Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

А.Д.Нахман

КОМПЕНТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ БАКАЛАВРАМ ИНЖЕНЕРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ

Монография

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2017

Рецензенты:
доктор технических наук, доцент ФБГОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
С.В.Плотникова,
кафедра общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рекомендовано Редакционно-издательским Советом
ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

УДК 372.851

Нахман, А.Д. Компетентностный подход в преподавании математики бакалаврам инженерных направлений подготовки / А.Д. Нахман – «Инновации в образовании». – 2017.- №6. Специальный выпуск. Издательская платформа Российской академии естествознания. –
с.

Анализируются требования ФГОС к подготовке бакалавров инженерных направлений в части формирования ряда общекультурных и профессиональных компетенций обучающихся. Сформулирована концепция компетенции математического моделирования и выстроено соответствующее содержание математической подготовки. Представлен также обширный задачный материал, формирующий практико-прикладную математическую компетенцию.

Монография адресована исследователям, занимающимися вопросами образовательных инноваций, бакалаврам и магистрам инженерных направлений подготовки.

Введение.

1. Требования Федерального государственного образовательного стандарта к математической подготовке бакалавров

Одной из важных составляющих «компетентностного портрета» бакалавра инженерного направления подготовки является обладание им группой компетенций, формируемых образовательной областью «Математика». Соответствующий социальный запрос нашел свое отражение в требованиях Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) к математической подготовке бакалавров. Так, например, бакалавр по направлению подготовки 270800 должен обладать следующими общекультурными компетенциями (ОК):

-владением культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);

-умением логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2),

а также следующими профессиональными компетенциями (ПК):

-использованием основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности,

-способностью применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ПК-1);

-способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат (ПК-2).

Формированию указанных ОК и ПК способствуют следующие результаты освоения основной образовательной программы (ООП), достигаемые в процессе изучения математических дисциплин:

метапредметные результаты:

- умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;
- владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- готовность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;
- владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

Предметные результаты освоения математических дисциплин должны обеспечить:

- сформированность основ логического, алгоритмического и математического мышления;
- сформированноеть умений применять полученные знания при решении различных задач;

-сформированность представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;
- сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математической логики, векторного анализа, линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, комплексного анализа дифференциальных уравнений, теории вероятностей и математической статистики.

Интегративными свойствами по отношению ко всем перечисленным метапредметным и предметным результатам освоения ООП обладает *компетенция математического моделирования*, формированию которой, в первую очередь, и способствует материал настоящего пособия.

Компетенцию математического моделирования будем понимать как образовательную компетенцию, представляющую собою способность актуализировать и применять математические знания и умения при построении, анализе и интерпретации математических моделей в процессе решения задач как учебных, так и практических.

2. Математическое моделирование: концепция и этапы

Моделирование традиционно понимается как замещение некоторого объекта *A* (оригинала) другим доступным объектом *M* (моделью) с целью изучения свойств оригинала. Имеющиеся в литературе подходы к соответствующему понятию позволяют нам выделить то общее, что присуще именно *математической* модели: математическая модель есть образ оригинала, выраженный с помощью математических символов (математическим языком) и позволяющий свойства объекта-прообраза, его параметры, внутренние и внешние связи описать в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций. В частности, средства математики позволяют интерполировать и экстраполировать (прогнозировать) поведение объекта-прообраза.

Другими словами, прикладная задача "переводится" на формальный математический язык, и решается средствами же математики; следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются затем на языке, принятом в данной предметной области.

Учащиеся должны четко представлять и уметь реализовывать (на доступном им уровне) три основные этапа процесса математического моделирования:

1) формализация предложенной задачи (формулировка в математических терминах);

2) решение задачи в рамках соответствующей математической теории (решение внутри модели);

3) интерпретация полученного решения в терминах исходной предметной области.

Полезно ознакомить учащихся со следующей общей схемой представления модели: $X \to W \to Y$. Здесь X – вектор входных переменных, Y – вектор выходных переменных (исходы модели); W – так называемый оператор модели, обеспечивающий преобразование информации (X преобразуется в Y) в соответствие с задачей, решаемой на модели. Имеются следующие три варианта упомянутых задач:

1) *прямая задача*: известны X и W, необходимо найти Y;

2) *обратная задача* 1: известны Y и W, необходимо найти X;

3) *обратная задача* 2: известны X и Y, необходимо найти W.

В последней задаче случае возможны случаи «черного ящика» – оператор модели полностью неизвестен, и «серого ящика» – при известной структуре оператора неизвестны значения параметров.

Так, например, в учебных задачах, относящихся к моделированию физических процессов, в качестве вектора входных переменных X обычно выбирается набор физических характеристик объектов, подверженных, например, механическим колебаниям (струна, стержень), совокупность теплофизических характеристик материалов, в которых происходит теплообмен; в задачах экономики вектор X определяется набором исходных данных, подлежащих анализу (объем выпускаемой продукции, цены, показатели спроса и др.) и т.д. В основе построения оператора модели лежит некоторый физический закон, закономерности рынка и т.п. Формализовав изучаемую закономерность, мы приходим к соответствующей математической задаче, которая, собственно, и служит оператором модели (уравнения или их системы, задача минимизации функционала и др.). На следующем, втором этапе моделирования, решается полученная математическая задача. Получаемый результат (число или набор чисел, функция или совокупность функций, функциональный ряд и др.) и порождает компоненты вектора Y выходных переменных.

Здесь следует подчеркнуть, что поиск оператора модели есть составная часть процесса моделирования. Происходящая при решении учебной задачи трансформация математической модели демонстрируется в нижеприведенной таблице.

	Вход	*Оператор модели*	*Выход*
1	Условие задачи в терминах исходной предметной области	Черный ящик	Перечень требований к результату в терминах исходной предметной области
2	Вектор входных переменных	Серый ящик (формализация задачи)	Вопрос задачи, сформулированный в математических терминах
3	Вектор входных переменных	Оператор модели (окончательная постановка математической задачи и выбор алгоритма ее решения)	Прогнозирование результата
4	Вектор входных переменных	Решение математической задачи	Вектор выходных переменных

3. Содержательно- методическая линия математических моделей. Согласно Концепции развития Российского математического образования, «мотивация к математической деятельности… может поддерживаться многообразием ее приложений в курсах физики и информатики, компьютерными инструментами и моделями. Особую роль здесь отводится установлению и углублению межпредметных связей, использованию математических фактов и методов в процессе моделирования физических и др. процессов, сочетанию математических и компьютерных технологий. Использование вычислительных инструментов в значительной степени поможет наиболее слабым учащимся сосредоточиться на понимании смысла решаемых задач и выстраиваемых моделей, идеях решения».

4. Трансформация модели: пример. Основные этапы математического моделирования и процесс трансформации математической модели могут быть продемонстрированы на следующем примере.

Начальная температура тела равна 5 градусам (Цельсия). За 10 мин оно нагрелось до 15 градусов. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 22 градусам. Когда тело нагреется до 20 градусов?

Задача сформулирована в терминах исходной предметной области (физика).

Входную информацию следует дополнить положением о том, что скорость нагревания (или остывания) тела пропорциональна разности температуры тела и температуры окружающей среды. Оператор модели на данном этапе неизвестен. Требование к выходу модели: установить момент времени, к которому температура достигнет заданного значения.

Вектор входных переменных имеет следующие компоненты: начальная температура (фиксированный компонент), температура тела через 10 мин. (фиксированный компонент), температура окружающей среды (константа h), переменная t – время нагрева, функция $y(t)$ – температура в момент времени t (неизвестная функция). Формализация задачи: производная функции $y(t)$ (скорость нагрева) пропорциональна разности $h - y$. При этом коэффициент пропорциональности неизвестен.

Оператор модели, таким образом, есть дифференциальное уравнение $y' = k(h - y)$, где k – коэффициент теплообмена. Полученное дифференциальное уравнение первого порядка может быть решено методом разделения переменных и последующего интегрирования; при этом возникают «две степени свободы»: остающийся неизвестным коэффициент k и постоянная интегрирования. Они будут найдены путем использования краевых условий $y(0)=5$, $y(10)=15$ (чем будет выполнено требование оснащенности модели). Прогнозируемый результат – функция $y(t)$, являющаяся решением краевой задачи, которое и позволит найти искомое время нагревания. Вектор выходных переменных, таким образом, будет содержать единственный компонент T – время, через которое $y(T) = 20$, а окончательно найденный оператор математической модели – вышеописанная краевая задача. Ее решение, как нетрудно проверить, определяется в виде

$$y(t) = 22 - \exp(-0{,}1 \ln(17/7) t),$$

откуда значение $t = T$ получается равным (примерно) 24,12 минуты.

В настоящей работы использованы материалы следующих публикаций автора (и его соавторов):

1. Нахман А.Д. Компетенция математического моделирования в контексте современной образовательной парадигмы/ А.Д.Нахман.- Научное обозрение. Педагогические науки. - № 3, 2017, с.71-79.

2. Нахман, А.Д. Кейс-задания как средство формирования стохастической компетенции/А.Д.Нахман, И.Ю. Иванова, Т.В.Селянская// Вопросы совр. науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. - №3(57). – 2015. - С. 123-130

3. Нахман, А. Д. Компетентностно-ориентированные задачи по математике [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Д. Нахман, С. В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2016. –.ISBN 978-5-8265-1560-0

4. Родионов Ю.В. Логико-алгоритмический компонент математической компетенции обучающихся. / Ю.В.Родионов, А.Д. Нахман, О.А. Гливенкова //Вопросы современной науки и практики. Университет имени В.И.Вернадского.-2017.-Том 63, №1. - С.148-157

5. Нахман А.Д. Нахман А.Д. Основные аспекты обучения математическому моделированию в системе «школа-вуз» / Научное обозрение. Педагогические науки.- №5.-2016.- С.41-56

6. Нахман, А.Д. Моделирование инновационной образовательной деятельности в области математики/ А.Д.Нахман.- Вестник Тульского ГУ. – 2017. - Вып. 16.- С .126-130

7. Нахман, А.Д. Концепция математического моделирования в содержании математического образования: монография – Тамбов, ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2015. – 138 с.

8. Куликов, Г.М. Дифференциальные уравнения. Тестовые задания: учебное пособие/ Г.М.Куликов, И.В.Жигулина, А.Д.Нахман. – Тамбов: Изд-во ФБГОУ ВПО «ТГТУ», 2011. – 80 с.

Глава 1. Формирование компетенции математического моделирования в системе «школа-вуз»

Сегодняшняя система отечественного математического образования характеризуется сменой знаниево-ориентированной образовательной парадигмы на компетентностную. Математика является мощным средством формирования как предметных, так и метапредметных компетенций. Согласно Концепции развития математического образования в РФ (далее – Концепция, см. [1]), «изучение и преподавание математики, с одной стороны, обеспечивают готовность учащихся к применению математики в других областях, с другой стороны, имеют системообразующую функцию, существенно влияют на интеллектуальную готовность школьников и студентов к обучению, а также на содержание и преподавание других предметов». Среди основных задач развития математического образования в Российской Федерации отмечается необходимость формирования у учащихся прикладных умений, в том числе – использовать математический подход в рассуждении, обосновании, аргументации, планировании, в пространственных построениях, численных оценках. Следовательно, формирование компетенции математического моделирования отвечает задачам, поставленным Концепцией.

В настоящей главе:

1) уточнены и согласованы с задачами, поставленными Концепцией, компоненты компетенции математического моделирования;

2) предложена классификация моделей, используемых в процессе обучения в старшей школе и сформулирована концепция «внутриматематического» моделирования;

3) предложены характеристики уровней освоения компетенции.

1. Компетенция математического моделирования введена в педагогическую науку сравнительно недавно (см. напр., [2]); применительно к процессу обучения в старшей школе её можно определить *как способность актуализировать и применять математические знания и умения при* *построении, анализе и интерпретации математических моделей в процессе решения задач* как учебных, так и практических. Мы будем рассматривать данную компетенцию в контексте ее формирования в системе «школа-вуз» как предметную образовательную компетенцию (см. [3]).

Выделим следующие компоненты компетенции.

1.1. *Мотивационно-ценностное отношение к математическим знаниям и умению строить соответствующие модели в процессе учебной и практической деятельности.* Мотив рождается вместе с пониманием универсальности математического языка, необходимости формализации законов физики, химии, биологии, экономики. Изучая данные и другие дисциплины, учащийся приходит к убеждению, что математические методы выступают в качестве «инструмента» исследований в различных областях деятельности, разработки, анализа и принятия решений, в силу чего освоение математических дисциплин должно стать осознанной целью и подлежит включению в личностный смысловой контекст его деятельности.

1.2. *Кругозор* и постоянное его расширение – необходимый компонент компетенции математического моделирования. Речь идет не только об освоении содержания учебных дисциплин, но и постоянном росте культурного уровня учащегося. Интерес к политике, экономике, истории, литературе, искусству неизбежно сопровождается анализом явлений и процессов, сравнительными характеристиками, логическими умозаключениями и т.п. В свою очередь, указанные формы мыслительной деятельности способствуют развитию умений выделять главное и отбрасывать второстепенное, кратко и ясно выражать свои мысли, ставить задачи, получать и четко формулировать выводы, а эти умения успешно «встраиваются» в процессы математического моделирования.

1.3. *Знания и умения* как в области математики, так и в «исходных» предметных областях являются наиболее существенными компонентами данной компетенции. В первую очередь, речь идет об умении актуализировать математические знания применительно к выстраиваемой модели в конкретной ситуации. Использование метода математического моделирования предполагает:

- владение алгоритмом решения задач (вопрос задачи – анализ проблемной ситуации и нахождение соответствующей информации – выдвижение гипотезы – выстраивание и реализация алгоритма решения – получение ответа и формулировка соответствующих выводов);
- владение приемами «математизации» объектов и процессов (формализация задачи, применение адекватного математического аппарата, интерпретация решения);
- умение выстроить систему аргументов и обоснований;
-коммуникативные умения (использование в речи и письме языка математики, построение графиков, схем, диаграмм и др.);
-умение применять современные информационные технологии.

1.4. *Опыт деятельности* в области моделирования, способствует переносу математических знаний и умений на незнакомые ситуации, в том числе, возникающие в практической деятельности.

1.5. Наконец, *рефлексия* как самооценка деятельности в области математического моделирования является важнейшим компонентом соответствующей компетенции и способствует развитию таких качеств учащегося, как самоконтроль, ответственность, рациональность, самостоятельность.

2. Классификация моделей. В работе [4] предложены следующие четыре класса моделей, используемых в процессе решения задач межпредметной и практико-ориентированной направленности.

1) Модели формально-логического типа: здесь имеет место формализация рассуждений средствами алгебры высказываний и логики предикатов.

2) Аналитические модели: здесь процессы функционирования реальных объектов, или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей. При этом мы выделяем:

-модели-преобразования, модели-уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные) и модели - неравенства;
-модели-аппроксимации (задачи интерполяции, экстраполяции, численное интегрирование, численные методы решения простейших дифференциальных уравнений);
- модели-оптимизации (например, задача линейного программирования).
3)Геометрические модели, использующие плоские и пространственные геометрические объекты.
4) Вероятностно-статистические модели (вероятностные характеристики случайных событий, анализ статистических данных и их статистическая обработка).
5) Модели смешанного типа. Так, например, ситуации, моделируемые в форме задач стереометрии, которые могут быть решены векторно-координатным методом, используют, по сути, как аналитический, так и геометрический аппарат; задачи на нахождение вероятностей случайных событий предполагают использование логических операций (здесь общей основой являются булевы алгебры), числовые характеристики случайных величин предполагают использование аналитического аппарата.

3. «Внутрипредметное» моделирование. Опираясь на концепцию А. А. Ляпунова (см. напр. [5]), внутрипредметное («внутриматематическое») моделирование будем понимать как *опосредованное теоретическое исследование математического объекта (напр., доказываемого утверждения, решаемой задачи и др.), с помощью модели одного из вышеперечисленных типов, способной замещать его в определенных отношениях и дающую при её исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте*. Процесс внутриматематического моделирования способствует формированию представлений о системности математических приемов и методов, расширяет спектр используемых учащимся инструментов решения задач. Так, решение геометрических задач во многом облегчается привлечением аналитических моделей (геометрическая задача – введение неизвестных – ограничения на их значения – установление связей между известными и неизвестными величинами – составление уравнения или системы уравнений и получение соответствующего решения в рамках аналитической модели – геометрическая интерпретация). В свою очередь, решения задач алгебры или анализа во многом проясняются при использовании моделей формально-логического типа (уравнения-следствия, равносильные уравнения как, соответственно, следствия предикатов и равносильные предикаты; системы неравенств как конъюнкции, совокупности неравенств – как дизъюнкции предикатов и др.).

