Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

Иванова И.Ю., Нахман А.Д.

Теоретические и эмпирические распределения случайных величин в курсе математики старшей школы

Учебно-методическое пособие

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2018

УДК 517.9 (075.8)

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензенты:
доктор технических наук, доцент кафедры «Техническая механика и детали машин» ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» С.В.Плотникова;
кафедра общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Иванова И.Ю. Теоретические и эмпирические распределения случайных величин в курсе математики старшей школы: учебно-методическое пособие /И.Ю.Иванова, А.Д.Нахман // «Инновации в образовании». Специальный выпуск. – Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2018. – 70 с.

Издание подготовлено в соответствии с положениями Концепции развития математического образования Российской Федерации и имеет целью формирование практико-ориентированных, и в частности, прогностических умений обучающихся, овладения ими методами теоретического и экспериментального исследования. Предлагается материал по темам «Случайные величины», и «Эмпирические распределения».

Предназначено для учащихся старших классов, а также (в целях актуализации знаний в области элементов стохастики) для студентов инженерных направлений подготовки колледжей и вузов.

ВВЕДЕНИЕ

Понятия «эмпирическое и теоретическое», как указывает философская энциклопедия, являются методологическими категориями, характеризующими две основополагающие формы научного познания, а также структурные компоненты и уровни научного знания, в основе которых лежит выделение в научном познании эмпирических и теоретических методов исследования. Если первый вид исследования направлен непосредственно на объект и опирается на данные наблюдения и эксперимента, то второй связан с совершенствованием и развитием понятийного аппарата науки и направлен на всестороннее познание объективной реальности в её существенных связях и закономерностях. Оба эти вида исследования органически взаимосвязаны и предполагают друг друга в целостной структуре научного познания. Эмпирическое исследование, выявляя новые данные наблюдения и эксперимента, стимулирует развитие теоретического исследования, ставит перед ним новые задачи. С другой стороны, теоретическое исследование, развивая и конкретизируя теоретическое содержание науки, открывает новые перспективы объяснения и предвидения фактов, ориентирует и направляет эмпирическое исследование, поскольку наука не может совершенствоваться и развиваться, не обогащаясь новыми эмпирическими данными.

Анализ многих реальных процессов и явлений связан с анализом тех или иных случайных величин, то есть числовых величин, значения которых непредсказуемы и зависят от случайных причин. Такими величинами могут быть, например,

-число избирателей, проголосовавших на выборах за данного кандидата в депутаты;

-количество секунд, требующееся для загрузки файла из Интернета;

- число клиентов, обратившихся в данное отделение банка в течение дня;

- денежная сумма, совокупно выданная данным банкоматом в течение суток;

- число месяцев безотказной работы купленного планшета и др.

Любое серия из $n \geq 2$ испытаний, уже порождает случайную величину X – число наступлений интересующего нас события. Таким образом, формирование практико-ориентированных знаний и умений учащегося предполагает в той или иной степени овладение понятиями и фактами теории случайных величин.

Обычно, случайные величины «проявляют себя» в ходе эксперимента. Так, например, подведение предварительного итога голосования в ходе выборов позволяет по данным, собранным на нескольких избирательных участках, судить о примерном проценте проголосовавших за кандидатуру партии «Единая Россия» во всём регионе, то есть прогнозировать принятие случайной величиной заданного значения. Подсчет среднего значения зарплаты на данном предприятии позволяет судить о средней зарплате во всей отрасли и т.д.

Таким образом, по серии выборочных значений, необходимо уметь моделировать данное распределение случайной величины в виде ряда или функции (плотности) распределения, визуализировать распределение (строить многоугольники распределения, кривые распределения), находить числовые характеристики (среднее значение, дисперсию) и др. В свою очередь, здесь необходимо использовать ту или иную модель вероятности (классическую, статистическую, геометрическую). Следовательно, изучению случайных величин должно предшествовать изучение вероятностей случайных событий. Данное обстоятельство и определило структуру настоящего пособия: тезисное изложение основных понятий и фактов теории вероятностей и собственно случайные величины в их теоретическом и эмпирическом ракурсах. Каждая глава состоит из обучающего и контрольного модулей.

Глава 1. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

1.Классическая вероятность

1.1. Будем рассматривать события A, B, C, ... как исходы некоторого опыта; число исходов считаем конечным. Каждому опыту сопоставим множество всех его ***элементарных*** (простейших, «неразложимых») ***исходов*** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$, которое дает полную информацию о предполагаемых результатах этого опыта.

Элементарными называются такие исходы ω_i опыта, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) ***группа исходов полна***, т.е. обязательно произойдет хотя бы один из ω_i;

б) исходы попарно ***несовместны***;

в)все ω_i – ***равновозможны***, т.е. объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой.

1.2. Среди элементов множества Ω имеются исходы, ***благоприятствующие*** событию A, то есть те, в результате которых событие A наступает.

Классической вероятностью события A называется отношение числа $m = m_A$ элементарных исходов, благоприятствующих A, к общему числу n всевозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

1.3. Очевидны следующие свойства классической вероятности:

$$P(E) = 1, \quad P(\varnothing)=0,$$

$$0 < P(A) < 1 \text{ для всякого случайного события } A.$$

Здесь E и $\varnothing$ - достоверное и невозможное события, соответственно.

2. Относительная частота, статистическая и геометрическая вероятность

2.1. Если в результате n опытов событие A появилось $m = m_A$ раз, то относительной частотой события A называют число

$$W(A) = W_n(A) = \frac{m}{n}.$$

2.2. Практика показывает, что с ростом числа однотипных опытов относительная частота приобретает свойство устойчивости, колеблясь относительно некоторого числа $P = P(A)$, которое называется статистической вероятностью события A.

2.3. Рассмотрим следующий опыт: в некоторую ограниченную область E бросается точка, причем попадания ее в любые части, имеющие одинаковую меру (например, площадь в случае плоских областей) считаются равновозможными. Пусть событие A – ее попадание в область $A \subset E$. Если $S(A)$ и $S(E)$, $S(E) \neq 0$ – соответственно меры A и E, то геометрической вероятностью события A будем называть число

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(E)}.$$

3.Понятие об аксиомах вероятности

3.1. Вышеприведенные модели вероятности события (классическая, статистическая, геометрическая) обладают некоторыми общими свойствами, которые можно положить в основу аксиоматического определения понятия вероятности.

Во-первых, вероятность задается как некоторая функция P на рассматриваемом множестве событий U. Во вторых, общими для рассмотренных определений являются свойства

A1 (неотрицательности) : $P(A) \geq 0$ для всякого $A \in U$;

A2 (нормированности): $P(E)=1$;

A3 (аддитивности**):** $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$,

если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несовместны;

A4 («расширенной» аддитивности): $(A_1 + A_2 + \ldots + \mathrm{A}_n + \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$,

если события $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ попарно несовместны (числовой ряд предполагается сходящимся).

3.2. Следствиями аксиом являются следующие утверждения:

1)Для всякой пары противоположных событий $A, \overline{A}$ справедливо равенство

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

В частности, так как достоверное и невозможное события противоположны, то

$$P(\varnothing) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0.$$

2) Всякое событие A имеет вероятность $P(A) \leq 1$.

4. Вероятность произведения событий

4.1. Рассмотрим способ вычисления классической вероятности произведения событий. Обозначим $P_A(B)$ означают вероятность события B, вычисленную при условии, что A произошло и будем называть ее условной вероятностью события B. Имеет место соотношение

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

В случае произведения трех и большего числа событий имеет место аналогичный результат. Так, например,

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

4.2. Два события A и B называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, наступило ли другое событие, т.е. абсолютно постоянна в условиях данных опытов. Аналогично, события $A_1, A_2, ..., A_n$ называются независимыми в совокупности, если каждая из вероятностей $P_j = P(A_j)$ остается абсолютно постоянной в условиях данных опытов.

Из результата п.4.1 примененного к двум независимым событиям вытекает, что

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right) \cdot P\left(B\right).$$

Распространяя результат на n событий, независимых в совокупности, приходим к соотношению

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n).$$

5. Вероятность суммы совместных событий

5.1. Выше была рассмотрена вероятность суммы попарно несовместных событий. Следующий результат в случае суммы любых двух событий A и B является более общим.

Теорема 6.1 $P\left(A_1 + A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) - P\left(A_1 A_2\right).$

В частности, для *несовместных* A_1 и A_2 имеем $P\left(A_1 A_2\right) = P(\varnothing) = 0$, откуда следует уже известное равенство

$$P\left(A_1 + A_2\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right).$$

5.2. В случае суммы n событий имеет место результат:

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}).$$

Пусть теперь события $A_1, A_2, ..., A_n$ *независимы в совокупности*,

$$p_j = P(A_j) \text{ и } q_j = P(\overline{A_j}) = 1 - P(A_j), \ j = 1,2,...,n.$$

Тогда

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n.$$

В частности, *для двух независимых событий* A_1 и A_2 получаем

$$P(A_1 + A_2) = 1 - q_1 q_2 = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 .$$

6.Повторение опытов. Формула Бернулли

6.1. Пусть один и тот же опыт повторяется *n* раз, и при этом вероятность наступления события *A* в каждом таком опыте остается неизменной, равной некоторому *p*; пусть $q = 1 - p$. Описанная ситуация независимых опытов называется *схемой Бернулли*.

Обозначим через $P_n(k)$ вероятность того, что ***событие A появится ровно k раз в n опытах.*** В этом случае говорят также о k «успехах» в n опытах. Имеет место следующая

***Формула Бернулли*:**

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} .$$

6.2. В условиях пункта 6.1 ***вероятность наступления события*** A ***в*** n ***опытах от*** k_1 ***до*** k_2 ***раз***, есть

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} .$$

Здесь

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

есть число сочетаний из n по k.

КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1.Рассматриваются следующие события: A – первое из полученных электронных писем содержит навязчивую рекламу (СПАМ), B – второе письмо содержит СПАМ. Выразить с помощью операций сложения и умножения через события A и B и (или) им противоположные следующие события а) событие С – ни одно из писем не содержит СПАМ;

б) хотя бы одно письмо содержит СПАМ;

в) только одно письмо содержит СПАМ.

2. Вероятность победы на выборах кандидата в депутаты N в регионе A равна 0,7, в регионе *Б* равна 0,4. Ккова вероятность его победы:

а) в обоих регионах

б)хотя бы в одном регионе

в) только в одном из данных регионов.

3. Вероятность дождливой погоды в предстоящий выходной день равна 0,7. Вероятность удачной рыбалки в дождливую погоду равна 0,8, а в ясную погоду – 0,4. Какова вероятность, что в предстоящий выходной рыбалка будет удачной.

4. Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридические направлений поступают на биржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,8, на вакансию юриста – 0,5. Найти вероятность, что

а) случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности;

б)вероятность того, что устроившийся на работу специалист – экономист.

5. Имеется 10 двадцатидолларовых купюр, из которых 4 купюры фальшивые. Наугад *поочередно* извлекают две купюры и отыскивают вероятность события A, состоящего в том, что обе эти купюры окажутся фальшивыми. Можно ли применять формулу Бернулли, если а) купюра после извлечения и проверки возвращается в пачку; б)выборка безвозвратная.

Найти $P(A)$ в каждом из случаев а) и б).

