Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ВОПРОСЫ АЛГОРИТМИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Монография

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2018

Рецензенты:
доктор технических наук, доцент ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» С.В.Плотникова;

кафедра общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

УДК 372.851

Нахман, А.Д. Вопросы алгоритмической разрешимости математических задач: монография / А.Д.Нахман // «Инновации в образовании». Специальный выпуск. – Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2018. – 88 с.

Сформулированы положения задачного подхода, наиболее важные с точки зрения принципов системности и деятельности. Проанализирована проблема алгоритмической разрешимости. Введено и проиллюстрировано на задачном материале понятие эффективных решений для классов алгоритмически разрешимых задач. В контекст системного подхода «встроены» концепции алгоритмизации и редуцирования процесса решения. Монография адресована исследователям в области образовательных инноваций, а также преподавателям математики.

Глоссарий

Настоящий глоссарий предназначен для первичного ознакомления с понятийным полем данной работы. Дальнейшие рассмотрение и уточнение понятий содержатся в текстах соответствующих глав.

Алгоритм – набор инструкций, описывающих порядок действий исполнителя для достижения некоторого результата.

Алгоритмизация – этап решения задачи, состоящей в подборе по её условию соответствующей последовательности действий.

Алгоритмическая разрешимость – возможность подобрать алгоритм для решения каждой задачи из данного класса задач.

Алгоритм Эвклида – эффективный алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД) пары целых чисел.

Анализ – метод исследования, характеризующийся выделением и изучением отдельных частей объектов исследования.

Ассоциированность алгоритмическая – наличие у задачи признаков принадлежности некоторому классу алгоритмически разрешимых задач.

Ветвящийся алгоритм – алгоритм, в котором в зависимости от истинности или ложности заданного условия выбирается один из нескольких возможных вариантов (путей) процесса исследования.

Вывод нечетко-логический – процесс получения нечетких заключений на основе нечетких условий или предпосылок.

Высказывание нечёткое – высказывание , степень истинности которого можно оценить числом из интервала [0, 1].

Диофантовы уравнения – задача о нахождении целых корней многочлена с целыми коэффициентами.

Задачный подход – система учебных задач, решение которых должно обеспечить овладение требуемыми знаниями и умениями

Задачи с параметрами – задача исследовательского характера $P(x,a)$, множество решений которой зависит от возможных значений параметра a

Интерпретация ответа – его истолкование, перефразирование в других терминах, прояснение его прикладного значения.

Квадратическая функция – функция вида $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

Ключевая задача – задача, идея решения которой применяется при решении других задач данной темы.

Концепция развития математического образования– система взглядов на базовые принципы, цели, задачи и основные направления развития математического образования в Российской Федерации.

Кордано формулы – формулы решения алгебраических уравнений третьей степени.

Нечёткое множество – множество, степень (уровень) принадлежности элемента которому можно оценить числом из интервала [0, 1].

Редукция – логико-методологический приём сведения сложного к более простому.

Рефлексия–способность к самооценке, анализ выполненной деятельности.

Синтез – метод научного исследования, противоположный анализу, состоящий в соединении разнообразных явлений, вещей, качеств в единство, в целое.

Система – совокупность взаимосвязанных элементов, образующих определённую целостность, обладающую новыми интегративными свойствами.

Сходимость алгоритма – остановка его действия после конечного числа шагов. *Федеральные государственные образовательные стандарты* (ФГОС) – совокупность требований, обязательных при реализации основных образовательных программ начального, общего и профессионального образования.

Функция принадлежности – обобщение понятия характеристической функции обычного множества; характеризует для каждого элемента степень (уровнь) нечеткой его принадлежности множеству.

Цель – образ требуемого результата, определяющий отбор действий, ведущих к его достижению.

Эффективное решение – решение задачи за наименьшее (в сравнении с другими способами) количество шагов (операций) или (и) достижение результата в наиболее простой форме.

Введение

1.Задачный подход. Федеральные государственные образовательные стандарты (ФГОС) нового поколения обозначают ряд основных направлений деятельности системы образования. Среди них:

-развитие и воспитание личности в соответствии с требованиями современного информационного сообщества;

-развитие у обучающихся способности самостоятельно получать и обрабатывать информацию по учебным вопросам;

- развитие у них коммуникативных навыков.

Методологической основой реализации требований Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС [1]) общего образования к личностным, метапредметным и предметным результатам освоения курса математики является системно-деятельностный подход [2]. Подход ориентирует обучающихся на самостоятельное осуществление алгоритма действий, направленных на получение знаний и решение поставленных перед ними учебных задач. Соответствующие результаты в обучении математике можно разделить на 3 группы: личностные, метапредметные и предметные.

Системно-деятельностный подход

Личностные результаты: *мотивация математической деятельности*; *развитие способностей к самообучению*; *сформированность индивидуальных взглядов и ценностей*	*Метапредметные результаты*: *освоение УУД* (*построение логических умозаключений*; *умение применять и преобразовывать модели и др.*)	*Предметные результаты*: *развитие математического мышления*; *сформированность представлений о математических моделях и др.*

Возникает вопрос *о видах деятельности,* обеспечивающих успешную реализацию системно-деятельностного подхода. Нам представляется, что такими видами являются:

- постановка задач, приводящей к новым для учащегося понятиям и фактам;
- проектирование способов, схем и алгоритмов их решения;
- применение методов и приёмов, направленные на активизацию познавательной деятельности учащихся в процессе решения поставленных задач;
- организация сотрудничества между учащимися и индивидуальной работы каждого из них (формирование коммуникативных умений);
- формулировка выводов, гипотез, обобщений и рефлексия деятельности: самостоятельная оценка учащимися результатов своей работы, подведение её итогов;
- межпредметная и практическая ориентированность знаний и умений, что достигается постановкой практических задач из реальной жизни, задач на стыке предметов.

Перечисленные виды деятельности могут быть объединены категорией «задачный подход». Общая теория задачного подхода представлена в монографии [2].

Если технологию системно-деятельностного подхода рассматривать как систему, то задачный подход является важнейшей подсистемой. Речь идёт о специально организованном и систематически осуществляемом обучении в виде разрешения разнообразных учебных задач. Сформулируем те положения задачного подхода, которые представляются нам наиболее важными с точки зрения принципов системности и деятельности [3]:

-введение новых понятий предваряется постановкой некоторой задачи;

-новое знание формируется в процессе решения задачи;

- результатом решения является «выход» в сферу применений нового знания как в самой предметной области «Математика», так и в смежных дисциплинах, а также в практической деятельности;

- решённая задача порождает серию новых задач (данный результат мы именуем «принципом снежного кома»), что способствует расширению и углублению сформированного знания, усилению мотивации математической деятельности, формированию способностей к обобщению и систематизации результатов.

Задачный подход является альтернативой традиционному знаниевому подходу, когда необходимый объём знаний передаётся в готовом виде, так что учащемуся остаётся лишь осознать и запомнить полученный объём информации; здесь «единицей обученности» выступает некоторая единица информации. В то же время результат задачного подхода измеряется в таких единицах обученности, как интеллектуальное умение, способность давать ответы на соответствующие вопросы, применять усвоенные способы деятельности в новых условиях.

2.Общие требования к системе задач в контексте задачного подхода (см. [4])**.**

1) Полнота. Задачи должны охватывать все изучаемые понятия, факты и их следствия.

2) Наличие ключевых задач. Задачи должны быть сгруппированы в «в узлы вокруг объединяющих центров» – задач, в которых рассматриваются факты или способы деятельности, лежащие в основе решения других задач и имеющие принципиальное значение для усвоения предметного содержания.

3) Связность. Вся совокупность задач может быть представлена смоделирована в форме связного графа, в узлах которого – ключевые задачи. Предполагается движение по графу от задач подготовительных к ключевым и далее –от ключевых задач –к следствиям и обобщениям.

4) Возрастание трудности на каждом уровне. Система задач состоит из трёх подсистем, соответствующих минимальному, общему и продвинутому уровням планируемых результатов обучения. В каждой из подсистем трудность задач непрерывно нарастает.

5) Целевая ориентация и целевая достаточность. Для каждой задачи определено её место и назначение; объём задачного материала достаточен для закрепления методов решения, задач для групповых и индивидуальных заданий разной направленности, задач для самостоятельной (в том числе и исследовательской) деятельности учащихся, задач для текущего и итогового контроля.

6) Гибкость. Гибкость и психологическая комфортность задачного подхода выражается в обеспечении возможности приспособления содержания обучения и путей его усвоения к индивидуальным потребностям обучаемых, с учётом индивидуального темпа усвоения каждого из них, индивидуальной траектории обучения. Система задач должна учитывать наличие разных темпераментов, типов мышления, видов памяти; дидактический материал должен быть разнообразен по содержанию, форме и объёму.

3. Этапы решения математической задачи. Мы выделяем следующие этапы.

1) Осознание условия задачи, выделение его существенных моментов (устранение «шумов», избыточных данных и т.п.), формализация (введение обозначений данных и искомых величин), визуализация (запись с помощью схемы, таблицы т.п.).

2) Анализ задачи: выделение характерных признаков задачи, которые позволяют выбрать соответствующий алгоритм решения, составление плана решения на основе выбранного алгоритма.

3) Редукция - упрощение, сведение задачи к более простой (для которой известен алгоритм решения) или системе таких задач.

4) Синтез: осуществление плана, последовательное решение упрощенных задач.

5) Формирование и фиксация результата (ответа).

6) Интерпретация (какие выводы следуют из наших рассуждений, где и как их можно применить).

7) Рефлексия (анализ собственных действий, догадок и ошибок, самоконтроль, самоутверждение в данном виде математической деятельности).

Глава 1. АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

В учебной литературе укоренились понятия «стандартных» и «нестандартных» задач. Граница между соответствующими классами весьма условна. В нашем понимании стандартная задача – та, которая может быть решена по известному алгоритму. А именно, в первую очередь определяется класс, которому принадлежит задача (например, полное квадратное уравнение), затем происходит обращение к стандартному алгоритму (алгоритм решения квадратного уравнения) и его реализация. «На выходе» получаем искомое решение (кони квадратного уравнения или отсутствие действительных корней.

Более сложная ситуация, связанная со стандартной задачей –её прямое сведение к задаче (системе задач), для которых реализуемы известные алгоритмы решения. Последний процесс называется редукцией.

В настоящей главе:

- уточняется понятие алгоритма;
- обсуждаются понятия алгоритмически разрешимых или неразрешимых задач;
- предлагаются примеры редукции задач.

1. Элементы теории алгоритмов

1.1. Основные понятия. Алгоритм как эффективная процедура, однозначно приводящая к требуемому результату, знакома школьнику с младших классов. Школьные методы умножения «столбиком» и деления «углом», метод исключения неизвестных при решении системы линейных уравнений, правило дифференцирования сложной функции, способ построения треугольника по трем заданным сторонам – все это алгоритмы.

Простой анализ любого алгоритма (от алгоритма решения математической задачи до алгоритма приготовления, скажем, борща), позволяет вычленить основные его признаки. Прежде всего, это наличие некоторого набора данных (входные данные), которому ставится в соответствие набор выходных данных. Далее, это система предписаний, по которым набор входных данных преобразуется в набор результатов, получаемых на выходе. Поэтому можно говорить об алгоритме как о *конструктивно заданном операторе.*

В технику термин «алгоритм» пришел вместе с кибернетикой. Если понятие метода вычисления не нуждалось в пояснениях, то понятие процесса управления пришлось вырабатывать практически заново. Понадобилось осознавать, каким требованиям должна удовлетворять последовательность действий (или ее описание), чтобы считаться конструктивно заданной, т. е. иметь право называться алгоритмом. В этом осознании существенную помощь инженерной интуиции оказала практика использования вычислительных машин, сделавшая понятие алгоритма ощутимой реальностью. С точки зрения современной практики алгоритм – это программа, а критерием алгоритмичности процесса является возможность его запрограммировать.

1.2. Основные требования, применяемые к алгоритму.

1. *Наличие данных.* Как выше указывалось, алгоритм, примененный к исходным данным, выдает некоторые результаты. Вместе с тем, в процессе реализации алгоритма, возникают некоторые промежуточные данные.

Типичным средством получения как промежуточных, так и выходных данных, являются индуктивные (рекурсивные) определения, указывающие, как строить новые объекты из уже построенных.

2. *Наличие памяти*, необходимой для размещения данных. Память обычно считается однородной и дискретной, т. е. условно говоря, состоит из одинаковых ячеек, в каждой из которых хранится «единица» информации. Таким образом, единицы измерения объема данных и памяти согласованы. При этом память может быть бесконечной.

3. *Дискретность и конечность.* Алгоритм состоит из отдельных элементарных шагов, или действий, причем множество различных шагов, из которых составлен алгоритм, конечно. Типичный пример множества элементарных действий – система команд компьютера.

4. *Детерминированность.* Суть этого требования состоит в том, что после каждого шага необходимо указывать, какой шаг выполняется следующим, либо давать команду остановки, после чего работа алгоритма считается законченной.

5. *Результативность или сходимость алгоритма* для любого набора входных данных означает остановку его действия после конечного числа шагов.

6. Требование м*ассовости* состоит в том, что алгоритм решения задачи разрабатывается в общем виде, то есть, он должен быть применим для некоторого класса задач, различающихся только исходными данными. При этом исходные данные могут выбираться из некоторой области, которая называется областью применимости алгоритма.

Понятие «массовости» тесно связано с понятием математической модели. Решение поставленных практикой задач математическими методами основано на абстрагировании – мы выделяем ряд существенных признаков, характерных для некоторого круга явлений, и строим на основании этих признаков математическую модель, отбрасывая несущественные признаки каждого конкретного явления. В этом смысле любая математическая модель обладает свойством массовости. Если в рамках построенной модели мы решаем задачу и решение представляем в виде алгоритма, то решение и будет «массовым».

Приведем следующий пример алгоритма.

S: Записать результат работы алгоритма $\begin{cases} 0 \to 1 \\ 2 \to 1 \end{cases}$ над числом 510242.

Решение. Данный алгоритм устанавливает следующие предписания:

1) цифру 0 заменить на 1;
2) цифру 2 заменить на 1.

Поскольку других предписаний нет, то остальные цифры числа оставляем неизменными. Имеем в результате работы алгоритма число 511141.

Приведем ещё две аналогичные задачи.

1. Записать результат работы алгоритма $\begin{cases} 0 \to 2 \\ 4 \to 3 \end{cases}$ над числом 1004

2. Записать результат работы алгоритма $\begin{cases} 0 \to 2 \\ 2 \to 3 \end{cases}$ над числом 1203

1.3. Ветвление. Способы задания алгоритмов. Разветвляющимся называется такой алгоритм, в котором в зависимости от истинности или ложности заданного условия выбирается один из нескольких возможных вариантов (путей) вычислительного процесса. Каждый такой вариант называется ветвью алгоритма.

Ветвление – это такая форма организации действий, при которой в зависимости от выполнения или невыполнения некоторого условия совершается либо одна, либо другая последовательность действий. Признаком разветвляющегося алгоритма является наличие операций проверки условия.

Условие – это высказывание., так что условие может принимать одно из двух значений: «истина» или «ложь». Различают два вида условий: простые и составные.

Простое условие выражается некоторым простым высказыванием, составное – составным высказыванием, то есть построенным из нескольких простых, соединённых знаками логических операций конъюнкции, дизъюнкции, отрицания.

Составное условие вида «X и Y» истинно тогда и только тогда, когда истинны оба условия X и Y, в остальных случаях – ложно. Составное условие вида «X или Y» истинно тогда, когда истинно хотя бы одно условие X или Y. Условие вида «не X» истинно, если X ложно, и наоборот.

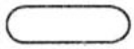
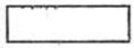
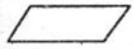
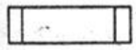
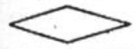
На практике наиболее распространены следующие **формы представления алгоритмов**.

