Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»

Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ИННОВАЦИОННАЯ ЛИНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Монография

Издательская платформа Российской академии естествознания
2019

УДК 372.851

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» Ю.В.Родионов;

кафедра общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

А.Д.Нахман. Инновационная линия ортогональных разложений в курсе математики: монография / «Инновации в образовании». – Специальный выпуск. № 3. – 2019. –115 с.

В курсе математики применительно к системе «Школа-вуз» разработана инновационная содержательная линия ортогональных разложений, восходящая от элементов векторной алгебры к теории рядов Фурье. Монография адресована студентам вузов, исследователям, занимающимися вопросами образовательных инноваций, а также педагогам-новаторам, заинтересованным в развитии собственной предметной компетентности.

Введение

Вопросы ортогональных разложений занимают важное место в современных математических исследованиях (алгебра, функциональный анализ и др.). Однако, по нашему мнению, идеи и методы таких разложений недостаточно представлены в практике обучения математике. Речь, безусловно, не идёт об изучении в вузе и - тем более - в школе, новых результатов в области, например, теории функций действительного либо комплексного переменного. Вместе с тем, учащийся должен иметь общее представление о конечномерных и бесконечномерных пространствах, базисах, проблематике рядов Фурье (в частности, результатах о расходимости) и их приложений в задачах математической физики, вопросах обобщённой суммируемости рядов Фурье. Следовательно, отдельные вопросы соответствующих теорий должны быть включены в образовательную практику.

Разрешение противоречия между ограниченными (как в объеме изучаемого материала, так и во временных рамках) возможностями образовательной области «Математика» и требованиями, предъявляемыми современным обществом к фундаментальной подготовке выпускника школы и - тем более - выпускника вуза, составляет проблему многих исследований; мы предпринимаем попытку наметить определённые частные подходы к решению данной проблемы.

Преемственная связь предлагаемых новшеств в содержании материала с традиционными вопросами векторной и линейной алгебры обеспечивается подходом к понятию вектора как матрице-строке (либо матрице-столбцу), в силу чего становится «непринципиальным» количество элементов строки (столбца). Общая идея теории рядов, состоящая в предельном переходе «от конечного к бесконечному» позволяет вводить в рассмотрение бесконечномерные пространства. Распространение понятий базиса и ортогональности на случай абстрактных функциональных пространств, подход к рядам Фурье как к бесконечным ортогональным разложениям, расширение понятия сходимости до концепции обобщенной суммируемости и есть привнесение в «образовательное пространство» тех самых новшеств, необходимость в которых диктуется не только уровнем развития математических теорий, но и практикой.

Диссеминация инновационного опыта изучения ортогональных разложений может быть достигнута путём конструирования (и опубликования посредством издательской деятельности, использования систем дистанционного образования и др.) элементов содержания, задачного материала (включая банк тестовых заданий) и формулирования соответствующих методических указаний.

Основной целью формирования инновационной линии ортогональных разложений, таким образом, являются:

-в области теоретической подготовки - ознакомление учащихся с современной идеей декомпозиции элементов линейных пространств в сумму попарно ортогональных базисных элементов;

- в области практической подготовки - овладение алгоритмами получения тех или иных ортогональных разложений и умениями применять полученные разложения к решению задач междисциплинарного и практико-ориентированного характера.

Поставленные цели могут быть достигнуты посредством решения следующих «локальных» задач:

-освоение учащимися методов векторной алгебры и их обобщений на случай конечномерных пространств (прежде всего, проверки фактов линейной независимости, наличия ортогональности и умения представить вектор в виде линейной комбинации базисных векторов);

-овладение основными понятиями и «рабочими инструментами» гильбертовых пространств, включая разложения в ряды Фурье по общим ортогональным системам;

- приобретение умений разлагать бесконечно-дифференцируемые функции по степенным базисам и периодические функции по тригонометрическим базисам;

- использование приобретенных умений в процессе математического моделирования процессов механических колебаний и тепломассопереноса.

Остановимся подробнее на понятиях и фактах векторной алгебры в контексте линии ортогональных разложений. В школьном курсе эта линия представлена векторами на плоскости и в пространстве и осваивается в два этапа: в 9-ом классе основной школы и, затем, в старших классах (в 10-ом или 11-ом). Фундаментальными понятиями здесь являются:

- колинеарность векторов на плоскости и компланарность в пространстве;

-линейные операции и линейные комбинации;

-линейная независимость системы векторов;

-базисы на плоскости и в пространстве и координаты вектора в данном базисе;

-скалярное произведение векторов;

-ортонормированный базис (в частности, стандартный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$)

Инновационной, по нашему мнению, следует признать практику решения математических и прикладных учебных задач средствами ортогональных разложений векторов. Для этого требуется овладение следующими умениями:

- проверка колинеарности (на плоскости) и компланарности (в пространстве) векторов, заданных координатами в стандартном базисе;

- разложение вектора по данному базису;

- определение угла между векторами и проекции вектора на заданное направление;

- приложение в механике: разложение силы на ортогональные составляющие, нахождение работы постоянной силы и др.

Векторно-координатный способ, основанный на введении прямоугольной декартовой системы координат (а значит, на рассмотрении координат векторов в стандартном ортонормированном базисе $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$), может быть применён к решению ряда задач по стереометрии.

Глава 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ИННОВАЦИОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ

1.Концепции образовательных инноваций

Понятия инновации и инновационной образовательной деятельности, несмотря на многочисленные работы в этой области, находятся в стадии становления.

Нашему пониманию инноваций близки концепции нескольких авторов. Так, А.В. Хуторской [1] рассматривает всякую образовательную инновацию в контексте процесса создания, внедрения и освоения соответствующего новшества. Автор выдвигает в связи с этим ряд теоретико-методологических проблем: соотношение традиций и инноваций, содержание и этапы инновационного цикла, отношение к инновациям разных субъектов образования, управление инновациями, подготовка кадров, основания для критериев оценки нового в образовании и др. Приведенный взгляд на инновации в определенной степени дополняет точка зрения В.П.Ващенко [2], который утверждает, что нововведение еще не есть инновация, а деятельность в любой сфере может быть «…инновационной, если в нее привносится новое (знания, технологии, приемы, подходы) исключительно для получения результата, отличающегося высокой востребованностью. В отличие от научного поиска (творчества), идущего изнутри субъекта, инновационный поиск мотивируется внешней средой, а наука при этом является стратегическим ресурсом и инструментом инноваций».

В работе [3] концептуальной схемой, выбираемой в качестве базы для осуществления нововведений в системе образования, провозглашается схема (формула) «традиции – инновации – институции». Как нам представляется, в применении к образовательной деятельности интерпретация данной формулы может быть следующей.

1.Новые идеи и методы «не укладываются» в рамки устоявшихся традиций. В то же время должна осуществиться преемственная связь новшества с лучшими традициями прошлого.

2. Происходит привнесение в «образовательное пространство» вполне определённой социальной практики, существенных изменений в сравнении с имеющейся традицией.

3. Инновационный опыт становится доступным другим субъектам образовательной деятельности, что предполагает его фиксацию и наличие механизмов трансляции.

4. Происходит институциализация нововведений, т.е. их организационно-управленческое оформление и последующее нормативное закрепление в изменяющейся практике.

5. Следствием системно- целостного характера инновационной деятельности является развитие системы образования (определенных её подсистем).

6. Освоенная инновация со временем перерастает в традицию.

Этапы становления инновации могут быть формализованы в виде следующей матрицы.

	Соци-альный заказ	Новая идея, инициа-тива	Проекти-рование иннова-ции	Инновация в стадии внедрения и апробации	Диффузия (распро-странение) новшества	Институци-ональное закрепле-ние инновации
Возникновение противоречия с традициями	1	0	0	0	0	0
Зарождение инновации	1	1	0	0	0	0
Формирование инновационной политики по данному направлению	1	1	1	0	0	0
Эксперименталь ная деятельность по освоению новшества	1	1	1	1	0	0
Внедрение новшества	1	1	1	1	1	0
Состоявшаяся инновация	1	1	1	1	1	1

Таблица 1. Матричная модель становления инновации

Инновационный процесс в самом общем его понимании теперь есть процесс вида:

$$(1,0,0,0,0,0)\rightarrow(1,1,0,0,0,0)\rightarrow(1,1,1,0,0,0)\rightarrow(1,1,1,1,0,0)\rightarrow(1,1,1,1,1,0)\rightarrow(1,1,1,1,1,1).$$

Наличие инверсий элементов любой строки матрицы свидетельствует о нарушении инновационного процесса. Так, например, строка (0,1,1,0,0,0) означала бы, что новшество инициируется научной идеей, проектом, в отсутствии соответствующего социального заказа, а значит, не может быть признано инновацией.