6. Вероятность продать по оптимальной цене каждый из пяти пакетов акций в период их падения равна 0,25. Какова вероятность продажи по оптимальной цене большей части пакета?

7. В прямоугольник вписаны две окружности равного радиуса, касающиеся друг друга внешним образом. В прямоугольник случайным образом брошена точка. Какова вероятность, что она не попадет ни в один из кругов?

8. В семье 5 детей; вероятность рождения мальчика в данной местности равна 0,6. Найти вероятности следующих событий:

а) в семье две девочки;

б) в семье не менее двух девочек;

в) в семье мальчиков больше, чем девочек

9**.** В данной местности левши составляют 5% населения. Какова вероятность, что в на факультете, где обучаются 400 человек, окажутся не менее 3 левшей?

10. Студент одинаково плохо подготовился к каждому из трех экзаменов. С какой вероятностью он сдает каждый экзамен, если хотя бы один из них он сдаст с вероятностью 0,578125

Глава 2. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ОБУЧАЮЩИЙ МОДУЛЬ

Случайной величиной называется числовая величина X, которая в каждом опыте принимает одно и только одно значение, заранее неизвестное и зависящее от случайных причин. Если все возможные значения величины X можно записать в виде числовой последовательности $\{x_n\}$, $n = 1, 2, ...$ (конечной или бесконечной), то X называется дискретной (ДСВ – дискретная случайная величина); если же возможные значения X заполняют целиком некоторый числовой интервал, то величина X называется непрерывно распределенной на этом интервале (НСВ – непрерывная случайная величина).

Примером дискретной случайной величины является ежедневно фиксируемый рублевый курс доллара, непрерывной – время t загрузки файла, скачиваемого из Интернета: $t \in (0, \infty)$.

1. Ряд распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики

1.1. *Законом распределения* дискретной случайной величины (ДСВ) X называется соответствие между ее возможными значениями x_k и вероятностями $p_k = P(X = x_k)$ события, состоящего в принятии величиной X значения именно x_k. Обычный способ задания такого закона – ряд (таблица) распределения, который в случае конечного числа n значений величины X (записанных в порядке возрастания) имеет вид

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1. \tag{1.1}$$

Действительно, все события вида $A_k = \{X = x_k\}$ образуют полную группу, так что

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = E,$$

и, по аксиоме вероятности **A1**,

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1.$$

Благодаря попарной несовместности событий A_k и аксиоме **A3**, получаем тогда из последнего равенства утверждение (1.1).

Возможно также рассмотрение ряда распределения с бесконечным набором значений *X.* В этом случае, согласно аксиоме **A4,** для соответствующих вероятностей значений $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

При этом мы рассматриваем распределения, для которых записанный числовой ряд является сходящимся.

1.2. Наряду с законом (рядом) распределения часто бывает удобно пользоваться числами, которые описывают случайную величину «суммарно» – так называемыми *числовыми характеристиками* случайной величины. Они помогают «в сжатой форме» выразить наиболее существенные черты распределения. Основными числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, характеризующее среднее значение случайной величины, и дисперсия, характеризующая степень рассеяния случайной величины относительно ее математического ожидания.

Ограничимся пока рассмотрением дискретной случайной величины с конечным набором возможных значений.

1.3. *Математическое ожидание* $M(X)$ дискретной величины X определяется в виде

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k ,$$

Поясним, почему естественно считать это число *средним значением* случайной величины. В привычном понимании среднего значения стоило бы рассмотреть среднее арифметическое *n* значений x_k, или, что то же самое, сумму вида

$$x_1 \cdot \frac{1}{n} + x_2 \cdot \frac{1}{n} + \ldots + x_n \cdot \frac{1}{n},$$

в которой каждое x_k умножается на $\frac{1}{n}$, т.е. все x_k содержатся в этой сумме с учетом их «равного вклада» вида $\frac{1}{n}$. *Вероятностный же аналог* среднего значений x_k должен учитывать «вероятностный вклад» каждого такого значения, т.е. принимать вид *суммы произведений наблюдаемых значений случайной величины на их вероятности*

$$x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n,$$

которая и совпадает с определением математического ожидания. Частный случай распределения ДСВ, для которой математическое ожидание равно в точности среднему арифметическому значений случайной величины, см. ниже.

Замечание. Математическое ожидание ДСВ относится к так называемым характеристикам положения, т.е. характеризует положение случайной величины на числовой оси, указывая некоторое среднее, ориентировочное значение, около которого группируются все возможные значения случайной величины. К другим характеристикам положения случайной величины относятся мода и медиана.

Модой ДСВ называется её наиболее вероятное значение $Mo = x_l$. Этих значений может оказаться несколько (их вероятности – наибольшие по сравнению вероятностями всех других значений); такие случайные величины называются полимодальными.

Медианой дискретной случайной величины *X*, имеющей значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется такое ее значение $Me = x_l$, что

$$\sum_{k=1}^{l} p_k \geq \frac{1}{2} \text{ и } \sum_{k=l}^{n} p_k \geq \frac{1}{2}.$$

Этому условию в ряде распределения ДСВ может соответствовать два различных (соседних) значения x_l.

Чтобы найти медиану, достаточно найти такое «пограничное» значение x_l, чтобы сумма вероятностей от p_1 до p_{l-1} была еще меньше ½, но уже после добавления слагаемого p_l она стала не меньше ½; условие $p_l + \ldots + p_n \ge \frac{1}{2}$ тогда будет выполнено автоматически.

1.4. Наряду со средним значением $M(X)$ случайной величины X естественно было бы также рассмотреть числовую характеристику степени рассеяния значений x_k относительно их среднего значения. На первый взгляд, следовало бы рассмотреть среднее значений разностей $x_k - M(X)$, т.е. сумму вида

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - M(X)\right) \, p_k \, .$$

Однако, преобразовав её к разности

$$\sum_{k=1}^{n} x_k p_k - M(X) \, \sum_{k=1}^{n} p_k$$

(общий множитель $M(X)$ вынесен за знак второй суммы) получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - M(X)\right) \, p_k \equiv 0 \, ,$$

так что значение этой суммы одинаково для *любых* распределений, и, следовательно, не может служить характеристикой рассеяния конкретных распределений.

Нулевое значение суммы получилось за счет «интерференции» положительных и отрицательных уклонений $x_k - M(X)$. Чтобы устранить такую интерференцию, рассматривают *сумму произведений квадратов уклонений на вероятности* p_k соответствующих x_k

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - M(X)\right)^2 p_k \, .$$

Числовая характеристика указанного вида называется *дисперсией* случайной величины X.

Из аксиомы **A1** и определения дисперсии следует, что $D(X) \geq 0$, а тогда можно рассмотреть характеристику рассеяния вида

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

называемую *средним квадратическим отклонением*. Она предпочтительней дисперсии в том смысле, что оценка рассеяния теперь имеет размерность случайной величины (заметим, что дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно).

1.5. Дисперсию ДСВ можно вычислить также по формуле

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^2 p_k - (M(X))^2 .$$

Для ее доказательства которой выполним в следующие преобразования:

$$D(X) = \sum_{k=1}^{n} (x_k^2 p_k - 2M(X) \cdot x_k p_k + (M(X))^2 \cdot p_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2M(X) \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + (M(X))^2) \cdot \sum_{k=1}^{n} p_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2(M(X))^2 + (M(X))^2 \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (M(X))^2,$$

чем и установлено доказываемое соотношение.

Замечание. Определение математического ожидания и дисперсии ДСВ можно распространить и на случай величин с бесконечным перечнем возможных значений. В этом случае соответствующие суммы следует заменить числовыми рядами

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad \text{и} \quad D(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - M(X)\right)^2 p_k ,$$

требуя их сходимость (иначе соответствующая числовая характеристика признается несуществующей), причем первый из рядов должен обладать абсолютной сходимостью.

1.6. Для более детального исследования распределений случайных величин вводят понятия начального и центрального моментов распределения

$$\nu_l = \sum_{k=1}^{n} (x_k)^l p_k \ , \quad \mu_l = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X)^l p_k \, , \; l = 1,2,...$$

Ясно, что

$$\nu_1 = M(X),\ \mu_1 = 0,\ \mu_2 = D(X),\ \mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2.$$

Центральные моменты могут быть выражены через начальные, и наоборот. Так, например,

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3,\quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4$$

и т.д.

1.7. Пример 1. В сессию планируется два экзамена. Вероятности успешной сдачи первого и второго экзамена для данного студента равны соответственно 0,7 и 0,8. Составить ряд распределения случайной величины *X*- числа экзаменов, которые успешно сдаст студент. Найти математическое ожидание и дисперсию числа успешно сданных экзаменов.

Решение. Рассматриваемая случайная величина *X* может принять одно из следующих значений: x_1=0, x_2=1, x_3=2 соответственно следующим событиям: студент не сдаст оба экзамена, студент сдаст успешно только один экзамен, студент сдаст успешно оба экзамена. Согласно теореме о вероятности произведения событий

$$P(X=2) = 0{,}7\cdot 0{,}8 = 0{,}56;\ \ P(X=0) = (1-0{,}7)(1-0{,}8) = 0{,}06.$$

Осталось найти вероятность $P(X=1)$ того, что студент сдаст успешно только один экзамен; здесь можно воспользоваться свойством (3.1.1) вероятностей в ряде распределения:

$$P(X=1) = 1 - P(X=0) - P(X=2) = 0{,}38.$$

Итак, ряд распределения случайной величины *X* принимает вид:

X	0	1	2
P	0,6	0,38	0,56

Найдем теперь математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*. Пользуясь соответствующими формулами, получаем

$$M(X) = 0\cdot 0{,}6 + 1\cdot 0{,}38 + 2\cdot 0{,}56 = 1{,}5$$

и

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}38 + 2^2 \cdot 0{,}56 - 1{,}5^2 = 0{,}37 .$$

Пример 2. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x	x_1	x_2
p	0,3	0,7

Найти значения x_1 и x_2, если даны математическое ожидание $M(X) = 2{,}7$ и дисперсия $D(X) = 0{,}21$ и известно, что $x_1 < x_2$.

Решение. Согласно данному ряду распределения

$$M(X) = x_1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}7 \quad \text{и} \quad D(X) = x_1^2 \cdot 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}7 - 2{,}7^2.$$

Имеем, следовательно, систему алгебраических уравнений для нахождения x_1 и x_2

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 2{,}7 \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 - 2{,}7^2 = 0{,}21 \end{cases},$$

которую несложно преобразовать к виду

$$\begin{cases} x_1 = 9 - \dfrac{7}{3}x_2 \\ \dfrac{5}{3}x_2^2 - 9x_2 + 12 = 0 \end{cases}.$$

Найдя из последнего квадратного уравнения значения x_2, получаем затем пару решений системы

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3 \quad \text{и} \quad x_1 = \frac{17}{5},\ x_2 = \frac{12}{5}.$$

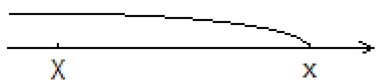
Согласно условию задачи $x_1 < x_2$, следовательно, $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

2. Функция распределения

2.1. Понятие ряда распределения неприменимо к непрерывным случайным величинам (НСВ), поскольку невозможно выписать перечень всех ее значений (читатель, знакомый с теорией множеств, знает, что множество всех точек числового интервала не является счетным); более того, как мы установим ниже, вероятность каждого конкретного значения непрерывной случайной величины оказывается равной нулю. В этом случае содержательной характеристикой «поведения» НСВ могли бы служить вероятности принятия ею значений в заданном числовом интервале. Эти вероятности, как мы увидим в дальнейшем, могут быть выражены через функцию вида

$$F(x) = P(X < x).$$

Данную функцию мы будем рассматривать теперь *для любой* случайной величины X; она соотносит каждому $x \in (-\infty; +\infty)$ вероятность события, состоящая в принятии величиной X значения левее точки x (см. рис.) и называется *функцией распределения* (синонимы: интегральный закон распределения, интегральная функция распределения случайной величины X).