1.Словесная (запись на естественном языке; словесный способ описания последовательных этапов обработки данных);

2. Табличная (представление алгоритма в форме расчетных формул и таблицы).

3. Графическая (изображения из графических символов);

Задание графического алгоритма происходит путем использования блоков.

	Начало или конец алгоритма
	Блок вычислений
	Блок ввода или вывода данных
	Обращение к подпрограмме
	Блок проверки условия

4. Программная (тексты на языках программирования);

Приведём пример словесного алгоритма: записать алгоритм упорядочивания (расположения в порядке возрастания) конечного массива выборочных данных М.

Заметим, что этот алгоритм оказывается важным при ранжировании числовых значений количественного признака, наблюдаемых на случайных выборках.

Решение. Пусть S_n – искомая последовательность, где n-размер выборки, по смыслу задачи $n \geq 2$.

Шаг 1. Найти в массиве М наименьшее число, вычеркнуть его из М и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Записать найденное число в качестве первого члена последовательности S_n и перейти к шагу 3.

Шаг 3. Найти в оставшемся массиве наименьшее число, вычеркнуть его из М и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Записать найденное на предыдущем шаге число справа к тому, что записано в S_n и перейти к шагу 5.

Шаг 5. Если в массиве больше нет чисел, то остановить работу алгоритма, иначе перейти к шагу 4.

Поскольку на шаге 3 всякий раз массив выборочных данных уменьшается, то алгоритм сходится. Выполнение остальных из вышеперечисленных 6 требований очевидно.

1.4. Алгоритм (Эвклида) нахождения наибольшего общего делителя двух заданных натуральных чисел представляет собою ветвящийся алгоритм.

Шаг 1. Задать два числа и перейти к шагу 2.

Шаг 2 Если числа равны, то взять любое из них в качестве ответа. Иначе перейти к шагу 3.

Шаг 3. Определить большее из чисел и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Заменить большее число разностью большего и меньшего из чисел и перейти к шагу 2.

Поскольку на шаге 4 всякий раз большее натуральное число уменьшается, то алгоритм сходится. Выполнение остальных из вышеперечисленных 6 требований очевидно.

В качестве ***примера*** реализуем алгоритм Эвклида в случае чисел 432 и 168. На шаге 3 видим, что 432>168, а на шаге 4 рассматриваем числа $432-168=264$ и 168. Возвращаясь к шагам 2-3, имеем $264>168$, и, согласно шагу 4, рассматриваем числа $264-168=96$ и 168. Далее (шаги 2-4), имеем $168-96=72$, поэтому рассматриваем пару 96 и 72. Их разность $96-72=24$, так что переходим к паре 72 и 24. Теперь $72-24=48$; для пары 48 и 24 имеем $48-24=24$ и $24=24$. Согласно шагу 2, наибольшим общим делителем данных чисел будет число 24.

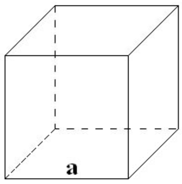
1.5. Пример табличного алгоритма. Записать алгоритм вычисления размера банковского вклада $A_0=10000$ по истечении каждого года хранения, если банк начисляет $k=10$ процентов годовых.

Решение. Если A_0 – размер первоначального вклада, то размер вклада через год будет $A_1=A+\frac{kA}{100}$, через 2 года - $A_2=A_1+\frac{kA_1}{100}$ и т.д., так что через n лет хранения $A_n=A_{n-1}+\frac{kA_{n-1}}{100}$. Имеем следующую таблицу:

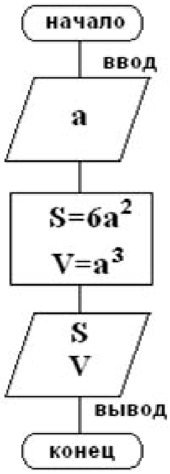
Год хранения	Вклад к началу года хранения	Вклад по истечение года хранения

1	10000	11000
2	11000	12100
3	12100	13310
…	…	…
n	A_{n-1}	$A_n = A_{n-1} + \dfrac{A_{n-1}}{10}$
...	…	…

1.6. Графический алгоритм вычисления объема куба и площади его боковой поверхности куба.



Запись алгоритма выглядит следующим образом.



1.7. Следующие задачи могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения.

1.Записать словесные алгоритмы

1) деления отрезка пополам с помощью циркуля и линейки;
2) построения серединного перпендикуляра к данному отрезку;
3) разложения натурального числа $n \geq 2$ на простые множители.

2.Задать табличным способом алгоритм вычисления значения $A = a(a+c) - c$, задав 5 пар целых чисел a и c.

3. Записать графический алгоритм вычисление объема конуса, если заданы его образующая l и высота H.

4. Применив алгоритм Эвклида, найти наибольший общий делитель пары натуральных чисел

1) 661 и 113;

2) 156 и 1313;

3) 847 и 506.

1.7. Реализация требований к алгоритму в процессе решения математических задач.

1. *Наличие данных.* В процессе решения каждой математической задачи, анализируя её условие, следует выявить все данные величины и связи. Эти данные могут быть предъявлены в различных формах: вербальной, графической, табличной, в виде изображённой геометрической фигуры, столбчатой или круговой диаграммы и т.п.

2. *Наличие памяти.* В случае решения математических задач с использованием вычислительного устройства предполагается не только наличие памяти данного устройства, но и умение учащегося работать с нею. Например, используя микрокалькулятор, учащийся должен уметь заносить данные в память, пополнять её промежуточными результатами, извлекать в нужный момент информацию из памяти и т.п.

Следующие три требования тесно взаимосвязаны.

3. *Дискретность и конечность.* Применительно к решению математической задачи речь идет о четком выделении каждого шага решения; на каждом таком шаге происходит редукция (см. подробнее об этом ниже) задачи, то есть сведения ее к более простой или уже решённой задаче, чем и обеспечивается конечность алгоритма.

4. *Детерминированность* здесь понимается как чёткое следование заранее составленному плану решения.

5. *Результативность или сходимость алгоритма.* Это требование напрямую связано с редуцированием задачи на каждом шаге алгоритма (см. требование конечности алгоритма), что неизбежно приводит к простейшей задаче и, следовательно, окончательному результату; ниже демонстрируется сходимость алгоритма на примере решения диафантовых уравнений первой степени.

6. Требование *массовости* здесь реализуется в виде дедуктивного пути решения. А именно, общие положения, разработанные для соответствующего класса задач, применяются к данной, конкретной задаче.

Последнее требование связано с понятием алгоритмической разрешимости данного класса задач и может быть реализовано только в случае такой разрешимости. В противном случае требуется поиск другого алгоритма либо выбирается эвристический путь - путь творческого поиска, догадки, открытия.

2.Проблема алгоритмической разрешимости

Всякий алгоритм соответствует хотя бы одной задаче, для которой он реализуем. Обратное утверждение в общем случае является неверным по двум причинам: во-первых, одна и та же задача может решаться различными алгоритмами; во-вторых, как указывается ниже, имеются классы задач, для которых алгоритм в общем случае не может быть построен.

Как уже отмечалось, термин *«алгоритм»* обозначает «в первом приближении» процедуру, позволяющую путем выполнения последовательности определенных элементарных шагов получать однозначный результат. Однако в процессе развития математической науки накапливались задачи, разрешить которые в общем виде не удавалось. Примерами могут послужить три древние геометрические задачи: о трисекции угла, о квадратуре круга и об удвоении куба - ни одна из них не имеет общего способа решения с помощью циркуля и линейки без делений.

Интерес математиков к задачам подобного рода привел к постановке вопроса: *возможно ли, не решая задачи, доказать, что она алгоритмически неразрешима, т.е. что нельзя построить алгоритм, который обеспечил бы ее общее решение?* Ответ на это вопрос важен, в том числе, и с практической точки зрения, поскольку, например, бессмысленно разрабатывать программу её решения с помощью компьютера, если доказано, что она алгоритмически неразрешима. Поиск ответа на данный вопрос и привёл к необходимости уточнить понятие алгоритма, без чего обсуждение его существования просто не имело смысла. Построение уточнённого определения привело к появлению так называемых формальных алгоритмических систем, что дало возможность *математического доказательства* неразрешимости ряда проблем. Оно сводится к доказательству невозможности построения рекурсивной функции, решающей задачу, либо (что эквивалентно) к невозможности построения машины Тьюринга для нее, либо несостоятельности любой (какой-либо) другой модели (см. [5]). То есть *задача считается алгоритмически неразрешимой, если не существует машины Тьюринга (или рекурсивной функции, или нормального алгоритма Маркова), которая ее решает.*

Первые доказательства алгоритмической неразрешимости касались некоторых вопросов логики и самой теории алгоритмов. Оказалось, например, что неразрешима задача установления истинности произвольной формулы исчисления предикатов (т.е. исчисление предикатов неразрешимо) - эта теорема была доказана в 1936г. А.Черчем.

Важность доказательства алгоритмической неразрешимости в том, что если такое доказательство получено, оно имеет смысл закона-запрета, позволяющего не тратить усилия на поиск решения, подобно тому, как законы сохранения в физике делают бессмысленными попытки построения вечного двигателя.

Вместе с этим необходимо сознавать, что алгоритмическая неразрешимость какой-либо задачи в общей постановке не исключает возможности того, что разрешимы какие-то ее частные случаи. Справедливо и обратное утверждение:

решение частного случая задачи еще не дает повода считать возможным ее решения в самом общем случае, т.е. не свидетельствует о ее общей алгоритмической разрешимости. Роль абстрактных алгоритмических систем в том, что именно они позволяют оценить возможность нахождения полного (общего) решения некоторого класса задач.

В качестве примера, иллюстрирующего только что сформулированные тезисы, рассмотрим одну из наиболее знаменитых алгоритмических проблем математики – десятую проблему Д.Гильберта, поставленную им в числе других в 1901 г. на Международном математическом конгрессе в Париже. Требовалось найти алгоритм, определяющий для любого диофантового уравнения, имеет ли оно целочисленное решение. Диафантово уравнение есть уравнение вида $F(x,y,\ldots,v)=0$, где F –многочлен с целыми коэффициентами. В общем случае эта проблема долго оставалась открытой, и только в 1970 г. советский математик Ю. В. Матиясевич доказал ее неразрешимость.

Однако, оказываются разрешимыми частные случаи (некоторые частные классы) таких уравнений, о чём пойдет речь в следующих параграфах.

3. О проблеме алгоритмической разрешимости диофантовых уравнений первой степени

Исследование диофантовых уравнений обычно связано с такими задачами:

1) имеет ли уравнение целочисленные решения;
2) конечно или бесконечно множество его целочисленных решений;
3) решить уравнение на множестве целых чисел;
4) решить уравнение на множестве целых положительных (натуральных) чисел;
5) решить уравнение на множестве рациональных чисел.

3.1. Разрешимость конкретных уравнений на множестве натуральных чисел продемонстрируем на следующем примере.

Из двухтысячных и пятитысячных купюр составлена сумма в 23 тысячи. Сколько среди этих купюр двухтысячных?

Решение. Обозначим через x количество двухтысячных банкнот, а через y – количество пятитысячных. Приходим, таким образом, к уравнению $2x + 5y = 23$, откуда

$$x = 11 + \frac{1 - 5y}{2}.$$

Согласно условию задачи x и y натуральные числа, так что левая часть последнего уравнения есть натуральное число. Значит, и правая часть должна быть натуральным числом, а для этого необходимо и достаточно, чтобы 1 – 5y нацело делилось на 2. Осуществим теперь следующий перебор возможных вариантов.

1)y=1, x=9, то есть двухтысячных купюр может быть 9;

2) y=2, но при этом выражение 1 – 5y не делится нацело на 2;

3)y=3, x=4, то есть двухтысячных купюр может быть 4;

4) y=4, но при этом выражение 1 – 5y не делится нацело на 2;

5) при $y \geq 5$ правая часть уравнения является числом отрицательным, так что уравнение в натуральных числах уже не может иметь решения.

Таким образом, среди купюр возможно 9 или 4 двухтысячных.

3.2. Проблема разрешимости на множестве целых чисел уравнения $ax + by = 1$.

В следующих примерах целочисленные решения уравнения первой степени указанного вида легко подобрать:

$$7x + 4y = 1\text{; имеем } x = -1,\ y = 2;$$

$$8x - 3y = 1\text{; имеем } x = -1,\ y = -3;$$

$$144x - 236y = 1;$$

целочисленных решений здесь нет, поскольку левая часть уравнения нацело делится на 2, а правая – нет.

Общая ситуация, связанная с целочисленными решениями уравнений первой степени $ax + by = 1$ описывается следующей теоремой.

Теорема. Если наибольший общий делитель (НОД) чисел $a > 0a$ и $b > 0$ равен 1, то уравнение $ax + by = 1$ имеет, по меньшей мере, одно целочисленное решение (x, y).

Заметим, что теорема применима и к уравнению, в котором хотя бы один коэффициент отрицателен: если, например, $b < 0$, то можно ввести замену переменных $Y = -y$, а тогда приходим к уравнению с положительными коэффициентами $ax + |b|Y = 1$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий конструктивную идею доказательства теоремы: решим уравнение $13x + 5y = 1$.

Коэффициенты уравнения – взаимно простые положительные числа. При этом число 13 делится на 5 с остатком, равным 3, так что

$$2 \cdot 5x + 5y + 3x = 1.$$

Сгруппируем члены с равными коэффициентами:

$$5(2x + y) + 3x = 1;$$

положим $t = 2x + y$. Тогда приходим к уравнению $5t + 3x = 1$. Заметим, что в сравнении с исходным уравнением, один из коэффициентов значительно уменьшился.

Повторим процесс, выполняя деление с остатком коэффициента 5 на коэффициент 3. Приходим к уравнению $3(t + x) + 2t = 1$. Если положить $z = t + x$, то получим уравнение $3z + 2t = 1$. Теперь легко подобрать целочисленное его решение:

$$\begin{cases} t = -1 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} t = -1 \\ t + x = 1 \end{cases}, \text{откуда } x = 1 - t \text{ так что } x = 2.$$

Далее, получаем

$$\begin{cases} t = -1 \\ x = 2 \\ 2x + y = t \end{cases} \quad \text{и тогда } y = -5.$$

Окончательно,

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}.$$

В общем случае рассуждения, представляющие собою алгоритм решения (а значит, и доказательство теоремы) аналогичны. А именно, пусть, для определённости, $a > b$. Вычислим r - остаток от деления числа a на b: $a=bq+r$; ясно, что $r \neq 0$ в силу того, что числа a и b взаимно простые. Запишем теперь уравнение в виде

$$bqx + by + rx = 1 \quad \text{или} \quad rx + b(qx + y) = 1 .$$

Положим $t = qx + y$, тогда $bt + rx = 1$, где $r < b < a$. Теперь повторяем описанный процесс уменьшения коэффициентов уравнения, выполняя деление с остатком b на r. Процесс последовательного уменьшения коэффициентов продолжится до тех пор, пока они станут столь малыми, что решение последнего в цепочке получаемых уравнений легко угадывается (чем и обеспечена сходимость данного алгоритма). «Двигаясь обратным ходом», то есть последовательно исключая введённые промежуточные переменные, находим целочисленную искомую пару (x, y).

Замечание. В литературе (см. [6] –[9]) имеются и другие алгоритмы решения диофантовых уравнений первой степени, связанные с алгоритмом делимости Эвклида или цепными дробями.

3.3. Проблема разрешимости уравнений первой степени с двумя неизвестными в общем случае.

Теорема 1. Если наибольший общий делитель d чисел a и b больше единицы и число с не делится нацело на d, то уравнение $ax + by = c$ не имеет целочисленных решений.

Утверждение теоремы очевидно, поскольку слагаемые в левой части уравнения содержат общий множитель d, а правая (то есть с) не делится на d.

Теперь любая ситуация сводится к случаю наибольшего общего делителя чисел a и b равного 1. Действительно, либо мы оказываемся в условиях теоремы 1 либо обе части уравнения можно поделить на общий множитель d (то есть сократить на него обе части уравнения).