2. Инновационные содержательные линии.

Аналитико-геометрическая линия

Одним из основных направлений инновационной политики в области образования является обновление его содержания.

Содержание образования мы называем инновационным, если оно:

-является актуальным, востребованным, соответствует современным целям образования;

- обладает определенной новизной, интегрирует формально-знаниевый и личностно-деятельностный подходы;

- является практически реализуемым и способным повышать эффективность деятельности субъектов образования.

Так, в математике присутствуют фундаментальные понятия, вокруг которых группируется некоторое содержание (другие понятия, связанные с базовым, суждения и действия, необходимые для их усвоения и т.д.). Соответствующий блок содержания представляет собой некое целостное образование с многочисленными внутренними связями, с использованием специальных методов и определяет специфику методики изучения материала. В подобных случаях об указанном целостном образовании говорят как об определенной содержательно - методической линии в программе изучения данной дисциплины. В контексте инновационного содержания соответствующую *содержательно - методическую линию* будем называть *инновационной.*

С учетом вышесформулированного тезиса о зарождении инновации в рамках традиции, нам представляется, что «формула» возникновения инновационной содержательно-методической линии может быть следующей:

инновационная содержательно-методическая линия=традиционная линия+инновационные элементы.

Речь здесь идет не механическом добавлении к традиционному содержанию курса математики новых элементов (вместе с соответствующими методическими приёмами их изучения), а об интеграции, которая призвана порождать следующие системные эффекты:

-осознание обучающимися возможностей математической науки в описании, исследовании, прогнозировании характера происходящих процессов и явлений;
-расширение возможностей использования приобретаемых знаний и умений на практике и при изучении смежных дисциплин;
-развитие исследовательских навыков обучающихся;
-осознание внутренних связей в математической науке.

Если речь идёт об образовательной деятельности в рамках общего среднего образования, то традиционные содержательные линии могут быть дополнены следующими инновационными элементами:

- числовая линия – введением в теорию комплексных чисел и их приложений;
- функциональная линия – задачами оптимизации;
- тригонометрическая линия – прикладной тригонометрией (полярные координаты, тригонометрическая форма комплексных чисел, исследование гармонических колебаний и др.);
- геометрическая линия – векторно-координатным методом исследования взаимного расположения линий и фигур на плоскости и в пространстве.

В последнем случае можно говорить о более общем явлении: формировании инновационной «сквозной» аналитико-геометрической линии.

Идея введения элементов аналитической геометрии в школьный курс математики не является новой. Линейные операции над векторами, разложения векторов по заданному базису, скалярное произведение векторов в последние десятилетия в том или ином объёме присутствуют в образовательных программах.

В качестве традиционных компонентов аналитико – геометрической линии можно выделить следующие вопросы:

- прямая на плоскости, взаимное расположение прямых;
- «стандартная» гипербола $y = \dfrac{k}{x},\ k \neq 0$;
- «стандартная» парабола $y = kx^2,\ k \neq 0$;
- каноническая «полупарабола» $y = k\sqrt{x},\ k \neq 0$;

- каноническая окружность $x^2 + y^2 = R^2, \; R > 0$;

- каноническая сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \; R > 0$

- элементы векторной алгебры;

- уравнение плоскости в пространстве.

По нашему мнению, аналитико-геометрическая линия школьного курса может быть дополнена следующими инновационными компонентами:

-параллельный перенос на координатной плоскости;

- канонические уравнения прямых на плоскости и в пространстве (в качестве приложения векторной алгебры), и , в частности, уравнения прямых, заданных двумя различными точками;

- векторно- координатный метод решения стереометрических задач.

Данные вопросы содержания тесно связаны с традиционными, и их изучение не потребует значительных затрат времени. Более того, идея параллельного переноса системы координат порождает единую концепцию преобразования графиков (речь идет об общем методе построение графиков квадратного трехчлена, дробно-рациональной функции и др.) , что избавляет педагога от необходимости обсуждать способы преобразования в случаях каждого отдельного типа функции.

В то же время, включение в образовательные программы школы перечисленных вопросов содержания позволит «разгрузить» вузовский курс (модуль курса высшей математики) «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». В этом случае элементы векторной алгебры и её приложений в вузовском курсе могу быть рассмотрены обзорно. Останется лишь дополнить их изучением векторного и смешанного произведений и их приложений. Раздел «Геометрические векторы» таким образом, приобретает иллюстративный характер по отношению к разделам линейной алгебры.

Рассмотрим теперь круг вопросов, связанных с инновационным приёмом решения стереометрических задач векторно-координатным методом.

3. Векторно – координатный метод

Актуализация данного метода во многом связана с наличием стереометрической задачи повышенного уровня сложности в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ (задача №14 в нумерации 2019 г.). Его использование, по мнению педагогов-новаторов, позволяет в ряде случаев избежать сложных геометрических построений и обоснований. Здесь открывается ряд новых возможностей для нахождения:

-угла между скрещивающимися прямыми;

-угла между прямой и плоскостью и между двумя плоскостями;

-расстояния от точки до плоскости и др.

«Попутным» эффектом рассмотрения подобных приложений векторной алгебры является повышение мотивации учащихся к изучению аналитико-геометрических понятий и фактов.

Таких образом, можно говорить о возникшей в педагогической практике потребности в данном инновационном методе, его зарождении, а также и наличии экспериментальной деятельности в соответствующем направлении: так например, в лицеях г. Тамбова аналитико-геометрические идеи активно внедряются в образовательную практику.

Однако, становлению (в частности, проектированию) инновации необходимо определённое методическое сопровождение, и здесь мы обнаруживаем ряд трудностей. Одна из них – отсутствие понятия и свойств векторного и смешанного произведений в школьном курсе, необходимых, в частности, для нахождения нормального вектора плоскости, объема тетраэдра и др. Введение соответствующих понятий и фактов нам представляется нецелесообразным, поскольку требует существенных затрат времени на «попутное» рассмотрение элементов теории матриц и определителей; кроме того в этом случае происходило бы неоправданное дублирование части вузовского курса аналитической геометрии.

Вместе с тем, излагаемый в школьных учебниках способ нахождения уравнения плоскости (и, следовательно, координат её нормального вектора) по трем точкам является как непрозрачным, так и технически сложным, тогда как нахождение координат нормального вектора плоскости служит важным средством для определения её расположения по отношению к другим плоскостям и прямым [5].

Предлагаемый нами инновационный приём состоит в использовании условия перпендикулярности искомого вектора $\vec{n}\{x, y, z\}$ к двум данным векторам плоскости $\vec{p}$ и $\vec{q}$, при условии «нормирования» $\vec{n}$ по одной из координат (например, полагаем $z = 1$). В этом случае координаты нормального вектора легко определяются как решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными (например, x и y), порождаемой условиями

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{p} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{q} = 0 \end{cases}.$$

Разработка подобных инновационных аналитико-геометрических приёмов может, таким образом, послужить делу существенного обогащения арсенала идей и методов решения стереометрических задач.