2.2. Рассмотрим случай *функции распределения дискретной случайной величины* X, которая имеет ряд распределения вида

X	x_1	x_2	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

Утверждается, что

$$F(x) = \sum_{k \mid x_k < x} p_k \ , \tag{2.1}$$

причем суммирование в (2.1) проводится по тем и только тем k, для которых соответствующие значения x_k оказываются меньшими x.

Чтобы установить соотношение (2.1), расположим на числовой оси значения $x_1, x_2, ..., x_n$. Если аргумент x удовлетворяет соотношению $x \le x_1$, то событие $X < x$ является невозможным, и следовательно, $F(x) = 0$.

В случае $x_1 \le x < x_2$ событие $X < x$ равносильно событию $X = x_1$, а тогда $F(x) = p_1$. Если $x_2 \le x < x_3$, то событие $X < x$ равносильно наступлению хотя бы одного из двух несовместных событий $X = x_1$ и $X = x_2$, а тогда $F(x) = p_1 + p_2$.

Рассуждая таким образом и далее, мы и получаем (2.1). В частности, при $x_n < x$, имеем

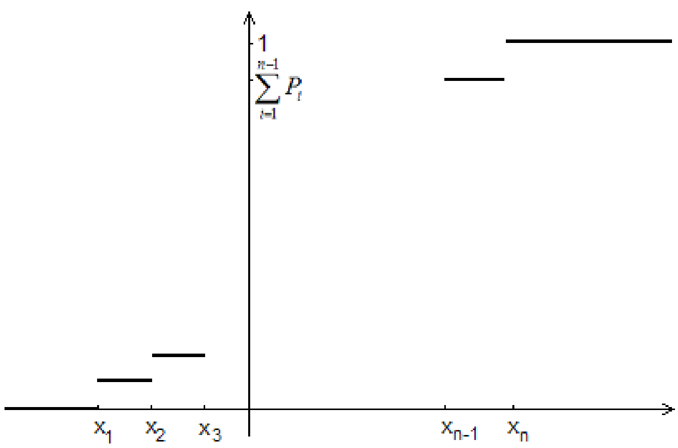
$$F(x) = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

В «развернутой» форме (2.1) принимает вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ p_1, & x_1 < x \le x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3 \\ \ldots & \\ p_1 + p_2 + \ldots p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n \\ 1, & x > x_n \end{cases}.$$

Указанный принцип построения $F(x)$ можно назвать принципом накопления вероятностей.

Мы получили неубывающую кусочно-постоянную функцию, значения которой расположены в промежутке [0, 1], непрерывную в каждой точке x_k $(k = 1,2,...,n)$ слева (см. рис.).



Ее предел на $-\infty$ равен 0 (точнее, $F(x)=0$ при $x \le x_1$), а на $+\infty$ равен 1 (точнее, $F(x)=1$ при $x > x_n$).

2.3. В общем случае свойства функции распределения $F(x)=P(X<x)$ будут следующими:

а) $0 \le F(x) \le 1$;

б) $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$;

в) $F(x)$ - неубывающая функция;

г) если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (α, β), то $F(x)=0$ при $x \le \alpha$ и $F(x)=1$ при $x \ge \beta$; в случае распределения X на всей числовой оси имеют место соотношения

$$F(+\infty)=1 \qquad \text{и} \qquad F(-\infty)=0,$$

где, по определению, $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$.

Доказательство. Свойство а) очевидно, поскольку значения $F(x)$ определяются в виде вероятностей.

Для доказательства свойства б) представим значение $F(b)$ в виде

$$F(b) = P(X<b) = P(X<a \text{ или } a \le X < b).$$

Поскольку события $X<a$ и $a \le X < b$ несовместны, то, в силу аксиомы **А3**, получим

$$F(b) = P(X<a) + P(a \le x < b).$$

Таким образом,

$$F(b) = F(a) + P(a \le x < b),$$

а это и равносильно свойству б).

Из последнего соотношения и оценки $F(a) \ge 0$ получаем, что $F(b) \ge F(a)$ при $b > a$, а это и означает, что функции распределения – неубывающая всюду функция.

Суть утверждения п. г) достаточно очевидна: событие $X < x$ является невозможным при $x \le \alpha$ и достоверным – при $x \ge \beta$.

2.4. Следующие свойства относятся к случаю *непрерывной* $F(x)$. В дальнейшем, говоря о непрерывной случайной величине, будем предполагать, что ее функция распределения $F(x)$ непрерывна и кусочно-дифференцируема.

а)Соотношение

$$P(X = x) = 0$$

имеет место для любого действительного x.

б)Справедливо равенство

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a < X < b) =$$
$$= P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$

Доказательства свойств а) и б) основаны на возможности предельного перехода под знаком функции $F(x)$, обладающей свойством непрерывности.

2.5. Пример. Индикатором случайного события A, имеющего вероятность $p(A) = p$, называется случайная величина $\eta = \eta(A)$, принимающая значение, равное 1, если A наступает и значение, равное 0, если A не наступает. Построить функцию распределения индикатора η и найти его числовые характеристики $M(\eta)$ и $D(\eta)$.

Решение. По условию, индикатор есть дискретная случайная величина с рядом распределения

η	0	1
p	q	p

где $q = 1 - p$.

Согласно (2.1) имеем функцию распределения индикатора

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ q, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}.$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M(\eta)=0\cdot q+1\cdot p=p,\ D(\eta)=0^2\cdot 1+1^2\cdot p-p^2=p(1-p)=pq.$$

3. Плотность распределения

3.1. *Плотностью распределения* (плотностью вероятности или дифференциальной функцией) назовем функцию вида

$$f(x)=F'(x).$$

Согласно принятому в выше соглашению для всякой непрерывной случайной величины X плотность распределения существуют (хотя бы в виде односторонней производной) всюду за исключением, может быть, конечного числа точек.

Использование термина «*плотность*» оправдано следующими соображениями. По определению производной имеем

$$f(x)=F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P\left(x<X<x+\Delta x\right)}{\Delta x}. \qquad (3.1)$$

Отношение, записанное под знаком предела (3.1), при $\Delta x>0$ было бы естественно назвать средней плотностью вероятности значений X на промежутке $(x, x+\Delta x)$, а тогда само значение предела (3.1) – плотностью вероятности в точке x.

В соответствии с (3.1) при малых Δx справедливо приближенное равенство

$$P\left(x<X<x+\Delta x\right)\approx f(x)\cdot\Delta x.$$

3.2. Имеют место следующие *свойства* плотности распределения:

а) $f(x)\ge 0$ для всех x;

б) $P(a<X<b)=\int\limits_a^b f(x)dx;$

в) функция распределения $F(x)$ может быть восстановлена (по известной дифференциальной функции) в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx .$$

г) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (свойство нормированности).

Замечание. Несобственный интеграл по $(-\infty, +\infty)$ здесь и в дальнейшем понимается в смысле так называемого главного значения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{T \to +\infty} \int_{-T}^{T} f(x)dx .$$

Свойство а) очевидно, т.к. $f(x)$ есть производная неубывающей функции.

Докажем соотношение б). Согласно определению п. 3.1, функция распределения $F(x)$ является одной из первообразных для $f(x)$. Тогда применима формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a),$$

в правой части которой мы и узнаем значение $P(a < X < b)$, если воспользоваться результатами п. 2.4.

Равенства в) и г) вытекают из свойства б) и утверждений п. 2.3; например,

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x) - F(-\infty) = F(x) - 0 = F(x).$$

3.3. Пример. Плотность распределения задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c \cdot x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases} ,$$

где c – постоянная величина. Найти значение c, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$.

Решение. Согласно свойству г) нормированности имеем

$$1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{0}^{1} c \cdot x \cdot dx + \int\limits_{0}^{+\infty} 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 \Big|_0^1 + 0 = \frac{1}{2} \cdot c,$$

откуда $c = 2$. Теперь

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Найдем $F(x)$ в соответствии со свойством в) п. 2.2, в); рассмотрим при этом все возможные здесь случаи: $x \le 0$, $0 < x < 1$, $x \ge 1$. Имеем

1) при $x \le 0$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0;$$

2)при $0 < x < 1$:

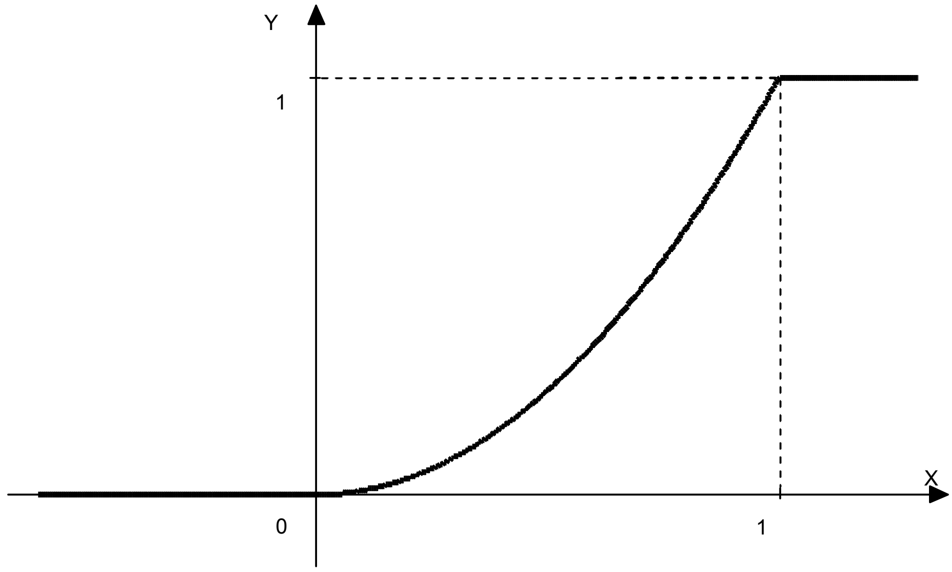
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{-\infty}^{x} 2x \cdot dx = x^2;$$

3) при $x \ge 1$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int\limits_{-\infty}^{1} 2x \cdot dx + \ + \int\limits_{1}^{x} 0 \cdot dx = 1.$$

Таким образом (см. рис.),

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}.$$



Так как $\frac{3}{2} \in [1, +\infty)$, $\frac{1}{2} \in [0,1)$, то в соответствии с найденным видом $F(x)$, будем иметь

$$P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}.$$

4. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

4.1. Пусть X – непрерывная случайная величина (НСВ) и $f(x)$ – ее плотность распределения. Математическое ожидание и дисперсия в этом случае определяются, соответственно, в виде

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{4.1}$$

и

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x) dx \tag{4.2}$$

при условии сходимости указанных несобственных интегралов, причем сходимость (4.1) предполагается абсолютной.