Далее, некоторые алгебраические задачи повышенной и высокой сложности (например, задачи с параметрами) могут быть решены средствами геометрического моделирования. Примером может служить следующее задание.

Найти все значения параметра *a*, при которых система уравнений

$$\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2=1\\(x-2)^2+(y+2)^2=a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Стандартным приёмам решения (методы подстановки или алгебраического сложения) здесь стоит предпочесть рассмотрение соответствующей геометрической модели, а именно ситуаций внешнего и внутреннего касания двух окружностей (система записана в виде их уравнений), после чего параметр *a* определяется путем применения теоремы Пифагора.

4. Для уточнения результатов освоения компетенции математического моделирования в терминах «знать/уметь/владеть» **будем использовать** так называемый **паспорт компетенции.** Он включает в себя:

-место и значимость компетенции в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта, и положений Концепции к уровню сформированности компетенции по окончании освоения образовательной программы (ООП);

-уточнение компонент содержания компетенции;

-структурирование компетенции на уровни, показатели и дескрипторы.

4.1. *Место и значимость компетенции математического моделирования в совокупном ожидаемом результате образования* выпускника школы.

Формирование данной компетенции является важным фактором подготовки выпускника к выполнению следующих видов учебной и практической деятельности:

- анализ понятий, фактов, ситуаций из различных предметных областей с использованием логических выводов, математического языка и методов математики и получение, вследствие этого, необходимой информации в рамках соответствующей предметной области;
- интерполяция и экстраполяция результатов;
-прогнозирование поведения процессов средствами вероятностно-статистической теории;
- получение, в конечном счете, практических рекомендаций при решении прикладных задач.

4.2. *Уточненные компоненты содержания компетенции*:

-предметный – теоретическая основа компетенции математического моделирования, включающая в себя математические знания и умения, а также соответствующие способы действия: использование методов математической логики, геометрии, алгебры, математического анализа и стохастики;

-собственно модельный, предусматривающий перевод условия задачи на математический язык; в частности, применение математического языка в записи простейших законов и фактов из области естественнонаучных, экономических и др. дисциплин;

-вычислительный – решение задач в общем виде и с конкретными числовыми значениями величин, предполагающее знание правил и законов вычислений и преобразований модели;

-прогностический – направленный на выяснение тенденций развития состояний исследуемого явления или объекта.

4.3. *Результаты обучения, раскрывающие структуру компетенции и планируемые уровни ее сформированности.* Мы выделяем три следующих основных уровня.

1) Пороговый уровень, как *минимально необходимый* для всех выпускников старшей школы по завершении освоения ООП. На этом уровне овладение такой минимальной системой знаний, умений, навыков (ЗУН) бывает достаточным для анализа простейших математических моделей. Работа с более сложными моделями предполагается осуществляемой под руководством учителя.

2) Базовый уровень, позволяющий решать *типовые задачи*, использовать известные алгоритмы, правила и методики как в решении собственно математических задач, так и на этапах математического моделирования. Речь идет, по сути, о соответствии требованиям к результатам освоения ООП среднего (полного) общего образования в области математики на базовом уровне.

3) Продвинутый уровень – *максимально возможная выраженность компетенции*, которая важна как качественный ориентир для самосовершенствования. Здесь речь идет о соответствии требованиям к результатам освоения ООП среднего (полного) общего образования в области математики на профильном и углубленном уровнях.

Перечислим основные (по нашему мнению) признаки каждого из перечисленных уровней (знать/уметь/владеть).

На пороговом уровне учащемуся необходимо

знать:

-основные формулы алгебры и тригонометрии;

-определения и графики основных элементарных функций;

-формулировки понятий и фактов геометрии, необходимые для решения простейших планиметрических и стереометрических задач;

-понятия и факты из математического анализа, необходимые для исследования функциональных зависимостей;

-элементарные положения теории вероятностей и математической статистики;

уметь:

-выполнять стандартные алгебраические и тригонометрические преобразования и решать простейшие алгебраические и трансцендентные уравнения;

-визуализировать данные в виде геометрических объектов;

-вычислять производные и интегралы на основе табличных формул;

-извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках;

владеть:

- методами геометрической интерпретации простейших задач на определение взаимного расположения объектов и определения их размеров и числовых характеристик (площади, объемы);

- методами дифференциально-интегрального исчисления в простейших случаях исследования моделей (например, вычисление скорости, площади, работы переменной силы и т.п.);

- способами систематизации статистических данных в виде рядов распределения, полигонов и гистограмм.

На базовом уровне учащийся должен

знать:

-в полном объеме используемые в школьном курсе математики формулы алгебры и тригонометрии, функциональные понятия и их графические интерпретации, а также понятия и факты геометрии;

-положения дифференциально-интегрального исчисления, необходимые для исследования функций и нахождения геометрических и физических величин;

-основные понятия, вероятностные схемы и формулы теории случайных событий, а также понятия и факты, связанные с анализом эмпирических распределений;

уметь:

-проводить доказательства основных известных (из школьного курса) математических утверждений;

-выполнять основные шаги алгоритма математического моделирования (формализация задачи, исследование модели, интерпретация результатов);
-использовать функционально-графические представления для решения как математических, так и практико-ориентированных задач;
-использовать факты геометрии для описания предметов окружающего мира;
-описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;
владеть:
-навыками устных, письменных, инструментальных вычислений при решении практических задач;
-символьным языком алгебры, тригонометрии, геометрии и его использованием при формализации задач из смежных областей и практико-ориентированных задач, а также необходимыми для их решения приёмами выполнения преобразований, нахождения корней уравнений и др.;
-системой функциональных понятий и фактов для описания и анализа реальных зависимостей;
- способами представления и анализа статистических данных; способами изучения статистических закономерностей в реальном мире, способами построения и изучения простейших вероятностных моделей.

На продвинутом уровне предполагается, что учащийся, в дополнение к знаниям, освоенным на базовом уровне, обладает первичными знаниями аналитической геометрии, комплексного анализа, теории многочленов, дифференциальных уравнений, а также умеет комбинировать известные ему методы доказательств при обосновании новых утверждений, переносить освоенные приемы решения задач на новые, в том числе, практические ситуации.

Продвинутый уровень предполагает, что учащийся владеет:
-специальными приемами решения задач повышенной сложности (напр., задач с параметрами и др.);

- векторно-координатным методом (в дополнение к стандартным геометрическим методам) анализа расположений объектов на плоскости и в пространстве;
- расширенным алгоритмом исследования функциональных зависимостей (включая асимптотическое поведение функций, характер выпуклости и др.) и специальными приемами интегрирования отдельных классов функций;
-стандартными распределениями случайных величин и методами получения точечных и интервальных оценок параметров теоретических распределений.

5. Эмерджентность. Представляется, что процесс математического моделирования на каждом его этапе порождает следующие системные эффекты.

1. Постановка задачи моделирования процессов и явлений служит *мотивом* для поиска путей формализации прикладных задач и освоения математического языка.

2. Процесс исследования математической модели служит *стимулом к расширению арсенала средств решения собственно математических задач.*

3. На этапе интерпретации результатов исследования модели возникает *понимание универсальности математического языка и математических методов*, что побуждает к выходу за рамки исходной задачи и *распространению результатов* моделирования на другие предметные области.

Литература к главе 1.

1. Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс] // Math.ru : сайт. – Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc 3003.html (дата обращения: 21.05.2016).

2. Серебрякова, И.В. Современные задачи менеджмента в области математического моделирования /И.В. Серебрякова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Образование. Педагогические науки». –2013, том 5. – № 2 . С.98–104.

3. Хуторской, А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций [Электронный ресурс] // Интернет-журнал "Эйдос". ‑ 2005. ‑ 12 декабря. Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm (дата обращения: 21.05.2016).

4. Нахман, А.Д. Концепция математического моделирования в содержании математического образования: монография /А.Д.Нахман. – Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2015. ‑121 с.

5.Новик, И. Б. О философских вопросах кибернетического моделирования /И.Б.Новик. ‑ М.: Знание, 1964. ‑ 40 с.

Глава 2. Кейс-задания как средство формирования стохастической компетенции

Понятие стохастической компетенции является сравнительно новым**.** Его возникновение связано с двумя факторами;

1)утверждением в отечественной системе образования компетентностного подхода;

2) наличием все более возрастающего общественного интереса к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики.

Стохастической компетенцией мы будем называть *способность* к математической и практической деятельности, связанной с овладением основными комбинаторики, понятиями и фактами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Стохастическая компетентность, в нашем понимании, есть *готовность* к такой деятельности, умение мобилизовать знания в области стохастики на использование их в новых условиях, в решении практических, производственных и др. задач.

С нашей точки зрения, невозможно провести четкую грань между стохастическими компетенцией и компетентностью; другими словами, эти два понятия, интегрирующие в себе (как отмечено далее) многочисленные компоненты, могут рассматриваться как обозначения некоторых *нечетких* множеств.

Общими для формирования соответствующей компетенции/компетентности являются следующие условия [1]:

- знание концептуальных основ стохастики;

- владение разнообразными методами вероятностно-статистического анализа окружающих явлений, вероятностного моделирования статистических закономерностей реальной действительности;
- использование методологии современной науки, осмысление глубокого внутреннего единства эмпирического и теоретического уровней познания мира случайного.

В структуре стохастической компетенции/компетентности мы выделяем следующие основные компоненты.

1.Мотивационно-ценностный: мотивация, заинтересованное отношение к математической деятельности.

2. Когнитивный: знания, умения, в области теории вероятностей и математической статистики.

3. Операциональный: опыт практического применения математических знаний, закрепление умений на уровне навыков.

4. Рефлексивный: включение в математическую деятельность, рефлексия математической деятельности (в частности, самоконтроль, самоанализ и самооценка).

1. ***Стохастическая линия в федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС)***. В соответствии с Концепцией развития математического образования в Российской федерации и введением новых ФГОС общего и профессионального образования стохастическим знаниям отводится роль неотъемлемого компонента инновационного содержания образования – как общего, так и профессионального ([2] - [3]). Изучение вероятностно-статистического материала необходимо уже в школьном курсе в рамках самостоятельной содержательно-методической линии. Согласно ФГОС основного общего образования изучение предметной области «Математика и информатика» должно «обеспечить осознание значения математики … как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления». Изучение математики должно способствовать развитию логического мышления, формированию первичных навыков математического моделирования, применению математических знаний при решении различных задач и оцениванию полученных результатов, развитию математической интуиции.

В следующей таблице 1 отражена *динамика развития компонент* «знать-уметь» в структуре стохастической компетенции в контексте требований ФГОС к уровню подготовки выпускников основной и старшей школ.

	Знать/понимать	***Уметь***
Основная школа	• вероятностный характер многих закономерностей окружающего мира; • примеры статистических закономерностей и выводов;	• извлекать информацию, представленную в стандартных формах (таблицы, диаграммы, графики) и строить соответствующие формы; • решать комбинаторные задачи путем систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правила умножения; • вычислять средние значения результатов измерений; • находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные; • находить вероятности случайных событий в простейших случаях; • использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков, таблиц; решения учебных и практических задач, требующих систематического перебора вариантов; сравнения шансов наступления случайных событий, оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставления модели с реальной ситуацией; понимания статистических утверждений.
Старшая школа	• значение математической науки, в том числе, методов стохастики, для решения задач, возникающих в теории и практике; значение практики для развития самой	• решать простейшие комбинаторные задачи с использованием известных формул; • вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов и свойств

	математической науки; • детерминированный и вероятностный характеры различных процессов и закономерностей окружающего мира, значение статистических данных для прогнозирования явлений и процессов .	вероятности (простейшие случаи); • анализировать массив данных, в том числе применять простейшие методы интерполяции и экстраполяции; • использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: анализа информации статистического характера, прогнозирования наступления событий на основе вероятностно-статистических методов; применения полученных умений в решении задач из смежных дисциплин.

Таблица 1. Динамика развития компонент стохастической компетенции

В ФГОС высшего профессионального образования структуры формируемых компетенций дополнены компонентом «владеть». С нашей точки зрения, *данный компонент соответствует приобретению первичного опыта соответствующей деятельности и, следовательно, переходу в «нечетко-пограничную зону» между компетенцией и компетентностью* (компетенция «в действии»). Приведем в качестве примера (таблица 2), требования к структуре результата обучения, способствующего формированию профессиональной компетенции (ПК-1) «использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов… моделирования, теоретического и экспериментального исследования» (ФГОС направления подготовки бакалавров 270800.62 «Строительство»). Здесь стохастическая компетенция/компетентность выступает в качестве одной из подсистем, интегрированных в указанную компетенцию ПК-1.

Структура результата обучения		
Обучающийся знает:	***Обучающийся умеет:***	***Обучающийся владеет:***
- фундаментальные основы теории вероятностей математической статистики: • понятия вероятности и относительной частоты события и основные	*самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в специальной литературе, расширять свои математические познания:*	*- первичными навыками и основными методами решения математических (стохастических) задач из общеинженерных и специальных дисциплин профилизации и методами*

формулы для их вычисления; • методы точечного и интервального оценивания параметров распределения; • понятия и виды случайных процессов; • регрессионные методы моделирования экспериментальных зависимостей.	• решать прикладные задачи (в том числе, связанные с профессиональной деятельностью) с помощью стохастических методов; • использовать алгоритмы проверки статистических гипотез; • строить вероятностно-статистические модели реальных ситуаций.	*вероятностного моделирования:* • численно прогнозирует степень объективной возможности того или иного явления, характера протекания того или иного процесса; • интерпретирует статистические данные в терминах вариационных рядов и оценок параметров распределения; • разрабатывает регрессионные модели статистических зависимостей

Таблица 2. Требования к структуре результата обучения

Ввиду практической ориентированности стохастической компетенции/компетентности ее компоненты «знать», «уметь» и, в особенности, «владеть», наилучшим, с нашей точки, образом формируется в процессе использования так называемых кейс-заданий.

2. *Концепция кейс-заданий как технологического приема формирования стохастической компетенции.* Наличие той или иной компетенции предполагает способность к одновременной мобилизации знаний, умений и способов поведения в условиях конкретной деятельности; в результате формирования компетенции учащийся приобретает возможность «переносить знания», решать новые для себя задачи, осваивать новые предметные области, новые виды деятельности и т.п.

Приемы формирования компетенции мы называем технологическими, если они обладают такими признаками образовательных технологий, как целенаправленность, научная обоснованность, планируемость и проектируемость, воспроизводимость и гарантированность результата. К числу подобных приемов мы относим кейс-метод (метод кейсов), как метод ситуационного анализа. В процессе его применения обучающиеся должны разобраться в сути проблем, предложить возможные решения и выбрать оптимальное ([4]). Кейсы основываются на реальном фактическом материале или же приближены к таковому. В результате происходит творческое овладение практическими, профессиональными знаниями и умениями, развитие мыслительных способностей. Кейс-метод требует умения оперировать понятиями и фактами, выстраивать логические схемы решения проблемы, аргументировать свое мнение. Кейс-метод интегрирует в себе другие методы познания: анализ, синтез, описание, моделирование, проблемный метод, эксперимент, классификации и др., способствует оптимальному сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся.

Стохастические кейс-задания нами понимаются как комплексные компетентностно-ориентированные задания по моделированию простейших недетерминированных систем. Ввиду практической направленности, они способствуют повышению мотивации к соответствующей математической деятельности. Так, например, к выявлению причинно-следственных связей, и в частности, закономерностей стохастического характера, учащийся основной школы (и даже начальной школы) приходит, прежде всего, в пределах его небольшого личного опыта, а само знание приобретается им не ради установлений связей и отношений между предметами и явлениями, а ввиду интереса к соответствующим объектам окружающей действительности.

В кейс-заданиях могут быть одновременно актуализированы знания и умения в области комбинаторики, действий над событиями, вычисления вероятностей как непосредственно по определению, так и с помощью соответствующих теорем, а также анализа статистических данных с последующим прогнозированием зависимостей и др. Решение кейс-заданий, использует, с одной стороны, опыт математической деятельности, уже накопленный учащимся, а с другой стороны способствует его расширению и углублению.