Существенным компонентом аналитико-геометрической линии, как следует из вышесказанного, является теория и практика геометрических векторов. В свою очередь, координатная форма их записи тесно связана с разложением векторов по стандартному ортонормированному базису. Если не ограничиваться одним лишь школьным курсом, а «заглянуть дальше» - в образовательные программы бакалавриата и магистратуры инженерных и экономических направлений подготовки, то мы обнаружим развитие понятия ортогональности по следующим направлениям: ортогональность в конечномерных (эвклидовых) пространствах, ортогональность в бесконечномерных (гильбертовых) пространствах, стандартные ортогональные системы – тригонометрическая, полиномиальная и др. Таким образом, линия ортогональных разложений формируется из элементов теории геометрических векторов, линейной алгебры, функционального анализа и гармонического анализа:

$$\{\textit{Ортогональные разложения}\}:$$
$$\{\textit{Векторная алгебра}\} \to \{\textit{Конечномерные пространства}\} \to$$
$$\to \{\textit{Тригонометрические ряды Фурье}\} \to \{\textit{Ортогональные разложения в Гильбертовых пространствах}\}$$

Вопрос институциализации предлагаемых нововведений может быть поставлен только после их широкой апробации и обработки результатов опытно-экспериментальной деятельности.

Подводя общий итог сказанному, мы можем охарактеризовать (в терминах матричной модели инноваций) состояние инновационного процесса «внедрения» в образовательную практику линии ортогональных разложений матрицей-строкой (1,1,1,1,0).

Литература к главе 1

1.Хуторской А.В. Теоретико-методологические основания инновационных процессов в образовании [Электронный ресурс] // Интернет-журнал "Эйдос". – 2005. – Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2005/0326.htm.

2. Ващенко В.П. О сущности инновационной деятельности и ее нормативно-правовой базе // Наука и промышленность России. – № 2-3. –2002. – С.29-36.

3. Слободчиков В.И. Инновации в образовании: основания и смысл [Электронный ресурс] // Интернет-портал «Исследователь.ru» – 2009. –Режим доступа: http://www.researcher.ru/methodics/nauka/a_1xizkd.html.

4. Нахман А.Д. Компетенция математического моделирования в контексте современной образовательной парадигмы // Научное обозрение. Педагогические науки.–№ 3. – 2017. –С.71- 79.

5.Нахман, А.Д. Моделирование инновационной образовательной деятельности в области математики/ Нахман А.Д.// Вестник Тульского ГУ, 2017.- Вып. 16.- С.126-130.

Глава 2. ИННОВАЦИИ В ОБРАЗОВАНИИ: КОМПЕТЕНТНОСТНЫЙ ПОДХОД

1.Профессионально-предметная компетентность преподавателя

Важнейшей составляющей профессиональной компетентности педагога является совокупность научных знаний, умений, навыков в предметной области и в области методики преподавания предмета, закрепленная в опыте педагогической деятельности. Эта совокупность является основой компетентности более низкой ступени, которую мы называем профессионально-предметной. Термин «предметный» в данном контексте означает не только предметную область, но и *предмет деятельности* – преподавание математики.

Мы определяем *профессионально-предметную компетентность преподавателя как мотивированно усвоенную совокупность знаний, умений, навыков (формируемых на разных этапах освоения предметной области) и методики преподавания соответствующего предмета, закрепленную в опыте педагогической деятельности и развиваемую в процессе послевузовского образования.*

Здесь и в дальнейшем *развитие* понимается как *непрерывный процесс*, соответствующей парадигме «образование в течение всей жизни»; следовательно, о результатах развития говорить можно лишь применительно к строго очерченному этапу деятельности педагога.

В настоящей главе мы исследуем вопросы системного взаимодействия инноваций в области содержания образования и развития профессионально-предметной компетентности педагога-математика. В основе рассмотрения лежат обобщения, распространения и применения идей авторов [1] –[35].

Так, распространяя подходы, изложенные в [26], профессионально-предметную компетентность можно рассматривать как результат интеграции математической, методической, психолого-педагогической и исследовательской компетенций и проявляющейся в единстве научнотеоретической, практической, исследовательской и психологической готовности применять интегративные знания и умения в обучении математике.

Профессионально- предметная компетентность, в соответствии с точкой зрения того же автора, имеет следующие проявления:

-владение интегрированной методикой обучения, основанной на знании математики, а также психологии, и дидактики;

-умение создавать оптимальные условия, включающие учащихся в активную творческую деятельность;

-знание особенностей умственной деятельности учащихся и умение их использовать в организации учебного процесса;

-умение формулировать локальные и перспективные учебные задачи, разрабатывать составлять системы вопросов и тестов, комплексы упражнений, фрагменты уроков в соответствии с психологическими закономерностями процесса усвоения знаний, дидактическими и методическими принципами, возрастными особенностями учащихся

Профессионально-предметную компетентность (ППМ) мы будем отождествлять с так называемой методико-математической компетентностью. Основываясь на структурном представлении [26], но несколько видоизменяя его, в качестве основных компонентов ППМ выделим мотивационно-целевой, содержательный (собственно математический, методический, психолого-педагогический), процессуально-коммуникативный, информационно-исследовательский, рефлексивный.

Как следует из сравнения с подходами [21], трехкомпонентную структуру в нашем случае целесообразно расширить до пятикомпонентной, «выделяя» в личностной составляющей мотивацию и рефлексию и добавляя информационно-исследовательский компонент. Последний, в современных условиях «обвального» роста объема информации, необходимостью овладения информационными технологиями и поиска инновационных решений педагогических и узко-методических задач, приобретает весьма актуальное звучание.

Мотивационно-целевой компонент представляет собою стремление и готовность к самосовершенствованию и самореализации посредством освоения блока математических дисциплин, методики их преподавания, соответствующих образовательных технологий.

Содержательный (концептуальный) компонент – способность/готовность к освоению и углублению фундаментальных, интегрированных (математических, методических, дидактических, психолого-педагогических и др.) знаний.

Процессуально-коммуникативный комонент рассматривается как способность/готовность к реализации содержательного (концептуального) компонента в виде профессионально значимых интегрированных (методических и математических) умений и навыков.

Информационно-исследовательский компонент представляет собою
- способность/готовность мобилизовать систему знаний и умений для поиска, «сворачивания» информации, фиксации и усвоения больших ее объемов;
- способность/готовность к исследоательской деятельности в области математики и методики ее преподавания, реализации и проявлении исследовательских умений и навыков*; исследовательский компонент в своем высшем проявлении есть способность к научно-исследовательской деяительности, т.е. получению новых научных результатов*.

Рефлексивный компонент предполагает умение осуществлять самоконтроль и самооценку математических и методических знаний и умений , и в соответствии с этой оценкой осуществлять самостоятельную их коррекцию и соответствующим образом выстраивать собственную образовательную траекторию.

Следует отметить, что цитированная выше работа [26] относилась к другому кругу задач, и первые три указанных компонента рассматривались ее автором как компетенции, подлежащие интегрированию. В нашем случае речь идет не о формировании (т.е. реализации потенциала), а о *развитии* компетентностей уже действующих педагогов, поэтому нам представляется, что корректнее здесь говорить о сформированных, но подлежащих корректированию и совершенствованию компонентах компетентности. Кроме того, мы, в отличие от [26], рассматриваем единый информационно-исследовательский компонент как результат интеграции инфокоммуникационного и исследовательского компонента, поскольку работа с информацией примыкает к исследовательской деятельности и является ее составной частью.

Развитие профессионально-предметной компетентности преподавателя математики в условиях повышения квалификации базируется на следующих принципах и подходах:

-принцип научности и фундаментальности;

- принцип профессиональной направленности обучения;

- принцип интегративности и междисциплинарности;

- принцип оптимального сочетания форм, средств и методов организации учебного процесса в соответствии с целями, задачами и условиями развития методико-математической подготовки, прогнозируемыми потребностями общества и тенденциями развития педагогической науки;

-синергетический подход;

- технологический подход;

- личностно-деятельностный подход.

Как нам представляется, содержательный компонент в структуре профессионально-предметной компетентности имеет «непустое пересечение» со всеми другими компонентами и, по нашему мнению, обладает первостепенной ролью в процессе развития данной компетентности.

Соответственно, можно говорить о собственно математической (в дальнейшем, математической) компетентности как о «ядре» в модели формирования и развития профессиональной компетентности.

Однако, специфика профессиональной деятельности педагогов такова, что процесс развития их математической компетентности необходимо увязывать с совершенствованием методической составляющей.