Интегралы (4.1) и (4.2) являются естественными аналогами соответствующих числовых характеристик дискретных случайных величин.

В том случае, когда все возможные значения X расположены на отрезке $[a,b]$, интегрирование в (4.1) и (4.2) заменяется интегрированием по $[a,b]$:

$$M(X)=\int_a^b x f(x)dx \quad \text{и} \qquad D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2 .$$

Замечание. Как и в случае ДСВ, к характеристиками положения НСВ относятся также мода и медиана.

Модой непрерывной случайной величины X называется точка максимума $x = Mo$ ее плотности вероятности $f(x)$. Возможны случаи полимодальных распределений – когда точек максимума несколько.

Медианой непрерывной случайной величины X называется такое ее значение $x = Me$, при котором $P(X < Me) = P(X > Me)$.

4.2. Из определения дисперсии (4.2) и свойства неотрицательности $f(x)$ вытекает оценка $D(X) \geq 0$.

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется в виде

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} .$$

4.3. Для вычисления дисперсии можно воспользоваться также формулой

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2 . \qquad (4.3)$$

Доказательство (4.3) проводится с помощью рассуждений, подобных п. 1.3: возводя разность в квадрат, преобразуем (4.2) в сумму трех интегралов и, далее, пользуемся свойством нормированности $f(x)$ (п. 3.2, г).

4.4. Для непрерывной случайной величины X начальные и центральные моменты распределения определяются, соответственно, в виде

$$\nu_l=\int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \mu_l=\int_{-\infty}^{\infty}\left(x-M(X)\right)^l f(x)dx .$$

Точно так же, как и в случае ДСВ, определяются асимметрия распределения $S_k=\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ и его эксцесс $E_x=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$.

4.5. Пример. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

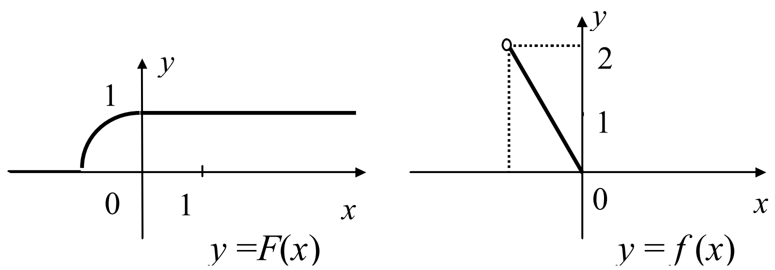
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ 1-x^2, & -1<x\le 0;\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$ и числовые характеристики $M(X)$ и $D(X)$.

Решение. По определению плотности распределения имеем

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ -2x, & -1<x\le 0;\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

Графики $y = F(x)$ и $y = f(x)$ изображены на рис.:



Далее, согласно формулам п. 4.1 имеем

$$M(X)=\int_{-1}^{0}x(-2x)dx=-\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{0}=-\frac{2}{3};$$

$$D(X)=\int_{-1}^{0}x^2(-2x)dx-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=-\frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{0}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}.$$

5. Специальные виды дискретных распределений

5.1. Дискретная величина X с конечным перечнем значений $x_1, x_2, ..., x_n$ называется распределенной *равномерным* образом, если все ее значения равновероятны: $P(X = x_k) = p,\ k = 1,2,...,n.$ Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} p = 1 \quad \text{, то} \quad np = 1 \quad \text{или} \quad p = \frac{1}{n}.$$

Следовательно, ряд распределения X имеет вид

X	x_1	x_2	…	x_k	…	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$

Найдем числовые характеристики равномерного распределения:

$$M(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad D(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

Таким образом, *равномерно распределенная случайная величина имеет математическое ожидание, равное* в точности *среднему арифметическому* всех значений случайной величины, а дисперсия равна среднему квадратов значений величины минус квадрат ее среднего значения.

5.2. Рассмотрим задачу о выборке. Из N объектов, среди которых M меченых $(1 \le M \le N-1)$, случайным образом извлекается k объектов $(1 \le k \le N-1)$. В качестве случайной величины X рассмотрим число меченых объектов в извлеченной выборке. Ее значения $l \in \{0, 1, \ldots, \min(k, M)\}$. Как нетрудно проверить, соответствующая вероятность вычисляется в виде

$$P(X = l) = \frac{C_M^l \cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

Распределение такой дискретной случайной величины X называется *гипергеометрическим.* Можно доказать, что

$$M(X) = \frac{kM}{N}, \; D(X) = \frac{kM}{N-1}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

5.3.Пусть дискретная случайная величина X принимает значения, равные количеству появлений события A в n испытаниях, при условии, что в каждом вероятность p=$P(A)$ одна и та же; $q = 1 - p$ (схема Бернулли). Ее закон распределения называется *биномиальным*; соответствующий ряд распределения имеет вид

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Название распределения объясняется тем, что сумма всех вероятностей представляет собой сумму членов разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n = 1.$$

Биномиальный закон распределения широко используется при статистическом контроле качества продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и т.д.

Как оказывается, математическое ожидание биномиальной случайной величины X

$$M(X) = np\,,$$

а её дисперсия

$$D(X) = npq\,.$$

Установим, например, первое из соотношений. Согласно виду ряда распределения имеем математическое ожидание биномиальной величины

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}\,.$$

Заметим, что суммирование фактически производится по k=1,..., n , так как слагаемое, соответствующее значению k=0, обращается в ноль. Преобразуем полученную сумму следующим образом:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \cdot p \cdot p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

(общий множитель np вынесен за знак суммы). Перенумеровав члены (то есть заменив индекс суммирования $k-1$ на k), получаем

$$M(X) = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^{k} q^{(n-1)-k} =$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np \cdot 1 = np,$$

что и утверждалось.

Следующие два распределения относятся к случаю дискретных случайных величин с бесконечным перечнем значений.

5.4. Дискретная случайная величина X распределена *по закону Пуассона* с параметром λ, если она принимает значения $\{0,1,2,..., m,...\}$ с вероятностями

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (m = 0,1,2,...).$$

Закон Пуассона можно понимать как «предельный случай» (при $n \to \infty$, $\lambda = np = const$) биномиального закона. Записав в ряд распределения Пуассона

X	0	1	2	...	m	...
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

следует проверить, что в этом, «предельном» случае, сумма всех вероятностей остается равной единице. Итак, вычислим сумму ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \quad . \tag{5.1}$$

Использовав разложение экспоненты e^{λ} по степеням λ (ряд Маклорена)

$$e^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \quad ,$$

получаем сумму (5.1) в виде

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

что и требовалось установить.

Оперируя с суммами степенных рядов и обращаясь всё к тому же разложению Маклорена, можно доказать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают между собою и и равны параметру λ этого распределения:

$$M(X) = \lambda, \;\; D(X) = \lambda .$$

Так, например,

$$M(X) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

5.5. Пусть в каждом опыте событие A имеет одну и ту же вероятность $p = p(A), \;\; 0 < p < 1$ и $q = 1 - p$.

Пусть случайная величина X представляет собой число испытаний, проведенных до первого появления события A. Обозначим через p_m вероятность события, означающего, что при первых m–1 испытаниях A не произошло, а в m-ом – наступило:

$p_1 = p$ (событие A наступило уже в первом опыте);

$p_2 = p(\bar{A} \cdot A) = qp$ (событие A не наступило в первом опыте, но наступило во втором);

…

$$p_m = p(X = m) = p(\bar{A} \cdot \bar{A} \ldots \cdot \bar{A} \cdot A) = q^{m-1} p \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, дискретная случайная величина X имеет ряд распределения

X	1	2	3	...	m	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

Распределение X называется *геометрическим*; название объясняется тем, что вероятности p_m образуют бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q.

Докажем, что математическое ожидание случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, равно величине, обратной появлению события в одном испытании:

$$M(X) = \frac{1}{p} \qquad (5.2)$$

Имеем

$$M(X)=\sum_{m=1}^{\infty}x_m p_m=\sum_{m=1}^{\infty}mpq^{m-1}=p\sum_{m=1}^{\infty}\frac{dq^m}{dq}=p\frac{d}{dq}(\sum_{m=1}^{\infty}q^m)=$$

$$=p\frac{d}{dq}(\frac{q}{1-q})=p\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p},$$

(использована возможность почленного дифференцирования степенного ряда с общим членом q^m, $0<q<1$), что и утверждалось в (5.2).

Можно также доказать, что геометрически распределенная случайная величина X имеет дисперсию

$$D(X)=\frac{q}{p^2}.$$

5.6. Пример 1. Компания производит изделия, 4% из которых имеют отклонение от стандарта. Для контроля качества отбирают 200 изделий. Найти ожидаемое количество изделий с отклонениями от стандарта.

Решение. Имеем биномиальное распределение числа обнаруженных X нестандартных изделий, так как производится $n=200$ опытов, в каждом из которых событие обнаружения нестандартности имеет одну и ту же вероятность $p=0{,}04$. Ожидаемое (среднее) количество нестандартных изделий есть математическое ожидание $M(X)=np=200\cdot 0{,}04=8$.

Заметим, что непосредственное вычисление математического ожидания было бы связано в построением ряда распределения, содержащего 201 значение случайной величины и вычислением 201 вероятности !

Пример 2. Стрелок может попасть в мишень при каждом выстреле с вероятностью $p=\frac{1}{6}$. Какова вероятность того, что он попадет в мишень с третьего раза? Каково среднее число выстрелов, которые нужно сделать для поражения мишени?

Решение. Здесь случайная величина X – число выстрелов, сделанных до поражения мишени. Имеем геометрическое распределение с вероятностью

$p = \frac{1}{6}$ наступления события в каждом опыте и числом проведенных опытов m=3. Согласно результатам п. 5.5

$$p_3 = p(X = 3) = (1 - \frac{1}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{49}{216}.$$

Среднее число выстрелов есть математическое ожидание (5.2)

$$M(X) = \frac{1}{p} = 6.$$

Пример 3. В компании, сдающей на прокат две машины, каждодневный спрос на автомобили подчиняется распределению Пуассона и в среднем составляет 1,3 машины в день, при этом, машины используются в равной степени. Какова вероятность, что в любой из дней:

1) ни на одну машину не будет заказов;

2) на обе поступят заказы.