Теорема 2. Если наибольший общий делитель чисел a и b равен 1, то все пары чисел вида

$$\begin{cases} x = cx_0 + bt \\ y = cy_0 - at \end{cases} \qquad (*)$$

являются целочисленными решениями уравнения

$$ax + by = c\,; \qquad (**)$$

здесь (x_0,y_0) – целочисленное решение уравнения

$$ax + by = 1, \qquad (***)$$

а t – произвольное целое число.

Будем называть уравнение (***) по отношению к (**) базисным, его решение (x_0,y_0) – фундаментальным, а (*) – общим решением уравнения (**).

Легко проверить, что пары целых чисел вида $(bt,-at)$ служат решением (общим решением) так называемого однородного диафантового уравнения первой степени $ax + by = 0$. Таким образом, *выяснена структура общего решения неоднородного* ($c \neq 0$) *уравнения* (**): оно складывается из фундаментального решения (то есть решения базисного уравнения), умноженного на c и общего решения соответствующего однородного уравнения $ax + by = 0$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно подставить общее решение (*) в уравнение (**) и проверить наличие тождества. Будем иметь левую часть (**) в виде

$$ax + by = a(cx_0 + bt) + b(cy_0 - at) = c(ax_0 + by_0) + abt - bat \equiv c \cdot 1 = c\,,$$

поскольку фундаментальное решение обращает левую часть базисного уравнения в тождественную единицу.

Согласно теореме 2, алгоритм решения диафантового уравнения (**) имеет следующий вид:

Шаг 1. Записать базисное уравнение (***).

Шаг 2. Если коэффициенты a, b и c уравнения (**) имеют общий делитель $d > 1$, то сократить обе части уравнения на число d и перейти к шагу 3. Иначе – сразу перейти к шагу 3.

Шаг 3. Проверить условие теоремы 1: если оно выполнено, то уравнение (**) не имеет целочисленных решений. Иначе перейти к шагу 4.

Шаг 4. Записать базисное уравнение (***) и реализовать алгоритм его решения (см. п.3.2).

Шаг 5. Выписать фундаментальное решение (x_0,y_0) и общее решение $(bt,-at)$ соответствующего однородного уравнения и перейти к шагу 6.

Шаг 6. Записать искомое общее решение (*).

3.4. Структура общего решения линейного диофантового уравнения. Совокупность всех решений линейного диофантового уравнения

$$a_1x_1+...+a_nx_n=c \quad (a_1,...,a_n,c \in Z,\ c \neq 0;\ n=1,2,...)$$

(если такие решения существуют) называется его общим решением. Из дальнейшего рассмотрения будет следовать, что общее решение содержит n параметров $t_{1,...,}t_n$, каждый из которых принимает произвольное целое значение. Всякое конкретное решение линейного уравнения назовём его частным решением.

Начнём с рассмотрения следующих двух примеров.

1) Найти частное решение линейного уравнения $12x+21y-2z=5$.

Попытаемся свести задачу к уравнению с двумя неизвестными. Записав $12x+21y=5+2z$, выберем z так, чтобы обе части уравнения можно было сократить на 3. Проще всего взять $z=5$, тогда

$$12x+21y=15 \text{ или } 4x+7y=5.$$

Теперь применяем шаги алгоритма, изложенного в п. 3.2. А именно, представим уравнение в виде

$$4(x+y)+3y=5.$$

Полагая $t=x+y$, получим $4t+3y=5$. Решение этого уравнения легко подобрать: $t=2, y=-1$. Таким образом приходим к системе

$$\begin{cases} x+y=2 \\ y=-1 \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$$

и получаем искомое частное решение в виде

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}.$$

2) Найти общее решение линейного однородного уравнения

$$12x + 21y - 2z = 0.$$

Сведём задачу к поиску общего решения уравнения с двумя неизвестными. Запишем

$$12x + 21y = 2z.$$

Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы правая часть делилась на 3, т.е. чтобы z имело вид $z = 3v$. Сокращая обе части на 3, получим

$$4x + 7y = 2v.$$

Для полученного уравнения базисное уравнение имеет вид $4x+7y=1$; его решение нетрудно подобрать: $x = 2,\ y = -1$. Согласно теории линейных уравнений с двумя неизвестными (см. п. 3.2), уравнение $4x+7y = 2v$ при любом целом v имеет частное решение $x = 2 \cdot 2v,\ y = -1 \cdot 2v$, т.е. $x = 4v,\ y = -2v$ при любом целом v.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $4x+7y = 0$ имеет, очевидно, вид $(7t;\ -4t)$, где t - любое целое. Таким образом, для уравнения $4x+7y = 2v$ получаем следующее общее решение $(4v + 7t,\ -2v - 4t)$. Теперь общее решение однородного уравнения $12x + 21y - 2z = 0$ запишется так:

$$(4v + 7t,\ -2v - 4t,\ 3v).$$

Перейдём к рассмотрению линейного неоднородного уравнения

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = c \quad (a_1, \ldots, a_n, c \in Z,\ c \neq 0;\ n = 1,2,\ldots)$$

в общем случае; уравнение вида

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \quad (a_1, \ldots, a_n;\ n = 1,2,\ldots)$$

будем называть соответствующим однородным уравнением.

Теорема 1 (Свойства решений линейного диофантового уравнения).

1)Разность $u-v$ двух любых частных решений $u=(u_1,...,u_n)$, $v=(v_1,...,v_n)$ линейного неоднородного диофантового уравнения есть решение соответствующего однородного уравнения.

2) Множество всех частных решений линейного диофантова однородного уравнения замкнуто относительно операций сложения, вычитания и умножения на целые числа.

Утверждения теоремы могут быть легко проверены непосредственно.

Теорема 2 (Структура общего решения линейного диофантового уравнения). Если $u=(u_1,...,u_n)$ - некоторое частное решение линейного неоднородного диофантового уравнения, а $x^0=(x_1^0,...,x_n^0)$ общее решение соответствующего однородного уравнения (то есть совокупность *n*-параметрических его решений), то

$$x=x^0+u$$

есть общее решение неоднородного уравнения.

Легко проверить, что совокупность вида $x=x^0+u$ удовлетворяет неоднородному уравнению. Можно проверить и обратное: любое решение неоднородного уравнения может быть записано в виде указанной суммы.

4. Диофантовы уравнения высших степеней

Отметим, что к настоящему времени проблема разрешимости нашла положительный ответ только для уравнений с одним неизвестным, для уравнений первой степени и для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для уравнений выше второй степени с двумя или более неизвестными является достаточно трудной даже задача существования целочисленных решений. Например, неизвестно, имеет ли уравнение

$$x^3+y^3+z^3=30$$

хотя бы одно целочисленное решение. Уже отмечалось, что в принципе не существует единого алгоритма, позволяющего за конечное число шагов решать в целых числах произвольные диофантовы уравнения.

Продемонстрируем, тем не менее, несколько частных приёмов решения уравнений высших степеней.

4.1. Уравнение вида $x^2 - y^2 = a$.

Случай 1: $a = 0$. Общее решение уравнения имеет вид (t, z), $t, z \in Z$; $t = \pm z$.

Случай 2: $a = 1$. Имеем $(x - y)(x + y) = 1$. Здесь возможны два следующих случая:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x + y = -1 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

В первом случае получаем $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, а во втором $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$.

Случай 3: $a = 2$. Имеем $(x - y)(x + y) = 2$. Здесь $x + y$ и $x - y$ принимают соответственно, значения 2 и 1, 1 и 2, -1 и -2, -2 и -1. В каждом из этих случаев соответствующая система уравнений с x и y не имеет целочисленных решений, то есть данное диофантово уравнение неразрешимо.

Приведённые примеры наводят на мысль искать решения уравнения $x^2 - y^2 = a$ путём разложений свободного члена a в произведение mk двух целых множителей. Пусть, для определённости,

$$\begin{cases} x + y = k \\ x - y = m \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = \dfrac{k + m}{2} \\ y = \dfrac{k - m}{2} \end{cases}.$$

Ясно теперь что числа x и y будут целыми тогда и только тогда, когда m и k - целые числа одинаковой чётности.

Таким образом, *уравнение* $x^2 - y^2 = a$, $a \neq 0$ *имеет решение в том и только том случае, когда свободный член а может быть разложен на два множителя одинаковой четности.*

В свою очередь, как нетрудно понять, последнее условие на a означает, что

$a \neq 2+4l$, где l-некоторое целое (говорят, что a не сравнимо с числом 2 по модулю 4); иначе $a = 2+4l$ представимо в виде $a = 2(1+2l)$, то есть в виде произведения целых чисел разной четности.

Так, например, уравнение $x^2 - y^2 = 2022$ не имеет решений, поскольку $a = 2022 = 2+4\cdot 55$, тогда как уравнение $x^2 - y^2 = 2017$ имеет решения, поскольку число 2017 (простое число) допускает два (всего два) разложения $2017 = 1\cdot 2017,\ 2017 = (-1)\cdot(-2017)$ на множители одинаковой чётности.

Итак, задача о решениях уравнения $x^2 - y^2 = a$ *алгоритмически разрешима.*

4.2. Уравнение вида $x^2 + y^2 = a$ и $x^n + y^n = z^n$. Уравнение, не имеющее целых решений, возникает, например в случаях $a = 3,\ a = 6,\ a = 23$ и др.

Если $a = k^2,\ k \in Z$, то тривиальные решениями являются пары $(\pm k, 0), (0, \pm k)$. Покажем, что уравнение $x^2 + y^2 = k^2$ имеет бесконечно много нетривиальных решений. А именно, достаточно выбрать $x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ k = p^2 + q^2$, где p и q - ненулевые целые числа.

Числа x, y, k, удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 = k^2$ называются пифагоровыми тройками. Например, если $p = 4,\ q = 3$, то имеем пифагорову тройку $x = 7,\ y = 24,\ k = 25$; действительно, $7^2 + 24^2 = 25^2$.

Можно доказать, что числами вида $x = (p^2 - q^2)t,\ y = 2pqt,\ k = (p^2 + q^2)t$, где параметр t пробегает все целые числа, исчерпываются все пифагоровы тройки, то есть тройки указанного вида x, y и k порождают общее решение уравнения.

Как утверждает так называемая великая теорема Ферма уравнение $x^n + y^n = z^n$, ни при каком натуральном n, большем двух, неразрешимо в целых положительных числах. Доказательства этой теоремы, как известно, П.Ферма не оставил; впрочем, справедливость великой теоремы Ферма для некоторых частных случаев была установлена уже давно: сам Ферма доказал отсутствие нетривиальных решений уравнения $x^n + y^n = z^n$ при $n = 4$, Л. Эйлер доказал теорему Ферма для $n = 3$ (1770 г), А. Лежандр – при $n = 5$ (1825 г), и Г. Ламе – для $n = 7$ (1839 г). Хотя утверждение теоремы не представляет большого интереса для математической науки, многочисленные (хотя и безуспешные) попытки её доказательства обогатили математику и смежные области многими полезными методами и фактами.

4.3. Примеры (Задачи из банка заданий МГУ им. М.В.Ломоносова).

1) Найти все целочисленные решения уравнения

$$x^2+5y^2+34z^2+2xy-10xz-22yz=0.$$

Решение. Запишем уравнение как квадратное относительно переменной x:

$$x^2+2(y-5z)x+(5y^2+34z^2-22yz)=0.$$

Вычислим дискриминант

$$\frac{D}{4}=(y-5z)^2-(5y^2+34z^2-22yz),$$

или, после упрощений,

$$\frac{D}{4}=-(2y-3z)^2 \text{ , так что оказалось } \frac{D}{4}\le 0.$$

Теперь решения возможны в том и только в том случае, когда $2y-3z=0$, а тогда $x=5z-y$.Следовательно, мы получаем систему двух диофантовых линейных уравнений

$$\begin{cases}2y-3z=0\\ x=5z-y\end{cases}.$$

Первое из них – однородное; согласно п. 3.3, можно записать его общее решение в виде $y=3t,\ z=2t.$ Теперь из второго уравнения системы получаем $x=7t$, где t - любое действительное число. Итак, совокупность всех решений данного уравнения имеет вид $(7t,3t,2t),\ t\in Z$.

2) Доказать, что число $\sqrt[3]{2}$ является иррациональным.

Решение. Предположим противное: данное число является рациональным, так что $\sqrt[3]{2}=\dfrac{m}{n}$, где m и n- некоторые натуральные числа. Тогда $m=\sqrt[3]{2}n$ или $m^3=2n$. Разложим теперь m и n на простые множители, и выделим в составе разложения числа m множитель 2^x, а в составе n множитель 2^y (возможно, что хотя бы одно из целых неотрицательных чисел x и y окажется равным нулю). Теперь в разложении обеих частей уравнения $m^3 = 2n$ на простые множители присутствуют: в левой части 2^{3x}, а в правой 2^{3y+1}. В силу единственности разложений натуральных чисел на простые множители необходимо, чтобы

$$3x = 3y + 1 \quad \text{или} \quad 3(x - y) = 1\,.$$

Согласно теореме 1 п.3.3 последнее уравнение не может иметь натуральных решений. Следовательно, предположение о том, что число является $\sqrt[3]{2}$ рациональным – ложно и утверждение доказано.

3).Задача из открытого сегмента КИМ ЕГЭ . Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25} \text{где } m > n\ .$$

Решение. Запишем уравнение в виде $25n + 25m = mn$, где m и n натуральные числа и $m>n$. Данное уравнение не является диофантовым (в его правой части содержится произведение искомых неизвестных), но предлагаемое его решение будет связано с вопросами делимости натуральных чисел, и, следовательно, примыкает к вопросам, обсуждаемым в настоящей главе.

Возможны случаи:

1) $n = 25$ равенство, но тогда исходное равенство неверно;

2) $n \neq 25$, а тогда можно выразить неизвестную m через n в виде

$$m = \frac{25n}{n - 25} \ \text{или} \ m = \frac{25(n - 25) + 625}{n - 25}$$

так что

$$m = 25 + \frac{625}{n - 25}.$$

При этом m должно быть натуральным числом, т.е. $m > n$, т.е.

$$\frac{25n}{n-25} > 0 \ \text{, откуда} \quad n > 25 \quad \text{и, в то же время,} \ \frac{25n}{n-25} > n\text{, откуда } n < 50.$$

Таким образом, натуральные значения n, $25 < n < 50$, следует подбирать так, чтобы соответствующие значения m, а вместе с ними и дробь

$$\frac{625}{n-25}$$

были натуральными числами. Следовательно, числа $n-25$ должны быть делителями числа 625, а это возможно при

1) $n - 25 = 1$, откуда $n = 26$;

2) $n - 25 = 5$, откуда $n = 30$;

3) $n - 25 = 25$, откуда $n = 50$;

4) $n - 25 = 125$, откуда $n = 150$;

5) $n - 25 = 625$, откуда $n = 650$.

С учётом условия $25 < n < 50$ получаем два решения: $m = 650$, $n = 26$ и $m = 150$, $n = 30$.

4.4.Задачный материал.

1. Для газификации жилого дома требуется проложить газопровод протяженностью 150 м. Имеются трубы 13 м и 9м длиной. Сколько требуется труб, чтобы не приходилось их разрезать при прокладке газопровода.

2. Надо разлить 1500 т. нефти в цистерны емкостью в 50 т. и 80 т. так, чтобы все использованные цистерны были полными. Сколько цистерн той или другой емкости потребуется?

3. По условиям трудового договора, официанту за каждый час работы платят 10 р. и высчитывают 2 р. за каждую разбитую тарелку. На прошедшей неделе он заработал 180 р. Определите, сколько часов он работал и сколько разбил тарелок, если известно, что он работает не более 3 ч в день.

4. Школа получила 1 млн. руб. на приобретение учебного оборудования (на всю сумму без остатка). Администрации школы предложили закупить три вида оборудования стоимостью 3000, 8000 и 12000 руб. за единицу. Сколькими способами школа может закупить это оборудование? Выбрать один из способов.