Наконец, решение кейс-заданий влечет за собою рефлексию соответствующей математической деятельности, проявляющуюся, в частности, в анализе собственной работы, развитии самостоятельности, выработке навыков самоконтроля, умении находить причину затруднения и пути его преодоления и др.

Таким образом, в соответствии с описанной выше структурой стохастической компетенции/компетентности мы можем рассматривать кейс-задания как действенный технологический прием ее формирования, способствующий реализации (на уровне учебных задач) методологического принципа системности исследований.

В следующих пунктах приведены авторские примеры стохастических кейс-заданий.

3. *Кейс-задания при изучении модуля «стохастика» в курсе математики основной школы* (частично приведены в [5])**.**

Задание 1 (*графики, интерполяция и экстраполяция*). Запишите температуру воздуха за окном квартиры в 9 часов вечера и в 7 часов утра. Считая, что температура изменяется (в зависимости от времени, прошедшего с начала наблюдения) по линейному закону (т.е. зависимость изображается на координатной плоскости в виде прямой), определить приближенно температуру, которая

а)была в 2 часа ночи;

б)была 11 часов, 1 час, 3 часа ночи и 5 час утра.

Какой может в этом случае быть температура воздуха в 9 час. утра?

Задание 2 (*таблица распределения частот, мода, размах выборки, выборочная средняя*). Возьмите у родителей квитанции о квартплате за истекший календарный период. Запишите (по месяцам) стоимость израсходованной электроэнергии. Затем расположите стоимости в порядке их возрастания, определите частоту каждой из них и составьте соответствующую таблицу (вариационный ряд). Определите (если таковая имеется) стоимость с наибольшей частотой. В каком месяце уплачена наибольшая, а в каком –

наименьшая сумма? Как вы думаете, почему именно в эти месяцы вы заплатили больше всего и меньше всего соответственно? Определите размах варьирования стоимости электроэнергии. Какова средняя ежемесячная стоимость потребленной электроэнергии? В каком месяце стоимость наиболее отличалась от средней?

Задание 3 (*относительная частота, статистическая вероятность события*). Понаблюдайте на улице с не слишком интенсивным движением транспорта в течение 2 – 5 минут транспортный поток и запишите, сколько проехало мимо автомобилей, сколько среди них иномарок, сколько всего легковых автомобилей, сколько – такси . Найти относительную частоту

а)числа легковых автомобилей в транспортном потоке;

б)такси в транспортном потоке;

в)такси – среди легковых автомобилей;

г)иномарок – в транспортном потоке.

С какой вероятностью вы можете прогнозировать, что в ближайшее время первой среди проезжающих мимо машин окажется такси ?

На основе результатов наблюдения и свойства устойчивости относительной частоты определите, каким приблизительно может оказаться процент иномарок в составе городского транспорта.

Задание 4 (*построения ряда распределения, числовые характеристики*)

Скоро предстоит сдавать экзамены Государственной итоговой аттестации (ГИА). С какой вероятностью ты прогнозируешь, что успешно (на 4 или на 5) сдашь экзамен по русскому языку? По математике? По иностранному языку? Составь ряд распределения числа экзаменов, которые ты прогнозируешь сдать успешно. Построй многоугольник распределения. Какое количество успешно сданных экзаменов наиболее вероятно? Каково математическое ожидание числа успешно сданных экзаменов?

4. *Кейс-задания при изучении модуля «стохастика» в курсе математики старшей школы.*

Задание 1 (*биномиальное распределение, ряд распределения, мода распределения, математическое ожидание*). Шерлок Холмс расследует дело об ограблении банка. Служительница банка миссис Смит утверждает, что грабителей было трое, мисс Джонсон – что двое, а мистер Пит говорит, что у дам от страха двоилось или троилось в глазах, и что грабитель был один. Шерлок Холмс подозревает, что грабителями могли быть K,L,N (имена в целях тайны следствия он не разглашает, но уверен, что других грабителей быть не могло), каждый из которых прежде участвовал, в среднем, в каждом третьем ограблении.

Свой дедуктивный метод Холмс хочет подтвердить математическими выкладками. Каковы вероятности, что грабил только K; только L; только N; K и L; K и N; L и N; все трое? Каково наиболее вероятное число грабителей? Какова вероятность, что банк вообще ограблен не был, а Смит, Джонсон и Пит присвоили деньги?

Если последует серия подобных ограблений, то каким будет среднее число грабителей?

Задание 2 (*построение вариационного ряда, числовые характеристики выборки*). В течение двадцати дней пронаблюдайте и запишите рублевый курс доллара. Расположите варианты в порядке их возрастания и составьте соответствующий вариационный ряд. Постройте многоугольник распределения. Определите размах варьирования курса доллара, моду и медиану вариационного ряда. Найдите средне-месячный курс доллара. Определить его выборочное средне-квадратическое отклонение.

5. Кейс-задания при изучении модуля «стохастика» в курсе математики инженерных направлений подготовки бакалавров. Соответствующие задания могут быть использованы при интегрированном описании поведения дискретных и непрерывных случайных величин, для определения точечных и интервальных оценок параметров теоретического распределения по эмпирически полученным данным, нахождении регрессионных зависимостей и др.([6]). Ограничимся следующими двумя примерами.

Задание 1 (*специальные распределения, плотность и функция распределения, вероятность попадания значений в заданный интервал, числовые характеристики*). Транспорт ходит регулярно с интервалом τ минут. Определить плотность и функцию распределения случайной величины t - времени ожидания транспорта пассажира, в случайный момент времени приходящего на остановку. Какова вероятность, что время ожидания составит не более $0{,}25\tau$ минут? Какова вероятность, что все пять дней рабочей недели пассажир будет ожидать транспорт не более $0{,}25\tau$ минут? Каково среднее время ежедневного ожидания данного транспорта?

Задание 2 (*линейная и нелинейная регрессии, прогнозирование значений*). Зафиксированы показатели потребления электроэнергии (в киловаттах) y_j в зависимости от времени (в часах) x_j непрерывной работы прибора. Исследовать возможную зависимость величины y_j от x_j, использовав для этого выборочные уравнения а)линейной б)параболической в)логарифмической регрессии по следующим данным измерений:

y_j	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2	10,0
x_j	1	2	3	4	5	6

Определить наиболее предпочтительную модель зависимости, использовав вычисление остаточной дисперсии для каждой модели. По выбранной модели спрогнозировать величину потребленной электроэнергии через 15 и 20 часов непрерывной работы прибора.

Литература к главе 2

1.Селютин В.Д. Научные основы методической готовности учителя обучению школьников стохастике. Монография. – Орел: ОГУ, 2002.– 200 с./

2.Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения 21.06.2014).

3. Аверина, И.В. Уровневая модель системы мероприятий по реализации концепции развития российского математического образования [Электронный ресурс] / И. В. Аверина, А. Д. Нахман //Актуальные инновационные исследования: наука и практика. –2014. – № 1. – Режим доступа: http://www.actualresearch.ru .pdf (дата обращения 12.04.2015).

4. Гумметова, А.Ю. Кейс-метод как современная технология личностно-ориентированного обучения [Электронный ресурс] /А.Ю. Гумметова, Е.В. Ступина.– Режим доступа: http://www.uchportal.ru/publ/15-1-0-507 (дата обращения 12.04.2015).

5. Зайцев, В.Л. Элементы математической логики и стохастики: учебно-метод. пособие /, В.Л.Зайцев, С.А.Каратеева, А.Д. Нахман. – Тамбов: ТОПКРИО, 2008. – 46 с.

6. Куликов, Г.М. Элементы прикладной математики: учебное пособие / Г.М. Куликов, А.Д. Нахман, С.В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 160 с.

Глава 3. Математический анализ как средство моделирования

Необходимость овладения учащимися элементами математического анализа обусловлена рядом требований, предъявляемых Федеральными государственными образовательными стандартами к результатам освоения основных образовательных программ.

В частности, изучение элементов математического анализа способствует овладению системой функциональных понятий, развитию умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей. Если функцию одной или нескольких переменных рассматривать как математическую модель реального процесса, то выстраиваются следующие связи понятий:

Характеристики процесса	***Функциональные понятия***
Тенденция процесса, проявляющаяся с течением времени	Предел функции на бесконечности, асимптотическое поведение
Бесперебойное течение процесса (перепады, сбои)	Непрерывность функции (разрывы)
Скорость течения процесса	Производная функции
Изменение состояний в малые промежутки времени	Дифференциал функции
Рост, падение	Монотонность функции
Пиковые состояния (апогей, перигей)	Экстремумы функции (наибольшее, наименьшее значения)
Воспроизводимость состояний процесса	Периодичность функции
Промежуточные состояния	Интерполяция
Прогнозируемые состояния	Экстраполяция
Восстановление процесса по скорости его течения	Неопределенное интегрирование
Изменение процесса на временном промежутке, локально зависящего от времени протекания линейным образом	Определенный интеграл

Таким образом, построение, анализ и интерпретация математических моделей процессов и явлений, требует освоения учащимися основами дифференциально-интегрального исчисления.

1. Предел функции одной переменной. *Понятие предела* – одно из основных в математическом анализе. Не приводя строгих определений, объясним смысл указанного понятия. Пусть дана функция $y = f(x)$ и *значения аргумента x неограниченно приближаются к значению* x_0, но не совпадают с x_0 (что будем записывать в виде $x \to x_0$). Если при этом оказывается, что значения $y = f(x)$ становятся сколь угодно близкими к некоторому числу *A*, то говорят, *A* есть предел функции $f(x)$ в точке x_0 и записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

В случае, когда значения аргумента *x* неограниченно растут по модулю, оставаясь при этом положительными (отрицательными), мы записываем $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$). Если не принципиально, какого знака значения аргумента *x*, то употребляем символ $x \to \infty$. Запись $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ означает, что значения $y = f(x)$ становятся сколь угодно близкими к числу *A* при $x \to \infty$. Говорят также, что число *A* есть предел функции на бесконечности.

Если в (любом из трех рассмотренных случаев) *A*=0, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой. Возможен также случай, когда значения функции $f(x)$ неограниченно растут (к $+\infty$ или $-\infty$) при стремлении аргумента *x* к некоторому x_0 или к бесконечности. В этих случаях записывают соответственно $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

а функцию $f(x)$ называют бесконечно большой (при $x \to x_0$ и $x \to \infty$ соответственно). Следует заметить, что если функция $f(x)$ - бесконечно большая (бесконечно малая), то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая (бесконечно большая).

Если рассмотреть, в частности, функцию натурального аргумента (последовательность) $y_n = f(n)$, то к ней применимо определение предела на бесконечности; используют запись $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = A$.

Всякая элементарная функция $f = f(x)$ *непрерывна на своей области определения* $D(f)$. Это означает возможность перехода к пределу под знаком функции $f(x)$ во всякой точке $x_0 \in D(f)$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Этим свойством пользуются при вычислении пределов. Кроме того, при выполнении арифметических операций над функциями соответствующие операции выполняются и над их пределами.

Неопределенностями (при $x \to x_0$ или $x \to \infty$) называются такие выражения (под знаком предела), которые при формальной подстановке вместо аргумента *x* предельного значения (x_0 или ∞) принимают вид $\frac{0}{0},\ 0\cdot\infty, \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 1^{\infty}$ и др.

Приемы вычисления пределов. Вычисление пределов рациональных или иррациональных *дробей на бесконечности* может быть произведено путем *одновременного деления числителя и знаменателя на старшую степень аргумента*, чем достигается переход от бесконечно больших к бесконечно малым. Продемонстрируем прием на следующем примере.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - x^4}{2x^3 + 3x^2 - 1}$.

Решение. Имеем бесконечно большие в числителе и знаменателе дроби; следовательно, выполняем одновременное деление на старшую степень аргумента, т.е. на x^4:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - x^4}{2x^3 + 3x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{x}{x^4} - \dfrac{x^4}{x^4}}{\dfrac{2x^3}{x^4} + \dfrac{3x^2}{x^4} - \dfrac{1}{x^4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{1}{x^3} - 1}{\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x^4}}.$$

Теперь имеем бесконечно малую в знаменателе дробь и функцию, стремящуюся к -1 в числителе, т.е. дробь оказывается бесконечно большой. Ответ записываем в виде

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-x^4}{2x^3+3x^2-1}=\infty\,.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель на выражение сопряженное числителю, т.е. на $\sqrt{x+1}+1$, и сократим числитель и знаменатель на общий множитель x, (который при $x\to 0$ не равен нулю). В результате имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

так что искомый предел равен 0,5.

Замечательные пределы. 1) При $t\to 0$ отношение $\frac{\sin t}{t}$ представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Можно доказать, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\,.$$

2) При $t\to 0$ показательно-степенное выражение вида $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ представляет собою неопределенность вида 1^{∞}. Можно доказать, что соответствующий предел существует и равен некоторому иррациональному числу *e*=2,7…:

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e\,.$$

Рассмотренные пределы называются , соответственно, первым и вторым замечательными пределами. Второй замечательный предел может быть также записан в равносильной форме

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\,.$$

Непосредственными следствиями первого замечательного предела являются соотношения

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{tg\ t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{tg\ t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{\arcsin\ t}{t}=1,\quad \lim_{t\to 0}\frac{arctg\ t}{t}=1.$$

Пример. Вычислить

$$\text{а) } \lim_{x\to\infty}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 x}, \quad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}.$$

Решение. а) Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Заметим, что при $x\to 0$ (см. первый замечательный предел) отношение $\frac{x}{\sin x}$ (вместе с $\frac{\sin x}{x}$) стремится к единице. При вычислении предела отношения $\frac{\sin 3x}{3x}$ можно снова воспользоваться первым замечательным пределом, если положить $t=3x$, и заметить, что $t\to 0$ при $x\to 0$. Остается выполнить преобразование

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3$$

и закончить вычисление:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\sin^2 x}=3\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1\cdot 1=3.$$

б) Имеем «комбинированную» неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Если выделить в скобках в качестве слагаемого число 1, то станет возможным использование второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x+3}-1\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{2x}.$$

Теперь $t=\frac{-2}{x+3}\to 0$ при $x\to\infty$, поэтому в показателе степени удобно выделить выражение вида $\frac{1}{t}$, т.е. $\frac{x+3}{-2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}\cdot\frac{-2}{x+3}\cdot 2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}\right)^{\frac{-4x}{x+3}}.$$

Далее, пользуясь свойством непрерывности показательно-степенной функции, перейдем по-отдельности к пределу в основании и показателе степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-2}}=e \text{ (второй замечательный предел при } t=\frac{x+3}{-2}\text{)},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4}{1+\frac{3}{x}}=-4.$$

Имеем теперь

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x+3}\right)^{2x}=e^{-4}.$$

2. Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$ в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{5-2x}$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{x+1}-2}$ д) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$ е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}-1}$

3. Производная функции одной переменной. Если значение аргумента x функции $f(x)$ получило приращение Δx (изменилось на величину Δx), то соответствующее приращение (изменение) функции $f(x)$ есть $\Delta f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$. Величину $\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ естественно назвать средней скоростью изменения функции f, соответствующей изменению аргумента от x до $x+\Delta x$; «мнговенной» же скоростью изменения функции в точке x тогда следует считать предел вида $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, называемый ***производной*** функции f и обозначаемый $f'(x)$, y' или $\dfrac{dy}{dx}$. Операция взятия производной называется дифференцированием функции.

Таблица производных основных элементарных функций.

1) $(c)'=0,\ c=const$; 9) $(\cos x)'=-\sin x$;
2) $(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$; 10) $(\sin x)'=\cos x$;

3) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

5) $(e^x)' = e^x$;

6) $(a^x)' = a^x \ln a$;

7) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

11) $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

12) $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

15) $(\mathrm{arctg}\, x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;

16) $(\mathrm{arcctg}\, x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Правила дифференцирования. Пусть $C = const$, $C \neq 0$, $u = u(x)$, $v = v(x)$. Тогда

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'; \quad (\frac{u}{C})' = \frac{1}{C} u'; \; (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Производная *сложной функции* $y = f(u(x))$ вычисляется по правилу

$y' = f'(u) \cdot u'(x)$, где $u = u(x)$. Так, например,

$$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u', \; (e^u)' = e^u \cdot u', \; (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

Если *зависимость* $y = y(x)$ *задана параметрически*, т.е. в виде

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

то производная $y'(x)$ (или, в других обозначениях, $\dfrac{dy}{dx}$) вычисляется по формуле

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Параметрическое задание зависимости y от x (ординаты от абсциссы) может быть использовано, например, при описании движения точки по координатной плоскости в том случае, если ее координаты x и y являются функциями времени t.