Решение. По условию число заказов X=k на машину в день есть ДСВ, распределенная по закону Пуассона, при этом количество k заказов может быть неограниченным. Вероятность поступления ровно k заказов вычисляется по формуле Пуассона, в которой параметр λ есть математическое ожидание величины X или ее среднее значение, которое, по условию, равно 1,3. Следовательно,

$$P(X = k) = \frac{1{,}3^k e^{-1{,}3}}{k!}, \ k = 0{,}1{,}2{,}3{,}...$$

В частности, если не заказан ни один автомобиль, то $X = 0$ и

$$P(X = 0) = \frac{1{,}3^0 e^{-1{,}3}}{0!} = e^{-1{,}3} \approx 0{,}27\,.$$

Если же на оба автомобиля поступили заказы, то число заказов $X \geq 2$ и

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) =$$

$$= 1 - (\frac{1{,}3^0 e^{-1{,}3}}{0!} + \frac{1{,}3^1 e^{-1{,}3}}{1!}) \approx 0{,}37$$

6. Равномерное и показательное распределения непрерывных случайных величин

6.1. Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *равномерному закону* на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке:

$$f(x)=\begin{cases} \nu, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b],\end{cases} \qquad \nu = const.$$

Воспользовавшись свойством нормированности, установим, что

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0\quad, & x\notin[a,b].\end{cases}$$

Действительно,

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b \nu\, dx = c(b-a), \text{ откуда } \nu=\frac{1}{b-a}.$$

Найдем теперь функцию распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\,.$$

Имеем, очевидно, при $x\le a$ значения функция распределения $F(x)=0$. При $a<x\le b$ получим:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_a^x\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}\,.$$

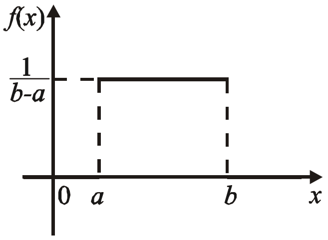
Наконец, при $x>b$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_a^b\frac{1}{b-a}dt+\int_a^x 0dt=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

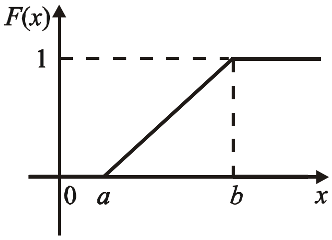
Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0\quad, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b.\end{cases},$$

Графики плотности и функции равномерного распределения изображены на следующем рисунке.



а)



б)

Установим теперь, что математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$ случайной величины вычисляются, соответственно, по формулам

$$M(X)=\frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Имеем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Второе соотношение (формула для дисперсии) доказывается аналогично:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

6.2. Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *показательному закону* с параметром $\lambda > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Функция (6.1) действительно может служить плотностью распределения, т.к. она, очевидно, неотрицательна и обладает свойством нормированности :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-\lambda x}dx=\lambda \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\left.e^{-\lambda x}\right|_0^A\right)=$$

$$=(\lim_{A\to\infty} e^{-\lambda A})-(-1)=0+1=1.$$

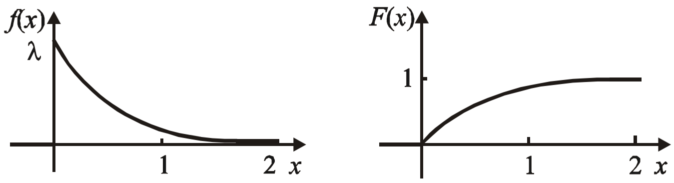
Найдем функцию распределения $F(x)$ случайной величины X. При $x \le 0$ имеем $F(x)$=0. При $x > 0$ получим:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt = 0 - \frac{\lambda}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^x = -(e^{-\lambda x} - e^0) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad , & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

Графики плотности и функции показательного распределения представлены на рис.



Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно проверить, что математическое ожидание и дисперсия показательно распределенной случайной величины имеют, соответственно, значения

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \text{и} \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Так, например,

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = -\lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} xde^{-\lambda x} =$$

$$= -\lim_{A\to\infty} (xe^{-\lambda x}\Big|_0^A - \int_0^A e^{-\lambda x} dx) = -\lim_{A\to\infty} (\frac{A}{e^{\lambda A}} - 0 +$$

$$+\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^A) = -\frac{1}{\lambda} \lim_{A\to\infty} (e^{-\lambda A} - 1) = \frac{1}{\lambda};$$

здесь предел вида

$$\lim_{A\to\infty} \frac{A}{e^{\lambda A}} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda A}} = 0$$

вычислен по правилу Лопиталя.

Из результатов п. 6.2 следует важное свойство: для случайной величины, распределенной по показательному закону, математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению, т.е.

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Показательный закон распределения обладает важным свойством, называемым отсутствием последействия: если промежуток времени T (случайная величина), распределенный по показательному закону, уже длился некоторое время τ, то это не влияет на распределение оставшейся части T–τ промежутка. Проиллюстрируем это свойство на следующем примере.

Пример 1. Установлено, что время работы прибора до первой поломки является случайной величиной T, распределенной по показательному закону с параметром λ.

Обозначим через A случайное событие, состоящее в том, что прибор будет работать безотказно на интервале $[0,t]$. Вероятность этого события

$$P(A)=P(T>t)=1-P(T\le t)=1-F(t)=1-(1-e^{-\lambda t})=e^{-\lambda t}.$$

Аналогично, если C – случайное событие, заключающееся в безотказной работе прибора на интервале времени $[0,t+\tau]$, то $P(C)=e^{-\lambda(t+\tau)}$.

Далее, пусть B– случайное событие, состоящее в том, что прибор будет безотказно работать на интервале времени $[t,t+\tau]$.Из определения случайных событий A, B и C следует, что $C=A\cdot B$. Тогда $P(C)=P(A)P_A(B)$. Найдем теперь $P_A(B)$, то есть условную вероятность того, что прибор будет безотказно работать на интервале $[t,t+\tau]$ при условии, что он уже проработал безотказно на интервале $[0,t]$. Имеем

$$P_A(B)=\frac{P(C)}{P(A)}=\frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}}=e^{-\lambda\tau}.$$

Полученное значение вероятности оказалось не зависящем от t; следовательно событие B не зависит от A. Другими словами, вероятность безотказной работы прибора на промежутке времени $[t,t+\tau]$ зависит только от длины этого промежутка τ, и не зависит от того, сколько времени прибор проработал до этого.

Пример 2. Сегмент $[a,b]$ оси OX представляет (моделирует) собою шкалу некоторого прибора, причем вероятность попадания указателя в некоторый отрезок шкалы пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его места на шкале. Проверить, что случайная величина X – отметка указателя прибора, распределена по равномерному закону и найти вероятность того, что при испытании указатель остановится на отметке в правой половине шкалы прибора.

Решение. Имеем непрерывную случайную величину X, распределенную на отрезке $[a,b]$. По условию, для любых двух точек x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ отрезка $[a,b]$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = k(x_2 - x_1),$$

где k - постоянный коэффициент пропорциональности. В частности,

$$1 = P(a \le X \le b) = k(b-a) \quad \text{, откуда находим } k = \frac{1}{b-a},$$

и, следовательно,

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{b-a}(x_2 - x_1) \qquad (6.2)$$

Теперь построим функцию распределения $F(x) = P(X < x)$. Поскольку случайная величина X распределена на отрезке $[a,b]$, то

$$F(x) = 0 \qquad \text{при } x \le a \qquad (6.3)$$

и

$$F(x) = P(X < x) = P(X \le b) = 1 \text{ при } x > b. \qquad (6.4)$$

Далее, согласно (6.2)

$$F(x) = P(X < x) = P(a \le X \le x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad a < x \le b. \qquad (6.5)$$

Согласно соотношениям (6.3) - (6.5) полученная функция распределения совпала с функцией равномерного распределения, что и достаточно было установить.

Далее, случайное событие A – расположение указателя в правой половине шкалы прибора, означает выполнение неравенства $\frac{a+b}{2} < X \le b$, так что соответствующая вероятность может быть вычислена в виде

$$P(A) = \frac{1}{b-a}(b - \frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2}.$$

7. Нормальное распределение

7.1. Непрерывная случайная величина X называется распределенной по *нормальному закону* с параметрами a и $\sigma > 0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (7.1)$$

Функция (7.1) действительно может служить плотностью некоторого распределения, т.к. она, очевидно, неотрицательна и обладает свойством нормированности. Проверим последнее свойство, воспользовавшись значением несобственного интеграла, называемого интеграла Эйлера-Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}\ . \qquad (7.2)$$

С помощью замены переменной $t = \frac{x-a}{\sigma}$ получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = 1,$$

что и утверждалось.

Если в (7.1) $a=0$ и $\sigma=1$, т.е.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

то говорят, что имеется стандартное нормальное распределение; его плотность совпадает с функцией Лапласа $\varphi(x)$, см. п. 10.1 главы 2.

Установим, что соответствующая функция распределения

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

выражается через интегральную функцию Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt \tag{7.2}$$

следующим образом:

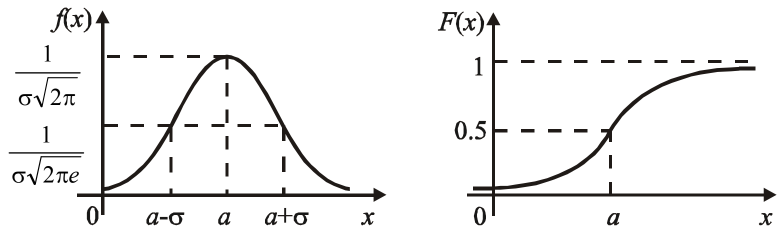
$$F(x)=0{,}5+\Phi(\frac{x-a}{\sigma}). \tag{7.3}$$

Действительно, с помощью вводимой ранее замены переменных $t=\dfrac{x-a}{\sigma}$, получаем

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{x-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\quad; \tag{7.4}$$

При этом первое слагаемое в сумме (7.3) есть «половина от значения» интеграла (7.1), поскольку (7.1) есть интеграл от четной функции по симметричному промежутку. Итак, первое слагаемое в (7.4) равно ½, а второе – значение интегральной функции Лапласа в точке $\dfrac{x-a}{\sigma}$, чем и доказано (7.3).

Графики плотности (7.1) и функции (7.4) нормального распределения представлены на рис.



а) б)

Кривую, изображенную на рисунке а), называют *нормальной* или *гауссовой* кривой. Отметим, что нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a$ и имеет максимум в точке $x = a$, равный $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$, а также имеет точки перегиба $x = a \pm \sigma$ с ординатой $1/(\sigma\sqrt{2\pi e})$.

Выясним, как будет меняться нормальная кривая при изменении параметров a и σ. Если параметр σ остается постоянным, но меняется параметр a, то нормальная кривая смещается вдоль оси абсцисс, не меняя формы. Если параметр a остается постоянным, но меняется σ, то меняется ордината максимума кривой $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$. При уменьшении σ (т.е. при уменьшении рассеяния случайной величины), ордината точки максимума увеличивается. Но так как площадь под любой кривой распределения должна оставаться равной единице, то кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с боков. При увеличении параметра σ наблюдается обратная картина. Таким образом, параметр a определяет положение, а параметр σ – форму нормальной кривой.

7.2. Вероятность попадания значений случайной величины X, распределенной по нормальному закону, в промежуток (α, β) может быть вычислена в виде

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}).$$

Действительно, если воспользоваться видом функции распределения (7.3), то получим

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 0{,}5 + \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - (0{,}5 + \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})) =$$

$$= \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}),$$

что и утверждалось.

7.3. Из результата п. 7.2 вытекает следующее утверждение о вероятности малого отклонения значений нормальной величины от параметра *a*: для любого $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$P(| X - a | < \varepsilon) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Для доказательства запишем неравенство $| X - a | < \varepsilon$ в равносильном виде $a - \varepsilon < X < a + \varepsilon$. Тогда, ввиду нечетности функции Лапласа, будем иметь

$$P(a - \varepsilon < X < a + \varepsilon) = \Phi(\frac{a + \varepsilon - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{a - \varepsilon - a}{\sigma}) =$$

$$= \Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}),$$

что и требовалось доказать.

В частности при $\varepsilon = 3\sigma$ получаем так называемое правило «трех сигм»

$$P(| X - a | < 3\varepsilon) = 2\Phi(\frac{3\varepsilon}{\sigma}) = 2\Phi(3) \approx 0{,}9973.$$

Смысл его состоит в следующем: практически достоверно, что абсолютная величина отклонения значений нормально распределенной *X* от параметра *a* меньше утроенного значения σ.