5. На складе имеются гвозди, упакованные в ящики по16кг,17кг и 40кг. Может ли кладовщик отпустить 140 кг гвоздей, не вскрывая ни одного ящика ?

4.5. Решение диофантовых уравнений имеет не только теоретический интерес. С помощью диофантовых могут быть смоделированы некоторые задачи физики, астрономии, экономики, биологии (генетики). Диофантовы уравнения тесно связаны с содержанием вузовского курса алгебры и теории чисел Свой вклад в развитие их теории внесли П.Ферма, Л.Эйлер, Ж.Л.Лагранж, К.Ф.Гаусс, П.Л.Чебышев и другие.

5. Эффективные и неэффективные решения для классов алгоритмически разрешимых задач

Как отмечалось выше, алгоритмическая неразрешимость означает лишь отсутствие единого способа для решения всех единичных задач данной бесконечной серии, в то время как могут быть решены своим индивидуальным способом не только отдельные задачи серии, но и целые подклассы задач этого класса. Поэтому, если проблема неразрешима в общем случае, нужно искать ее разрешимые частные случаи.

Проиллюстрируем сказанное на примере **класса алгебраических уравнений** n **-ой степени (**$n \geq 1$**):**

$$a_n x^n + ... + a_1 x + a_0 = 0;$$

ограничимся случаем действительных коэффициентов уравнения $a_0, a_1, \ldots,$ a_n; $a_n \neq 0$, но решения (в радикалах) будем искать, вообще говоря, в поле комплексных чисел.

5.1. Частные случаи классов линейных и квадратных уравнений относятся к алгоритмически разрешимым. В 16 веке была (Дж. Кардано) установлена **алгоритмическая разрешимость уравнений третьей степени.** Речь идёт о так называемых формулах Кардано, а по – сути – алгоритме решения уравнения

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Можно считать $a = 1$, иначе обе части уравнения можно поделить на a.

Основные шаги алгоритма будут следующими.

1) Сведение уравнения к трехчленному

$$y^3 + py + q = 0$$

путём замены переменных $x = y - \frac{b}{3}$, где

$$p = c - \frac{b^3}{3},\ q = d + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3}$$

2) Поиск решения трехчленного уравнения в виде

$$y = z - \frac{p}{3z},$$

так что уравнение становится квадратным относительно z^3:

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

В результате приходим к формулам

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}}$$

или (что то же самое)

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}}$$

В итоге получаем

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}} - \frac{b}{3}\ ,$$

где $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ - дискриминант кубического уравнения.

Замечание. Двузначность квадратного корня в поле комплексных чисел уже учтена различными знаками перед $\sqrt{\Delta}$ в записях двух (равнозначных) результатов для y; выбрав одну из предложенных форм записи, ставим соответствующий (уже определённый) знак перед $\sqrt{\Delta}$. Многозначность (вообще говоря, три комплексных значения) корня кубического следует учитывать в ответе. Здесь возможно следующее:

а)наличие трех действительных различных корней кубического уравнения;

б)наличие трех действительных корней, среди которых один – двукратный;

в) трехкратный действительный корень;

г) два комплексно-сопряжённых корня и один действительный корень.

5.2. Обращаясь к истории вопроса, отметим, что дальнейшие поиски алгоритмов решения алгебраических уравнений высших степеней в общем случае ни к чему не привели. Исключение составили **уравнения четвертой степени**. Здесь имеются так называемые формулы Л.Феррари. Эти формулы получаются на основе алгоритма построения по уравнению четвертой степени ассоциированного с ним специального кубического уравнения, и - уже с использованием его корней - решения двух квадратных уравнений.

Для уравнений пятой и более высоких степеней были получены результаты в случаях некоторых специальных классов. В 1826 году норвежский математик Абель доказал, что нельзя вывести формулы для решения уравнений пятой степени и выше.

5.3. Следующий пример даёт повод для обсуждения **эффективных и неэффективных путей решения задач**

Пример 1. Решить уравнение $x^3 - x - 6 = 0$.

Если следовать формулам Кордано, то при $b = 0, c = -1, d = -6$ получим

$$p = c - \frac{b^3}{3} = -1,\ q = d + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} = -6,$$

и дискриминант

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 9 - \frac{1}{27}, \quad \Delta = \frac{242}{27},$$

откуда

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}} - \frac{b}{3},$$

то есть

$$x=\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{242}{27}}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3+\sqrt{\frac{242}{27}}}}.$$

Дальнейшее решение связано с извлечением кубического корня; напомним, что для комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, представленного в тригонометрической форме, значения корня n-ой степени ($n=2,3,...$) определяются в виде

$$w_k=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}),\ \ k=0,1,...,n-1;$$

при этом $\sqrt[n]{r}$ следует понимать как арифметическое значение корня.

Таким образом, предстоит ещё извлечение корней кубических (в поле комплексных чисел), в силу чего возникает вопрос об эффективности метода для данного конкретного уравнения.

В то же время уравнение $x^3-x-6=0$ может быть записано в виде

$$(x^3-8)-(x-2)=0 \text{ или } (x-2)(x^2+2x+4)-(x-2)=0,$$

так что

$$(x-2)(x^2+2x+3)=0\text{, откуда }\ x_1=2,$$

тогда как уравнение $x^2+2x+3=0$ имеет корни

$$x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{2}.$$

Итак, предложенный элементарный путь разложения многочлена на множители оказался более эффективным в сравнении с алгоритмом Кордано.

Уточним последнее понятие. Способ решения задачи (алгоритм) назовём ***эффективным***, если

-он позволят получить решение задачи за ***наименьшее*** (в сравнении с другими способами) ***количество шагов*** (операций);

или (и)

- этим способом (посредством этого алгоритма) достигается в наиболее ***простой форме*** результат, дающий ответ непосредственно на вопрос задачи.

При выборе одного из нескольких возможных алгоритмов следует обращаться к тому, который обеспечивает эффективное решение. Довольно часто алгоритм решения задач широкого класса приводит (в ряде случаев) к неэффективному решению, тогда как частный алгоритм (алгоритм, «обслуживающий» более узкий класс задач) или специальный приём обеспечивают эффективное решение.

В связи с формулами Кордано приведем еще один пример: решить уравнение $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Один корень уравнения легко угадывается: $x = 1$. Запишем тогда уравнение в виде $x^3 - x - 2(x-1) = 0$ или $x(x^2 - 1) - 2(x-1) = 0$, откуда $(x-1)(x(x+1) - 2) = 0$, так что $(x-1)(x^2 + x - 2) = 0$. Теперь $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -2$.

Если же воспользоваться формулами Кордано при $b = 0, c = -3, d = 2$, то получим $p = -3, q = 2$ и дискриминант

$$\Delta = \frac{2^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27} = 0,$$

так что

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} - \frac{p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}} - \frac{b}{3} = \sqrt[3]{-1} - \frac{-3}{3\sqrt[3]{-1}}$$

или

$$x = \sqrt[3]{-1} + \frac{1}{\sqrt[3]{-1}}.$$

Поскольку $-1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$, то имеем следующие значения корня кубического корня:

$$w_k = \sqrt[3]{1}\,(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}),\ \ k = 0,1,2.$$

Получаем соответственно значениям k

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3},\ \ w_0 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3});$$

$$w_1 = \cos\pi + i\sin\pi,\ \text{ или }\ w_1 = -1;$$

$$w_2 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}, \text{ так что } w_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

Записав

$$x_k = w_k + \frac{1}{w_k}, \ k = 0,1,2,$$

имеем

$$x_0 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \frac{2}{1 + i\sqrt{3}}.$$

Преобразуем x_0 к виду

$$x_0 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \frac{2(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})}$$

или

$$x_0 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}), \text{ так что } x_0 = 1.$$

Далее,

$$x_1 = -1 + \frac{1}{-1}\ ; \ \ x_1 = -2.$$

Наконец,

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) + \frac{2}{1 - i\sqrt{3}}$$

или

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) + \frac{2(1 + i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})},$$

то есть

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \text{ откуда } x_2 = 1.$$

Таким образом, по формулам Кардано получены те же, что и прежде, значения корней уравнения (отличие лишь в их нумерации). Мы видим, что соответствующий алгоритм Кардано содержит значительно большее число операций (а также значительно больший объём опорной информации), чем вышеприведенный элементарный алгоритм разложения на множители.

Следовательно, в данной задаче решение по формулам Кардано оказывается неэффективным.

5.4. Пример другого характера – **алгоритм вычисления площади треугольника** по формуле Герона. Так, треугольник со сторонами $a=1,\ b=\sqrt{3},\ c=\sqrt{4-\sqrt{3}}$ имеет полупериметр, равный

$$p=\frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2},$$

и, если следовать соответствующему алгоритму (формуле), то его площадь

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

будет равной

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(1+\sqrt{3}+\sqrt{4-\sqrt{3}})(\sqrt{3}-1+\sqrt{4-\sqrt{3}})(1-\sqrt{3}+\sqrt{4-\sqrt{3}})(1+\sqrt{3}-\sqrt{4-\sqrt{3}})},$$

то есть получаем ответ в «непрозрачном» (неупрощённом) виде.

В то же время на основании теоремы косинусов

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi, \text{ где } \varphi \text{ - угол между } a \text{ и } b.$$

Поэтому

$$4-\sqrt{3}=1+3-2\sqrt{3}\cos\varphi, \text{ так что } \cos\varphi=\frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi=60^o.$$

Теперь

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\varphi, \quad \text{то есть } S=\frac{1}{2}\sqrt{3}\sin 60^o \quad \text{или } S=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Таким образом, предложенный способ (в отличие от универсального алгоритма Герона) является эффективным.

6.Эффективные решения алгебраических уравнений: задачный материал

6.1. Использование делимости многочленов. Приведём несколько заданий на применение эффективных способов решения алгебраических уравнений.

Если один корень $x = x_0$ уравнения $P_n(x) = 0$ найден подбором, то многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (n \geq 2)$$

может быть представлен в виде произведения разности $x - x_0$ на некоторый многочлен $Q_{n-1}(x)$ степени, на единицу меньшей исходной. Этот многочлен может быть найден путём деления «углом» данного $P_n(x)$ на указанную разность; процесс деления может быть ускорен с помощью так называемой схемы Горнера (демонстрируется ниже). Если корень многочлена $Q_{n-1}(x)$ также может быть найден подбором, то процесс деления следует повторить.

Поскольку на каждом таком шаге степень делимого уменьшается, то соответствующий алгоритм сходится. Отметим, что термин «алгоритм» здесь применён условно: строго говоря, здесь отсутствует свойство массовости, поскольку нет критерия того класса уравнений, для которых корень может быть угадан. Можно, однако, руководствоваться следующим утверждением, вытекающим из теоремы Виета для алгебраических уравнений произвольной степени: если уравнение $P_n(x) = 0$, в котором $a_n = 1$, обладает целым корнем, то этот корень содержится среди делителей свободного члена.

6.2.Примеры.

1. Решить уравнение $4x^3 - 19x^2 + 19x + 6 = 0$.

Для начала методом подбора попытаемся найти один из корней. Корнем многочлена, как легко проверить, является число $x_0 = 2$, а значит, исходный многочлен должен делиться нацело на $x_0 - 2$. Для того, чтобы выполнить деление многочленов, воспользуемся следующей схемой Горнера.

Рассмотрим таблицу, в верхней строке которой записаны коэффициенты многочлена, а первой ячейке второй строки записан найденный нами корень $x_0 = 2$:

	4	-19	19	6
2				

Теперь во вторую строку вносим пишутся коэффициенты многочлена, который получится в результате деления. Они считаются так:

	4	-19	19	6
2	4			

-во вторую ячейку второй строки запишем число 4, просто перенеся его из соответствующей ячейки первой строки;

- далее выполняем операцию вида

$2 \cdot 4 – 19 = –11$

и заносим результат в следующую ячейку;

- затем повторяем действия указанного вида

$2 \cdot (–11) + 19 = –3$

и заполняем следующую ячейку;

наконец,

$2 \cdot (–3) + 6 = 0.$

	4	-19	19	6
2	4	-11		

	4	-19	19	6
2	4	-11	-3	

	4	-19	19	6
2	4	-11	-3	0

Число в крайней правой ячейке – это остаток от деления, а числа, содержащиеся между теми, что в крайних ячейках – это коэффициенты многочлена-частного. Получили, таким образом, частное в виде

$$4x^2 – 11x – 3$$

Итак, мы исходный многочлен разложили на множители:

$$4x^3 – 19x^2 + 19x + 6 = (x – 2)(4x^2 – 11x – 3)$$

Осталось найти корни квадратного уравнения

$$4x^2 – 11x – 3 = 0; \text{ имеем } \quad x = 3 \ \text{ и } \ x = –0{,}25.$$

Таким образом, найдены три действительных различных корня: $x = 2$, $x = 3$ и $x = -0{,}25$.

2. Решить уравнение $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = 0$.

Решение. Подбором определяем корень уравнения $x = 2$ и выполняем деление многочлена $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12$ на $x - 2$. В результате применения схемы Горнера получаем таблицу

	2	5	-11	-20	12
2	2	9	7	-6	0

Следовательно, частное от деления приобретает вид

$$2x^3 + 9x^2 + 7x - 6.$$

Теперь имеем разложение на множители

$$2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 = (x-2)(2x^3 + 9x^2 + 7x - 6),$$

и остается решить уравнение

$$2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = 0.$$

Повторяем шаги алгоритма применительно к полученному уравнению. Легко находим корень $x = -2$ и выполняем деление $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$ на $x + 2$. Запишем результат применения схемы Горнера:

2	2	9	7	-6	0
-2	2	5	-3	0	

Частное от деления – квадратный трехчлен $2x^2 + 5x - 3$. Итоговое разложение исходного многочлена на множители приобретает вид

$$(2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12) = (x-2)(x+2)(2x^2 + 5x - 3)$$

Таким образом, остаётся решить уравнение

$$2x^2 + 5x - 3 = 0;$$

его корнями являются числа -3 и $0{,}5$. Приходим к следующему ответу: $x = 2, x = -2, x = -3, x = 0{,}5.$

6.3.Эффективная замена переменных – средство решений многих алгебраических уравнений высших степеней. Продемонстрируем это средство на примере симметрических (возвратных) уравнений. Речь идёт об уравнениях, в которых коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца, равны между собой. Например, симметрическое уравнение третьей и четвёртой степени, соответственно, имеют вид

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0.$$

и

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0.$$

Ясно, что $x = 0$ не удовлетворяет такому уравнению. Симметрическое уравнение имеет следующее (легко проверяемое) свойство: если отличное от нуля число x является его решением, то обратное ему число $\frac{1}{x}$ также является его решением. Уравнение третьей степени может быть преобразовано путём разложения левой части на множители:

$$a(x^3 + 1) + bx(x + 1) = 0,$$
$$a(x + 1)(x^2 - x + 1) + bx(x + 1) = 0,$$
$$(x + 1)(ax^2 - (a - b)x + a) = 0.$$

Теперь остаётся решить линейное и квадратное уравнения.

Обратимся к уравнению четвертой степени. Здесь может быть предложен следующий алгоритм решения.

1)Поделим обе его части на x^2 ($x \neq 0$, как было отмечено выше):

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

2)Группируем члены с равными коэффициентами:

$$a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0.$$

3) Вводим замену переменных $t = x + \frac{1}{x}$, тогда

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2\text{, так что } x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2\,.$$

4) Решаем квадратное уравнение

$$a(t^2-2)+bt+c=0\text{, то есть } at^2+bt+c-2a=0.$$

5) По найденным значениям t определяем значения x из уравнений вида

$$x+\frac{1}{x}=t\text{, то есть } x^2-tx+1=0.$$

Продемонстрируем, как реализуется этот алгоритм на следующем примере: решить уравнение

$$x^4-8x^3+17x^2-8x+1=0.$$

Уравнение относится к классу симметрических. Реализуем пошаговый алгоритм.

