Случайные события: задачи для самостоятельного решения
6. Случайные величины: задачи для самостоятельного решения
ПРИЛОЖЕНИЯ
ЛИТЕРАТУРА