7.4. Вероятностный смысл параметров a и σ проясняется в следующем утверждении.

Нормально распределенная случайная величина имеет математическое ожидание

$$M(X) = a$$

и дисперсию

$$D(X) = \sigma^2.$$

Докажем, например, первое из соотношений. Используя снова замену переменной $t = \dfrac{x-a}{\sigma}$, получим

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma t) \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} dt =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-t^2}{2}} dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{\frac{-t^2}{2}} dt = a \cdot 1 + 0 = a$$

(использовано соотношение (7.2) и свойство равенства нулю интеграла по симметричному промежутку от нечетной функции), что и утверждалось.

Замечание. Понятие эксцесса, введенное выше (пп. 1.6, 4.4) служит одним из параметров, определяющих отличие распределения случайной величины X от нормального распределения, которое наиболее часто используется в теории вероятностей и в математической статистике. По этой причине нормальная кривая стала своего рода эталоном, с которым сравнивают другие распределения. У нормального распределения, как нетрудно проверить , эксцесс $E_x = 0.$ Если $E_x > 0$, то это означает, что график плотности вероятностей $y = f(x)$ сильнее «заострен», чем у нормального распределения, если же $E_x < 0$, то «заостренность» графика $y = f(x)$ меньше, чем у нормального распределения.

7.5. Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Объясняется это тем, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях. Именно, если случайная величина X представляет собой сумму большого числа взаимно независимых случайных величин $X = X_1 + ... + X_n$ (то есть значения X складываются из значений случайных величин X_k, $k = 1,2,...,n$, распределение каждой из которых не зависит от значений, принимаемых остальными случайными величинами), то при весьма общих условиях закон распределения случайной величины X

близок к нормальному. Условиям, при которых возникает нормальный закон распределения, посвящен ряд теорем, называемых *центральной предельной теоремой*. Смысл этих условий состоит в том, что «удельный вес» каждого отдельного слагаемого должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых. Например, если X – производственная погрешность, то на неё влияют множество факторов (погрешность материала, погрешность станка, инструмента и т.д.), причем если ни одна из этих погрешностей не является определяющей, то случайная величина X имеет закон распределения, близкий к нормальному.

6.6. Пример 1. Найти математическое ожидание нормально распределенной случайной величины с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}x^2 - x - 2}.$$

Решение. Выделяя полный квадрат в показателе степени, имеем

$$-\frac{1}{8}x^2 - x - 2 = -\frac{1}{8}(x^2 + 8x + 16) = -\frac{1}{8}(x+4)^2.$$

Теперь

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\cdot 2^2}(x+4)^2}$$

и сравнивая эту запись с видом плотности нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

имеем параметр $a = -4$, и, следовательно, искомое математическое ожидание $M(X) = -4$.

Пример 2. Производится измерение длины деталей без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 0,4 см. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 0,3 см.

Решение. Ошибок систематических, т.е. ошибок одного знака нет, следовательно, математическое ожидание случайных ошибок равно нулю. Здесь применима формула

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}) \text{ при } a=0,\ \sigma=0{,}4 \ \text{ и } \varepsilon=0{,}3.$$

Получим

$$P(|X|<0{,}3)=2\Phi(\frac{0{,}3}{0{,}4})=2\Phi(0{,}75)\approx 2\cdot 0{,}2734=0{,}5468.$$

КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1. Теоретические упражнения

1. Постоянную величину C будем рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую единственное значение C с вероятностью p=1. Доказать, что $M(C)=0$ и $D(C)=0$.

2. Пусть C – постоянная величина, $C\neq 0.$ Дискретную случайную величину CX определим как величину со значениями Cx_k, соответствующие вероятности которых, очевидно, будут равны $p_k=p(X=x_k)$, $k=1,2,...$. Пусть, далее , X некоторая НСВ; непрерывную случайную величину CX определим как величину со значениями Cx (где x – любое возможное значение величины X) и плотностью вероятности $f(x)$ той же, что и плотность вероятности величины X. В обоих случаях (т.е. в случаях ДСВ и НСВ) доказать, что

$$M(CX)=CM(X) \quad \text{и} \quad D(CX)=C^2D(X).$$

3. Радиус X круга измерен приближенно. Считая X непрерывной случайной величиной, распределенной в интервале $[a,b]$, найти математическое ожидание и дисперсию длины окружности.

4. Возможно ли, чтобы плотность распределения была равна 1 на промежутке (-0,5, 0,7)?

5. Может ли плотность распределения принять значение, равное 1,1?

6. Может ли функция $F(x)=1-e^{-|x|}$ быть функцией какого-либо распределения? Может ли вообще четная функция быть функцией какого-либо распределения?

7. Если плотность распределения $f(x)$ – четна, то чему равен несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx \quad ?$$

8. Может ли плотность распределения быть нечетной?

9. Доказать, что функция $f(x)=e^{-ax^2+bx+c}$, где $a>0, b$ и c – некоторые заданные постоянные величины, служит плотностью случайной величины βX, где β – некоторая постоянная, а X распределена нормально. Найти (выразить через a, b и c) математическое ожидание и дисперсию величины βX.

10. Найти характеристики положения (моду, медиану, математическое ожидание) случайной величины *X*, распределенной по закону Рэлея

$$F(x)=1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (x \ge 0;\ \sigma > 0).$$

Указание: при нахождении медианы Me следует учесть, что $P(X<Me)=F(Me)=\frac{1}{2}$, а при нахождении математического ожидания $M(X)$ использовать метод интегрирования по частям и значение интеграла Эйлера-Пуассона (7.2).

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента при включении равна 0,2. Составить ряд распределения числа элементов, отказавших при включении. Найти вероятность того, что откажет не более одного элемента.

2. Три стрелка стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,5, для второго и для третьего – по 0,7. Пусть X - число попаданий в мишень при одном залпе. Составить ряд распределения X, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3. В пачке из 10 театральных билетов три билета – на премьеру. Наудачу взяты 3 билета. Составить ряд распределения случайной величины X - числа билетов на премьеру среди отобранных. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых билетов окажется на премьеру.

4. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,6. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадет в первый раз в мишень. Составить ряд распределения случайной величины X - числа патронов, выданных стрелку.

5. Испытывается 3 блока компьютера, причем вероятность отказа каждого не зависит от отказов остальных и составляет 0,1. Пусть X - число отказавших за время испытаний блоков. Составить ряд распределения величины X, найти ее математическое ожидание и дисперсию и вычислить вероятности событий: а) $X = 0$; б) $X < 3$.

6. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,5. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X) = 4$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 2$.

7. Случайная величина X задана на всей числовой оси функцией

распределения $F(x) = \dfrac{2}{\pi} arctg\, x.$ Найти

а) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в промежутке [-1; 0];

б) плотность распределения $f(x)$.

8. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения)

$$F(x)=\begin{cases}0, \ x\le 0\\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{x}{6}, 0<x\le 3\\ 1, \ x>3\end{cases} \quad .$$

Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность распределения);

б) математическое ожидание;

в) среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

г) вероятность попадания значений X в интервал $(-1;1)$.

9. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \nu\sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Найти значение параметра ν, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

10. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma=0{,}4$. Найти вероятность того, что дважды в трех испытаниях отклонение X от ее математического ожидания будет меньше 0,3.

Глава 3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1.Основные понятия математической статистики

1.1. Математическая статистика – это раздел математики, занимающийся систематизацией и обработкой результатов опытов и наблюдений, а также построением и проверкой подходящих стохастических моделей. В отличие от теории вероятностей, которая изучает случайные явления на теоретическом уровне, не прибегая к эксперименту, математическая статистика позволяет находить закономерности в конкретных данных, и идет от эксперимента (наблюдения) к построению вероятностной модели и её проверке.

Статистические данные понимаются как сведения о числе объектов в какой-либо достаточно обширной совокупности, обладающих теми или иными признаками. При большом числе наблюдений случайные воздействия на признак в значительной мере нейтрализуются, и получаемый результат оказывается предсказуемым (неслучайным). Этот принцип и является основой для практического использования статистических методов исследования. По сравнению с индивидуальным описанием объектов, статистические данные всегда обезличены, однако они позволяют изучать закономерности массовых явлений, прогнозировать их характеристики и воздействовать на них.

Широкому внедрению математико-статистических методов обработки данных способствовало появление электронных вычислительных машин. Соответствующие программные пакеты сделали статистические методы более доступными и наглядными. Они освободили исследователя от рутинной работы по расчету характеристик, построению таблиц и графиков, на его долю осталась творческая работа – постановка задачи и интерпретация результатов.

В практике статистических наблюдений различают два вида обследований: *сплошное*, когда обследуют каждый из объектов совокупности (например, перепись населения страны), и выборочное, когда исследуется часть объектов (например, для контроля качества проверяется часть изделий из выпущенной партии). На практике сплошное наблюдение применяют крайне редко, так как оно требует существенно больших затрат ресурсов по сравнению с выборочным. Кроме того, выборочное наблюдение является единственно возможным в случаях, когда наблюдаемая совокупность является бесконечной, или в случае, когда исследование объекта приводит к его уничтожению (например, исследование долговечности работы прибора).

1.2. *Генеральной совокупностью* называется вся подлежащая изучению совокупность объектов (наблюдений). Как правило, изучению подлежит некоторый количественный признак генеральной совокупности. В классической модели он рассматривается как одномерная случайная величина X с частично или полностью неизвестной нам функцией распределения вероятностей $F(x)$. Проведя n независимых испытаний (или измерений) получим набор случайных величин $(X_1, X_2, \ldots X_n)$, называемый *выборкой*. Каждая из этих случайных величин X_i имеет тот же закон распределения $F(x)$, что и случайная величина X, В серии уже проведенных экспериментов выборка – это набор чисел $(x_1, x_1, \ldots x_n)$. Однако, если серию экспериментов провести ещё раз, то получим уже другой набор чисел. Различные наблюдаемые значения признака называют *вариантами* (обозначаем их через x_i).

Объемом совокупности (выборочной или генеральной) называется число объектов в этой совокупности. Если объем генеральной совокупности достаточно велик, и его дальнейшее увеличение не сказывается на результатах обработки выборки, то допускают, что генеральная совокупность состоит из бесчисленного множества объектов. Методы математической статистики позволяют по изучению некоторой части генеральной совокупности (выборки) выносить суждение об её свойствах в целом.

При составлении выборки возможны два способа: после того, как объект отобран и над ним произведено наблюдение, он может быть возвращен либо не возвращен в генеральную совокупность. *Повторной* называют выборку, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность. *Бесповторной* называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается. На практике обычно пользуются бесповторным случайным отбором. Если генеральная совокупность содержит бесконечное число объектов, а выборка конечна, то различие между повторной и бесповторной выборкой исчезает.

Для того, чтобы выборка позволяла правильно судить о генеральной совокупности, она достаточно хорошо воспроизводить её пропорции. Выборка, обладающая таким свойством, называется *репрезентативной*. В силу закона больших чисел, если каждый объект выборки будет отобран случайным образом, то выборка будет являться репрезентативной. На практике случайность отбора достигается тем, что извлечение объектов в выборку проводится путем жеребьевки или с помощью датчика случайных чисел. Существуют различные методики отбора, которые применяются в зависимости от конкретной ситуации.