1. Приводим уравнение к виду

$$x^2-8x+17-8\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

2) Группируем члены:

$$(x^2+\frac{1}{x^2})-8(x+\frac{1}{x})+17=0.$$

3)Вводим замену переменных: $t=x+\frac{1}{x}$.

4)Получаем и затем решаем квадратное уравнение с новой переменной:

$$t^2-2-8t+17=0,\ \ t^2-8t+15=0;$$
$$t_1=3,\ t_2=5.$$

5) По найденным значениям t определяем значения x из уравнений:

$$\text{а)}\, x+\frac{1}{x}=3 \quad \text{или } x^2-3x+1=0;\ x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};$$

$$\text{б)}\quad x+\frac{1}{x}=5 \quad \text{или } x^2-5x+1=0;\ x=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}.$$

6.4. Следующие задания могут быть предложены учащимся для самостоятельного решения.

1) $x^3-x^2-8x+12=0$.

2) $2x^6+x^4-12x^2+9=0$.

3) $x^6+2x^5-21x^4-20x^3+71x^2+114x+45=0$.

4) $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$.

Глава 2. РЕДУКЦИЯ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АЛГОРИТМИЗАЦИИ И РЕДУЦИРОВАНИЯ

В данной главе мы обсуждаем концепции

- *алгоритмизации* как этапа решения задачи, состоящей в нахождении (по формулировке условия) алгоритма ее решения;
- *редуцирования*, то есть сведения задачи к более простой и алгоритмически разрешимой, либо последовательности таких задач.

1.Базовые понятия нечёткой логики

Математическая теория нечетких множеств (fuzzy sets) и нечеткая логика (fuzzy logic) как обобщения классической теории множеств и классической формальной логики возникли ввиду необходимости проведения нечетких и приближенных рассуждений при описании систем, процессов, объектов; см. [11].1.1. Математический аппарат. Характеристикой нечеткого множества A выступает функция принадлежности $x \overset{\mu_A}{\mapsto} \mu_A(x)$, выражающая «степень (уровень) принадлежности» элемента x нечеткому множеству A. Функция μ_A представляет собою обобщение понятия характеристической функции $\chi_A = \chi_A(x)$ обычного множества A; $\chi_A(x)$ принимает значение, равное 1 при $x \in A$ и значение, равное 0 - в противном случае. Функция же принадлежности μ_A по определению может принимать любые значения в [0, 1], при этом чем «увереннее» можно утверждать принадлежность x нечеткому A, тем ближе к единице значение $\mu_A(x)$. Значение, $\mu_A(x) = 1$ означает «полную» принадлежность множеству A элемента x, а случай $\mu_A(x) = 0$ - отсутствие принадлежности.

Теперь уточним понятие нечёткого множества, определив его как множество всех пар следующего вида: $A = \{x / \mu_A(x)\}$.

В качестве примера рассмотрим значения так называемой нечёткой переменной «высокий балл, полученный на ЕГЭ». В качестве «области рассуждений» будет выступать шкала баллов от 0 до 100. Нечеткое множество для понятия «высокий балл» может выглядеть следующим образом:

$$A = \{10/0;\ 20/0;\ 30/0;\ 40/0{,}1;\ 50/0{,}2;\ 60/0{,}5;\ 70/0{,}7;\ 80/0{,}9;\ 90/1;\ 100/1\}$$

Несомненно, что результат в 10, 20 или 30 баллов нельзя признать высоким; результат, например, в 50 баллов стабильно слабый учащийся признает высоким, тогда как для других он таковым не покажется. Результат в 70 баллов скорее следует признать высоким, нежели низким или средним, а результат в 80 баллов – достаточно высоким. Далее, 90 и 100 балльные результаты – определённо высокими. Приведённый пример можно интерпретировать как совокупность экспертных оценок полученного (в баллах) результата ЕГЭ, где наблюдается некоторый разброс (субъективизм) мнений, в чём, собственно и состоит нечёткость задания соответствующего множества.

Операции пересечения (принадлежность обоим данным множествам) и объединения множеств (принадлежность хотя бы одному из данных множеств) для нечетких множеств определяются с помощью функции принадлежности следующим образом:

$$\begin{aligned}\mu_{A\cap B}(x) &= \min\{\mu_A(x); \mu_B(x)\};\\ \mu_{A\cup B}(x) &= \max\{\mu_A(x); \mu_B(x)\}\end{aligned}.$$

С понятием нечёткого множества тесно связано понятие множества нечетких высказываний, то есть высказываний, функция истинности каждого из которых принимает значения в $[0, 1]$. Нечётко-логический вывод – это процесс получения нечетких заключений на основе нечетких условий или предпосылок.

1.2. Структурные компоненты понятия «нечёткость». В вопросах применения нечёткой логики в качестве основных компонентов понятия «нечеткость» можно рассмотреть следующие: недетерминированность выводов, многозначность знаний, неточность и ненадежность знаний и выводов, неполнота знаний и немонотонная логика.

1)*Недетерминированность выводов* - характерная черта большинства интеллектуальных информационных систем. Суть её в том, что путь решения конкретной задачи в пространстве ее состояний заранее определить невозможно. В силу этой причины методом проб и ошибок выбирается некоторая цепочка логических заключений, согласующихся с имеющимися знаниями. В случае, если она не приводит к успеху, организуется перебор с возвратом для поиска другой цепочки и т.д.

2) *Многозначность знаний* проявляется в неоднозначности интерпретации имеющейся информации. Это явление связано, например, с многозначностью смысла слов, распознавания графических образов, фотоснимков и т.п.

3) *Неточность и ненадежность знаний и выводов.* В ряде случаев (например, при проведении измерений) количественные данные (знания) могут быть неточными. При этом существуют количественные оценки такой неточности (доверительный интервал, уровень значимости, степень адекватности и т.д.). В соответствии с этим нельзя говорить о надёжности выводов, сделанных на основании таких знаний. Неточность может быть связана с объективными причинами (напр., несовершенство измерительных приборов), несоблюдения условий проведения замеров (повышенная или пониженная температура, влажность и т.п.) и т.д.

Ненадежность знаний в большей степени связана с субъективными причинами: вероятностной природой поступающих данных, недостаточной математической (логической) обоснованностью используемых правил и т.д. Она может относиться как к количественным, так и качественным показателям. Именно ввиду ненадежности для оценки достоверности знаний нельзя применить двухбалльную шкалу (1 – абсолютно надежные, 0 – недостоверные).

4) *Неполнота знаний и немонотонная логика.* Классическая (формальная) логика исходит из предпосылки, согласно которой набор определенных в системе аксиом (знаний) является полным: каждый факт можно доказать, исходя из аксиом этой теории. Для полного набора знаний справедливость ранее полученных выводов не нарушается с добавлением новых фактов. Это

свойство логических выводов называется *монотонностью*. Однако, реальные знания, закладываемые в экспертные системы, крайне редко бывают полными. Более того, любую базу знаний нельзя признать полной, так как процесс познания бесконечен. Например, все знания о квадратном уравнении над полем действительных чисел оказались неполными с открытием поля комплексных чисел.

В реальной жизни мы часто вынуждены изменять умозаключение или отказываться от него при появлении новых фактов. В качестве средств обработки неполных знаний, для которых необходимы немонотонные выводы, разрабатываются методы немонотонной логики (немонотонная логика Маккарти и др.). Для получения логических выводов в системах с неполными знаниями вместо традиционной дедукции применяется так называемая абдукция – процесс формирования объясняющей гипотезы на основе заданной теории и имеющихся фактов.

2. Редукция. Моделирование процессов выбора алгоритма и редуцирования в терминах нечёткой логики

2.1. Понятие **редукции** (от лат. reducere — приводить обратно, возвращать) в общем случае обозначает исследовательский прием, обеспечивающий сведение (преобразование) данных, сущностей, задач, понятий, предложений, методов рассуждения и доказательства к чему-то более простому и легче поддающегося точному анализу. Например, в математике решение задачи *A* может быть редуцировано к задаче *B*, если из решения задачи *B* может быть получено решение задачи *A*. Редукция является эффективным средством познания практически во всех областях наук.

Сущность редукции как познавательного приема состоит в том, что для решения какой-то задачи исследователь старается свести ее к более простому варианту, разложить сложную структуру на составляющие элементы.

В математических задачах процессу редукции предшествует анализ задачи, то есть последовательность рассуждений, обеспечивающих «движение» от искомых фактов к данным задачи. Анализ, таким образом, есть последовательность логических конструкций вида «для того, чтобы найти (доказать) A , достаточно знать (найти, доказать) B». Анализ успешно осуществлен, если в последнем звене цепочки B – это компонент условия задачи или известный (при выполнении условий задачи) факт.

Стоит отметить, что в общем случае анализ есть метод научного познания, состоящий в разложении изучаемого объекта на составные части, стороны, свойства и изучение их.

В применении к математическим задачам анализ сам по себе во многих случаях собственно решением или доказательством не является: он лишь указывает «направление» редукции, то есть помогает свести задачу к цепочке более простых задач. Выполнив анализ, мы устанавливаем:

а) какому классу K алгоритмически разрешимых задач принадлежит данная задача или те задачи-компоненты, к которым будет редуцирована данная задача;

б) какой именно алгоритм (алгоритмы) к ней (к ним) применимы.

Обычно вслед за анализом наступает этап синтеза. В общем случае синтез – это логический прием, метод познания, соединяющий в целое отдельные элементы, стороны, свойства, которые могли быть получены в результате анализа. Синтетический путь решения задачи - это путь рассуждений, идущих от данных задачи к искомым (устанавливаемым) фактам. Речь идёт о последовательности логических конструкциях вида «зная (доказав) B, мы можем определить (доказать) A». В этом смысле синтетические конструкции обратны аналитическим.

Анализ и синтез, таким образом, дополняют друг друга, составляя единый аналитико-синтетический метод.

2.2. Говоря в п. 2.1 о логических приёмах или конструкциях, мы оставались в границах «чёткой» логики. Однако этап определения принадлежности задачи к определённому классу *K* алгоритмически разрешимых задач на практике не всегда непосредственно осуществим (недетерминированность выводов). В ряде задач повышенной или высокой сложности (например, в задачах с параметрами) мы можем лишь говорить о нечёткой принадлежности задачи классу *K*. Здесь присутствуют рассуждения типа «задача *p* скорее принадлежит классу *K*, нежели классу *L*». В терминах нечеткой логики это означает, что $\mu_K(p) \geq \mu_L(p)$. Если исследователь (в нашем случае - учащийся) «выставляет» задаче *p* экспертную оценку $\mu_K(p) > \frac{1}{2}$, то имеет смысл прилагать усилия, чтобы редуцировать задачу *p* к некоторой алгоритмически разрешимой задаче из класса *K*. Будем говорить в подобных случаях, что задача *p* **алгоритмически ассоциирована с классом *K***.

2.3. В результате анализа некоторой задачи *p* мы могли получить последовательность $p_1, p_2, ..., p_n$ задач, к которым может быть редуцирована данная *p*. Возможна ситуация, когда каждая p_j алгоритмически ассоциирована с некоторым классом K_j , $j = 1,...,n$. В этом случае мы получаем декартово произведение классов $K = K_1 \times ... \times K_n$ и данная задача *p* будет алгоритмически ассоциирована с классом *K*.

Если удаётся обнаружить алгоритмы для каждого из таких классов K_j, то дальнейшее решение осуществляется посредством синтеза. Таким образом, процесс решения задачи может быть формализован в виде следующей схемы.

Схема алгоритмизации и редуцирования решения задачи

<table>
<tr><td colspan="2">Условие задачи $\rightarrow$ выявление принадлежности определенному классу задач</td></tr>
<tr><td>$\downarrow$
выявление чёткой принадлежности</td><td>$\downarrow$
выявление нечёткой принадлежности</td></tr>
<tr><td>$\downarrow$
переход к алгоритму</td><td>$\downarrow$
обращение к ассоциированным алгоритмам, выстраивание их комбинации</td></tr>
<tr><td>$\downarrow$
реализация алгоритма</td><td>$\downarrow$
последовательная реализация алгоритмов</td></tr>
<tr><td colspan="2">фиксация результата</td></tr>
</table>

2.4. Смоделируем процесс поиска алгоритма решения и редукции на примере следующих трех задач с параметрами (подробнее о задачах с параметрами см. в следующей главе).

1) При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2 + x - 1 = 0$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

2) При каких значениях параметра a парабола

$$y = x^2 + ax + 1$$

имеет единственную общую точку с осью абсцисс? Найти абсциссу этой точки.

3) При каких значениях параметра a прямая $y = ax - 1$ является касательной к параболе $y = x^2 - 3ax + a$?

Введем следующие классы алгоритмически разрешимых задач:

$$K_1 = \{\text{исследование квадратного трехчлена}\},$$

$$K_2 = \{\text{линейная функция и линейное уравнение}\},$$

$$K_2 = \{\text{касательная к графику функции}\}.$$

Обратимся к первой задаче $p = p_1$. Поскольку возможны случаи $a \neq 0$ (дан квадратный трехчлен) и $a = 0$ (линейная функция), то речь может идти об алгоритмической ассоциированности задачи с классами K_1 и K_2 соответственно. Очевидно, что в первом случае $\mu_{K_1}(p_1)=1$, а во втором $\mu_{K_2}(p)=1$ («чёткая» принадлежность), так что имеем в обоих случаях детерминированность выводов.

Случай 1. Анализ: чтобы квадратное уравнение имело единственное решение (точнее, двукратный действительный корень), необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был равен нулю. Следовательно, имеем редукцию к следующей задаче: решить уравнение $D=0$, где D - дискриминант квадратного уравнения. Соответственно, выстраивается следующий алгоритм:

- выписать коэффициенты квадратного уравнения;
- сформировать дискриминант D;
- решить уравнение $D=0$;
- записать найденное (найденные) значение (значения) параметра a;
-подставить a в данное уравнение;
- решить полученное квадратное уравнение (уравнения);
- выписать в ответе найденные значения параметра a и соответствующие значения x.

Теперь осуществляем синтез решения. Ключевым моментом служит рассмотрение уравнения

$$1+4a=0, \text{ откуда } a=-0{,}25.$$

При найденном a получим

$$-0{,}25x^2+x-1=0 \text{ и, следовательно, } x=2.$$

Случай 2: $a=0$. Сразу же получаем линейное уравнение

$$x-1=0 \text{ откуда } x=1.$$

Во второй задаче ($p=p_2$) коэффициент перед x^2 отличен от нуля, поэтому высказываем гипотезу о её принадлежности классу K_1. В то же время речь идет об оси абсцисс (прямая) и, по-видимому, касании, так что не исключено использование алгоритмов, соответствующих классам классов K_2 и K_3. В результате анализа экспертная оценка «склоняется» всё-таки в пользу класса K_1: $\mu_{K_1}(p_2) > \frac{1}{2}$, поскольку парабола имеет одну общую точку с осью абсцисс тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $x^2 + ax + 1 = 0$ имеет единственное решение.