2. Принципы формирования и развития математической компетентности

В общем случае собственно математическую компетентность специалиста мы определяем как *осознанную готовность к продуктивной самореализации в профессиональной деятельности на основе развитого, профессионально-ориентированного математического мышления, прочных знаний фундаментальных основ математики и умений адекватно и ответственно применять их в решении профессиональных задач.*

В литературе, в зависимости от контекста решаемых исследователями задач, понятие «математическая компетентность» рассматривается как:

– совокупность системных свойств личности, которые выражаются устойчивыми знаниями математики и способностями применять их в новой ситуации, достигать значимых результатов в математической деятельности;

– характеристика личности специалиста, отражающая наличие глубоких и прочных знаний по математике и умение использовать математические методы в профессиональной деятельности, готовность к постоянному обновлению и актуализации этих знаний;

– системное образование специалиста, отражающее единство его теоретической и практической подготовленности и способности применять математический инструментарий для решения профессиональных задач;

– системное свойство личности, характеризующее его глубокую осведомленность в предметной области знаний, личностный опыт субъекта, нацеленного на перспективность в работе, открытого к динамичному обогащению, способного достигать значимых результатов и качества в математической деятельности.

Формирование и развитие каждого из вышеуказанных компонентов математической компетентности педагога (мотивационно-целевой, содержательный, методический, психолого-педагогический, процессуально-коммуникативный, информационно-исследовательский, рефлексивный) осуществляется в несколько этапов. В первую очередь, это относится к содержанию математического образования.

Основополагающим является *этап обучения в вузе*. Преобразование педагогических вузов в классические университеты породило здесь новые проблемы. Как указано в работе [27], математическое образование в педвузах имеет специфические особенности и должно коренным образом отличаться от образования в классических университетах. Обобщая некоторые положения работы [27], можно говорить о следующих принципах формирования (и, в дальнейшем, развития) математической компетентности педагога.

- *Принцип «выделения главного»* [28], а именно: особая роль должна отводиться изучению математических структур, наиболее важных с точки зрения профессиональной направленности деятельности педагога.

- *Принцип фундаментальности* [29], в соответствии с которым фундаментальная математическая подготовка учителя должна являться не целью, а средством его подготовки, и, следовательно, должна быть согласована с нуждами приобретаемой профессии. В соответствии с этим же принципом, в математическом образовании учителей математики важное место должно отводиться курсам (или разделам) "Числовые системы", «Основания арифметики», "Основания геометрии", и т.п., не изучаемым в классических университетах. В некоторых курсах, общих для педагогических и «чисто математических» специальностях, для педагогов должны быть по-особому расставлены акценты. Так, например, в курсе математической логики особое место следует отвести приложениям алгебры высказываний и логики предикатов к логико-математической практике. В то же время ряд университетских математических курсов, важных для приложений, в педвузах (на педагогических специальностях университетов) должен изучаться в соответствии с профессионально-направленными целями. Именно к таким должен относиться курс «Ортогональные разложения».

- *Принцип обосновательности.* Изучение разделов, общих для педвузовских, университетских и технических вузов, в соответствии с принципом фундаментальности, в педвузах также должно иметь свои особенности, поскольку педагогу следует добиваться знаний учащимися основных математических понятий, умения строго и точно рассуждать. "А это значит, что в преподавании в педвузе как раз особое и решающее значение приобретает изучение основных понятий математики, всевозможных тонких выводов, исключительных случаев с самым скрупулезным объяснением их сущности" [30], тогда как в классическом университете подобные моменты могут быть оставлены студентам на самостоятельное рассмотрение, а технических вузах – опущены вообще или изложены «по идее».

- *Принцип связи конкретного математического курса и соответствующего школьного предмета.* Реализация этой связи обеспечивает целеустремленность курса, понимание студентами перспективы его изучения, а значит, способствует сознательности усвоения курса. Этот принцип, по мнению В.А.Тестова ([27]), позволяет осуществить преемственность не только между школьным курсом математики и вузовскими математическими курсами, но и между обучением в вузе и трудовой деятельностью учителя математики.

- *Принцип единства методической и математической подготовки.* Методическая подготовка учителя, как важная составляющая в формировании профессионально-математической компетентности учителя, является неотъемлемой частью и математической подготовки. В соответствии с этим принципом комплекс математических дисциплин педвуза (университета) должен обеспечит студенту не только достижение широкого кругозора в математике, определенного уровня математической культуры, но и знакомство с методами изложения школьного курса математики.

К вышеперечисленным принципам примыкает уникальная *роль математической подготовки в формировании личностной составляющей* профессиональной компетентности. Такими профессионально значимыми качествами личности являются интеллектуальные (мышление), нравственные (поведение), эмоциональные (чувства), волевые (способность к самоуправлению), организаторские (механизм деятельности) При этом особое значение для осуществления профессиональной деятельности имеет не столько уровень выраженности отдельных важных свойств личности, сколько их тесные и положительные взаимосвязи, благодаря которым возникает процесс их взаимоусиления. В результате этих взаимосвязей у педагога, как отмечал И.Д. Пехлецкий [28], формируются такие компоненты индивидуального стиля преподавания, как коммуникативный и организаторский. Указанная роль реализуется в цепочке:

математический курсы $\rightarrow$

математическое мышление $\rightarrow$

личностная составляющая профессиональной компетентности.

А именно, математика формирует математические структуры мышления, позволяет развить не только математические способности, но и общие способности человека; математическому мышлению присущи все качества научного мышления (логичность, способность к обобщению, гибкость, рациональность и т.д.), а , следовательно, при помощи математики развиваются указанные качества.

Изучение математики приучает к четкости формулировок, знакомит с методами, применяемыми на эмпирическом и теоретическом уровнях познания (анализ и синтез, аналогия, сравнение, индукция, дедукция, моделирование), способами логического вывода. В свою очередь, формирование у студентов логических, алгоритмических и комбинаторных схем мышления способствует формированию организаторских навыков умственного труда (планированию работы, поиску рациональных путей ее выполнения, критической оценке результатов и т.п.).

В работе [27] указывается также, что личностная составляющая обучения математике состоит и в его нравственной стороне; занятия математикой воспитывает такие морально-этические и волевые качества, как аккуратность, аргументированность, принципиальность, умение воспринимать иное мнение, преданность истине, упорство в достижении цели, трудолюбие и честность.

Наконец, духовному совершенствованию личности способствует осознание эстетических моментов в математике, внутренней гармонии, симметрии. Не менее важна, по мнению автора, и эстетика процессуальная, связанная с подачей материала, его записью, изображением, его восприятием и пониманием.

Указанные выше принципы находят пути своей реализации и в *послевузовском* образовании педагога. В процессе повышения квалификации знания, умения и навыки (ЗУН) в области математики, являющиеся важнейшим компонентом математической компетентности,

-обновляются;

-актуализируются;

-приводятся, по возможности, в соответствие с современным состоянием данной предметной области;

-«проектируются» на школьный курс, который находится в состоянии постоянного обновления.

Особенности этого этапа мы видим также в следующем:

-устанавливаются связи между основными содержательно-методическими линиями;

-преобладает идея внутрипредметного и межпредметного моделирования (тогда как в пединститутском и университетском образовании изучались разрозненные курсы);

- слушатели в большей степени переходят из разряда объекта в разряд субъекта, обучения, активного участника процесса, «заказчика знаний», обладающего опытом практической работы и существенно большей мотивацией.

3.Развитие математической компетентности в процессе повышения квалификации

Математическую компетентность педагога можно рассматривать как многомерный объект. В одном ее измерении мы наблюдаем сформулированные выше принципы формирования и дальнейшего развития, в другом – вышевыделенные компоненты. В третьем измерении МК можно представить как совокупность следующих «узкопредметных» компетентностей:

• *алгебраической* (в частности, знание основных алгебраических структур, основных положений линейной алгебры, алгебры многочленов и др);

• *геометрической* (в частности, знание пространственных форм и умение находить основные соотношения между их числовыми характеристиками);

• *топологической* (в частности, знание геометрических свойств фигур и пространств, которые сохраняются при непрерывных деформациях).