Производную $f'(x)$ также можно рассматривать как некоторую функцию; в этом случае можно говорить о ее производной как *второй производной* данной функции: $f''(x)=(f'(x))'$. Аналогично можно рассматривать третью и другие производные (производные высших порядков).

Примеры. 1. Вычислить y', если $y=2x-\ln(1-5x)$.

Решение. В силу правил дифференцирования $y'=2x'-\left(\ln(1-5x)\right)'$. Здесь мы имеем сложную функцию, а именно логарифмическую функцию аргумента $u=1-5x$. По формуле дифференцирования натурального логарифма «сложного аргумента» получаем тогда

$$y'=2x'-\frac{1}{1-5x}\cdot\left(1-5x\right)'=2-\frac{-5}{1-5x}=\frac{7-10x}{1-5x}.$$

2. Материальная точка движется прямолинейно, при этом зависимость пройденного расстояния $s=s(t)$ от времени t (закон движения) имеет вид $s(t)=4t\sqrt{t^2+5}$. Найти скорость v точки в момент $t=2$.

Решение. Согласно п.1.2.1 достаточно вычислить производную в точке $t=2$. По формуле дифференцирования произведения и с учетом правила дифференцирования сложной функции мы имеем

$$v=v(t)=s'(t)=4\left(1\cdot\sqrt{t^2+5}+t\cdot\frac{1}{2\sqrt{t^2+5}}\cdot\left(t^2+5\right)'\right)=4\left(\sqrt{t^2+5}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+5}}\right),$$

$$v=v(2)=4(\sqrt{9}+\frac{4}{\sqrt{9}})=\frac{52}{3}.$$

4. Найти производную функции, заданной параметрически: $\begin{cases}x=\sin 3t\\ y=tg\,3t\end{cases}$.

Решение. Имеем: $x'(t)=3\cos 3t,\ y'(t)=\dfrac{3}{\cos^2 3t}$, а тогда по формуле дифференцирования функции, заданной параметрически, получаем

$$y'(t)=\frac{3}{\cos^2 3t}:\left(3\cos 3t\right)=\frac{1}{\cos^3 3t}.$$

4. Задачи для самостоятельного решения.

Найти производную функции $y'(x)$ (в п.в) функция $y(x)$ задана параметрически) :

а) $y = \dfrac{\sin x}{1 + tg\, 2x}$; б) $y = \ln^4 x$ в) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2+1}}$;

г) $y = e^{3x} + \arcsin\sqrt{x}$; д) $y = \left(1 + ctg^2 x\right)\cdot e^{-x}$; е) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+4}{3x-2}}$;

ж) $\begin{cases} x = 3t + 2t^2 \\ y = 4t^3 - 5t^2 \end{cases}$; з) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{-3t} \end{cases}$; и) $\begin{cases} x = 2\left(t - \sin t\right) \\ y = 2\left(1 - \cos t\right) \end{cases}$.

5. Касательная и нормаль. Правило Лопиталя. *Касательная* к графику функции (кривой) $y = f(x)$, проведенная в точке x_0, имеет уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$.

Нормаль к графику функции (кривой) $y = f(x)$, проведенная в точке x_0 (т.е. перпендикуляр к касательной в точке касания) в том случае, если $f'(x_0) \neq 0$, имеет уравнение $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

Пример 1. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = x^2 - 5x + 4$, в точке $M_0\left(-1;10\right)$.

Решение. В нашем случае точка касания имеет (по условию задачи) координаты $x_0 = -1,\ y_0 = f(x_0) = 10$. Вычислим $f'(x) = 2x - 5,$ тогда $f'\left(x_0\right) = f'\left(-1\right) = 2\left(-1\right) - 5 = -7$. Уравнение $y = 10 + \dfrac{1}{7}(x+1)$ или $7x + y - 3 = 0$ является уравнением касательной, а уравнение $y = 10 - 7(x+1)$ или $x - 7y + 71 = 0$ есть уравнение нормали к заданной кривой в указанной точке.

Пример 2**.** Прямая $y = 1 - 3x$ параллельна касательной к графику функции $y = 3x^2 - 6x - 5$. Найти абсциссу точки касания.

Решение. Значение производной $y' = (3x^2 - 6x - 5)'$ в точке касания x равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная в этой точке параллельна прямой $y = 1 - 3x$, их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения:

$(3x^2 - 6x - 5)' = -3$ или $6x - 6 = -3$, откуда $x = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ состоит в следующем: если существует предел вида $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Здесь a – некоторая точка или бесконечность любого знака.

Если отношение производных при $x \to a$ снова есть неопределенность указанного выше вида, то и правило можно применить снова, переходя ко вторым производным и т.д.

Пример . Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$.

Решение. Функции $y = \ln(x+1)$ и $y = \sqrt{x}$ бесконечно большие при $x \to \infty$, т.е. имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+x}\cdot(1+x)'\right) : \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Снова при $x \to \infty$ имеем неопределенное выражение $\frac{\infty}{\infty}$. Повторное применение правило Лопиталя приводит к следующему результату:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2\sqrt{x})'}{(1+x)'} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0.$$

6. Задачи для самостоятельного решения.

Составить уравнение касательной и нормали к кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, в точке $M_0(x_0; y_0)$:

1. $y = 4\sin 6x,\ M_0(\frac{\pi}{18};\ 2\sqrt{3}).$
2. $y = e^{1-x^2},\ M_0(-1;1).$
3. $y = \frac{4}{x+1},\ M_0(1;2).$
4. $y = \sqrt{x^2+5},\ M_0(2;3).$

5. $y=\ln(2x+1),\ M_0(0;0).$ 6. $y=\dfrac{x^4}{4}-27x+60,\ M_0(2;10).$

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x^2}.$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{tg\,2x}$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,4x}{e^{5x}-1}.$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{\cos 3x-e^{-x}}$

7. Применение производной к исследованию функций

Исследование по первой производной: монотонность, экстремумы.

В основе исследования функции на монотонность (возрастание, убывание) и экстремумы (максимумы, минимумы) лежат следующие положения:

а) интервалы, где $f'(x)\geq 0$, служат интервалами возрастания функции $y=f(x)$; на интервалах, где $f'(x)\leq 0$, функция убывает;

б) точки перемены знака $f'(x)$ с «+» на «-» служат точками максимума (точка наибольшего значения функции среди всех ее значений из некоторой окрестности этой точки) , а с «-» на «+» - точками минимума (точка наименьшего значения функции в некоторой окрестности).

Исследование по второй производной: характер выпуклости.

Говорят, что дуга линии имеет определенный характер выпуклости, если она пересекается с любой своей секущей не более, чем в двух точках. Такая дуга лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой точке дуги: если целиком ниже касательной, то дуга называется выпуклой (выпуклой вверх), а если выше – то вогнутой (выпуклой вниз).

В основе исследования функции на характер выпуклости лежат следующие положения:

а) интервалы, где $f''(x)\geq 0$, служат интервалами вогнутости графика функции $y=f(x)$; на интервалах, где $f''(x)\leq 0$, график функции выпукл;

б) точки перемены знака второй производной $f''(x)$ служат точками перегиба графика, т.е. точками перемены характера выпуклости.

Асимптоты графика. Вертикальная асимптота $x = x_0$ графика функции $y = f(x)$ возникает во всякой точке x_0, где эта функция не определена, и хотя бы один из односторонних ее пределов в точке x_0 равен бесконечности.

График функции обладает асимптотой $y = kx + b$ на бесконечности (наклонной асимптотой), если существуют оба числа (оба предела)

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)\ ;$$

при этом, вообще говоря, следует рассмотреть отдельно оба случая $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Если первый из указанных пределов не существует, или существует первый, но не существует второй, то график не обладает асимптотой (на бесконечности соответствующего знака).

Алгоритм полного исследования функции.

1. Исследование элементарными методами: область определения, характер четности, периодичность.
2. Точки разрыва, вертикальные асимптоты.
3. Исследование на монотонность и экстремумы.
4. Характер выпуклости, точки перегиба.
5. Асимптоты на бесконечности.

Пример. Исследовать процесс, описываемый функцией $y = \dfrac{x^3}{4(2-x)^2}$.

Построить график зависимости состояния процесса от значений переменной x. Можно ли пользоваться адекватной линейной моделью (какой именно?) при неограниченном увеличении значений x ?

Решение. 1)Функция определена при всех $x \neq 2$. Поскольку ее область определения не обладает симметрией относительно начала координат, то вопрос о характере четности не стоит: функция ни четна, ни нечетна.

Очевидно, что функция непериодична.

2)Функция претерпевает разрыв при $x = 2$. Исследуем ее поведение при стремлении x к 2 слева (т.е. при $x < 2$, что обозначается в виде $x \to 2-0$) и справа (т.е. при $x>2$, что обозначается в виде $x\to 2+0$). В обоих случаях функция остается положителен, и знаменатель дроби стремится к нулю, так что

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^3}{4(2-x)^2}=\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^3}{4(2-x)^2}=\infty .$$

Следовательно, прямая x=2 служит вертикальной асимптотой графика.

3)Имеем

$$y'=\frac{3x^2(2-x)^2-x^3\cdot 2(x-2)}{4(x-2)^4}=\frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}.$$

Критическими точками (т.е. точками, где производная не определена или обращается в ноль), служат точки $x=0,\ x=2,\ x=6.$ Этими точками числовая ось разбивается на интервалы знакопостоянства производной y'. При $x\in(-\infty,0)$, а также при $x\in(0,2)$ имеем $y'>0$, а значит каждом из этих интервалов функция возрастает; при $x\in(2,\,6)$ имеем $y'<0$, так что в этом интервале функция убывает; наконец, $y'>0$при $x\in(6,\infty)$, так что в этом интервале функция возрастает.

В точке x=6 производная y' изменила свой знак с «-» на «+», следовательно, в этой точке данная функция достигла своего минимального значения: $y_{\min}=y(6)=3{,}375$.

4)Найдем вторую производную:

$$y''=\left(\frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3}\right)'=\frac{6x}{(x-2)^4}.$$

Имеем $y''<0$при $x\in(-\infty,0)$, так что в указанном интервале график функции выпукл; $y''>0$ при $x\in(0,2),\ x\in(2,+\infty)$, следовательно, при указанных значениях переменной вогнут. Значит, $x=0$ – точка перегиба графика; при этом $y(0)=0.$ В точке x=2 (критическая точка второй производной) функция не определена.

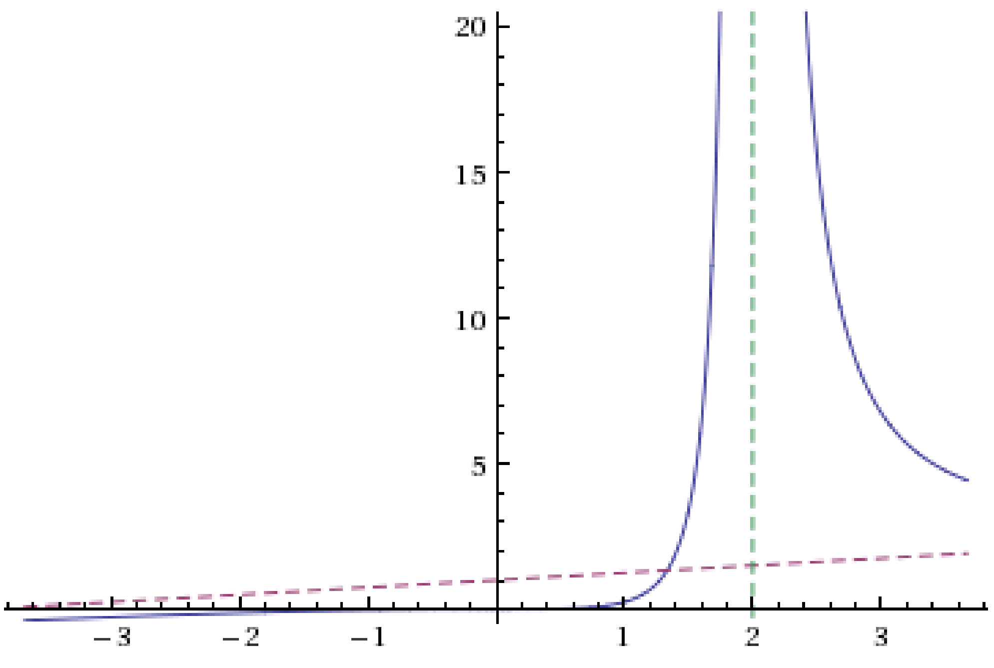
5)Определяем асимптоты графика на бесконечности (наклонные асимптоты). В случае $x\to+\infty$ коэффициенты уравнения прямой $y=kx+b$ будут следующими:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{4(2-x)^2x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{(2-x)^2}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\frac{2}{x}-1)^2}=\frac{1}{4};$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^3}{4(2-x)^2}-\frac{1}{4}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x}{x^2-4x+4}=1.$$

Итак, $k=\frac{1}{4}$, $b=1$, следовательно, график обладает асимптотой $y=\frac{1}{4}x+1$ на $+\infty$. Точно такие же вычисления пределов при $x\to-\infty$ приводят к следующему результату: график обладает той же асимптотой $y=\frac{1}{4}x+1$ и на $-\infty$.

Соединяя результаты полного исследования, изображаем эскиз графика функции:



Интерпретация модели:

1) Процесс носит разрывный характер; он «резонирует» при $x=2$.

2) Процесс «нарастает» при $x\in(-\infty,2)$ и убывает при $x\in(2,+\infty)$.

3) При неограниченном увеличении (уменьшении) значений x можно пользоваться адекватной линейной моделью $y=\frac{1}{4}x+1$.

8. Задачи для самостоятельного решения.

Исследовать функцию и построить эскиз ее графика

1. $y=\ln(x^2+1)$. 2. $y=(x+2)e^{1-x}$. 3. $y=x^3-3x^2-9x+7$.

4. $y=xe^{-x}$. 5. $y=\dfrac{4x}{x^2+4}$. 6. $y=-x\ln x$.

9. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Непрерывная на некотором отрезке $[a,b]$ функция $y=f(x)$, как известно, принимает на этом отрезке свои наибольшее и наименьшее значения, соответственно, M и m. Эти значения могут достигаться либо в точках экстремумов, либо на концах отрезка. Следовательно, алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции $y=f(x)$ состоит в следующем.

1. Найти производную функции $f'(x)$.

2. Найти критические точки, расположенные внутри отрезка $[a,b]$ (если они имеются; экстремумы функции могут быть только в этих точках).

3. Вычислить значения функции в найденных критических точках и на концах отрезка (т.е. в точках $x=a,\ x=b$).

4. Среди найденных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-3x+4$ на отрезке $[-2,0]$.

Решение. Следуя изложенному алгоритму, находим $y'=3x^2-3$. Теперь определяем критические точки: $3(x^2-1)=0$, т.е. $x=-1,\ x=1$. Среди них только первая точка лежит на заданном отрезке. Остается вычислить значения функции в точке $x=-1$ и на концах отрезка. Имеем: $y(-2)=2$, $y(-1)=6$, $y(0)=4$. Теперь среди найденных значений выбираем наибольшее и наименьшее: $y_{наибольшее}=y(-1)=6,\quad y_{наименьшее}=y(-2)=0$.

Пример 2. Найти наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \frac{24}{\pi}x - 2$ на отрезке $[-\frac{2\pi}{3},0]$.

Решение. Имеем $y' = -6\sin x + \frac{24}{\pi}$ и $y' = 0$, если $\sin x = \frac{4}{\pi}$. Последнее уравнение не имеет решений; следовательно, производная знакопостоянна на указанном отрезке. Ясно, что $y' > 0$, а поэтому данная функция возрастает на $[-\frac{2\pi}{3},0]$ и ее наименьшее значении достигается, следовательно, в точке $-\frac{2\pi}{3}$:

$$y_{наименьшее} = y(-\frac{2\pi}{3}) = 6\cos(-\frac{2\pi}{3}) - \frac{24}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{3} - 2 = -3 - 16 - 2 = -21.$$

10. Задачи о наибольших и наименьших значениях величин.