Таким образом, выстраивается алгоритм, подобный использованному в случае 1) решения задачи p_1. Синтез состоит в нахождении дискриминанта $D = a^2 - 4$ и решении уравнения

$$a^2 - 4 = 0\text{, откуда } a = \pm 2.$$

При каждом из найденных значений a находим абсциссу общей точки параболы и оси OX:

$$a = 2,\ \text{тогда}\ x = -1,\quad \text{и}\quad a = -2,\ \text{тогда}\ x = 1.$$

Обратимся к задаче $p = p_3$. Предположительно (судя по условию) p_3 - задача на тему «касательная к графику». В то же время, анализируя задачу, приходим к заключению, что ситуация касания прямой с уравнением вида $y = kx + b$ и параболы означает, в частности, наличие ровно одной их общей точки, так что система уравнений прямой и параболы имеет ровно одно решение. Поэтому «первичная экспертная оценка» может выглядеть следующим образом:

$$\mu_{K_1}(p_3) = \mu_{K_3}(p_3) = \frac{1}{2}\ .$$

Обратимся теперь к алгоритмам, соответствующим классам K_3 и K_1. В первом случае предстоит реализовать следующее условие касания:

$$\begin{cases} a = (x^2 - 3ax + a)' \\ ax - 1 = x^2 - 3ax + a \end{cases};$$

во втором – потребовать, чтобы уравнение

$$ax - 1 = x^2 - 3ax + a$$

имело единственное решение. Второй случай представляется более «экономным» (алгоритм эффективнее), так что происходит переоценка:

$$\mu_{K_1}(p_3) > \frac{1}{2}.$$

На этапе синтеза решения, соответствующего алгоритмам класса K_1, приходим к условию $D = 0$, где D - дискриминант уравнения

$$x^2 - 4ax + a + 1 = 0 .$$

Имеем

$$D = (2a)^2 - (a+1)\text{, то есть } 4a^2 - a - 1 = 0\text{, откуда } a = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}.$$

Глава 3. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА РЕДУЦИРОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Среди задач, поставленных Концепцией развития математического образования [12], особая роль отводится обеспечению обучающимся, имеющим высокую мотивацию и проявляющим выдающиеся математические способности, всех условий для развития и применения этих способностей. «Математическое образование должно обеспечивать каждого обучающегося развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне, используя присущую математике красоту и увлекательность… Возможность достижения высокого уровня подготовки должна быть обеспечена развитием системы специализированных общеобразовательных организаций и специализированных классов, системы дополнительного образования детей в области математики».

В классах с предпрофильной, профильной и углубленной математической подготовкой в качестве отдельной инновационной содержательно-методической линии может быть выделена **линия задач исследовательского характера.** В свою очередь, здесь на первое место выходят задачи с параметрами. Именно такие задачи позволяют в полной мере проверить знание основных разделов школьной математики, выяснить уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности.

На сегодняшний день остаются актуальными проблемы отсутствия системности знаний у учащихся, умения переносить полученные знания на аналогичные или иные ситуации, недостаточной самостоятельности мышления. Эти проблемы во многом связаны со слабым использованием в образовательном процессе потенциала внутрипредметных связей. Именно при решении заданий с параметрами интегрируются знания, умения, навыки из:

а) математической логики (конъюнкция, дизъюнкция предикатов, отрицание предиката);

б) теории множеств: пересечение множеств (решения систем), объединение множеств (решения совокупности), дополнения множеств;
в) алгебры (делимость многочленов, разложение на множители, метод неопределенных коэффициентов и др.);
г) геометрии (преобразования симметрии, параллельного переноса, и др.), аналитической геометрии (поиск коэффициентов в уравнении линии, условие пересечение линий, взаимного расположении прямых и др.);
д) математического анализа (условия монотонности и экстремумов функции, свойства непрерывных функций и др.).

Таким образом, задачи с параметрами представляют собою важный системообразующий фактор в процессе формирования математической компетентности учащихся. Их решение направлено на реализацию следующих целей:

- подготовка к ЕГЭ (задания повышенной и высокой сложности) и к обучению в вузе;
- формирование у учащегося интереса к предмету, развитие их математических способностей;
- развитие исследовательской и познавательной деятельности учащихся;
- обеспечение условий для самостоятельной творческой работы.

При подготовке материала настоящей главы использованы источники [13]-[18].

1.Задачи с параметрами: общие положения

1.1. В самом общем случае **задача с параметром** есть задача $P(x,a)$, в которой требуется :

а)получить информацию о множестве всех возможных значениях параметра a, при условии, что имеется информация о множестве всех значений x;

б)получить информацию о множестве всех возможных значениях x при условии, что имеется информация о множестве всех значений параметра a;

в) получить информацию о всех возможных парах значений (x, a), отвечающих условию задачи.

Формально, $P(x,a)$ есть функция двух переменных, но с величиной x обычно обращаются именно как с *переменной* (неизвестной) величиной; что же касается значения параметра a, то оно считается *фиксированным*, хотя и неизвестным.

Собственно математические основы решения соответствующих задач заложены в свойствах функций двух переменных. Фактически, задача с одним параметром есть задача о нулях, знаках, экстремальных свойствах таких функций. Преподавателю математики при этом необходимо владеть основами их дифференциально-интегрального исчисления.

1.2. Опорными фактами для решения ряда задач с параметрами служат следующие базовые положения из математического анализа.

1. Теорема о существовании корня уравнения $f(x)=0$ в случае непрерывной функции f, принимающей на концах отрезка значения разных знаков.

2. Теорема о единственности корня уравнения $f(x)=g(x)$ (или отсутствии такового) в случае, когда функции f и g имеют различный характер монотонности.

3. Теорема о существовании корня уравнения с параметром: $a=f(x)$: корень существует тогда и только тогда, когда значение параметра a содержится во множестве значений функции f.

1.3. Приведем **классификацию методов решения и типов задач с параметрами**. Мы выделяем среди основных следующие методы их решения.

I. Общие методы:

1. Аналитический.
2. Аналитико-графический.

Последний метод иногда называют графическим, но саму по себе ссылку на изображенный график функции (взаимное расположение графиков функций) нельзя признать достаточной аргументацией каких-либо выводов. График, безусловно, служит важным инструментом поиска решения и иллюстрацией к рассуждениям, однако сами рассуждения строятся на использовании свойств функций. На эти свойства необходимо в стандартных случаях (напр., в случае основных элементарных функций) делать ссылки, либо их (свойства) в более сложных случаях устанавливать (см. частные методы ниже).

II.Частные методы:

1) метод мажорант (метод оценки) в уравнениях и неравенствах;

2) использование свойств функций (свойства непрерывности, монотонности, интервалы знакопостоянства и др.);

3) исследование расположения корней квадратного уравнения, которое необходимо при решении многих задач, как непосредственно связанных с квадратным трехчленом, так и сводящихся к нему на каком-либо этапе;

4) использование метода интервалов, «шаблонных» приемов решения уравнений и неравенств с модулями вида

$$|y| = R, \; |y| < R, \; |y| > R \;,$$

стандартные «ходы» такие, как , прием выделения полного квадрата, преобразование линейного тригонометрического выражения к виду

$$A\sin t + B\cos t = \sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(t + \varphi)$$

и др.

Традиционно задачи с параметрами представлены следующими основными типами:

1) решение уравнений и неравенств в зависимости от значений параметра;

2) нахождение значений параметра, для которых уравнение имеет заданное количество решений;

3)нахождение значений параметра, для которых множество решений уравнений или неравенств обладает заданной характеристикой.

1.4. Решение задач с параметрами, как правило, невозможно путем следования стандартному алгоритму и **требует от учащегося** догадки, «переноса знаний» в новую ситуацию, словом – **элементов математического**

творчества. Поэтому рекомендации для учащихся здесь могут носить лишь самый общий характер.

Прежде всего, полезно изучить приводимые в различных пособиях готовые образцы решений, поскольку используемые в них приемы могут быть в дальнейшем применены в аналогичных ситуациях.

Не стоит сразу браться за сложные задачи: начинать тренинг следует с «почти стандартных» случаев (случаи линейных, квадратных уравнений и неравенств параметрами и т.п.).

Учащемуся необходимо овладеть простейшими логическими понятиями и приемами, в частности, отличать системы неравенств (уравнений) от их совокупности, необходимые условия - от достаточных. Так, например, целые корни многочлена с целыми же коэффициентами (если при этом коэффициент при старшей степени равен единице) необходимо содержатся среди делителей свободного члена; тогда подстановка возможных корней в уравнение (неравенство) позволяет получить определенную информацию об искомом параметре.

«Ключ» к решению многих задач с параметрами содержится в геометрических интерпретациях. Так, например, если изобразить графики функций, содержащихся в левой и правой части рассматриваемого уравнения, то абсциссы точек пересечения графиков будут корнями уравнения, а их (точек) количество указывает на число решений. Такие интерпретации часто существенно упрощают анализ задачи.

Нередко подстановка конкретного значения параметра и «тестирование» этого значения на предмет того, содержится ли оно среди искомых значений, позволяет нащупать путь решения задачи.

Заключительным этапом решения задач с параметрами является запись ответа; важность его правильной записи особенно значима в тех случаях, где присутствует «ветвление» решения (см. ниже параграф 3). В подобных случаях формирование ответа - это сбор ранее полученных результатов, и здесь следует не только не забыть отразить в ответе все возможные случаи для рассматриваемого параметра, но и упростить, по возможности, ответ при наличии «смыкающихся» случаев.

Таким образом, успех решения задач с параметрами основан на **«системном эффекте», возникающем при проведении эвристических рассуждений и реализации процессов алгоритмизации и редуцирования.**

2. Алгоритм исследования квадратической функции

Основной идеей решения задач, связанных с квадратическими функциями, является их редукция к стандартным задачам, решаемым на основе следующего табличного алгоритма.

2.1. Алгоритм исследования функции $y = ax^2 + bx + c$**:**

1) выписать значение параметра «*a*»;
2) обратиться к первому столбцу таблицы;
3) в соответствии со значением *a* перейти ко второму столбцу таблицы;
4) в соответствии со значением параметра $D = b^2 - 4ac$ во втором столбце таблицы перейти к третьему столбцу таблицы;
5) записать результаты исследования и изобразить схематически график

Условие на параметр «*a*»	Условие на дискриминант $D = b^2 - 4ac$	Расположение графика
$a = 0$	-	Прямая $y = bx + c$; применить стандартный алгоритм исследования линейной функции и построить прямую
$a > 0$	$D > 0$	Парабола с ветвями, обращёнными вверх, вершиной, расположенной ниже оси абсцисс и имеющей координаты $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$, точками пересечения:

		-с осью ординат $y = c$; -с осью абсцисс $x_{1,2} = -\dfrac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
$a > 0$	$D < 0$	Парабола с ветвями, обращёнными вверх, вершиной, расположенной выше оси абсцисс и имеющей координаты $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = -\dfrac{D}{4a}$, точкой пересечения с осью ординат $y = c$; и не имеющей общих точек с осью абсцисс
$a > 0$	$D = 0$	Парабола с ветвями, обращёнными вверх, вершиной, расположенной на оси абсцисс и имеющей координаты $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = 0$, точкой пересечения с осью ординат $y = c$.
$a < 0$	$D > 0$	Парабола с ветвями, обращёнными вниз, вершиной, расположенной выше оси абсцисс и имеющей координаты $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = -\dfrac{D}{4a}$, точками пересечения: -с осью ординат $y = c$; с осью абсцисс $x_{1,2} = -\dfrac{b \pm \sqrt{D}}{2a}$.
$a < 0$	$D < 0$	Парабола с ветвями, обращёнными вниз, вершиной, расположенной ниже оси абсцисс и имеющей координаты $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = -\dfrac{D}{4a}$, точкой пересечения с осью ординат

		$y = c$; и не имеющей общих точек с осью абсцисс
$a < 0$	$D = 0$	Парабола с ветвями, обращёнными вниз, вершиной, расположенной на оси абсцисс и имеющей координаты $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = 0$, точкой пересечения с осью ординат $y = c$.

2.2. Система ключевых задач на исследование квадратного трёхчлена. Простейшие задачи. Речь идёт (в рамках данной тематики) о простейших задачах с параметрами.

1) Найти точки пересечения параболы $y = x^2 + (\gamma + 1)x + \gamma,\ \gamma \neq 0,$ с координатными осями.

2) При каких значениях γ абсцисса вершины параболы $y = x^2 + \gamma x + 1$ равна 2.

3) Решить неравенство $x^2 + 2\gamma x + \gamma^2 \leq 0,\ \ \gamma \neq 0$.

Задания повышенного уровня сложности.

1) При каких значениях параметра γ парабола $y = x^2 + \gamma x - x$ имеет одну общую точку с осью абсцисс ? Найти эту точку.

2) При каких значениях γ парабола $y = x^2 + \gamma x + 1$ находится целиком выше прямой $y = -2$?

3) При каких значениях параметра γ уравнение $x^2 + 2(1-\gamma)x - \gamma$ имеет два различных отрицательных корня?

2.3. Пример. При каких значениях параметра a уравнение $(2a-1)x^2 + 2x - 1 + 2a = 0$ имеет единственное решение? Найти это решение.

Алгоритмизация процесса решения подобной задачи в терминах нечёткой принадлежности продемонстрирована выше (глава 2, п.2.4), поэтому ограничимся анализом и собственно решением задачи.

Анализ решения. Поскольку в условии не сказано, что уравнение квадратное, то возможны случаи :

1) $2a-1=0$ – уравнение линейное; очевидно, что оно имеет единственное решение;

2) $2a-1\neq 0$ - уравнение квадратное; в этом случае совпадение корней (единственность решения) гарантируется условием : дискриминант уравнения $D=0$.

Решение. В первом случае $2a-1=0$ или $a=0{,}5$ и тогда получаем линейное уравнение $2x=0$, откуда x=0. Во втором случае дискриминант (найденный по «четной» формуле) имеет вид $D=1-(2a-1)^2$ и, следовательно, $D=0$, $(2a-1)^2=1$, откуда $a=0$ или $a=1$. При этом

$$x=-\frac{1}{2a-1}.$$

В первом случае имеем $x=1$, а во втором $x=-1$.

Получаем «ветвящийся» ответ :

x=0 при $a=0{,}5$;

x=1 при $a=0$;

$x=-1$ при $a=1$.

2.4. Расположение нулей (корней) квадратного трехчлена. Значительная часть задач с параметрами сводится к условию, что нули квадратного трехчлена расположены в некотором заданном интервале (возможно, бесконечном). В основе решения таких задач лежат следующие теоретические положения.

1) Функция вида $y=Ax^2+Bx+C$ $(A\neq 0)$ непрерывна на всей числовой оси; следовательно, между точками, в которых она принимает значения разных знаков, расположен корень этого квадратного трехчлена. В частности, если,

например, ордината y_0 вершины (x_0, y_0) параболы отрицательна, а в некоторой точке $x_* > x_0$ значение $y_* = y(x_*) > 0$, то между точками x_0 и x_* имеется ровно один корень квадратного трехчлена.

2) Рассмотрим тот частный случай, когда корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена должны быть расположены в конечном интервале (a,b). Изобразив на координатной плоскости соответствующие параболы $y = Ax^2 + Bx + C$ при $A > 0$ и при $A < 0$ (что мы предоставляем читателю), мы приходим к следующим условиям (необходимым и достаточным для расположения x_1 и x_2 в (a,b).

1) При $A < 0$:

$$D = B^2 - 4AC \geq 0; \tag{2.1}$$

$$x_0 = -\frac{B}{2A} \in (a,b), \quad y_0 = y(x_0) \geq 0; \tag{2.2}$$

$$y(a) < 0, \quad y(b) < 0 \tag{2.3}$$

2) При $A > 0$:

$$D = B^2 - 4AC \geq 0;$$

$$x_0 = -\frac{B}{2A} \in (a,b), \quad y_0 = y(x_0) \leq 0; \quad y(a) > 0, \quad y(b) > 0.$$

Условие (2.1) необходимо и достаточно для существования действительных корней. Установим необходимость остальных условий для расположения корней в интервале (a,b). Ограничимся случаем 1); рассуждения в случае 2) – аналогичны.

Первое из условий (2.2) необходимо выполнено (поскольку x_0 обязательно расположено между x_1 и x_2), а второе – следует из соотношений $A < 0$ и (2.2.1), если учесть, что $y_0 = -\dfrac{D}{4A}$. Наконец, условия (2.3) вытекают из неравенства $y_0 = y(x_0) \geq 0$ и известного факта монотонности квадратного трехчлена при $x > x_0$ и $x < x_0$.

Убедимся теперь, что условия (2.2) и (2.3) также и достаточны для расположения корней в интервале (a,b). Случай $y(x_0)=0$ уже означает существование двух совпадающих корней на (a,b). Если же $y(x_0)>0$, то в каждом из интервалов (a, x_0), (x_0,b), в силу условий (2.3) и согласно, рассуждению п.1, существует по одному корню квадратного трехчлена.