• *функционально-аналитической* (в частности, знание основных функциональных зависимостей и умение использовать их при исследовании реальных процессов);

• *логико-алгоритмической* (владение алгеброй и исчислением высказываний, логикой и исчислением предикатов, правилами логического вывода, основами теории алгоритмов);

• *стохастической* (совокупность вероятностных понятий и представлений, необходимых при построении моделей случайных процессов и явлений, знание основных приемов обработки экспериментальных данных).

В качестве особой компетентности, связывающей указанные и интегрированной по отношению к ним, выделим *компетентность в области математического моделирования*, как межпредметного, так и внутрипредметного. Последняя тесно связана с операционно - содержательным компонентом, который определяет сущность МК, проявляется как в знании теоретических основ математики, так в умениях и навыках использования этих знаний при решении математических задач, а также во владении навыками и методами математического моделирования и исследования полученных математических моделей.

Освоение педагогами курса «Ортогональные разложения» в условиях системы повышения квалификации требует в той или иной степени развитости вышеперечисленных «узкопредметных» компетентностей. Как неоднократно отмечалось выше, понятия и факты ортогональных разложений восходят от геометрических векторов (геометрическая компетентность) к векторам в конечномерных и бесконечномерных пространствах (алгебраическая и функционально-аналитическая компетентности, соответственно) и имеют многочисленные приложения, в том числе и в стохастике (стохастическая компетентность).

Понятие «математическая компетентность» подвижно и изменчиво. Ее уровень развития является содержательной характеристикой педагога и меняется в соответствии с изменяющимися условиями.

Важнейшим фактором развития МК педагога является *система повышения квалификации как наиболее мобильная и оперативно реагирующая на запросы общества к системе образования.*

Если основываться на понимании того, что актуализация вышеперечисленных «узкопредметных» компетентностей представляет собой управляемый процесс, то в общем случае механизм актуализации данной группы компетентностей может быть описан следующим образом:

1) выделение (из всей совокупности) приоритетных компетентностей, представленных в нормативных квалификационно-педагогических требованиях к данной категории педагогов на данном направлении повышения квалификации;
2) формирование содержания образовательной программы повышения квалификации соответственно выделенным компетентностям;
3) внедрение активных технологий обучения, которые адекватны способам профессиональной деятельности педагогов.

Организационно-педагогическими условиями развития математической компетентности выступают:

- структурирование процесса на основе исходного уровня МК, который определяется путем соответствующих диагностических мероприятий;
- варьирование содержания программы курсов повышения квалификации ;
- предварительная психологическая подготовка к обучению;
- сочетание инновационных методов обучения с традиционными;
- соучастие слушателей в определении содержания, форм обучения;
-дифференцированное, личностно ориентированное обучение в сочетании с коллективным,
- техническое обеспечение курсов на современном уровне;
- создание благоприятного, комфортного микроклимата на курсах;
- самообразовательная работа, связь с педагогической практикой;
- адекватность самооценки, рефлексия;
-взаимосвязь с другими компонентами системы непрерывного образования.

С точки зрения развития ПМК и МК в содержании курсовой подготовки следует выделить две основные составляющие.

Теоретическая составляющая: знание нормативных документов, на основании которых идет внедрение новшеств в содержание образования; знание основных понятий, фактов и методов образовательной области «Математика» (базовая и вариативная части основных образовательных программ, структура и содержательное наполнение которых предписаны ФГОС), овладение современными информационными технологиями.

Практическая составляющая: умение планировать учебный процесс, моделировать, проводить, анализировать уроки и внеурочные занятия, применять в своей работе современные образовательные технологии, владеть методикой использования учебно-методического комплекса, обеспечивающего инновационность образования и т.п.

Дифференциация слушателей курсов проводится по итогам обобщения результатов входного контроля и последующего собеседования. Обычно выделяются три условные группы слушателей:

1) имеющие серьезные пробелы в знаниях;

2) имеющие достаточные знания и навыки;

3) проявившие высокий уровень математической компетентности.

Дифференциация обучения на курсах достигается благодаря “выходу” на индивидуальные образовательные маршруты для слушателей с учетом результатов входной диагностики.

Контрольно-измерительные процедуры (КИП) ориентированы на следующие задачи:

а) входная диагностика – получение информации, позволяющей дифференцировать слушателей курсов по уровню профессиональной компетентности; получение информации, позволяющей скорректировать методику проведения занятий с учетом интересов и потребностей слушателей; получение информации, позволяющей слушателям провести самодиагностику уровня профессиональной компетентности; апробация контрольно-измерительных процедур, используемых в учреждениях повышения квалификации;

б) текущая диагностика – отслеживание промежуточных результатов и эффективности процесса курсовой подготовки, выявление проблем, затруднений слушателей, и, на этой основе – корректировка содержания и форм обучения;

в) итоговый контроль – оценка успешности прохождения слушателями программ курсовой подготовки и определение степени их готовности к инновационной деятельности.

Итоговый контроль может включать в себя, помимо традиционных зачетов и экзаменов, разработку инновационных образовательных проектов или их фрагментов, создание новых элективных курсов, разработку КИМов по учебным дисциплинам данной образовательной области и т.п.

Результатом при этом выступает приращение уровня компетентности педагогов, которое выражается в степени освоенности теоретической и практической составляющих курсовой подготовки, а также в позитивности их мотивационно-оценочных представлений о собственной профессиональной деятельности ([31]).

В работе [32] предложена структурно-функциональная модель формирования математической компетентности преподавателей математики в условиях классических университетов. Взяв данную модель за основу, применим ее к нашей задаче: развитие математической компетентности в условиях повышения квалификации.

Структурными компонентами модели являются: целевой, методологический, содержательно-организационный, результативный. Цель функционирования модели определяется социальным заказом системе послевузовского профессионального образования и состоит в развитии математической компетентности преподавателя математики.

Методологическими основами проектирования процесса развития математической компетентности (составляющими методологический компонент) являются системный, компетентностный и деятельностный подходы. Содержательно-организационный компонент включает содержание обучения и его технологическое и методическое обеспечение. Содержание обучения, в свою очередь, определяется требованиями общего образования к преподавателю математики и предпочтениями обучающихся (слушателей), в связи с чем, по нашему мнению, необходим опрос потенциальных слушателей на предмет целесообразности включения тех или иных математических дисциплин (модулей) в содержание курсовой подготовки. В соответствии с проектируемым содержанием формируется учебный план образовательного учреждения и выбираются технологии обучения.

Результативный компонент характеризует уровни сформированности компетенций в соответствии с ФГОС и развития МК и включает критерии, показатели и диагностические методики отслеживания результатов. При этом выделены три возможных результативных уровня: базовый, повышенный, продвинутый.

Предложенная выше модель развития МК может быть эффективна реализована при выполнении определенного комплекса педагогических условий, т.е. субъективных и объективных требований и предпосылок, выполнение (наличие) которых обеспечивает развитие математической компетентности преподавателя математики при наиболее рациональном использовании сил и средств. В случае нашей модели применимы педагогические условия, выделенные в той же работе [32]:

-интеграция содержания математических курсов;

-обеспечение усвоения математических знаний в единстве их предметной и операциональной сторон;

- обеспечение регулярного контроля и оценки результатов обучения.

Формирование фундаментальных (академических) знаний, на основе которых строятся прикладные знания и практические умения, возможно лишь в условиях интеграции содержания различных математических курсов. В процессе интеграции обучающиеся получают представление об общности математических идей и методов, об абстрактных структурах, семантическое наполнение которых приводит к построению различных математических теорий (примером такой структуры может служить булева алгебра); интеграция способствует «переносу знаний», т.е. возможности применения знаний в новой ситуации.

Выполнению педагогического условия усвоения математических знаний в единстве их предметной и операциональной сторон способствует использование в учебном процессе технологии личностно-ориентированного обучения, реализация принципа «проживания» обучающимися педагогических технологий во время изучения математических дисциплин, реализация общекультурного потенциала содержания обучения.

Обеспечение регулярного контроля и оценки результатов обучения подразумевает контроль и оценку результатов обучения слушателей курсов повышения квалификации и осуществление ими самоконтроля и самооценки.