Многие задачи из геометрии, физики и других областей естествознания могут быть представлены следующей моделью: имеется некоторая величина, зависящая от двух переменных $\tau = \tau(x, y)$; требуется найти ее наибольшее или наименьшее значение при условии, что x и y связаны некоторым уравнением.

В общем случае возникает так называемая задача об условном экстремуме функции двух переменных. Она решается средствами дифференциального исчисления таких функций, которое в общих чертах представлено ниже. В простейших же случаях удается выразить одну переменную через другую, в результате чего величина τ оказывается функцией одной переменной. Для нахождения ее наибольшего или наименьшего значений остается применить вышеизложенный алгоритм.

Пример. Прямоугольный треугольник имеет периметр, равный $2a$. Найти размеры его катетов, при которых он обладает наибольшей площадью.

Решение. Если x и y – катеты треугольника, то, как известно из геометрии, его площадь $S = \frac{1}{2}xy$. Очевидно, что каждый катет меньше периметра, т.е. $0 < x < 2a$, $0 < y < 2a$. На основании теоремы Пифагора имеем гипотенузу $c = \sqrt{x^2 + y^2}$, так что теперь периметр треугольника $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2a$. Выразим из полученного уравнения y через x, после чего получим S в виде функции одной переменной. Итак, выполняем соответствующие преобразования полученного уравнения:

$$\sqrt{x^2+y^2}=2a-(x+y);\ x^2+y^2=4a^2-4a(x+y)+(x+y)^2;$$

$$x^2+y^2=4a^2-4a(x+y)+x^2+y^2+2xy;\ 2ax+2ay-xy=2a^2.$$

Теперь $y=\dfrac{2a(a-x)}{2a-x}$ и $S=a\cdot\dfrac{ax-x^2}{2a-x}$, при этом $0<x<2a$. В полученном интервале значений x наибольшее значение площади S может быть достигнуто в точке максимума; следовательно, исследуем знаки первой производной

$$S'=\frac{(a-2x)(2a-x)+(ax-x^2)}{(2a-x)^2} \text{ или } S'=\frac{x^2-4ax+2a^2}{(2a-x)^2}.$$

Критические точки определяем из условия $S'=0$ (знаменатель дроби при $0<x<2a$ будет строго положительным): $x^2-4ax+2a^2=0$, откуда $x_1=a(2-\sqrt{2}),\ x_2=a(2+\sqrt{2})$. Ясно, что $x_2>2a$, поэтому на интервале $(0,\ 2a)$ остается единственная критическая точка $x=a(2-\sqrt{2})$, при переходе через которую производная S' меняет свой знак с «+» на «-». Следовательно, в этой единственной точке максимума площадь треугольника и принимает свое наибольшее значение. При этом $y=\dfrac{2a(a-x)}{2a-x}=\dfrac{2a(a\sqrt{2}-a)}{a\sqrt{2}}=a(2-\sqrt{2})$.

Итак, при заданном периметре, равном $2a$ наибольшая площадь прямоугольного треугольника достигается, если он равнобедренный с катетами $x=a(2-\sqrt{2})$, $y=a(2-\sqrt{2})$.

11.Задачи для самостоятельного решения.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

1. $y=\dfrac{x}{9-x^2}$, $[-2,2]$

2. $y=-\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-3x+\dfrac{1}{3}$, $[0,3]$

3. $y=\dfrac{x^4}{4}-6x^3+7$, $[16,20]$

4. $y=(x-2)e^x$, $[-2,1]$

5. $y=\dfrac{x^2+4}{x}$, $[-4,-1]$

6. $y=\dfrac{\ln x}{x}$, $[1,4]$.

12. Неопределенный интеграл. *Интегрирование* есть действие, обратное дифференцированию. Если $f(x)=F'(x)$ на некотором интервале (a,b), то функция $F(x)$ (по отношению к $f(x)$) называется первообразной.

Так, например, для $f(x)=2x$ первообразными являются: $F(x)=x^2$, $F(x)=x^2-1$, ..., и вообще, любая функция вида $F(x)=x^2+C$, где C – произвольная постоянная.

В общем случае, совокупность всех первообразных для $f(x)$, $x\in(a,b)$, имеет вид: $\{F(x)+C\}$, где $F(x)$ – некоторая (фиксированная) первообразная, C – произвольная постоянная. Такая совокупность называется неопределенным интегралом для $f(x)$. Обозначение:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Следующие таблица и свойства интегралов могут быть проверены (доказаны) путем дифференцирования правых частей и получением тем самым подынтегральных функций в левой части.

Таблица интегралов

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^{\alpha}\,dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,$ $\alpha\neq-1$
3. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$
4. $\int e^x\,dx=e^x+C$
5. $\int a^x\,dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
6. $\int \sin x dx=-\cos x+C$
7. $\int \cos x dx=\sin x+C$
8. $\int\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}x+C$
9. $\int\dfrac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C$
10. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
11. $\int\dfrac{dx}{1+x^2}=\mathrm{arctg}x+C$
12. $\int \mathrm{tg}x dx=-\ln|\cos x|+C$
13. $\int \mathrm{ctg}x dx=\ln|\sin x|+C$

Приведем ряд свойств неопределенного интеграла.

Линейность интеграла

$$\int\left(\lambda f(x)+\mu g(x)\right)dx=\lambda\int f(x)dx+\mu\int g(x)dx;\ \lambda,\mu=\text{const}.$$

Приемы интегрирования.

а) Использование таблицы, линейности и почленного деления. Например,

$$\int\frac{3\sqrt{x}-2x+1}{x}dx=\int\left(\frac{3\sqrt{x}}{x}-\frac{2x}{x}+\frac{1}{x}\right)dx=3\int x^{-\frac{1}{2}}dx-2\int dx+\int\frac{dx}{x}=$$

$$=3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-2x+\ln|x|+C=6\sqrt{x}-2x+\ln|x|+C.$$

Использованы табличные интегралы: 2), 1), 3).

б) Замена переменных $t=\varphi(x)$ по формуле

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx=\int f(t)dt.$$

Указанная замена эффективна, если в произведении с dx имеется множитель, являющийся (с точностью до постоянного коэффициента) производной выражения ("блока"), от которого зависит оставшийся множитель. Этот блок и обозначаем новой буквой. Вычислив интеграл, возвращаемся к старой переменной.

Пример 1. $J=\int\frac{xdx}{1+x^2}$.

Решение. Заметим, что множитель x есть "почти производная" от блока $1+x^2$: $\left(1+x^2\right)'=2x$.

Следовательно, полагаем $t=1+x^2$ и устанавливаем связь дифференциалов:

$$dt=2xdx.$$

Числитель подынтегрального выражения будет равен dt, если его домножить на 2 (одновременно умножим интеграл на 1/2):

$$J=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{1+x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

Любопытно проверить ответ:

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\left(1+x^2\right)' + 0 = \frac{x}{1+x^2},$$

т.е. действительно получили подынтегральную функцию.

Пример 2. $J = \int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{\sqrt{x}}$ есть (с точностью до коэффициента 1/2) производная от $\sqrt{x}$, то обозначим $t = \sqrt{x}$, тогда $dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Поэтому

$$J = 2\int 2^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\right) = 2\int 2^t dt = 2\cdot\frac{2^t}{\ln 2} + C = \frac{2}{\ln 2}2^{\sqrt{x}} + C = \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\ln 2} + C.$$

Те же рассуждения можно привести без явного введения новой переменной, так как $d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, то имеем

$$J = 2\int 2^{\sqrt{x}}d\left(\sqrt{x}\right) = 2\cdot\frac{2^{\sqrt{x}}}{\ln 2} + C = \frac{2^{1+\sqrt{x}}}{\ln 2} + C.$$

Последний прием называется введением под знак дифференциала.

в) В случае интеграла "табличной" функции аргумента λx или $\lambda x + a$ (λ, $a = \mathrm{const}$) табличный результат следует делить на коэффициент λ (можно, конечно, применять также замену $t = \lambda x$ или $t = \lambda x + a$ соответственно).

Примеры.

$$1)\ \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} + C;$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(5x)^2}} = \frac{1}{5}\arcsin 5x + C;$$

$$3)\ \int \frac{dx}{3x-1} = \frac{1}{3}\ln|3x-1| + C.$$

г) Выделение полного квадрата в случае квадратного трехчлена в знаменателе дроби. Здесь следует пользоваться формулой

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

и заменой переменных $t = x + \dfrac{b}{2a}$, откуда $x = t - \dfrac{b}{2a}$, $dx = dt$.

Пример. $J = \int \dfrac{dx}{x^2 + 8x + 20}$.

Решение. Используем формулу г), в которой $a = 1, b = 8, c = 20$. Имеем

$$x^2 + 8x + 20 = 1 \cdot \left(x + \frac{8}{2}\right)^2 + \frac{4 \cdot 1 \cdot 20 - 8^2}{4 \cdot 1} = (x + 4)^2 + 4.$$

Положим далее $t = x + 4$, откуда $dt = dx$. Имеем

$$J = \int \frac{dx}{(x+4)^2 + 4} = \int \frac{dt}{2^2 + t^2} = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x+4}{2} + C.$$

Интегрирование "по частям"

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Прием эффективен при интегрировании функций логарифмической, обратных тригонометрических, а также произведений функций степенной на показательную, тригонометрическую, обратную тригонометрическую. Выбор множителя u (оставшийся множитель в интеграле есть dv) обусловлен такими соображениями:

- du должен иметь простой вид;
- первообразная $v = \int dv$ должна легко отыскиваться;
- $\int v du$ должен оказаться проще $\int u dv$ (т.е. исходного).

Пример 1**.** $J = \int xe^{1+2x} dx$.

Решение. Имеем произведение степенной и показательной функций. Выберем $u = x$. Тогда $dv = e^{1+2x} dx$. Следовательно,

$$du = dx, \ v = \int e^{1+2x} dx = \frac{1}{2} e^{1+2x}$$

(найдена одна из первообразных). Имеем

$$J = x \cdot \frac{1}{2}e^{1+2x} - \int \frac{1}{2}e^{1+2x}dx = \frac{1}{2}xe^{1+2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{1+2x} + C = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{1+2x} + C.$$

Заметим, что возможен был также выбор $u = e^{1+2x}, dv = xdx$, но в результате бы интеграл $\int vdu$ оказался сложнее исходного.

Пример 2. $J = \int \mathrm{arctg}x dx$.

Решение. Здесь возможен лишь выбор $u = \mathrm{arctg}x, dv = dx$. Тогда

$$du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = \int dx = x.$$

Следовательно,

$$J = (\mathrm{arctg}x)\cdot x - \int x \cdot \frac{dx}{1+x^2} = x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$$

$$= x\mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

13. Задачи для самостоятельного решения. Найти следующие неопределенные интегралы

1) $\int \frac{e^{3x}\cdot\sqrt{x} - 3x^3 + 4}{2\sqrt{x}}dx$

2) $\int e^{3\cos x - 1}\cdot \sin x \cdot dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$

4) $\int x \cdot \sin\frac{x}{3}\cdot dx$

5) $\int \frac{3\sqrt{x}\cdot \sin x + 2\sin^2 x - 1}{\sin x}dx$

6) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^4}}dx$

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 10x + 26}}$

8) $\int (1-x)e^{-x}dx$

14. Определенный интеграл. К понятию *определенного интеграла* приводит следующая задача о нахождении площади криволинейной трапеции. Пусть такая трапеция ограничена отрезком $[a,\ b]$ оси абсцисс, прямыми $x = a,\ \ y = b$

и графиком непрерывной на $[a,\ b]$ функции $y = f(x)$; для определенности считаем $f(x) \geq 0$ на $[a,\ b]$.

Выделим отрезок $[x, x+\Delta x]$ малой длины Δx. Площадь соответствующей "полоски" может быть приближенно вычислена как площадь прямоугольника со сторонами длины Δx и $f(\bar{x})$, где точка $\bar{x} \in [x, x+\Delta x]$ – произвольна: $\Delta S = f(\bar{x})\Delta x$. Разобьем всю криволинейную трапецию на такие полоски, пронумеруем их (пусть их число равно n) и вычислим приближенно искомую площадь как сумму площадей полосок

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\Delta x_k .$$

Устремляя к нулю каждую из длин Δx_k, будем получать все более точное приближение к площади S. В качестве точного ее значения естественно принять предел (при стремлении к нулю всех Δx_k) последовательности полученных сумм. Можно доказать, что при сформулированных условиях указанный предел существует и является одним и тем же числом для всевозможных разбиений трапеции на полоски и выбора "промежуточных" точек $\bar{x}_k$.

Сконструированный предел "интегральных" сумм вида называется определенным интегралом функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx .$$

Можно доказать, следующую формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Площадь S криволинейной трапеции вычисляется теперь по формуле Ньютона-Лейбница.

Как и для неопределенного интеграла, здесь сохраняется *свойство линейности*. Кроме того, для любых чисел a,b,c:

$$1)\ \int\limits_a^a f(x)dx=0; \qquad 2)\ \int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx;$$

$$3)\ \int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx.$$

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид

$$\int\limits_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v du.$$

Если $x=\varphi(t)$ монотонна на $[\alpha,\beta]$, например, возрастает от $x=a$ к $x=b$ при $\alpha \le t \le \beta$, то справедлива *формула замены переменных*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

(знак "минус" в правой части – в случае убывания $\varphi(t)$).

Заменяя переменную под знаком определенного интеграла, следует переходить к новым пределам интегрирования, и, найдя первообразную, к старой переменной не возвращаться.

Пример 1.

$$\int\limits_1^1 \frac{\cos(\operatorname{arctg} x)}{x^2+1}dx=\int\limits_0^1 \cos(\operatorname{arctg} x)\cdot d\operatorname{arctg} x=\sin(\operatorname{arctg} x)\Big|_0^1=$$

$$=\sin(\operatorname{arctg}1)-\sin(\operatorname{arctg}0)=\sin\frac{\pi}{4}-\sin 0=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пример 2. $J=\int\limits_2^3 \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}+1}dx$.

Решение. Сделаем замену переменных $t=\sqrt{x-2}$, откуда $t^2=x-2, x=t^2+2, dx=2td$. Новые пределы интегрирования α и β определяются через старые пределы $a=2$ и $b=3$ по той же формуле $t=\sqrt{x-2}$:

$$a=2, \alpha=\sqrt{2-2}=0; \quad b=3, \beta=\sqrt{3-2}=1.$$

Итак,

$$J = \int_0^1 \frac{t}{t+1} 2t dt = 2\int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt .$$

Имеем интеграл неправильной рациональной дроби. Выполняя деление "углом", получаем

$$\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1} .$$

Поэтому

$$J = 2\left(\int_0^1 t dt - \int_0^1 dt + \int_0^1 \frac{dt}{t+1} \right) = 2\left(\left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 - t\Big|_0^1 + \ln(t+1)\Big|_0^1 \right) =$$

$$= 2\left(\frac{1-0}{2} - (1-0) + \ln 2 - \ln 1 \right) = 2\left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right).$$

Пример 3. $J = \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$u = \ln x, du = \frac{dx}{x};$$

$$dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, v = 2\sqrt{x} .$$

Имеем

$$J = 2\sqrt{x} \cdot \ln x\Big|_1^e - \int_1^e 2\sqrt{x} \frac{dx}{x} = 2\left(\sqrt{x} \ln x\Big|_1^e - \int_1^e x^{-\frac{1}{2}} dx \right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{x} \ln x\Big|_1^e - 2\sqrt{x}\Big|_1^e \right) = 2\left(\sqrt{e} \ln e - \ln 1 - 2\left(\sqrt{e} - 1 \right) \right) = 2\left(2 - \sqrt{e} \right).$$

15. Задачи для самостоятельного решения. Найти определенные интегралы.

1) $\int_{-1}^{2} (4 - 2x) dx$ 2) $\int_0^1 (1-x) e^x dx$

3) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$ 4) $\int_0^4 \frac{x}{1+3\sqrt{x}}dx$

5) $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx$ 6) $\int_1^2 (6\sqrt[5]{x} - \frac{4}{x^5})dx$

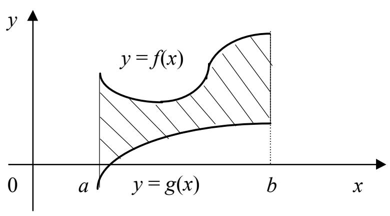
16. Приложения определенных интегралов к задачам геометрии.

Перечислим основные геометрические приложения определенных интегралов.