Итак, при $A<0$ условия (2.1) - (2.3) оказываются необходимыми и достаточными для расположения корней в интервале (a,b).

2.5. Приведем **задачи** другого типа, **связанные с расположением параболы**, и в частности, нулей квадратного трехчлена.

Задача 1. При каком значении параметра k неравенство

$$x^2 - (4k+1)\,x + 4k^2+2k-6 \geq 0$$

выполняется для любого x из интервала $(-\infty, 5]$?

Анализ задачи. Интервал $(-\infty, 5]$ должен содержаться во множестве решений неравенства. Следовательно, достаточно найти это множество и «погрузить» в него указанный интервал.

Решение. Найдём корни квадратного трёхчлена. Имеем дискриминант

$$D=(4k+1)^2 - 4(4k^2+2k-6) = 25 \text{ и } x_{1,2} = \frac{4k+1\pm5}{2},$$

Так что $x_1 = 2k-2$ и $x_2 = 2k+3$. Поскольку ветви параболы

$$y= x^2 - (4k+1)\,x + 4k^2+2k-6$$

обращены вверх, то решением неравенства являются два луча:

$$(-\infty, 2k-2] \quad \text{и} \quad [2k+3, +\infty).$$

Теперь данный луч $(-\infty, 5]$ должен целиком содержаться в $(-\infty, 2k-2]$, откуда $2k-2 \geq 5$, или $k \geq 3{,}5$.

Задача 2. Найти все значения a, при которых множество решений неравенства $x^2-(2x-3)a \geq 0$ содержит отрезок [3;6].

Анализ задачи. Рассмотрение всевозможных расположений параболы

$$y=x^2-2ax-3a$$

относительно отрезка [3;6] может подсказать ключ к решению. Так, если абсцисса x_0 вершина параболы расположена вне отрезка [3;6] (или совпадает с одним из его концов), то в силу монотонности квадратической функции на соответствующих лучах (левее и правее x_0) ее знак совпадет со знаком значения $f(3)$ и $f(6)$ соответственно. Если же x_0 расположена внутри отрезка, то неравенство $y \geq 0$ может быть выполнено на [3;6] тогда и только, когда вершина параболы расположена в верхней полуплоскости или на оси абсцисс, так что дискриминант квадратного трехчлена должен быть не больше нуля.

Решение. Найдем абсциссу вершины параболы: $x_0 = a$. Из приведенного анализа задачи вытекает рассмотрение следующих трех случаев.

$$\begin{cases} a \leq 3 \\ f(3) = 9 - 9a \geq 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} 3 < a < 6 \\ D = 4a^2 + 12a \leq 0 \end{cases}; \begin{cases} a \geq 6 \\ f(6) = 36 - 15a \geq 0 \end{cases}.$$

Решением первой системы неравенств является множество $(-\infty, 1]$ значений параметра a. Вторая и третья системы неравенств, как легко проверить, решений не имеют.

Ответ: $a \in (-\infty, 1]$.

Задача 3. При каких значениях параметра a множество значений функции $f(x) = ax^2 + x + 1$ содержит отрезок $[-1;1]$.

Как и в предыдущих двух задачах, имеем «погружение», на этот раз – отрезка $[-1;1]$ во множество значений функции. Следовательно, найдем множество значений $E(f)$.

Случай 1: $a = 0$. Имеем линейную функцию $f(x) = x + 1$, для которой

$$E(f) = (-\infty; +\infty), \text{ так что } [-1;1] \subset E(f).$$

Случай 2: $a \neq 0$. Имеем квадратный трехчлен, графиком которого является парабола

$$y = ax^2 + x + 1$$

с вершиной

$$x_0 = -\frac{1}{2a}; \qquad y_0 = \frac{4a-1}{4a} = 1 - \frac{1}{4a}.$$

Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх и отрезок $[-1;1]$ оси ординат должен быть «не ниже» y_0:

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{4}{a} \le -1 \\ a > 0 \end{cases}, \text{ откуда } \frac{4}{a} \ge 2 \text{ , и, следовательно, } \quad 0 < a \le 2.$$

Если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз и отрезок $[-1;1]$ должен быть «не выше» y_0 :

$$\begin{cases} 1 - \dfrac{4}{a} \ge 1 \\ a < 0 \end{cases},$$

а решением этой системы, очевидно, являются все $a < 0$.

Объединяя результаты всех трех рассмотренных случаев, имеем окончательно

Ответ: $a \in (-\infty, 2]$.

2.6. Использование **теоремы Виета**. Следует обратить внимание учащихся, что теорема Виета применима, если предварительно наложить (проверить) условие: дискриминант квадратного трехчлена $D \ge 0$. Весьма частым приемом при ее использовании является формула выделения полного квадрата

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Приведем соответствующий

Пример 1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$$

больше, чем 12?

Решение. Если D - дискриминант уравнения, то

$$\frac{1}{4}D = a^2 - a^2 + a = a,$$

так что действительные корни уравнения существуют при $a \geq 0$. Далее, по теореме Виета получаем

$$x_1+x_2 = 2a \quad \text{и} \quad x_1 \cdot x_2 = a^2-a.$$

Следовательно,

$$x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1 \cdot x_2 = 2a^2+2a.$$

Итак, согласно условию задачи, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 2a^2 + 2a > 12, \\ a \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a+3)(a-2) > 0, \\ a \geq 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $a > 2$.

Пример 2. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение? Найти это значение.

Решение. Убедимся, что уравнение имеет действительные корни, вычислив дискриминант $D = a^2 + 8$, так что $D > 0$ при всех значениях a. С учетом области определения $\sqrt{a^2 - 4a}$ получаем существование корней при любом $a \in (-\infty;0] \cup [4;+\infty)$.

Теперь, согласно теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{a^2 - 4a}, \quad x_1x_2 = -a - 2,$$

и тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2a + 4.$$

Осталось найти наименьшее значение функции $f(a) = a^2 - 2a + 4$ на множестве $(-\infty;0] \cup [4;+\infty)$. При этом абсцисса вершины соответствующей параболы a=1, так что $f(a)$ убывает при $a < 1$ и возрастает при $a > 1$. Следовательно при $a \leq 0$ имеем $f(a) \geq f(0) = 4$, а при $a \geq 4$ получаем $f(a) \geq f(4) = 12$. Значит, наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения, равное 4, достигается при $a = 0$.

3. «Ветвление» ответов

Решить уравнение или неравенство, содержащее параметр (параметры) - это значит для каждого допустимого значения параметра (каждой допустимой системы значений параметров) найти множество всех решений данного уравнения или неравенства.

Более подробно, фиксировав значение параметра, решаем данную задачу известными (соответствующими типу задачи) методами. Но получаемый ответ может определяться допустимыми для данных операций значениями параметров (например, при необходимости деления обеих частей уравнения на выражение, содержащее параметр, надо выделить тот случай, когда это выражение равно нулю). Отсюда и возникает так называемое ветвление ответов. Поясним сказанное примерами.

3.1. *Уравнения.*

Пример 1. Решить уравнение

$$(a-1)\cdot x^2+2\cdot(2a+1)\cdot x+4a+3=0. \qquad (3.1)$$

Анализ задачи. На первый взгляд, следует применять формулу решения квадратного уравнения. Однако, лишь при $a\neq 1$ оно – квадратное, а при $a=1$ уравнение является линейным. Значит, целесообразно рассмотреть уравнение (3.1) как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1) $a=1$; 2) $a\neq 1$. Этими двумя случаями и буден порожден «ветвящийся» ответ.

Решение. 1) При $a=1$ уравнение имеет вид $6x+7=0$, и из него получаем $x=-\frac{7}{6}$.

2) Из множества значений параметра $a\neq 1$ выделим те значения, при которых дискриминант уравнения (3.1) обращается в ноль:

$$\frac{D}{4}=(2a+1)^2-(a-1)(4a+3).$$

После упрощений получаем $\frac{D}{4}=5a+4$.

Из условия $\frac{D}{4}=0$ находим $a=-\frac{4}{5}$, и в этом случае квадратное уравнение будет иметь единственный корень (более точно – два совпадающих корня). В случае $a<-\frac{4}{5}$, будет $D<0$ и уравнение корней не имеет; если же $a>-\frac{4}{5}$ (но $a\neq 1$), то $D>0$, и уравнение обладает двумя различными действительными корнями. Осталось найти эти корни. Имеем при $D\geq 0$

$$x_{1,2}=\frac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1},$$

причем при $a=-\frac{4}{5}$ (случай $D=0$), получаем $x=-\frac{1}{3}$.

Ответ: 1) если $a<-\frac{4}{5}$, то корней нет;

2) если $a=-\frac{4}{5}$, то $x=-\frac{1}{3}$;

3) если $a=1$, то $x=-\frac{7}{6}$;

4) если $\begin{cases} a>-\frac{4}{5}, \\ a\neq 1 \end{cases}$ то $x_{1,2}=\frac{-(2a+1)\pm\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 2. Решить уравнение $\left|x^2-1\right|+\left|a(x-1)\right|=0$.

Решение. Ввиду неотрицательности модулей данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left|x^2-1\right|=0, \\ \left|a(x-1)\right|=0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} x^2-1=0, \\ a(x-1)=0. \end{cases}$$

При $a \neq 0$ второе уравнение системы, а значит, и система, имеет единственное решение $x = 1$. Если же $a = 0$, то из второго уравнения получаем, что x – любое действительное число, а из первого уравнения – $x = \pm 1$. Следовательно, в этом случае система имеет два решения: $x = 1$ или $x = -1$.

Ответ: если $a \neq 0$, то $x = 1$; если $a = 0$, то $x = \pm 1$.

3.2. Неравенства. Особенностью решения неравенств с параметрами является то, что нули исследуемой функции обычно зависят от параметра и, следовательно, приходится рассматривать их «взаимоотношения», т.е различные случаи их расположения.

*Пример*1. При всех значениях параметра a решить неравенство $ax - 3x^2 < 0$.

Решение. Имеем $x(a-3x) < 0$, откуда нулями функции $f(x) = x(a-3x)$ являются $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{a}{3}$. Теперь возникают следующие три возможных случая расположения нулей на числовой оси.

1)Точка x_2 расположена правее x_1, т.е. $a > 0$. Графиком функции $f(x)$ является парабола, ветви которой обращены вниз, и, следовательно, $f(x)$ отрицательна при $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{a}{3}; \infty)$.

2)Точка x_1 расположена правее x_2, т.е. $a < 0$. В этом случае получаем $x \in (-\infty; \frac{a}{3}) \cup (0; \infty)$.

3) Наконец, остается случай совпадающих корней, т.е. $a = 0$. Имеем тогда $-3x^2 < 0$ и, следовательно, $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Этот ответ можно «соединить» с ответом, найденным в п.2.

Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup (\frac{a}{3}; \infty)$ при $a > 0$;

$x \in (-\infty; \frac{a}{3}) \cup (0; \infty)$ при $a \le 0$.

4. Задачи на «отсечение» корней

Особенность таких задач состоит в том, что некоторые из получаемых корней уравнения следует «отсечь» согласно условию задачи или (и) области определения уравнения. Соответственно, возникают специальные условия на параметр.

4.1.*Пример* 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$(ax^2 - 4x + 1)(x^2 - 4x - 5) = 0$$

имеет три действительных различных корня?

Анализ задачи. Возможно не более четырех различных корней уравнения. Следовательно, первый из перемножаемых многочленов должен иметь либо ровно один корень (или два совпадающих), либо два различных действительных корня, один из которых совпадет с корнем второго многочлена.

Решение. Многочлен $P(x) = x^2 - 4x - 5$ имеет два различных корня $x_1=5$ и $x_2= -1$. Следовательно, для многочлена $Q(x) = ax^2 - 4x + 1$ возможны три следующих случая.

$Q(x)$ – многочлен первой степени, т.е. $a = 0$, так что его корнем служит $x_3 = \frac{1}{4}$ – число, отличное от x_1 и x_2. В этом случае имеем ровно три различных корня.

2) Корни многочлена $Q(x)$ при $a \neq 0$ совпадают и отличны от x_1 и x_2:

$$D = 0;\ 4-a=0;\ a = 4.$$

В этом случае

$$Q(x) = 4x^2 - 4x + 1 \text{ и } x_3 = x_4 = \frac{1}{2}.$$

3) Один из корней квадратного трехчлена $Q(x)$ равен x_1 (либо x_2), а другой отличен от x_2 (либо от x_1). Имеем при $x = 5$

$$Q(5) = 25a - 20 + 1 = 0;\ a = \frac{19}{25}.$$

Легко проверить, что второй корень Q(x) отличен от x_2= -1.

В случае же $x = –1$ имеем

$$Q(–1) = a + 4 + 1 = a + 5; \quad a + 5 = 0; \ a = –5;$$

в этом случае второй корень Q(x) отличен от x_1=5.

Ответ: $a \in \{-5, 0, \frac{19}{25}, 4\}$.

4.2. Перейдем к рассмотрению дробно-рациональных уравнений, содержащих параметр. Особенность их решения состоит в наличии неравносильных преобразованиях к уравнению вида $P(x) = 0$, где $P(x)$- некоторый многочлен. Неравносильность, в свою очередь, обусловлена случаями обращения знаменателя дроби в ноль, что и служит «поводом» для отсечения корней.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$$

имеет единственное решение?

Анализ задачи. Квадратный трехчлен, записанный в числителе дроби, имеет, вообще говоря, не более двух действительных корней (возможно, совпадающих). Единственность корня возможна, если его дискриминант равен нулю (и при этом корень содержится в области определения уравнения), или если дискриминант больше нуля, но один из корней не входит в область определения.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Имеем дискриминант уравнения $D = a^2–4$, отсюда $D = 0$, если $a = \pm2$; в обоих случаях найденный единственный корень уравнения ($x = 1$, $x = -1$соответственно) содержится в области определения. Если же «запретный» $x = – 3$ есть корень уравнения $x^2—ax+1 = 0$, то подставив это значение, получаем $a = -\frac{10}{3}$, причем при таком значении a второй корень квадратного уравнения (как легко проверить) отличен от -3.

Ответ: $a = \pm 2$ или $a = -\frac{10}{3}$.

Пример 3. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} + \frac{a^2-3}{a(x+1)(x+2)} = 0 \quad .$$

Решение. При a=0 уравнение не определено. Если $a \neq 0$, то в результате преобразований (и, в частности, приведения к общему знаменателю) получаем, что числитель дроби

$$x^2+2(1-a)x+a^2-2a-3=0 \text{ при условии } (x+1)(x+2) \neq 0.$$

Дискриминант уравнения $\frac{D}{4} = (1-a)^2 - (a^2-2a-3) = 4$. Следовательно, его корни $x_1 = a+1$, $x_2 = a-3$.

Исключим теперь из рассмотрения такие значения x, при которых $x_1+1=0$, $x_1+2=0$, $x_2+1=0$, $x_2+2=0$. А именно, исключаем случаи

1) $(a+1)+1=0$, т.е. $a = -2$; таким образом, при $a = -2$ - x_1-посторонний корень уравнения;

2) $(a+1)+2=0$, т.е. $a = -3$; таким образом, при $a = -3$ - x_1 - посторонний корень уравнения ;

3) $(a-3)+1=0$, т.е. a=2; таким образом, при a=2 x_2 - посторонний корень уравнения ;

4)наконец, $(a-3)+2=0$, т.е. a=1; значит, при $a = 1$ x_2 - посторонний корень уравнения.

Следовательно, при $a = -2$ надо вычислить только x_2: $x_2 = -5$; при $a = -3$ получаем $x_2 = -6$.

При a=2 имеем x_1=3, а при a=1 получаем x_1=2.

Окончательно имеем:

если $a = 3$, то $x = -6$;

если $a = -2$, то $x = -5$;

если a=0, то корней нет;

если $a = 1$, то x=2;

если a=2, то x=3;

в остальных случаях уравнение имеет пару корней

$$x_1 = a + 1, x_2 = a - 3.$$

5.Задачи, сводящиеся ко введению параметра

Порой постановка задачи такова, что в условии речь не идет о параметрах, однако в процессе анализа задачи возникают необходимость нахождения значений именно некоторых параметров. Приведем примеры таких заданий.