4. Содержательный компонент математической компетентности

Выше изложены различные подходы к формированию и развитию как профессионально-предметной, так и собственно математической компетентности (МК) преподавателя математики. Каждый из них является как бы проекцией соответствующего процесса в определенную «плоскость». Так, ФГОС ВО выдвигает на первый план формирование (а в нашем случае – развитие) общекультурных (ОК) и определенной группы профессиональных компетенций (ПК). Согласно концепциям, изложенным в предыдущих параграфах, становление и развитие математической компетентности предполагает опору на определенные принципы, выполнение определенных педагогических условий и др.

Однако, каждая «проекция» так или иначе связана с содержательным компонентом МК. В частности, операционно-деятельностный компонент МК может быть выстроен только на основе овладения обучающимся определенного содержания математического материала. Мотивация и личностное отношение, исследовательские навыки не могут быть оторваны от содержания обучения. Другими словами, *содержание* обучения математике является *фундаментом* в формировании и развитии МК, каким бы способом не моделировать соответствующий процесс, какие бы принципы и педагогические условия в этой связи не рассматривать.

Понятием *« содержание обучения в системе повышения квалификации»* мы обозначаем *систему знаний, умений, навыков, отношений и творческой деятельности*, которыми овладевает профессионал в ходе процесса обучения.

Общие требования, в соответствии с которыми должно строиться содержание обучения, применимы и к решаемым нами задачам. Эти требования таковы.

1. Содержание обучения должно следовать цели формирования и всестороннего, гармоничного развития конкурентоспособной личности.
2. Важным критерием построения содержания обучения является его научная база. Обучение должно включать в себя строго научные утверждения, соответствующие современному состоянию науки.
3. Содержание учебного материала по предмету должно строиться в соответствии с логикой соответствующей научной области. Учебный материал необходимо связывать с другими учебными предметами.
4. Теоретические знания не должны быть получены в отрыве от практических занятий. Связь теории и практики – необходимое условие оптимального обучения.
5. Содержание обучения (в особенности - послевузовского) должно нести в себе профессиональную направленность.

Содержание обучения (курсовой подготовки) продемонстрируем на примере требований, разработанных в ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования».

Целью профессиональной образовательной программы является получение учителями дополнительных знаний, умений, навыков по инновационным линиям курса математики.

В соответствии с положениями, относящимися к профессионально-предметной компетентности, *выпускник курсов должен:*

• иметь представление:
- о сущности, содержании и структуре образовательных процессов;
- о предмете математики, периодах ее развития, ее языке и символике;
- о математическом моделировании;
- о специальных математических приемах;
- о современных педагогических технологиях, системах обучения.

• быть способным в условиях развития и обновления содержания образования:

- к переоценке накопленного педагогического опыта;
- к анализу своих профессиональных возможностей;
- к совершенствованию своей профессиональной деятельности;
- к решению проблемы межпредметных связей, в том числе через организацию элективных курсов;
- к проектной деятельности на основе системного подхода.

• уметь:
- выполнять практические задания любого уровня сложности по традиционным и вновь вводимым разделам школьного курса математики;
- использовать математические методы и основы математического моделирования, строить и исследовать математические модели практических (прикладных) задач из смежных дисциплин;
- выбирать средства и методы обучения, разрабатывать индивидуальную личностно-ориентированную технологию обучения;
- разрабатывать комплексы дидактических средств обучения и адаптировать их к реальным условиям учебного процесса.

• владеть:
- системой методов для обеспечения интеллектуального развития личности обучаемого;
- личностно-ориентированными технологиями обучения, воспитания;
- навыками, умениями математического, и, в частности, вероятностно-статистического мышления;
- системой знаний, умений по всем темам школьного курса математики;
- методиками тестирования для определения уровня знаний учащихся.

• знать:
- научные основы разделов школьного курса математики;
- содержание новых разделов школьного курса математики "Математический язык и логика", "Теории вероятностей» , а также *основ векторно-координатного метода* решений геометрических задач др.
- требования образовательного стандарта и критерии оценки знаний учащихся;

- закономерности целостного образовательного процесса, современные педагогические технологии.

5. Процессуальный аспект математической подготовки в системе повышения квалификации

При изучении вышеуказанных вопросов содержания мы предлагаем следовать

а) общедидактическим принципам единства содержательной и процессуальной сторон обучения, научности, системности, доступности;

б) профессионально направленному подходу в обучении (контекстное обучение), использованию внутрипредметных и межпредметных связей.

Единство содержательной и процессуальной стороны обучения может быть реализовано в такой форме обучения, как лекционно-практические занятия. Предполагается, что изложение каждого субмодуля следует сопровождать решением (с активным участием слушателей) теоретических упражнений, типовых и «нестандартных» задач.

При этом мы следуем концепции [33], согласно которой упражнение есть многоаспектное явление обучения, обладающее следующими основными признаками:

1)быть носителем действий, адекватных содержанию обучения математике;

2)являться средством целенаправленного формирования ЗУН;

3)быть способом организации и управления учебно-познавательной деятельности учащихся;

4)являться одной из форм реализации методов обучения;

4)служить средством связи теории с практикой.

В свою очередь, теоретические упражнения направлены на обнаружение и доказательство некоторых общих свойств изучаемых объектов (функций, уравнений, неравенств и т.д.) и операций над ними. Такими упражнениями являются, в частности, доказательства некоторых теорем, провести которые предоставляется самим слушателям. Выявленные в результате выполнения теоретических упражнений свойства, в свою очередь, могут быть использованы уже как опорные факты в процессе решения других задач.

По завершении решения ряда типовых задач целесообразно предложить слушателям задания по классификации подобных задач и разработке алгоритмов решений для каждого выделенного класса.

Реализация принципа научности в сочетании с доступностью обучения имеет свои специфические особенности в условиях повышения квалификации преподавателей математики. Эти особенности мы видим в следующем.

Изучаемые вопросы содержания в той или иной степени уже знакомы слушателям; следовательно, излагаются, в основном, лишь концепции. Как указано выше, среди целей освоения присутствуют не только актуализация знаний, но и установление внутрипредметных связей, выявление общематематических подходов и методов. Так, например, общей основой для изучения теории множеств, алгебры высказываний и алгебры событий, являются рассмотрение булевых алгебр. Подобный «метавзгляд» вполне соответствует современным тенденциям в математической науке и ее современной методологии. В то же время техническая сторона многих неизбежных в математике доказательств не должна «затушевывать» их идейную сторону. Более того, вполне достаточно при изложении ряда теорем указать лишь идею доказательства, предоставив детали самим слушателям (здесь мы снова возвращаемся к мысли об использовании теоретических упражнений).

Механизм реализация профессионально-направленного подхода при изучении вопросов содержания нам представляется следующим.

В каждом блоке содержания должны быть выделены те вопросы, которые переносятся в школьный курс на базовом его уровне и могут быть изучены на профильном или углубленном уровне. Так, например, в алгебраическом блоке речь идет о делимости многочленов (базовый уровень) и комплексных числах в алгебраической и тригонометрической формах (профильный уровень); в аналитическом блоке для углубленного изучения школьниками темы «Дифференцирование» могут быть использованы вопросы, связанные с нахождением частных производных функций двух переменных и нахождением их экстремумов; в блоке (модуле), содержащем вопросы математической логики, возможно применение понятия и свойства следования и равносильности предикатов в вопросах исследования равносильности уравнений и неравенств.

Изучение соответствующего блока может сопровождаться самостоятельной разработкой слушателями поурочного планирования и банка разноуровневых заданий (в том числе, и тестовых) для учащихся. Следующим шагом может быть разработка слушателями элективных курсов на основе одного из изученных модулей содержания.

Возможность для *диффузии инноваций* может быть обеспечена соответствующими технологиями, поскольку здесь необходимы гарантированность результата, воспроизводимость приемов и т.п. В нашем случае речь идет о следующих двух видах технологий непосредственной подготовки учащихся:

1)технологии изучения (интенсивного повторения) математического материала;

2)технологии мониторинга процесса подготовки.