1)Площадь фигуры. Если плоская фигура D ограничена линиями $x = a, x = b$, $y = g(x), y = f(x)$, где g и f – непрерывны на $[a,b]$ и $g(x) \le f(x)$ при $x \in [a,b]$, то ее площадь

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

В частности, при $g(x) \equiv 0$ имеем площадь криволинейной трапеции (см. рис 1 и 2).



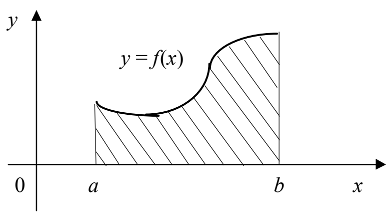


Рис. 1 Рис. 2.

2)Длина дуги линии. Если линия L задана в декартовой системе координат уравнением $y = f(x)$, то длина ее дуги, соответствующей значениям $x \in [a, b]$ вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Пример. Найти длину дуги линии.

$$y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}, 0\le x\le 2.$$

Решение. График функции $y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}$ изображен на рис. 3

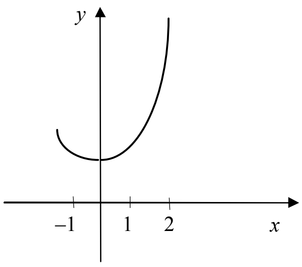


Рис. 3.

Имеем:

$$l=\int_0^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(e^x-2+e^{-x}\right)}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{e^x+2+e^{-x}}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)dx=\frac{1}{2}\cdot 2\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\left(e-e^{-1}\right)-(1-1)=e-\frac{1}{e}.$$

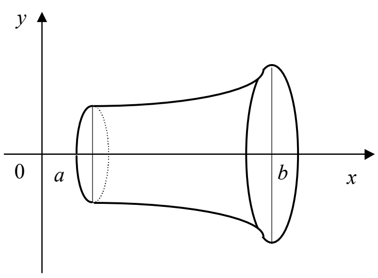


Рис. 4

3) Объем тела вращения. Тело, образованное вращением вокруг $0x$ криволинейной трапеции, ограниченной осью $0x$, прямыми $x=a, x=b$ и графиком $y=f(x)$ ($f(x)\ge 0$ при $x\in[a,b]$), имеет объем (рис. 4)

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Найти объем тела, образованного вращением криволинейного треугольника вокруг оси $0x$, если треугольник ограничен осью $0x$, прямой $x=\dfrac{\pi}{4}$ и графиком $y=\mathrm{tg}x$.

Решение. Имеем

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}^2 x dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx\right)=$$

$$=\pi\left(\mathrm{tg}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)=\pi\left(1-0-\frac{\pi}{4}\right)=\pi-\frac{\pi^2}{4}.$$

17. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями.

1. $y=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$, $y=0$, $x=-1$, $x=1$ 2. $y=3\sin 2x$, $y=0\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной следующими линиями:

1) $y=e^{-x}$, $y=2x+1$, $x=1$. 2) $y=-\sqrt{x}$, $y=2x$, $x=4$.

3. Найти длину участка линии $y=2(x+1)\sqrt{x+1}$ при $-1\le x\le 0$.

Глава 4. Задачи с практическим содержанием

1. Линейная зависимость. Закон сложения.

При решении задач на составление уравнений часто применяют стандартные схемы построения *оператора модели* (уравнения, неравенства, системы уравнений, неравенств и др). Одной из таких схем является использование линейной зависимости. Такая зависимость действует в следующих задачах.

1. Задачи на движение: линейная зависимость между переменными S (длина пути, пройденного прямолинейно движущимся телом), v (скорость равномерного движения) и t (время движения).
2. Задачи на тему «Работа»: линейная зависимость между объемом работы A, производительностью v и временем выполнения работы t.
3. Задачи на тему «Смеси, сплавы»: линейная зависимость между массой смеси (сплава) M, концентрацией вещества c и объемом V.

Оператор модели в этих случаях – это «аддитивный закон» (закон сложения):

1. Встречное движение: расстояние между пунктами равно сумме отрезков пути, пройденных участниками движения до их встречи.
2. Совместная работа: весь ее объем складывается из долей, выполненных участниками.
3. Смеси, сплавы: масса M всей смеси (сплава) складывается из масс ее (его) компонент; масса чистого вещества m в смеси (сплаве) складывается из масс чистого вещества в каждом компоненте.

Переменные	Локальная линейная зависимость	Аддитивный закон (оператор модели)
Равномерное движение: S, v, t	$S=vt$	Встречное движение: $S = S_1 + S_2$
Работа: A, v, t	$A=vt$	Совместная работа: $A = A_1 + A_2 + \ldots$

Смесь, сплав: M,c,V	$M=cV$	Смеси, сплавы: $M = M_1 + M_2 + \ldots$ $m = m_1 + m_2 + \ldots$

Решение полученной математической задачи есть решение уравнения или системы уравнений, определяемых оператором модели.

Задача 1. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 35% меди. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 225 кг, содержащий 25% меди. На сколько килограммов масса второго сплава больше массы первого?

Решение (моделирование ситуации).

1) Формализация. Введение переменных: x – масса первого сплава, y – масса второго; c_1 -содержание меди в первом сплаве (в процентах) , c_2 - во втором ; M - масса третьего сплава , c - содержание меди (в процентах) в третьем сплаве.

Компоненты «вектора входных переменных» (данные задачи):

$$c_1 = 5,\ c_2 = 35,\ M = 225,\ c = 25.$$

Компоненты «вектора выходных переменных» (искомые величины): x, y.

2) Закон линейной зависимости (применяется к составу каждого сплава):

$$m_1 = c_1 x\ ,\ m_2 = c_2 y,\ m = cM\ .$$

3) Применение аддитивного закона (оператор модели):

$$\begin{cases} x + y = 225 \\ 0{,}05x + 0{,}35y = 0{,}25 \cdot 225 \end{cases}$$

Теперь решаем полученную математическую задачу – систему уравнений; в ответе потребуется записать разность $y - x$.

Решить систему можно, например, следующим образом. Поделим на 0,05 первое уравнение системы, а далее – вычтем из второго уравнения первое. Мы получим $y = 150$, а тогда (из первого уравнения системы) $x = 75$. Итак, вектор выходных переменных имеет компоненты $x = 75, y_2 = 150$.

Теперь искомое $x - y = 75$.

2. «Сложные» проценты

Задача 1 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). 1 января 2015 года был взят в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем должник переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев может быть взят кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

Решение. Ясно, что чем больше месячные выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 220 тыс. рублей. Попробуем непосредственно подсчитать по годам оставшийся долг при указанной схеме выплаты кредита. Составим таблицу, в первом столбце которой будем указывать долг на первое число месяца, а во втором — долг в том же месяце, но уже после выплаты. Для упрощения расчётов будем сохранять только два знака после запятой, представляя суммы долга в тыс. рублей.

Так, в результате первого начисления процентов останется долг $1100+0{,}02\times1100 ==1122$; а после выплаты «транша» : $1122-220=902$ (тыс.руб.).

Действуя подобным образом и далее, будем иметь

Месяц	Долг на первое число месяца (тыс. руб)	Долг после выплаты (тыс. руб)
1	1122	902
2	920,04	700,04
3	714,04	494,04
4	503,92	283,92
5	289,60	69,60
6	70,99	0

Стоит заметить, что в последний месяц выплата составит менее 220 тыс. руб. Из таблицы видно, что минимальный срок кредита в условиях задачи составляет 6 месяцев.

Ответ: 6.

Задача 2 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). 31 декабря 2013 года был взят в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем должник переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы долг был выплачен тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Здесь (в сравнении с предыдущей задачей) непосредственный подсчет невозможен, но рассуждения будут аналогичными.

Пусть сумма кредита равна a, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют k %. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = a_2 m - x = (am^2 - (1+m)x)m - x$$

Или

$$a_3 = am^3 - (1 + m + m^2)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами кредит должен быть погашен полностью, поэтому

$$am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x = 0,$$

откуда

$$x = \frac{am^3(m-1)}{m^3 - 1}.$$

При a = 9 930 000 и k = 10, получаем: $m = 1 + 0{,}01k$ или $m = 1{,}1$ и

$$x = \frac{9930000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Рассмотрим теперь задачу, в которой предполагается не выплата кредита, а обратный процесс - накопление

Задача 3 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40%. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение. Пусть банк первоначально принял вклад в размере s у.е. под x % годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $s(1+0{,}01x)$ у.е.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось

$$\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)$$

условных единиц (у.е.)

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)$$

у.е.

По условию задачи эта сумма равна $1{,}44s$ у.е.

Решим уравнение

$$\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01) = 1{,}44s.$$

Имеем

$$\frac{3s}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01) = 1{,}44s \Leftrightarrow (1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01) = 1{,}92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x = -120 \pm \sqrt{19600} \Leftrightarrow x = -120 \pm 140.$$

$$x_1 = 20;\ x_2 - -260$$

По смыслу задачи: x=20. Новые годовые составляют тогда 20 + 40 = 60 %.

Ответ: 60.

3.Задачи «максимизации» и «минимизации»

Задача 1 (тип задания 19 КИМ ЕГЭ). В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение. Пусть в меньший класс распределено x мальчиков (где $1 \leq x \leq 21$), тогда в больший класс попало ($23 - x$) мальчиков. Доля мальчиков

в меньшем классе есть x/21,

в большем – (23-x)/23. Значит, суммарная доля мальчиков в двух классах равна

$$\frac{x}{21} + \frac{23 - x}{22} = \frac{x}{462} + \frac{23}{22}.$$

Получена линейная функция

$$y = \frac{1}{462}x + \frac{23}{22}$$

с положительным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка [1; 21], то есть при $x = 21$. Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из мальчиков, а в большем классе должно быть 20 девочки и 2 мальчика.

Ответ: В одном классе — 21 мальчик, в другом — 20 девочек и 2 мальчика.

Задача 2. Требуется позолотить ларец формы прямоугольного параллелепипеда (стенки и крышку) объема 72 куб. ед., у которого длина основания вдвое больше его ширины. При каких размерах ларца будет потрачено меньше всего позолоты.

Вектор входных переменных:

x- ширина основания;

$2x$ - длина основания;

y- высота.

Требование к результату в терминах содержательной модели: наименьшие затраты материала. Требование к результату в терминах математической модели: наименьшая площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда.

Оператор математической модели строится из следующих соображений:

1)выражение площади поверхности через компоненты вектора входных переменных x, y;

2) минимизация полученной функции двух переменных.

Оператор модели:

$$S = 2x \cdot x + 2(x + 2x)y,$$
$$S \mapsto \min.$$

Окончательная постановка задачи возможна путем связывания переменных x и y формулой объема, так что в результате минимизируемая площадь поверхности оказывается функцией одного переменного, наименьшее значение которой находим средствами дифференциального исчисления:

$$S = 2x^2 + 6xy;$$
$$V = 2x^2 y;$$
$$S = S(x) \mapsto \min.$$

Прогноз результата: при нахождении точки x наименьшего значения функции $S = S(x)$ определятся размеры ларца, на который уйдет наименьшее количество позолоты.

Теперь алгоритм решения задачи реализуется следующим образом.

1) $y = \dfrac{72}{2x^2}$;

2) $S = 2(x^2 + \dfrac{108}{x}),\ x > 0.$

3) Далее находим критические точки функции $S = S(x)$:

$$S' = 2(2x - \frac{108}{x^2}); \quad 2(2x - \frac{108}{x^2}) = 0,$$

откуда $x^3 = 27$, $x = 3$. Непосредственным исследованием знаков производной убеждаемся, что найденное значение $x = 3$ служит точкой минимума функции $S = S(x)$.

4) В условиях данной задачи при $x = 3$ поверхность ларца (боковая поверхность плюс крышка) будет наименьшей. Следовательно, искомые размеры ларца: ширина $x = 3$; длина $2x = 6$; высота $y = 4$.

Результат интерпретируется следующим образом: при размерах $6 \times 3 \times 4$ на позолоту уйдет наименьшее количество материала.

4.Задачи для самостоятельного решения

1. Расстояние между городами А и В равно 650 км. Из города А в город В со скоростью 55 км/ч выехал первый автомобиль, а через два часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. На каком расстоянии от города А автомобили встретятся? Ответ дайте в километрах.

2. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 20 часов. Через 2 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

3. В среду акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а в четверг подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 64% дешевле, чем при открытии торгов в среду. На сколько процентов подорожали акции компании в среду?

4.Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

5.Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации;

$25 < t < 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гбайт?

Литература к главе 4

1. Маркова А.К., Орлов А.Б., Фридман Л.М. Мотивация учения и ее воспитание у школьников / М.: Педагогика. – 1983. – 65 с.

2. Бершадский М.Е., Гузеев В.В. Дидактические и психологические основания образовательной технологии / М.: Пед. поиск. – 2003. –256 с.

3. Концепция развития российского математического образования. Основное содержание [Электронный ресурс]/ Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения: 1.09.16).

4. Нахман А.Д. Формирование компетенции математического моделирования в условиях реализации Концепции развития математического образования // Международный журнал экспериментального образования. – 2016. – №2. – С. 282–286.

5. Пуанкаре А. О науке / М.: Наука. –1990. – 736с

Глава 5. Дифференциальные уравнения. Задачный материал

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается непосредственно установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т.е. найти уравнения, в которых неизвестные функции содержатся под знаком производной. Такие уравнения называются дифференциальными; они служат важным средством моделирования различных процессов.

Цель настоящей главы – помочь студентам в выработке практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания. Большая часть контрольных заданий имеет тестовую форму, что позволяет расширить поле контроля и сократить время его проведения.

1. Теоретические сведения

1.1 Общие понятия и определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой переменной и ее производные (или дифференциалы).

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной (или дифференциала).

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

где x - независимая переменная,

$y = y(x)$ - искомая функция, $y'(x) = \frac{dy}{dx}$ - ее производная.

Если уравнение (1.1) можно записать в виде

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

то говорят, что оно разрешимо относительно производной.

Часто встречается дифференциальная форма записи уравнения первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

которая удобна тем, что в качестве искомой функции может быть как $x = x(y)$, так и $y = y(x)$.

Решением (интегралом) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = y(x)$, превращающая это уравнение в тождество.

График функции $y = y(x)$ называется интегральной кривой.

Процесс решения дифференциального уравнения называется его интегрированием.

На самом деле в процессе интегрирования определится целый класс решений:

$$y = y(x, C), \tag{1.3}$$

где C - произвольная постоянная.

Класс (1.3) называется общим решением дифференциального уравнения; ниже мы уточним, что будем понимать под общим решением дифференциального уравнения первого порядка.

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения определяется в неявном виде: $\Phi(x, y, C) = 0$.

Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости xOy.

При каждом конкретном значении $C = C_0$ получают частное решение $y = y(x, C_0)$.

Задача о нахождении решения дифференциального уравнения (1.2), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Геометрически, такая задача предполагает поиск интегральной кривой, которая проходит через заданную точку с координатами (x_0, y_0).

Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной (включая «предельные» случаи $C = \pm\infty$), называется его особым решением.

При интегрировании дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с общим решением были найдены также и особые решения.

Среди всех дифференциальных уравнений особый интерес представляют некоторые классы уравнений, для которых существуют стандартные способы аналитического решения. Ниже будут рассмотрены важнейшие из них.

1.2 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{1.4}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, учитывая, что $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

При этом уравнение (1.4) преобразуется к виду $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.

Интегрируя, получим общее решение: $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)dx = C$.

Замечания

1. Характерный признак дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными - это наличие произведений (или частных) "блоков", зависящих только от "x" или только от "y".

2. Если обе части уравнения делим на переменную величину, то необходимо отдельно рассмотреть также случай, когда она обращается в ноль. Так, постоянные $y = y_0$, для которых $g(y_0) = 0$, являются, очевидно, решениями уравнения (1.4).

3. Произвольная постоянная, возникающая при интегрировании, может быть записана в виде kC или $k\ln C$, где k –любой постоянный (ненулевой) множитель. В некоторых случаях такая запись удобна для упрощения ответа.

1.3. Однородные уравнения

Если уравнения $y' = f(x, y)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не изменяются при одновременной замене "x" на "kx" и "y" на "ky", то они называются однородными.

Однородное уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.5}$$

Однородное дифференциальное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$t = \frac{y}{x} \quad \text{(откуда} \quad y' = t + t'x\text{)},$$

где $t = t(x)$ - новая неизвестная функция.