2. Вариационные ряды и их графическое изображение

2.1. Рассмотрим произведенную выборку $(x_1, x_1, \ldots x_n)$ объема n. Если среди чисел x_i есть одинаковые, то, как правило, их записывают один раз, и приписывают каждому из них число вхождений в выборку n_i, называемое *частотой*; тогда объем выборки можно определить как n=Σ$n_{i.}$. Отношение частот к объему выборки $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ называют *относительными частотами*. Последовательность вариант, записанных в порядке возрастания или убывания с соответствующими им частотами (или относительными частотами) называется *вариационным рядом*.

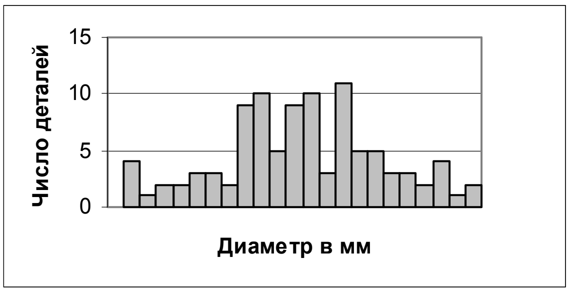
Пример 1**.** В результате 20 испытаний были получены данные (3, 2, 5, 4, 5, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 4, 5, 2, 2, 3, 5, 4). Записать их в виде вариационного ряда.
Решение. Имеем 4 варианты, расположив их в порядке возрастания, получим: $x_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 5$. Для каждой варианты определяем частоту n_i - количество вхождений в выборку. Получим следующий вариационный ряд:

x_i	2	3	4	5
n_i	3	5	5	7

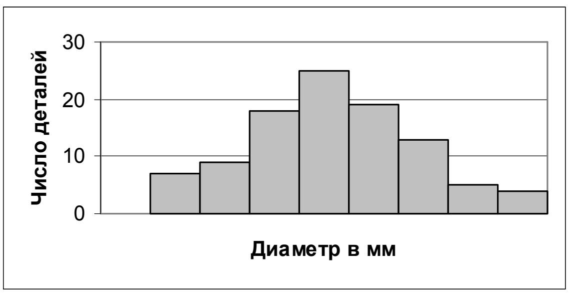
Вариационный ряд называется *дискретным*, если любые его варианты отличаются на постоянную величину, и *непрерывным*, если его значения могут отличаться одно от другого на сколь угодно малую величину. Пример дискретного вариационного ряда – отметки по математике у случайно отобранных студентов курса. В качестве примера непрерывного вариационного ряда можно привести измерение диаметра некоторой детали при статистическом исследовании массовой продукции.

2.2. При большом числе наблюдений *n* из соображений простоты и наглядности варианты разбивают на отдельные интервалы, то есть производят их *группировку*. Обычно группировка по интервалам, в каждый из которых попадает не более 15-20 % значений выборки, оказывается достаточной для полного выявления существенных свойств распределения и надежного вычисления по сгруппированным данным основных характеристик распределения. Согласно формуле Стерджесса (эта формула не является единственно возможной), рекомендуемое число интервалов $m = 1 + 3.322 \lg n$ (округляя сверху до целого, получим, например, *m*=7 при *n*=50; *m*=8 при *n*=100; *m*=9 при *n*=200). Для интервального вариационного ряда *частотами* n_i называются числа, показывающие, сколько раз встречаются варианты из данного интервала.

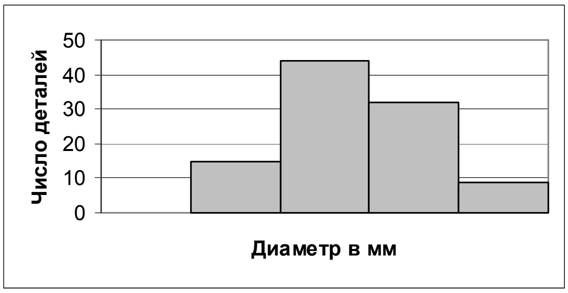
Для наглядного изображения интервальных вариационных рядов используют *гистограмму*, представляющую собой ступенчатую фигуру из прямоугольников с основаниями, равными интервалам значений признака (x_{i-1}, x_i), и высотами, равными частотам n_i (или относительным частотам w_i) интервалов. Гистограмма, составленная на основе группировки с маленькими интервалами, обычно многовершинная и не отражает наглядно характер распределения, а при слишком крупных интервалах теряется точность при вычислении характеристик распределения. В качестве примера на рисунках а, б, в приведены гистограммы, распределения 100 диаметров некоторой детали (в мм) при длине интервала группировки 0,5 мм; те же данные при длине интервала группировки 1,5 мм, и при длине интервала группировки 3 мм. Как видим, именно на рис., где имеется 8 интервалов группировки, получена наиболее ясная картина характера распределения наблюдаемой величины.



а)



б)



в)

Полигон, как правило, служит для изображения дискретного вариационного ряда, и представляет собой ломаную, в которой концы отрезков имеют координаты (x_i, n_i) или (x_i, w_i).

2.3. Весьма важным является понятие эмпирической функции распределения. Для её определения введем сначала понятие *накопленной частоты* (обозначаем $n_x^{нак}$) – это количество вариантов со значениями признака, меньшим x. Отношение накопленной частоты $n_x^{нак}$ к общему числу наблюдений n называют накопленной относительной частотой $w_x^{нак}$. *Эмпирической функцией распределения* называют функцию $F_n^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$, или, по определению, $F_n^*(x) = w_x^{нак}$.

Эмпирическая функция распределения определяется выборочными данными, и этим она отличается от функции распределения $F(x)$ генеральной совокупности. В то же время она сохраняет основные свойства функции распределения: её значения заключены между 0 и 1, и она является невозрастающей. Из свойства устойчивости относительной частоты следует, что ь эмпирическая функция распределения $F_n^*(x)$, стремится по вероятности к вероятности этого же события, то есть к функции теоретического распределения $F(x)$. Следовательно, при больших n эмпирическая функция распределения может быть использована для приближенного представления интегральной функции распределения генеральной совокупности. Заметим, что для дискретного вариационного ряда эмпирическая функция распределения является разрывной, а для интервального вариационного ряда - непрерывной. В заключение приведем пример, иллюстрирующий эти понятия.

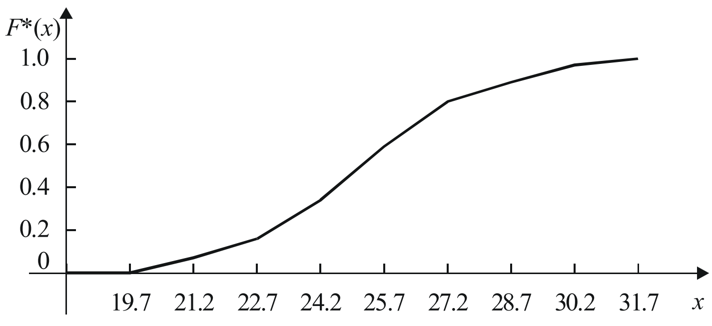
Пример 2**.** Построить эмпирическую функцию распределения для вариационного ряда (гистограмма для этого вариационного ряда приведена выше на рис. б).

Размеры деталей x	19,7-21,2	21,2-22,7	22,7-24,2	24,2-25,7	25,7-27,2	27,2-28,7	28,7-30,2	30,2-31,7
Кол-во n_i	7	9	18	25	21	9	8	3

Объем выборки $n = \sum_{i=1}^{m} n_i = 100$. Вычислим относительную частоту w_i, накопленную частоту $n_i^{нак}$ и накопленную относительную частоту $w_i^{нак}$.

w_i	0,07	0,09	0,18	0,25	0.21	0,09	0.08	0,03
$n_i^{нак}$	7	16	34	59	80	89	97	100
$w_i^{нак}$	0,07	0,16	0,34	0,59	0,80	0,89	0,97	1,00

По последней строке таблицы строим график эмпирической функции распределения.



3. Основные числовые характеристики вариационного ряда

3.1. Средние величины характеризуют значения признака, вокруг которого концентрируются наблюдения, или, как говорят, центральную тенденцию распределения. Наиболее распространенной из средних величин является выборочная средняя, или средняя арифметическая вариационного ряда.

Определение 1. *Выборочной средней* $\overline{X}_B$ называют среднее арифметическое значений признака выборочной совокупности:

$$\overline{X}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}.$$

Следует понимать, что до проведения наблюдений, когда заранее неизвестно, какими они будут, $\overline{X}_B$ рассматривается как случайная величина. После проведения наблюдений, когда получены конкретные значения, выборочная средняя становится уже неслучайной величиной (числом). В этом случае её обозначают $\bar{x}_B$. Если все значения $x_1, x_2, .., x_n$ признака выборки объема n различны, то

$$\bar{x}_B = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n}$$

Если же значения признака $x_1, x_2, .., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..,$ n_k, причем $n = \Sigma n_i$, то

$$\bar{x}_B = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ...n_k x_k}{n}$$

Укажем, что для интервального вариационного ряда в качестве значений x_i берут середины соответствующих интервалов. Отметим основные свойства выборочной средней, аналогичные свойствам математического ожидания случайной величины.

1. Выборочная средняя постоянной равна самой этой постоянной.

2. Если все варианты умножить на какую-либо постоянную, то выборочная средняя также должна быть умножена на эту постоянную:

$$\overline{Cx}_B = C\overline{x}_B,$$

что легко следует из соотношения

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(Cx_i)n_i}{n} = C\frac{\sum_{i=1}^{m}x_i n_i}{n}.$$

3. Если ко всем вариантам прибавить какую-либо постоянную, то к выборочной средней также должна быть прибавлена эта постоянная:

$$\overline{C+x}_B = C + \overline{x}_B$$

поскольку

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(C+x_i)n_i}{n} = C\frac{\sum_{i=1}^{m}n_i}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{m}x_i n_i}{n} = C + \frac{\sum_{i=1}^{m}x_i n_i}{n}.$$

3.2. В статистическом анализе применяются также и другие средние характеристики, наиболее распространенные из них – мода и медиана. *Медианой* Me_B вариационного ряда называется значение признака, приходящееся на середину ранжированного ряда наблюдений. Достоинство медианы как меры центральной тенденции состоит в том, что на неё не влияет изменение крайних членов вариационного ряда. Медиана предпочтительнее выборочной средней для ряда, у которого крайние варианты по сравнению с остальными оказались чрезмерно большими или чрезмерно малыми.

Модой Mo_B вариационного ряда называется вариант, которому соответствует наибольшая частота. Отметим, что аналогично выборочной средней, до проведения наблюдений мода и медиана рассматриваются как случайные величины, а после проведения испытаний они уже являются неслучайными величинами (числами).

Пример 1**.** Вычислить выборочную среднюю для вариационного ряда из примера 1 параграфа 2.

Решение. Здесь объем выборки $n = 20$. Получаем

$$\bar{x}_B = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 5 + 4\cdot 5 + 5\cdot 7}{20} = \frac{76}{20} = 3{,}8\,.$$

Пример 2. Вычислить выборочную среднюю для вариационного ряда из примера 2 параграфа 2.