Пример 1 . Доказать, что при всех действительных значениях x и y имеет место неравенство

$$x^2 + 10y^2 - 6xy + 10x + 10y^2 - 26y + 30 > 0.$$

Решение. Функцию двух переменных

$$\phi(x, y) = x^2 + 10y^2 - 6xy + 10x + 10y^2 - 26y + 30$$

можно рассматривать и как квадратный трехчлен относительно переменной x, обращаясь с y как с *параметром* («параметризованный» квадратный трехчлен). В этом случае неравенство следует переписать виде

$$x^2 + (-6y + 10)x + (10y^2 - 26y + 30) > 0$$

и теперь достаточно доказать, что полученный трехчлен

$$f_y(x) = x^2 + (-6y + 10)x + (10y^2 - 26y + 30)$$

с положительным старшим коэффициентом обладает отрицательным (при всех значениях y) дискриминантом

$$\frac{D}{4} = (3y - 5)^2 - (10y^2 - 26y + 30) = -(y^2 + 4y + 5).$$

Но и в самом деле при всех значениях y имеем соотношение

$$-(y^2+4y+5)<0$$

(дискриминант последнего трехчлена отрицателен), откуда вытекает, что $f_y(x)<0$ для всех x при каждом значении параметра y. Таким образом, функция $\phi(x,y)$, введенная выше, оказывается отрицательной для всех пар значений x и y, что и требовалось установить.

Среди задач, сводящихся ко введению параметра, особое место занимают задачи на делимость многочленов. Начнем с задачи, в которой параметры присутствуют явно.

Пример 2. При каких значениях a и b многочлен

$P(x)=x^4-ax^2+bx-12$ делится нацело на $T(x)=x^2-2x-3$.

Решение. На основании определения делимости многочленов можно записать тождество $P(x)=T(x)q(x)$, в котором через $q(x)$ обозначено частное от деления. Находя корни многочлена $T(x)$, разложим его на множители: $T(x)=(x-3)(x+1)$. Теперь

$$x^4-ax^2+bx-12=(x-3)(x+1)q(x);$$

в записанном *тождестве* удобно выбрать значения $x=3$ и $x=-1$. В обоих случаях правая часть тождества обращается в ноль; в первом случае имеем $81-9a+3b-12=0$, во втором – $1-a-b-12=0$.

Приходим, следовательно, к системе уравнений для нахождения a и b:

$$\begin{cases}-3a+b=-23\\-a-b=11\end{cases},\ \text{откуда находим}\quad a=3,\ b=-14.$$

Продемонстрированный здесь метод решения называется *методом неопределенных коэффициентов*. Он же применяется и при решении следующей задачи.

Пример 3. Многочлен $P(x)$ делится нацело на $x-1$ и на $x+1$, а при делении на $x-3$ дает остаток, равный 8. Найти остаток от его деления на

$$x^3+3x^2-x-3.$$

Учащийся, владеющий теоремой Безу, сразу сделает заключение, что из условия задачи вытекают соотношения

$$P(1) = P(-1) = 0 \text{ и } P(3) = 8.$$

Если же эта теорема не знакома, то на основании определения делимости многочленов с остатком можно заключить, что

$$P(x) = (x-1)q_1(x),$$

$$P(x) = (x+1)q_2(x),$$

$$P(x) = (x-3)q_3(x) + 8,$$

$$P(x) = (x^3 + 3x^2 - x - 3)q_4(x) + r(x) \quad ;$$

здесь $q_k(x), k = 1,2,3,4$ - соответствующие частные от делений, остаток $r(x)$ от деления на многочлен третьей степени есть многочлен степени, меньшей третьей (т.е. не выше второй), так что $r(x) = ax^2 + bx + c$ и

$$P(x) = (x^3 + 3x^2 - x - 3)q_4(x) + ax^2 + bx + c \quad .$$

Таким образом, задача сведена к нахождению *параметров* (именно, a, b, c) в тождестве в последнем тождестве. Для их нахождения достаточно выбрать значения переменной x равные именно 1, -1 и 3. Заметим, что многочлен $x^3 + 3x^2 - x - 3$ при каждом из этих значений оказывается равным нулю. Последовательно полагая $x = 1, x = -1, x = 3$, имеем систему уравнений для a, b и c:

$$\begin{cases} 0 = a - b + c \\ 0 = a + b + c \\ 8 = 9a - 3b + c \end{cases},$$

откуда получаем $a = 1, b = 0, c = -1$. Значит искомый остаток

$$r(x) = x^2 - 1.$$

6. Задачный материал

Пример 1. Доказать, что при всех $p \neq 0$ имеет место неравенство

$$(1+ctg\,x)\sin^3 x+(1+tg\,x)\cos^3 x<\frac{p^4+1}{p^2}$$

Пример 2. При каких значениях параметра a все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие неравенству $y>5(x-a)^2-\sqrt{9-a^2}$, одновременно удовлетворяют и $y>x^2-3$?

Пример 3. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x|-x^2}=a$.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2-x^2})=1$ имеет ровно 8 решений.

Пример 5. При каком значении параметра *a* область определения функции $y=\sqrt[6]{-x^2+4x+a}+\sqrt{x-3}$ состоит из одной точки?

Пример 6. При каких значениях параметра *a* многочлен

$$p(x)=ax^2+3x+2a^2-3$$

имеет два различных целых корня?

Пример 7. При каких значениях параметра *a* неравенство $9^{x^2}+2(a-1)3^{x^2}+a^2-2>0$ выполнено для всех *x*?

Заключение. Системные процедуры

Как установлено выше (и продемонстрировано многочисленными примерами), алгоритмизации и редукция – процедуры, представляющие основу решения математической задачи. Вообще говоря, категория «решения задачи» восходит к понятийному полю теории систем. В самом деле, процесс решения есть интеграция некоторых фактов и связывающих их процедур. Чтобы придать этой мысли дальнейшее развитие, обратимся к соответствующей терминологии ([19], [20]).

1. Система – в «первом приближении» – есть совокупность взаимодействующих, взаимосвязанных элементов.

Указанная формулировка может быть уточнена в следующем виде. Системой называют *совокупность элементов, взаимосвязанных между собой таким образом, что возникает определенная целостность, единство*; указанная целостность обладает *новыми интегративными свойствами, отсутствующими у каждого из элементов (эмерджентные свойства).*

Интеграция – здесь и в дальнейшем – рассматривается как процесс и результат создания неразрывно связанного, единого, цельного. В процессе интеграции, в соответствии с концепцией В.А.Энгельгардта [21], можно выделить три следующие стадии:

а) возникновение связей между частями;

б) утрата (возможно неполная) частями некоторых своих первоначальных идентификационных качеств при вхождении в состав целого;

в) появление у возникающей целостности новых свойств, обусловленных как свойствами частей, так и возникновением новых систем межчастных связей.

Понятие интеграции, согласно мнению большинства исследователей, шире, чем понятие синтеза, по охвату объединительных процессов и имеет отношение не только к самим процессам, но и к средствам их организации; синтез же есть лишь завершающая форма, результат интегративного процесса. Если синтез означает слияние взаимодействующих систем в однородную целостность, то интеграция есть единство многообразного, компоненты которого сохраняют в этом единстве свои индивидуальные черты.

Наличие эмерджентных свойств именуется также синергией. *Синергия* есть то, что отличает систему от простого соединения (синтеза) некоторых элементов. В синергии проявляется суммирующий эффект взаимодействия нескольких факторов, характеризующийся тем, что их действие существенно превосходит эффект каждого отдельного компонента в виде их простой суммы.

Примером синергии в в физике является соединение (синергизм) двух и более частей радиоактивного материала, которое, с превышением критической массы, порождает выделение энергии в количестве, превышающем суммарное излучение энергии отдельных частей.

Нам представляется, что *эмерджентные свойства* обсуждаемой здесь системы есть *совокупный результат процедуры анализ-синтез*, которая, таким образом, и оказывается *интегративной процедурой.*

Категория *цели* вводится в понятие системы (и уточняет это понятие) следующим образом: цель в общенаучном понимании есть *образ требуемого результата*, определяющий отбор действий, ведущих к его достижению. Сам же требуемый результат называют системообразующим фактором; некоторые исследователи отождествляют понятия цели и системоообразующего фактора. Одно из определений цели (в кибернетике): цель - такая характеристика процесса, на основе которой осуществляется *обратная связь*: система работает, сравнивая реальные результаты с запланированными целями.

Система в целом характеризуется некоторыми своими *показателями*, которые могут быть как числовыми, так и нечисловыми. При математическом моделировании систем нечисловым показателям ставят в соответствие некоторые числовые, например: интеллект – коэффициент интеллекта (IQ), уровень знаний учащегося – оценка в баллах, отношение одного человека к другому – социологические индексы и т.п. В свою очередь, числовые показатели могут быть значениями дискретных или непрерывных величин.

Выше неоднократно использовался термин «*процесс*» – это понятие подчеркивает *упорядоченность* состояний системы; речь идет о *последовательной* смене ее состояний; так, например, в отношении педагогических систем говорят о педагогическом процессе.

Часто цель может быть достигнута через прохождение нескольких этапов, на каждом из которых имеется своя локальная цель (не совпадающая с главной целью), которая иначе называется *задачей* управления.

Направление методологии научного познания, в основе которого лежит рассмотрение объекта как системы, называется системным подходом.

2. Системный анализ - научный метод познания, представляющий собой последовательность действий по выявлению состава системы, т.е. определение частей, из которых она состоит, а также по установлению структуры системы, т.е. совокупности связей. Системный анализ опирается на комплекс общенаучных, экспериментальных, естественнонаучных, статистических, математических методов.

Проблемы, исследуемые методом системного анализа, подразделяются на три класса:

- хорошо структурированные (well-structured), или количественно сформулированные проблемы, в которых существенные зависимости выяснены очень хорошо;
- неструктурированные (unstructured), или качественно выраженные проблемы, содержащие лишь описание важнейших ресурсов, признаков и характеристик, количественные зависимости между которыми совершенно неизвестны;
- слабо структурированные (ill-structured), или смешанные проблемы.

Границы указанных трех классов нам представляются размытыми, что может быть продемонстрировано на примере различных прикладных задач, решаемых методами математического моделирования; таким образом, эти классы в ряде случаев представляют собою нечёткие множества.

Привлечение методов системного анализа сопряжено со следующими обстоятельствами: в процессе принятия решений часто приходится осуществлять выбор в условиях неопределённости, которая обусловлена наличием факторов, не поддающихся строгой количественной оценке. В этом случае все процедуры и методы направлены именно на выдвижение альтернативных вариантов решения проблемы, выявление масштабов неопределённости по каждому из вариантов и сопоставление вариантов по тем или иным критериям эффективности.

Процедура принятия решений в случае слабо структурированных и неструктурированных проблем, как указано в [22], может быть представлена следующим образом:

1)формулировка проблемной ситуации;

2)определение целей;

3)определение критериев достижения целей;

4)построение моделей для обоснования решений;

5)поиск оптимального (допустимого) варианта решения;

6)согласование решения;

7)подготовка решения к реализации;

8)утверждение решения;

9)управление ходом реализации решения;

10)проверка эффективности решения.

Этапы 6-9 процедуры принятия (реализации) решений относятся уже к системному синтезу. Системный синтез есть совокупность методов и средств объединения объектов в систему с целью формирования интегративного свойства, присущего всей системе. Системный синтез и системный анализ являются взаимодополняющими средствами исследования систем.

3. Решение задачи: системный подход. Всякая математическая задача может быть интерпретирована как определенным образом структурированная (например, хорошо или слабо структурированная) проблема. Если рассматривать **решение задачи как совокупность связанных между собою и**

упорядоченных понятий и фактов, то можно говорить (и это уже упоминалось) о наличии некоторой системы. Её анализ (в ситуации, когда система ещё должна быть выстроена), процедуры отыскания адекватных алгоритмов и редукций, а затем синтез (собственно выстраивание системы) – это своеобразная интерпретация системного подхода. Предложенная нами (в п. 2 введения) упорядоченная совокупность этапов решения задачи альтернативна по форме, но эквивалентна по существу, декомпозиции процедуры принятия решения, представленной в п. 2 настоящего параграфа.

В самом деле, на этапе осознания условия задачи предполагается, в частности, формулировка проблемной ситуации, определение целей и критериев их достижения; на этапе анализа осуществляется поиск оптимального (допустимого) варианта решения (алгоритма), на этапе редукции - подготовка решения к реализации; на этапе синтеза утверждение решения и управление ходом его реализации; проверка эффективности решения. Этапы формирования результата (ответа), интерпретации и рефлексии, предполагают, в частности, проверку эффективности решения.

Наконец, подчеркнём еще раз, что возникновение эмерджентных свойств описываемой системы, то есть возникновение (в результате решения задачи) нового для учащегося знания, есть совокупный результат интегративной процедуры анализ-синтез.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. – Режим доступа: минобрнауки.рф/документы/336 (дата обращения: 12.02.2018).

2. Асмолов А.Г. Системно-деятельностный подход к разработке стандартов нового поколения. Педагогика. – 2009. – № 4. – С. 18–22.

3. Нахман А.Д. Задачный подход как технологическая основа процесса обучения математике. – Международный журнал экспериментального образования. –2018. – № 2. – С. 34-39. – Режим доступа: URL: http://expeducation.ru/ru/article/view?id=11793 (дата обращения: 19.02.2018).

4. Гузеев В.В. Методы и организационные формы обучения. – М.: Народное образование, 2001 – 127 с.

5. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений . – М.: «Академия», 2008 . – 448 с.

6. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. Популярные лекции по математике . – М.: «Гостехиздат», 1957 – 66 с.

7. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика. Задачи на целые числа . – Ростов на Дону: «Легион» – 252 с.

8. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения . – М.: «Наука», 1972. – 68 с.

9. Никифоровский В. А. В мире уравнений . – М.: «Наука» , 1987. – 176с.

10. Образовательный портал «Решу ЕГЭ» [Электронный ресурс] / Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru (дата обращения 12.02.2018).

11. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений . – М.: Мир, 1976. –165 с.

12. Концепция развития Российского математического образования [Электронный ресурс] . – Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения 12.02.2018).

13. Нахман А.Д., Иванова И.Ю. Содержательный аспект математической компетентности обучающихся: монография. – Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2013. – 172 с.
14. Аверина И.В., Нахман А.Д. Уровневая модель системы мероприятий по реализации концепции развития российского математического образования [Электронный ресурс] . – Актуальные инновационные исследования: наука и практика. –2014. – № 1. – Режим доступа: http://www.actualresearch.ru .pdf (дата обращения 12.02.2018).
15. Нахман А.Д. Инновационные содержательно-методические линии курса математики: монография . – Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации». – 2012. – 112 с.
16. Нахман А.Д., Иванова И.Ю. Преподавание математики в условиях реализации федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования: учебно-методический комплект по элементам математического анализа.– Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2012. – 115 с.
17. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. – М: МЦНМО , 2000. – 892 С.
18. Нахман А.Д. Функции и их свойства. Задачи для подготовки к ЕГЭ: метод. пособие. – Тамбов: ТОИПКРО, 2006. – 61 с.
19. Лебедев С.А. Философия науки: Словарь основных терминов. – М.: Академический Проект, 2004. – 320 с.
20. Волкова В.И., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1997. –510 с.
21. Энгельгардт В.А. Интегратизм - путь от простого к сложному в познании явлений жизни. В кн.: Материалы к 2-му Всесоюз. совещ. по филос. вопр. соврем. Естествознания. – М.: Ин-т философии АН СССР, 1970. – 48 с.
22. Дрогобыцкий И. Н. Системный анализ в экономике: учебник. – И.Н. Дрогобыцкий. — 2-е изд., перераб. и доп. — М., 2011. – 423 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Заключение. Системные процедуры

Библиографический список