После того как новое уравнение будет проинтегрировано, следует сделать обратную замену переменных - вместо t подставить $\frac{y}{x}$.

1.4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.6}$$

где $p(x), q(x)$ - непрерывные (на данном интервале) функции.

Характерный признак таких уравнений – функция y и ее производная y' содержатся в уравнении в первой степени.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0,\, n \neq 1. \tag{1.7}$$

Существует несколько методов решения уравнений данных видов: метод вариации произвольных постоянных, метод интегрирующего множителя, метод Бернулли.

Рассмотрим метод Бернулли. При этом решение каждого из уравнений (1.6), (1.7) ищется в виде

$$y = u \cdot v,$$

где $u = u(x), v = v(x)$ - неизвестные функции.

По правилу дифференцирования произведения получим $y' = u'v + uv'$ (аргумент "x" в дальнейшем опускаем).

В этом случае линейное уравнение (1.6), например, записывается следующим образом

$$u'v + u(v' + pv) = q.$$

Множитель $v = v(x)$ можно выбрать как некоторое решение уравнения $v' + pv = 0$.

Тогда исходное уравнение оказывается эквивалентным уравнению с разделяющимися переменными $u'v = q$, общее решение которого есть некоторая $u = u(x, C)$.

Окончательно общий интеграл линейного дифференциального уравнения примет вид

$$y = v(x) \cdot u(x, C).$$

Таким образом, в процессе решения приходится дважды решать уравнения с разделяющимися переменными.

По той же схеме решается и уравнение Бернулли.

1.5. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Уравнение вида

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1.8}$$

связывающее между собой независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x)$, называется дифференциальным уравнением второго порядка (разрешенным относительно второй производной).

Общим решением уравнения (1.8) называется функция $y = y(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2, которая при любых значениях C_1, C_2 является решением (1.8).

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка состоит в следующем: найти решение уравнения (1.8), удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0$.

Геометрически, имеем задачу нахождения интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) и имеющей данный угловой коэффициент $y'_0 = tg\,\alpha$ касательной в этой точке.

Краевая задача. Задача интегрирования уравнения (1.8) называется краевой, если значения искомой функции $y(x)$ и, возможно, ее производных задаются не при одном и том же значении независимой переменной, а на концах некоторого фиксированного интервала. В некоторых случаях значения искомой функции или ее производных могут задаваться более чем в двух точках.

Задача Коши иногда называется одноточечной, краевые задачи – двухточечными (иногда, многоточечными).

Краевая задача не всегда имеет решение, а если она его и имеет, то во многих случаях оно не является единственным. Ниже мы подробнее познакомимся с указанным понятием на примерах.

В некоторых случаях путем надлежащей замены переменных удается понизить порядок дифференциального уравнения, т.е. уравнение второго порядка решается последовательным рассмотрением двух уравнений первого порядка.

Рассмотрим три типа таких уравнений.

1) Уравнения вида $y'' = f(x)$, содержащие только производную и независимую переменную, решаются путем последовательного интегрирования:

$$y' = \int f(x)\,dx + C_1,$$

$$y = \int \left(\int f(x)dx + C_1 \right) dx + C_2 .$$

2) Уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$, не содержащие искомой функции y, допускают понижение порядка с помощью подстановки $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$.

При этом получаем два последовательно решаемых дифференциальных уравнения первого порядка:

$$F(x, y', y'') = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y' = z, \\ F(x,\, z,\, z') = 0. \end{cases}$$

3) Уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$, явно не содержащие переменную x, допускают понижение порядка путем подстановки $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy} = p \cdot p'$.

При этом получаем два следующих последовательно решаемых уравнения первого порядка:

$$F(y, y', y'') = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y' = p(y), \\ F(y;\ p;\ p') = 0. \end{cases}$$

Формальное отсутствие аргумента x позволяет рассматривать функцию p как функцию аргумента y.

2 . Задачи для активного обучения

2.1. Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых $y = Cx^3$.

Решение. Продифференцируем по x равенство $y = Cx^3$, получим $y' = 3Cx^2$. Кроме того, очевидно, $C = \dfrac{y}{x^3}$. Поэтому искомое дифференциальное уравнение принимает вид: $xy' = 3y$.

2.2. Зная, что $y = C\ln x$ является общим решение уравнения $xy'\ln x = y$, найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(e,1)$.

Решение. В данном случае необходимо найти решение задачи Коши с начальным условием $y(e)=1$: $y(e)=C\ln e=1$, откуда $C=1$. Искомая интегральная кривая задается теперь уравнением $y=\ln x$.

2.3. Найти общее решение уравнения $xy' = \left(4+y^2\right)\ln x$.

Решение. Имеем уравнение с разделяющимися переменными:

$$x\cdot\frac{dy}{dx}=\left(4+y^2\right)\ln x.$$

Умножим обе части уравнения на dx: $x\cdot dy=\left(4+y^2\right)\ln x\cdot dx$.

Далее обе части уравнения поделим на выражение $x\left(4+y^2\right)$, которое, очевидно, в данном уравнении не может обратиться в ноль:

$$\frac{dy}{4+y^2}=\frac{\ln x}{x}dx.$$

Таким образом, мы разделили переменные. Интегрируем теперь обе части уравнения: $\int\frac{dy}{4+y^2}=\int\frac{\ln x}{x}dx$, $\int\frac{dy}{2^2+y^2}=\int\ln x\, d(\ln x)$,

$$\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=\frac{\ln^2 x}{2}+\frac{1}{2}C.$$

Итак, получено общее решение уравнения в неявном виде:

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=\ln^2 x+C.$$

2.4. Решить задачу Коши: $(2xy+x)dx-\left(x^2+1\right)dy=0,\ \ y(0)=\frac{1}{2}.$

Решение. Перепишем уравнение в виде $x(2y+1)dx=\left(x^2+1\right)dy$ и разделим переменные. Поделив обе части уравнения на произведение $(2y+1)\cdot\left(x^2+1\right)$, получим:

$$\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{dy}{2y+1}.$$

Интегрируем: $\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{dy}{2y+1}$; $\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2y+1)}{2y+1}$,

откуда $\ln\left(x^2+1\right)=\ln(2y+1)+\ln C$.

Упростим теперь решение, используя свойства логарифмов: $\ln\left(x^2+1\right)=\ln C(2y+1)$.

Итак, общее решение уравнения принимает вид $x^2+1=C\cdot(2y+1)$.

Теперь найдем значение постоянной C, при котором будет выполнено указанное начальное условие.

Подставляя $x=0,\ y=\frac{1}{2}$ в общее решение, получим:

$$0+1=C\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right),\quad C=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, имеем решение задачи Коши:

$$x^2+1=y+\frac{1}{2}\ \text{ или, в явном виде, }\ y=x^2+\frac{1}{2}.$$

Замечание 1. Для определенности считаем, что выражения, стоящие под знаком логарифма, положительны, поэтому не записываем соответствующий знак модуля.

Замечание 2. Здесь и в дальнейшем используются следующие свойства логарифмов: $\ln a+\ln b=\ln ab$; $\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$; $k\ln a=\ln a^k$;

$$\ln z=m\Leftrightarrow z=e^m;\quad \ln 1=0;\quad \ln e=1.$$

1.2.5. Найти общее решение уравнения $x\,y'-y+x\cos^2\frac{y}{x}=0$.

Решение. Непосредственное разделение переменных в данном случае невозможно, но выражение $\cos^2\frac{y}{x}$ наводит на мысль об однородном уравнении вида (1.5). Действительно, поделив обе части на x, получим:

$$y'-\frac{y}{x}+\cos^2\frac{y}{x}=0.$$

Далее сделаем подстановку $t=\frac{y}{x}$, $y'=t+t'x$:

$$t+x\cdot t'-t+\cos^2 t=0\ \text{ или }\ x\cdot t'+\cos^2 t=0.$$

Теперь решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{dt}{dx}=-\cos^2 t;\qquad -\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем: $-\operatorname{tg} t=\ln x+\ln C$ или $\ln Cx+\operatorname{tg} t=0$.

В результате обратной подстановки приходим к общему решению в неявном виде: $\ln Cx + \operatorname{tg}\frac{y}{x} = 0$.

2.6. Решить уравнение $y' - \frac{y}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}$.

Решение. Данное уравнение является линейным (см. соответствующие характерные признаки).

Сделав подстановку Бернулли $y = u \cdot v$, $y' = u'v + uv'$, получим:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{2\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}; \qquad u'v + u\left(v' - \frac{v}{2\sqrt{x}}\right) = 2e^{\sqrt{x}}.$$

Полагаем $v' - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0$, тогда $u'v = 2e^{\sqrt{x}}$.

Решение исходного уравнения сводится к последовательному решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

1) Функцию $v = v(x)$ найдем из первого уравнения $v' - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0$:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}, \quad \int\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx, \quad \ln v = x^{\frac{1}{2}},$$

$v = e^{\sqrt{x}}$ (выбрана одна из первообразных $v = v(x)$).

2) Подставим $v = e^{\sqrt{x}}$ во второе уравнение $u'v = 2e^{\sqrt{x}}$.

Решив его, найдем общее решение $u = u(x, C)$:

$$\frac{du}{dx}e^{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}, \quad du = 2\,dx, \quad \int du = 2\int dx, \quad u = 2x + C.$$

Поскольку $y = u \cdot v$, то общее решение линейного уравнения запишется в виде $y = (2x + C)e^{\sqrt{x}}$.

2.7. Найти решение задачи Коши $y' = \frac{y}{x} - y^2,\ y(1) = -1.$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли с $n = 2$: $y' - \frac{1}{x}\cdot y = -y^2$. Полагаем $y = u \cdot v$, тогда $u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -u^2v^2,$

Решаем последовательно два уравнения.

1) Из уравнения $v'-\frac{v}{x}=0$, находим функцию $v(x)$: $\frac{dv}{dx}-\frac{v}{x}=0$, $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{dv}{v}=\int\frac{dx}{x}$, $\ln v=\ln x$, $v=x$.	*2)* Подставляем $v=x$ во второе уравнение $u'v=-u^2v^2$: $\frac{du}{dx}\cdot x=-x^2u^2$, $u^{-2}du=-x\,dx$, $-\frac{1}{u}=-\frac{x^2}{2}+C$, $u=\frac{2}{x^2-2C}$.
Так как $y=u\cdot v$, то общее решение уравнения Бернулли: $y=\frac{2x}{x^2-2C}$.	

Используем начальные условия $x=1,\ y=-1$, для нахождения соответствующего значения константы C: $-1=\frac{2}{1-2C}$, $C=\frac{3}{2}$.

Итак, решение задачи Коши имеет вид: $y=\frac{2x}{x^2-3}$.

2.8. Решить уравнение $y\,dx-\left(x+y^2\sin y\right)dy=0$.

Решение. Данное уравнение линейно относительно функции $x=x(y)$, где y - аргумент. Действительно:

$$y\cdot\frac{dx}{dy}-x-y^2\sin y=0,\quad \frac{dx}{dy}-\frac{1}{y}x=y\sin y,\quad x'-\frac{1}{y}x=y\sin y.$$

Делаем подстановку Бернулли: $x=uv,\ \ x'=u'v+uv'$.

Тогда получим уравнение: $u'v+u\left(v'-\frac{v}{y}\right)=y\sin y$.

Далее получаем два уравнения с разделяющимися переменными.

1) $v' - \frac{v}{y} = 0$, $\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$, $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$, $\ln v = \ln y$, $v = y$.	2) $u'v = y\sin y$. Выбрав $v = y$, получим $\frac{du}{dy} \cdot y = y\sin y$, $du = \sin y\, dy$, $u = -\cos y + C$.
Общее решение уравнения: $y = Cy - y\cos y$.	

2.9. Найти общее решение уравнения $\sin\frac{x}{3} - y'' = 6 - 2x$.

Решение. Имеем уравнение второго порядка, которое содержит только вторую производную искомой функции и ее аргумент. Выразим явно вторую производную: $y'' = \sin\frac{x}{3} + 2x - 6$.

Интегрируем: $y' = \int\left(\sin\frac{x}{3} + 2x - 6\right)dx = -3\cos\frac{x}{3} + x^2 - 6x + C_1$.

Для того чтобы найти функцию $y(x)$, проинтегрируем еще раз:

$y = \int\left(-3\cos\frac{x}{3} + x^2 - 6x + C_1\right)dx;$ $y = -9\sin\frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - 3x^2 + C_1x + C_2$.

2.10. Найти общее решение уравнения второго порядка

$$x\,y'' = y'\ln\frac{y'}{x}.$$

Решение. Данное уравнение не содержит явно функции y, поэтому сделаем подстановку $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$. Получим однородное уравнение первого порядка: $z' = \frac{z}{x}\cdot\ln\frac{z}{x}$, которое решается с помощью замены $\frac{z}{x} = t$: $t'x + t = t\cdot\ln t$;

$t'x = t(\ln t - 1)$; $\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$;

$\int\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \int\frac{dx}{x}$; $\ln(\ln t - 1) = \ln C_1x$; $\ln t - 1 = C_1x$; $\ln t = C_1x + 1$, откуда $t = e^{xC_1+1}$.

Теперь $\frac{z}{x} = e^{xC_1+1}$; $z = x\,e^{xC_1+1}$.

Итак, получено еще одно уравнение первого порядка (в данном случае с разделяющимися переменными) $y' = x\,e^{xC_1+1}$.

Ясно, что $y = \int x\,e^{xC_1+1}dx$. Интегрируем «по частям»:

$$\int x\,e^{xC_1+1}dx = \begin{vmatrix} x = u, & e^{xC_1+1}dx = dv \\ dx = du, & \frac{1}{C_1}e^{xC_1+1} = v \end{vmatrix} = \frac{x}{C_1}e^{xC_1+1} - \frac{1}{(C_1)^2}e^{xC_1+1} + const\cdot$$

Общее решение уравнения принимает вид: $y = \frac{C_1x-1}{C_1^2}\cdot e^{xC_1+1} + C_2$.

2.11. Решить задачу Коши: $y\,y'' + \frac{9}{y^2} = 0;\ \ y(0) = \frac{1}{3},\ \ y'(0) = 9.$

Решение. Имеем уравнение, которое явно не содержит переменную x. Полагаем $y' = p(y)$, $y'' = p\cdot\frac{dp}{dy}$. Следовательно, уравнение запишется в виде: $yp\cdot\frac{dp}{dy} + \frac{9}{y^2} = 0$. Разделяем переменные, затем интегрируем: $p\,dp = -\frac{9}{y^3}dy$;

$\int p\,dp = -9\int y^{-3}\,dy$, $\quad \frac{p^2}{2} = \frac{9}{2y^2} + \frac{C_1}{2}$.

Далее получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$(y')^2 = \frac{9}{y^2} + C_1.$$

Постоянную C_1 можно найти уже на этом этапе, если использовать начальные условия: $y(0) = \frac{1}{3},\ y'(0) = 9 \ \Rightarrow\ 9^2 = 81 + C_1 \ \Rightarrow\ C_1 = 0$.

Остается решить уравнение $(y')^2 = \frac{9}{y^2}$ или $y' = \frac{3}{y}$

(при извлечении корня взят знак плюс, так как в точке $x = 0$, а значит и в некоторой ее окрестности, значения y и y' имеют одинаковый знак).

Разделяя переменные, имеем: $y\,dy = 3\,dx$, $\quad y^2 = 6x + C_2$.

Значение C_2 находим из условия $y(0) = \frac{1}{3}$: $\quad \frac{1}{9} = 0 + C_2$, $\quad C_2 = \frac{1}{9}$.

Следовательно, $\quad y^2 = 6x + \frac{1}{9}$ $\quad$ или $\quad y = \frac{\sqrt{54x+1}}{3}$.

2.12. Найти решение уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющее условиям: $y(0) = 0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решение. В данном случае имеем так называемую краевую задачу.

Прежде всего, найдем общее решение дифференциального уравнения. Так как в уравнении отсутствует аргумент x, то сделаем подстановку третьего типа: $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy}$

Далее решим уравнение с разделяющимися переменными:

$p \cdot \dfrac{dp}{dy} + y = 0$, $p \cdot dp = -y \cdot dy$, $\dfrac{p^2}{2} = -\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{C_1}{2}$, $p = \sqrt{C_1 - y^2}$.