Решение. Здесь объем выборки $n = \sum_{1}^{m} n_i = 100$. Вычисляем среднюю выборочную, взяв в качестве вариант x_i середины интервалов.

$$\bar{x}_B = (20{,}45\cdot 7 + 21{,}95\cdot 9 + 23{,}45\cdot 18 + 24{,}95\cdot 25 + 26{,}45\cdot 21 + \\ + 27{,}95\cdot 9 + 29{,}45\cdot 8 + 30{,}95\cdot 3)/100 = 25{,}22.$$

3.3. Рассмотренные нами средние величины не отражают изменчивости (вариации) значений признака. Простейшим, но весьма приближенным показателем вариации является *вариационный размах* R, равный разности между наибольшим и наименьшим вариантами ряда $R = x_{\max} - x_{\min}$. Наибольший интерес представляют меры вариации (рассеяния) наблюдаемых значений количественного признака выборки вокруг средней выборочной.

Определение 2. *Выборочной дисперсией* D_B называется среднее арифметической квадратов отклонения компонент выборки от выборочной средней

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X}_B)^2}{n}.$$

Определенная таким образом выборочная дисперсия является случайной величиной. После проведения испытаний, когда имеется конкретная реализация выборки, выборочная дисперсия, называемая также дисперсией вариационного ряда, становится неслучайной величиной, и может быть вычислена для несгруппированного вариационного ряда по формуле

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_B)^2}{n}.$$

Если же значения признака $x_1, x_2, .., x_k$ имеют соответственно частоты $n_1, n_2, ..,$ n_k, причем $n=\Sigma n_i$, то

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}.$$

Приведем основные свойства выборочной дисперсии, аналогичные свойствам дисперсии случайной величины. Указанные свойства будут также иметь место, если вместо вариант x_i рассматривать случайные величины X_i.

1. Дисперсия постоянной равна нулю.
2. Если все варианты умножить на одно и то же число C, то выборочная дисперсия должна быть умножена на C^2:

$$D_B(Cx) = C^2 D_B(x).$$

Действительно,

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(Cx_i - \overline{Cx}_B)^2 n_i}{n} = C^2 \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n}.$$

3. Если ко всем вариантам прибавить одно и то же число C, то выборочная дисперсия не изменится:

$$D_B(C + x) = D_B(x),$$

поскольку

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}(C + x_i - \overline{C + x}_B)^2 n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n}.$$

4. Выборочная дисперсия равна разности между средней квадратов вариантов и квадратом средней выборочной:

$$D_B = \overline{x^2} - \overline{x}_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x}_B)^2 \ .$$

В самом деле,

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x}_B)^2 n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i}{n} - 2\overline{x}_B \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} + \overline{x}_B^2 \frac{\sum_{i=1}^{m} n_i}{n} =$$

$$= \overline{x^2} - 2\overline{x}_B \cdot \overline{x}_B + \overline{x}_B^2 \frac{n}{n} = \overline{x^2} - (\overline{x}_B)^2.$$

Кроме дисперсии для характеристики рассеяния используется *выборочное среднеквадратическое (стандартное) отклонение* $s = \sqrt{D_B}$. Его преимущество перед дисперсией состоит в том, что оно имеет то же единицы измерения, что и значения признака:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}} \ .$$

Пример. Вычислить выборочную дисперсию и выборочное среднеквадратическое отклонение для вариационного ряда из примера 2 параграфа 2.Решение. Для нахождения дисперсии учтем полученное в примере 4 значение выборочной средней $\overline{x}_B = 25{,}22$; имеем

$$D_B = (20{,}45^2 \cdot 7 + 21{,}95^2 \cdot 9 + 23{,}45^2 \cdot 18 + 24{,}95^2 \cdot 25 + 26{,}45^2 \cdot 21 +$$
$$+ 27{,}95^2 \cdot 9 + 29{,}45^2 \cdot 8 + 30{,}95^2 \cdot 3)/100 - 25{,}22^2 = 6{,}5421.$$

Найдем выборочное среднеквадратическое отклонение

$$s = \sqrt{D_B} = \sqrt{6{,}5421} \approx 2{,}56 .$$

4. Статистические оценки параметров распределения

4.1 Предположим, что нас интересует неизвестное значение θ некоторого параметра, характеризующего количественный признак X генеральной совокупности. Оценкой параметра θ называют значения θ^* некоторой функции от наблюдаемых (в выборках) значений, дающие первоначальное представление о величине θ.

Точечной оценкой параметра θ называют оценку, которая определяется одним числом; так, например, точечной оценкой математического ожидания $\mu = M(X)$ количественного признака X генеральной совокупности есть значение выборочной средней.

4.2.Пусть известен вид функции распределения $F(x,\theta)$ количественного признака X генеральной совокупности, но единственный параметр распределения θ остается неизвестным. Для его оценки достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра. Поскольку математическое ожидание μ случайной величины X также зависит от этого параметра, т.е. $\mu = M(X,\theta)$, то имеем (см. п. 8.1) следующее приближенное равенство для нахождения θ:

$$\overline{x}_B \approx M(X,\theta)$$

Если функция распределения определяется двумя неизвестными параметрами, то есть имеет вид $F(x,\theta_1,\theta_2)$, то для их оценки необходимы два уравнения. В этом случае следует пользоваться системой двух приближенных равенств

$$\begin{cases} \overline{x}_B \approx M(X,\theta_1,\theta_2) \\ D_B \approx D(X,\theta_1,\theta_2) \end{cases}.$$

Указанный способ нахождения неизвестных параметров распределения называется методом моментов.

Найдем, например, методом моментов оценку параметров a и b равномерного распределения равномерно распределенного количественного признака генеральной совокупности. Имеем систему

$$\begin{cases} \overline{x}_B \approx M(X,a,b) \\ D_B \approx D(X,a,b) \end{cases},$$

или, учитывая, что для равномерного распределения

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \text{ и } D(X) = \frac{(b-a)^2}{12},$$

имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b) \approx \overline{x}_B \\ \frac{1}{12}(b-a)^2 \approx D_B \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим искомые оценки

$$a^* = \overline{x}_B - \sigma_B\sqrt{3},\ b^* = \overline{x}_B + \sigma_B\sqrt{3}, \text{ где } \sigma_B = \sqrt{D_B}.$$

4.3. ***Интервальной называют оценку***, которая определяется двумя числами –концами интервала. Надежностью (доверительной вероятностью) оценки θ^* называют вероятность γ, с которой отклонение $|\theta - \theta^*|$ оказывается заданно малым.

Наиболее часто задают надежность, равную 0,95; 0,99; 0,995. Интервал $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ называют доверительным интервалом для оценки параметра θ

Рассмотрим так называемые доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения при известном среднем квадратическом отклонении σ . Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределен с плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(нормальное распределение); здесь параметр *a* есть значение математического ожидания, а σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*. Предположим, что среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, и извлечена выборка объема *n*. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание *a* по выборочной средней с заданной надежностью γ. Если

$$P(|\overline{x}_B - a| < \delta) = \gamma,$$

то значение δ (радиус доверительного интервала) определяется в виде $\delta = t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, где число *t* может быть найдено из соотношения $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$, по табл. 1 Приложений. Следовательно, с надежностью γ доверительный интервал

$$\left(\overline{x}_B - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x}_B + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

покрывает неизвестный параметр *a*; точность оценки есть $\delta = t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

5. Математическая статистика: типовые задачи

Задача1. Из генеральной совокупности извлечена выборка. Известен вариационный ряд

x_i	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	25	40	15	10

Указать размах варьирования, моду, медиану вариационного ряда. Найти: а) выборочную среднюю; б) выборочную дисперсию.

Р е ш е н и е . Размах

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 1{,}5 - 1{,}1 = 0{,}4.$$

Мода Mо=1,3, т.к. эта варианта обладает наибольшей частотой, равной 40. Медиана mе=1,3, поскольку эта варианта расположена в середине вариационного ряда.

Объем выборки

$$n = 10 + 25 + 40 + 15 + 10 = 100.$$

а) Имеем

$$\overline{x}_{в} = 1{,}1 \cdot \frac{10}{100} + 1{,}2 \cdot \frac{25}{100} + 1{,}3 \cdot \frac{40}{100} + 1{,}4 \cdot \frac{15}{100} + 1{,}5 \cdot \frac{10}{100} = 1{,}29.$$

б) Согласно п. 3.3

$$D_B = (1{,}1)^2 \cdot 0{,}1 + (1{,}2)^2 \cdot 0{,}25 + (1{,}3)^2 \cdot 0{,}4 + (1{,}4)^2 \cdot 0{,}15 +$$

$$+ (1{,}5)^2 \cdot 0{,}1 - (1{,}29)^2 = 0{,}0319.$$

Задача 2. Случайная величина X имеет нормальное распределение с известным средним квадратичным отклонением $\sigma = 4$. Найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a по выборочной средней $\overline{x}_{в}$ =3,6, если объем выборки n =64 и задана надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$. По табл. 1 Прил. находим $t = 1{,}96$. Найдем точность оценки $\delta = \frac{1{,}96 \cdot 4}{\sqrt{64}} = 0{,}98$. Следовательно, доверительный интервал имеет вид (3,6 – 0,98; 3,6 + 0,98). Иначе говоря, с надежностью $\gamma = 0{,}95$ имеет место неравенство $2{,}62 < a < 4{,}58$.

КОНТРОЛЬНЫЙ МОДУЛЬ

1. Из генеральной совокупности металлических шайб сделана выборка. Известны внутренние диаметры x_i и частоты n_i этих значений в выборочной

совокупности. Найти выборочную среднюю и выборочное средне-квадратическое отклонение (размеры даны в миллиметрах).

1.1.

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
n_i	10	26	12	18	16	18

1.2.

x_i	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
n_i	18	10	16	24	24	8

1.3.

x_i	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
n_i	5	10	30	25	15	5	10

2. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания а нормального распределения с надежностью γ, зная выборочную среднюю $\overline{x}_B$, объем выборки n и среднее квадратичное отклонение σ.

2.1. $\overline{x}_B = 30{,}28;\ \sigma = 2;\ n = 64;\ \gamma = 0{,}9$;

2.2. $\overline{x}_B = 65{,}88;\ \sigma = 4;\ n = 144;\ \gamma = 0{,}99$

2.3. $\overline{x}_B = 25{,}24;\ \sigma = 8;\ n = 64;\ \gamma = 0{,}95$;

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функций Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

x	0	0,5	1,0	1,5	1,645	1,96
φ(x)	0,3989	0,3521	0,2420	0,1295	0,103	0,0584
$\Phi(x)$	0,0000	0,1915	0,3413	0,4332	0,45	0,4750
x	2,0	2,50	2,80	3,0	3,5	
φ(x)	0,0540	0,0175	0,0078	0,0044	0,0009	
$\Phi(x)$	0,4772	0,4938	0,4985	0,4987	0,49977	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е.Гмурман. – М.: Высшая школа, 2001. – 479 с.

2. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2004. – 404 с.

3.Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и её инженерные приложения/ Е. С. Вентцель, Л. А.Овчаров – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

4. Куликов Г.М. Элементы прикладной математики / Г.М.Куликов, А.Д.Нахман, С.В.Плотникова. – Тамбов.: Изд.-во ТГТУ, 2008. – 160 с.

5. Куликов, Г.М. Теория вероятностей и математическая статистика: сборник задач/ Г.М. Куликов, И.В. Косенкова, А.Д. Нахман. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. – 80 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