К первому классу технологий мы относим:

- элементы технологии УДЕ, применяемые в соответствии с укрупнением вопросов содержания, и в частности, технологии формирования обобщенных подходов к решению математических задач определенных классов и конкретизации подходов в виде алгоритмов;
- использование теоретических упражнений, дающих возможность выделить некоторые общие свойства математических объектов (из изучаемого их класса) с последующей реализацией выделенных свойств в конкретных задачах;
- использование «комплексных» и «комбинированных» заданий;
- составление технологических карт и структурно-логических схем в процессе решения задач и др.

Ко второму классу технологий относятся:

- «традиционные» технологии (устный опрос, письменные контрольные работы, зачеты и т.д.)
- технологии тестового контроля на всех этапах изучения материала ;

Разрабатываемые технологии обоих видов предполагают возможность использования современных «электронных» средств (дистанционное обучения, интернет-технологии и т.д.).

Литература к главе 2

1. Абдузаков, М.М. Совершенствование содержания подготовки будущего учителя информатики в условиях информатизации образования: автореф. дисс. докт. пед.наук : 13.00.08 /М.М. Абдузаков. – М.: 2007. 44 с.
2. Стратегия модернизации содержания общего образования: материалы для разработки документов по обновлению общего образования. – М.: ООО «Мир книги», 2001. – 18 с.
3. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 г. / Модернизация российского образования. Документы и материалы. – М.: Изд-во ВШЭ, 2002. – С.263 – 282.
4. Зимняя, И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования/ И.А. Зимняя // Высшее образование сегодня. – 2003. – №5. – С.34-42.
5. Доманский, Е.В. Рефлексия как элемент ключевой образовательной компетенции /Е.В.Доманский // Интернет–журнал «Эйдос». – 2003. – 24 апреля. – http://www.eidos.ru/journal/2003/0424.htm.
6. Francoise Delamare le Deist & Jonathan Winterto. What is competence? / Human Resource Development International, Vol. 8, No. 1, 27 – 46, March 2005; London: Taylor & Francis, 2005
7. Хуторской, А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций / А.В. Хуторской // Интернет-журнал "Эйдос". – 2005. – 12 декабря – http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm.
8. Левитес, Д.Г. Практика обучения: современные образовательные технологии / Д.Г. Левитес. – М.: Изд. «Институт практической психологии»; Воронеж: НПО «МОДЭК», 1998. – 288 с.
9. Александров, Г.Н. Педагогические системы, педагогические процессы и педагогические технологии в современном педагогическом знании / Г.Н.

Александров, Н.И. Иванкова, Н.В. Тимошкина, Т.Л. Чшиева // Educational Technology & Society 3(2). – 2000. – С. 134-149.
10. Беспалько, В.П. Основы теории педагогических систем/ Беспалько В.П. – Воронеж: Изд. ВорГУ, 1977, – 304 с.
11. Математические методы принятия решений в экономике /под ред. В.А.Колемаева. – М. «Финстатинформ», 1999. – 385 С.
12. Фишман, Б.Е. Методологические аспекты проблемы компетентностной избыточности. / Б.Е.Фишман, Б.С. Кузьмина // Материалы XIX Всероссийской научно-методической конференции «Проектирование образовательных программ высшего профессионального образования на компетентностной основе». Сборник № 4. Уфимский государственный авиационный технический университет. – Москва-Уфа. 2009. – С.32-42
13. Алмазова, Н.И. Когнитивные аспекты формирования межкультурной компетентности при обучении иностранному языку в неязыковом вузе: автореф дис. …доктора пед. наук: 13.00.08 / Н.И. Алмазова. – Санкт-Петербург, 2003. – 47 с.
14. Дахин, А.Н. Компетенция и компетентность: сколько их у российского школьника? /А.Н. Дахин // Вопросы интернет-образования. – №17. http://vio.fio.ru
15. Пучков, Н.П. Методологические подходы обеспечению качества профессиональной подготовки экономиста в процессе изучения образовательной области «Математика»: монография/ Н.П.Пучков, А.Л.Денисова, А.В. Щербакова. − М.: Машиностроение-1, 2003. – 140с.
16. Мильруд, Р.П. Компетентность в овладении языком. Проблемы преподавания иностранных языков в контексте модернизации образования: сборник материалов и тезисов докладов IX Межрегиональной научно-практической конференции / Р.П.Мильруд // Самара: Самар.гос.аэрокосм.ун-т. – 2003. –214с.
17. Нахман, А.Д. Педагогический мониторинг процесса формирования профессионально-математической компетентности магистрантов технических направлений подготовки/А.Д.Нахман, А.Ю.Севастьянов //Вопросы современной науки и практики. Ун-т им. В.И.Вернадского. –2012. –№1(37). –

С.134–140.
18. Астафьева, Н.Г. Реализация компетентностного подхода при проведении аттестации педагогических работников / Н.Г.Астафьева, Г.А. Шешерина, Е.И.Агаркова, Н.К. Солопова // Электронное научное издание «Актуальные инновационные исследования: наука и практика» - 2009, № 3 .
19. Кузьмина, Н.В. Профессионализм личности преподавателя и мастера производственного обучения / Н.В.Кузьмина. – М.: Высшая школа. 1990 – 119 с.
20. Гершунский, Б. С. Философия образования / Б.С.Гершунский. – М.: Флинта, 1998. – 432 с.
21. Галева, Н.Л. Система компетенций как инструмент управления качеством образования / Н.Л.Галеева // Интернет-журнал "Эйдос". 2007. – 30 сентября. – http://www.eidos.ru/journal/2007/0930 – 7.htm.
22. О деятельности института по повышению профессиональной компетентности педагогических и руководящих кадров как условии достижения качества дополнительного педагогического образования: доклад/ Э.Р. Саитбаева [и др.]. – Оренбург: Оренбургский институт повышения квалификации работников образования. – 2005. http://www.ipkro.isu.ru ; http://bank.orenipk.ru//
23. Введенский, В.Н. Измерение и оценка качества повышения квалификации учителей в системе дополнительного педагогического образования / В.Н.Введенский // Стандарты и мониторинг. - №4. – 2003. – С.41
24. Иванова, Л.Ф. Педагогический мониторинг процесса развития профессиональной компетентности учителя иностранного языка/ Л.Ф.Иванова. //Стандарты и мониторинг. – №33. – 2004. – С.25
25. Болотов, В.А. Компетентностная модель: от идеи к образовательной программе / В.А.Болотов, В.В.Сериков// Педагогика. – 2003. – № 10. – С. 8-14
26. Борзенкова, О.А. Формирование методико-математической компетентности будущего учителя начальных классов: дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.08 / О.А.Борзенкова. – Самара, 2007. –255 с.
27. Тестов, В.А. Стратегия обучения математике в вузе / В.А.Тестов. – М.: Технологическая школа бизнеса, 1999. –303 с.

28.Пехлецкий, И. Д. Компоненты индивидуального стиля преподавания: спецкурс-практикум / И. Д.Пехлецкий. – Пермь: Изд-во Пермского пединта, 1990. –138 с.
29. Мордкович, А.Г. Профессионально-педагогическая направленность специальной подготовки учителя математики в педагогическом институте: дисс. ... д-ра пед. наук : /А.Г.Мордкович. – М.: 1986. – 355 с.
30. Потоцкий, М.В. Преподавание высшей математики в педагогическом институте/ М.В.Потоцкий. – М.: Просвещение, 1975. – 208 с.
31. Кириллова, А.В. Формирование профессиональной компетентности учителя в процессе повышения квалификации (в условиях реализации национально-регионального компонента содержания образования): автореф. дисс. …канд. пед. наук: 13.00.08 /А.В.Кириллова. – Мурманск, 2007. – 22 с.
32. Ярдухина С.А. Информационная обогащенность образовательной среды как средство формирования профессионально-математической компетентности будущих преподавателей математики (для системы классических университетов): автореф. дисс. канд. пед. наук: 13.00.08/ С.А.Ярдухина. – Ярославль – 2009. - 24 с.
33. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе: учеб. пособие/ Г.И.Саранцев. – М.: Просвещение, 2002 . – 223 с.
34. Хуторской, А.В. Теоретико-методологические основания инновационных процессов в образовании/А.В.Хуторской // Интернет-журнал"Эйдос". – 2005. –26 марта – http://www.eidos.ru/journal/2005/0326.htm.
35. Ващенко В.П. О сущности инновационной деятельности и ее нормативно-правовой базе/ В.П.Ващенко // Наука и промышленность России. – 2002. –№ 2-3. С.29-36

Глава 3. ЛИНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЭЛЕМЕНАРНОЙ И ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Основной целью формирования инновационной линии ортогональных разложений являются:

-в области теоретической подготовки: ознакомление учащихся с современной идеей декомпозиции элементов линейных пространств в сумму попарно-ортогональных базисных элементов;

- в области практической подготовки: овладение алгоритмами разложений и умениями применять полученные разложения к решению задач междисциплинарного и практико-ориентированного характера.