Возвращаемся к y', получаем уравнение: $y' = \sqrt{C_1 - y^2}$.

Решаем его: $\dfrac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = dx$, $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = x + C_2$.

Интеграл в левой части равенства найдем с помощью замены переменной $y = \sqrt{C_1} \cdot \sin z$: $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{C_1 - y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{C_1}} + const.$

Итак, общее решение заданного уравнения:

$$\arcsin \frac{y}{\sqrt{C_1}} = x + C_2 \quad \text{или} \quad y = \sqrt{C_1} \sin(x + C_2).$$

Используем теперь краевые условия: $x = 0,\ y = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{2},\ y = 1$.

Подставляя их в общее решение, получим и решим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{C_1} \cdot \sin C_2 = 0, \\ \sqrt{C_1} \cdot \cos C_2 = 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} C_2 = 0, \\ \sqrt{C_1} = \dfrac{1}{\cos C_2}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция $y = \sin x$ является единственным решением данной краевой задачи.

3. Блок контрольных заданий

3.1 Теоретические упражнения

1) Доказать, что функция $y = y(x)$ является решением задачи Коши $\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному

уравнению $y = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f(x,y)dx$. (Предполагается, что в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши).

2) Пусть $f(x), g(y)$ - функции, непрерывные в окрестностях точек x_0 и y_0 соответственно, $f(x_0) = 0$, $g(y_0) = 0$. Доказать, что каждая из функций $x = x_0$ и $y = y_0$ является решением уравнения $f(x)dy + g(y)dx = 0$.

3) С помощью замены переменных $t = \frac{y+a}{x+b}$ найти общее решение уравнения вида $y' - \frac{y+a}{x+b} = (x+b)f'(x)$ (Здесь a, b - любые постоянные величины, f - произвольная дифференцируемая на всей числовой оси функция).

4) С помощью замены переменных $u = x + by$ найти общее решение уравнения вида $y' = \frac{a(x+by)+p}{x+by+q}$ (Здесь a, b, p, q - любые постоянные ненулевые величины).

5) Найти общее решение уравнения $\left(kx + e^{ky} f'(y)\right) \cdot y' = 1$

($k \neq 0$ - любая постоянная величина, f - произвольная дифференцируемая на всей числовой оси функция).

6) Могут ли интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = f(x)$ пересекаться?

7) Пусть y_1 и y_2 -два различных решения уравнения $y' + p(x)y = g(x)$. При каком соотношении между постоянными C_1 и C_2 функция $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ будет решением данного уравнения?

8) Найти общее решение уравнения $y' + y\varphi'(x) - \varphi(x) \cdot \varphi'(x) = 0$, где $\varphi(x)$ - заданная функция.

9) Может ли решение уравнения $y' = y$ $(y \neq 0)$ иметь точки минимума?

10) Решить уравнение $y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1$.

3.2 Задачи для самостоятельного решения

Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

$(y+1)dx - (1-x)dy = 0$; (Ответ: $y = C(1-x) - 1$);

$e^y(1+x^2)y' = 2x(1+e^y)$; (Ответ: $y=\ln\left|Cx^2+C-1\right|$);

$y' = 2^{x+y}$; (Ответ: $2^x+2^{-y}=C$);

$\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0,\ y(0)=1$; (Ответ: $y=\pm\sqrt{1-\arcsin^2 x}$);

$y'\sin x = y\cos x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; (Ответ: $y=\sin x$);

$(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0)=1$; (Ответ: $y=\dfrac{1}{1+\ln\left|x^2-1\right|}$);

$x+xy^2+(x^2y-y)\cdot y' = 0,\ y(0)=1$ (Ответ: $y^2=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$).

Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

$xy'-y = xe^{\frac{y}{x}}$; (Ответ: $e^{-\frac{y}{x}}+\ln|x|=C$);

$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$; (Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}=\ln\dfrac{Cx^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$);

$x^2y' = x^2+xy+y^2$; (Ответ: $\dfrac{y}{x}=\operatorname{tg}(\ln|Cx|)$);

$y+\sqrt{xy}=xy'$; (Ответ: $y=\dfrac{x}{4}\ln^2|Cx|$);

$x^2y'+xy-x^2-y^2=0,\ y(1)=0$; (Ответ: $\dfrac{x}{x-y}=\ln|Cx|$);

$xy'=y(\ln y-\ln x),\ y(1)=e$; (Ответ: $y=e\,x$);

$\left(y'-\dfrac{y}{x}\right)\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}=1,\ y(1)=\dfrac{\pi}{2}$; (Ответ: $\sin\dfrac{y}{x}=x$).

Решить линейные уравнения или уравнения Бернулли:

$y'+2y=3e^x$; (Ответ: $y=\dfrac{3}{5}e^{3x}+Ce^{-2x}$);

$y'+y\operatorname{tg}x=\sin 2x$; (Ответ: $y=-2\cos^2 x+C\cos x$);

$y'-\dfrac{2y}{x+1}=y^2(x+1)^4$; (Ответ: $y=\dfrac{6(x+1)}{(x+1)^2+6C}$);

$y'-\dfrac{y}{x}+y^2=0,\ y(1)=1$; (Ответ: $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$);

$y'+y=\dfrac{x+3}{2},\ y(1)=\dfrac{1}{2}$; (Ответ: $y=\dfrac{x+2}{2}-e^{-x+1}$);

$y' + y = x^2 e^{-x}$, $y(0) = 3$; (Ответ: $y = \frac{x^3 + 9}{3} \cdot e^{-x}$);

$y^2\,dx + (xy - 1)dy = 0$; (Ответ: $x\,y = \ln|Cy|$).

Указание: рассмотреть данное уравнение как линейное относительно $x(y)$.

Решить следующие дифференциальные уравнения, понижая их порядок:

$y'' = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 2\cos x - x\sin x$; (Ответ: $y = (x+3)\ln|x| + x\sin x - x + C_1 x + C_2$);

$x\,y'' = 1 + y'$; (Ответ: $y = \frac{C_1 x^2}{2} - x + C_2$);

$y'' x \ln x = y'$; (Ответ: $y = C_1 x(\ln|x| - 1) + C_2$);

$y'' = (e^{2x} + \sin 3x) \cdot x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; Отв: $y = \frac{x-1}{4} e^{2x} - \frac{x}{9}\sin 3x + \frac{5}{4}(x+1)$;

$(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$; (Ответ: $y = 3x + x^3$);

$y''\,\mathrm{tg}\,y = 2(y')^2$, $y(1) = \frac{\pi}{4}$, $y'(1) = -2$. (Ответ: $\mathrm{ctg}\,y = 5 - 4x$);

$\begin{cases} y''' = x^2 + 3x - 1, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3. \end{cases}$ (Ответ: $y = \frac{x^5}{60} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + 1$).

Приложения. Тесты

ТЕСТ 1

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ 2) $y' + y - xy^2 = 0$ 3) $x\left(y^2 - 4\right)dx + y\,dy = 0$ 4) $y' + \frac{xy}{1-x^2} = \arcsin x$	**Варианты ответов:** □ уравнение с разделяющимися переменными; □ однородное уравнение первого порядка; □ линейное уравнение первого порядка; □ уравнение Бернулли.
Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения. 1) $2x^2 y'' - (y')^2 = 0$ 2) $y'' = 2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x$ 3) $3y \cdot y' - 7y'' = 0$	**Варианты ответов:** □ последовательное интегрирование обеих частей уравнения □ подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$ □ подстановка $y' = p(y),\ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$
Задание 3. Указать функцию, являющуюся решением уравнения $$y \cdot dy = \frac{dx}{2(x+1)}$$	**Варианты ответов:** ○ $y = e^x$ ○ $y = 2$ ○ $y = \frac{1}{x+1}$ ○ $y = \sqrt{\ln(x+1)}$
Задание 4. Решениями уравнения $y'' = 2(x+1) + e^x$	**Варианты ответов: (укажите два ответа)**

являются функции…	○ $y=\frac{(x+1)^3}{3}+e^x+C_1x+C_2$ ○ $y=(x+1)^3+e^x+C_1x+C_2$ ○ $y=x^3+x^2+e^x+C_1x+C_2$ ○ $y=\frac{x^3}{3}+x^2+e^x+C_1x+C_2$
Задание 5. Среди перечисленных задач "задачей Коши" является …	**Варианты ответов:** ○ $xyy'=1-x^2$ ○ $ydx+\operatorname{ctg}xdy=0,\ y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$ ○ $y'=3y-1$ ○ $(y'')^2+(y')^2=1,\ y(0)=1,\ y(1)=2$
Задание 6. Функция $y=C(x+1)$ является решением уравнения $y'+2=0$, если C принимает значение …	**Укажите ответ** □
Задание 7. Решите задачу Коши $\begin{cases} xy'-6y=x, \\ y(1)=\frac{1}{6}, \end{cases}$ и в ответе укажите значение $y(0)$.	**Укажите ответ** □
Задание 8. Решить дифференциальное уравнение $y'=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решить дифференциальное уравнение	**Запишите полное решение**

$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.	
Задание 10. Решить дифференциальное уравнение $y'' + 2xy' = 1 + y^2$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 2

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $y' \cos x = \frac{y}{\ln y}$ 2) $y' + \frac{y}{x} = x^2$ 3) $x(y^2 - 4)dx + y\,dy = 0$ 4) $y' + 2xy = 2x^3 y^3$	**Варианты ответов:** □ уравнение с разделяющимися переменными; □ однородное уравнение первого порядка; □ линейное уравнение первого порядка; □ уравнение Бернулли
Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения. 1) $y'' = xe^{-x}$ 2) $(y')^3 + y\,y'' = (y')^2$ 3) $y' + (x+1)y'' = 0$	**Варианты ответов:** □ последовательное интегрирование обеих частей уравнения □ подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$ □ подстановка $y' = p(y),\ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$
Задание 3. Указать функции, являющиеся решениями уравнения $x \cdot y^2 = y'$.	**Варианты ответов: (укажите два ответа)** ○ $y = 4 - \frac{2}{x^2}$ ○ $y = \frac{x^2}{2}$

	○ $y=-\frac{2}{x^2}$ ○ $y=\frac{2}{x^2}$
Задание 4. Общим решением уравнения второго порядка $y''=x^2+x$ является функция…	**Варианты ответов:** ○ $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+C$ ○ $y=x^4+x^3+C_1x+C_2$ ○ $y=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3+C_1x+C_2$ ○ $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{3}x^3+C_1x+C_2$
Задание 5. Среди перечисленных задач "задачей Коши" является …	**Варианты ответов:** ○ $y'x+y+xy^2=0$ ○ $y''=e^{-2x},\ y(0)=1,\ y(2)=e^{-4}$ ○ $yy''=(y')^2,\ y(0)=2,\ y'(0)=2$ ○ $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$
Задание 6. Указать, при каком значении C функция $y=x^3$ является решением уравнения $y'=Cx^2$.	**Укажите ответ** □
Задание 7. Решите задачу Коши $\begin{cases} y'=2e^{-2y}, \\ y\left(\frac{1}{4}\right)=0, \end{cases}$ и в ответе укажите значение $y\left(\frac{e}{4}\right)$.	**Укажите ответ** □
Задание 8. Решить дифференциальное уравнение	**Запишите полное решение**

$\frac{xy' - y}{x} = tg\frac{y}{x}$.	
Задание 9. Решить дифференциальное уравнение $\cos x \cdot y' + \sin x \cdot y = 1$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решить дифференциальное уравнение $y^2 y'' + 1 = 0$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 3

Задание 1. Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $xy' - y^2 \ln x + y = 0$ 2) $\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'$ 3) $xy' - y = x^2 \cos x$ 4) $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$	**Варианты ответов:** □ уравнение с разделяющимися переменными; □ однородное уравнение первого порядка; □ линейное уравнение первого порядка; □ уравнение Бернулли.
Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения. 1) $y''x - y' = \cos\frac{y''}{x}$	**Варианты ответов:** □ последовательное интегрирование обеих частей уравнения □ подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$

2) $7y\,y'' - y^2 = (y')^2$ 3) $y''\sin^4 x = \sin 2x$	□ подстановка $y' = p(y),\ y'' = p\cdot\frac{dp}{dy}$
Задание 3. Указать функцию, являющуюся решением уравнения $y' = -\operatorname{tg} x$.	**Варианты ответов:** ○ $y = -\frac{1}{\cos^2 x}$ ○ $y = \ln(\cos x)$ ○ $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ ○ $y = \ln(\sin x)$
Задание 4. Решениями уравнения $y'' = x^2 + 4x + 4$ являются функции…	**Варианты ответов: (укажите два ответа)** ○ $y = \frac{1}{12}(x-2)^4 + C$ ○ $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + C_1 x + C_2$ ○ $y = (x+2)^4 + C_1 x + C_2$ ○ $y = \frac{1}{12}(x+2)^4 + C_1 x + C_2$
Задание 5. Среди перечисленных задач "задачей Коши" является …	**Варианты ответов:** ○ $y'' = \frac{e^y}{2}$ ○ $(y+1)dx + (x^2-2)dy = 0$ ○ $y' + (x+5)y = xy^2,\ y(0) = 2$ ○ $2yy'' = 4 + (y')^2$
Задание 6. Указать, при каком значении C функция $y = e^{2x+3}$ является решением уравнения $y' - 2y + C = 2$.	**Укажите ответ** □

Задание 7. Решите задачу Коши $\begin{cases} xy' - y = -2xy^2, \\ y(1) = 1, \end{cases}$ и в ответе укажите значение $y(2)$.	**Укажите ответ** □
Задание 8. Решить дифференциальное уравнение $x^2 y' = y(x - y)$.	**Запишите полное решение**
Задание 9. Решить дифференциальное уравнение $y' = xy + x^3 y^2$.	**Запишите полное решение**
Задание 10. Решить дифференциальное уравнение $(1 - x^2)y'' + xy' = 0$.	**Запишите полное решение**

ТЕСТ 4

Задание 1.	**Варианты ответов:**
Определите тип каждого из данных уравнений: 1) $y' + 2xy = x^2 e^{-x^2}$	□ уравнение с разделяющимися переменными; □ однородное уравнение первого

2) $y' + xy + (2-x)e^x y^2 = 0$ 3) $(1+x^2)dy + y\,dx = 0$ 4) $xy' \cdot \sin\frac{y}{x} + x = y \cdot \sin\frac{y}{x}$	порядка; □ линейное уравнение первого порядка; □ уравнение Бернулли.
Задание 2. Сопоставьте уравнения второго порядка и способы их решения. 1) $y''\mathrm{ctg}\,3x + y' = 0$ 2) $y'' = cos^2 x + e^{3x} + 8x^2$ 3) $(y')^2 = (2y + 3y') \cdot y''$	**Варианты ответов:** □ последовательное интегрирование обеих частей уравнения □ подстановка $y' = z(x),\ y'' = z'(x)$ □ подстановка $y' = p(y),\ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$
Задание 3. Указать функции, являющиеся решениями уравнения $dy - 3x^2 y\,dx = 0$.	**Варианты ответов: (укажите два ответа)** ○ $y = e^{x^3}$ ○ $y = e^x + 2$ ○ $y = e^{x^3 - 1}$ ○ $y = 2e^{x^2}$

Литература к главе 5.

1. Агафонов С. А., Герман А. Д., Муратова Т. В. Дифференциальные уравнения. - МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2004. – (Сер. Математика в техническом университете; Вып. VII).
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. пособие. – 22-е изд., перераб. – Спб.: Профессия, 2005.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов/ П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-

е изд. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2006.

4. Каплан И.А., Пустынников В.И. Практикум по высшей математике: в 2 т. Т. 2: учебное пособие / И.А. Каплан, В.И. Пустынников : под общей ред. проф. В.И. Пустынникова. -6-е изд., испр. и доп. – М.: Эксмо, 2008. – (Образовательный стандарт XXI).
5. Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. – 3-е изд., доп., - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007.
6. Нахман, А.Д. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и их приложениям: учеб. пособие / А.Д. Нахман, С.В. Плотникова. Тамбов: Изд-во Тамб. гос.техн.ун-та, 2005.
7. Нахман А.Д. Дифференциальные уравнения: методическое пособие. Тамбов. ТОИПКРО, 2007.
8. Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ [К.Н. Лунгу и др.]; под ред. С.Н. Федина. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007.
9. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие. -2-е изд., перераб. – М.: Высш.шк., 1989.

ОГЛАВЛЕНИЕ.