Поставленные цели могут быть достигнуты посредством достижения следующих частных целей:

-освоение учащимися методов векторной алгебры и их обобщений на конечномерные пространства;

-овладение основными понятиями и «рабочими инструментами» гильбертовых пространств, включая разложения в ряды Фурье по общим ортогональным системам;

- приобретение умений разлагать бесконечно-дифференцируемые функции по степенным базисам и периодические функции по тригонометрическим базисам;

- использование приобретенных умений в процессе математического моделирования процессов механических колебаний и тепломассопереноса.

1. Элементы теории ортогональных разложений в школьном курсе математики

В школьном курсе линия ортогональных разложений представлена векторами на плоскости и в пространстве и осваивается в два этапа: в 9-ом классе основной школы и, затем, в старших классах (в 10-ом или 11-ом).

Вопросы содержания, интерпретируемые как базовые понятия и приобретаемые умения, представлены в следующей таблице.

Уровни образования	Базовые понятия	Приобретаемые умения
Основная школа	Вектор на плоскости. Модуль вектора. Колинеарность. Сложение векторов и умножение на число. Линейные комбинации. Базисы. Координаты вектора в данном базисе. Скалярное произведение. Ортогональность. Ортогональные базисы.	Построение заданной линейной комбинации векторов на плоскости. Разложение вектора по данному базису. Выполнение линейных операций в координатной форме. Проверка неколинеарности векторов, заданных декартовыми координатами и разложение вектора по двум неколинеарным векторам. Нахождение скалярного произведение по определению и в координатной форме, а также проекции вектора на заданное направление. Определение угла между векторами. Разложение заданного вектора силы на вертикальную и горизонтальную составляющие.
Общее среднее образование (10, 11 классы)	Геометрические векторы в пространстве. Компланарность. Линейные операции и линейные комбинации. Линейная независимость. Базисы в пространстве. Координаты вектора в данном базисе. Скалярное произведение. Отонормированный базис $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.	Разложение по трём некомпланарным векторам, анализ взаимного расположение элементов (ребер, граней) многогранника. Проверка линейной независимость трёх векторов, заданных в декартовых координатах. Нахождение координат вектора в заданном базисе. Нахождение скалярного произведения в координатах, угла между векторами, проекции вектора на заданное направление, координат нормального вектора плоскости. Определение взаимного расположения в пространстве прямых и плоскостей, заданных их уравнениями. Нахождение работы постоянной силы.

Таблица 2. Базовые понятия и умения

Приведённый здесь перечень умений относится к решению стандартных задач. «Перерастание» умений в навыки во многих случаях достигается путём следования определённому алгоритму решения таких заданий.

Продемонстрируем в качестве примера алгоритм решения следующей задачи: известно, что векторы $\mathbf{p}(x_1, y_1, z_1), \mathbf{q}(x_2, y_2, z_2), \mathbf{r}(x_3, y_3, z_3)$, заданные в пространстве в координатной форме, образуют базис; разложить вектор $\mathbf{a}(x, y, z)$ по этому базису. Обоснованием алгоритма служат такие тезисы:

а) записи вектора в координатной форме и в форме разложения по стандартному ортонормированному базису $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ равносильны:

$$\mathbf{a}(x,y,z)\Leftrightarrow x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k};$$

б) два вектора равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые разложения по стандартному базису:

$$x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ y_1=y_2\\ z_1=z_2\end{cases};$$

другими словами, разложение по базису – единственно (тезис вытекает из условия линейной независимости векторов $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$).

Переходим к алгоритму решения поставленной выше задачи.

1. Записать искомое разложение с неопределёнными коэффициентами $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$:

$$\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{p}+\lambda_2\mathbf{q}+\lambda_3\mathbf{r}. \qquad (1.1)$$

2.Записать разложения данных векторов $\mathbf{a},\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}$ по базису $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$.

3. Подставить в полученное в п.2 равенство результаты разложения из п.3 и сгруппировать в правой части соотношения члены с $\mathbf{i}$, с $\mathbf{j}$ и с $\mathbf{k}$ (применяется дистрибутивный закон).

4. Приравнять коэффициенты x,y,z при $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ в левой части к соответствующим коэффициентам в правой части равенства.

5. Решить полученную систему трех линейных уравнений относительно $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

Векторно-координатный способ, основанный на введении прямоугольной декартовой системы координат (а значит, на рассмотрении координат векторов в стандартном ортонормированном базисе $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$), может быть применён к решению ряда задач по стереометрии.

Приведём задание из открытого сегмента банка контрольно-измерительных материалов (КИМ) Единого Государственного Экзамена (ЕГЭ); см. задания профильного уровня на портале Решу ЕГЭ [1].

Задание. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что плоскости AA_1D_1 и DB_1F_1 перпендикулярны.

б) Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и DB_1F_1.

Основные шаги решения могут быть следующими.

1. Координатные оси OX и OY определятся направлениями AD и BF, а их точку пересечения примем за начало координат O; ось OZ будет параллельна направлению AA_1

2. Нормальным вектором плоскости AA_1D_1 теперь будет вектор **i**, а нормальный вектор **n** плоскости DB_1F_1 определим по методу, описанному в п.3, предварительно найдя координаты точек D, B_1 и F_1.

3. Убеждаемся в ортогональности векторов **i** и **n**, чем и завершится решение п. а).

4. Нормальным вектором плоскости ABC будет вектор **k**, так что при решении п.б) достаточно определить угол между векторами **k** и **n**

Векторно-координатный метод может быть применён и к нахождению углов между отрезками прямых в многогранниках; рекомендуется предложить учащимся ряд таких заданий. В качестве примера укажем следующее задание.

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что прямая AB_1 параллельна прямой, проходящей через середины отрезков AC и BC_1.

б) Найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

2. Ортогональные разложения в курсе высшей математики: компетентностный подход

С утверждением компетентностного подхода в системе высшего образования изменились требования к фундаментальной подготовке будущих бакалавров и магистров, которая теперь выходит за рамки знаниевого подхода, предполагающего необходимость усвоения учащимся определённого объёма знаний, и приобретения стандартного набора умений и навыков. Речь идёт теперь о том, что учебный процесс должен быть ориентирован на достижение определённых результатов образования, в связи с чем в основные образовательные программы (ООП) изначально закладываются отчётливые и сопоставимые параметры описания (дескрипторы) того, что студент будет знать и уметь «на выходе».

Фундаментальная подготовка при этом не утрачивает своего первостепенного значения, поскольку формирование как универсальных, так и общепрофессиональных компетенций возможно только на основе овладения рядом теорий и формируемых на их основе умений решать задания как (на первых порах) в рамках самой теории, так и выходя за её границы. Как указывается в [2] «в условиях динамичного развития общества возрастает роль фундаментализации обучения, направленной на обеспечение системообразующих и «долгоживущих» знаний студента, которые, являясь основой его профессионального развития в будущем, позволят понимать и быстро осваивать новые технологии, принципы работы и профессиональные функции. Фундаментализация обучения математике, обеспечивая в долгосрочной перспективе способность и готовность выпускника применять в профессиональной деятельности знания, реализует потенциал компетентностного подхода»

В перечне результатов обучения выделим теперь те частные результаты, которые относятся к линии ортогональных разложений.

Содержание дескрипторов	**Компоненты линии ортогональных разложений в составе дескриптора**
Знает научные подходы и концепции алгебры, геометрии, анализа, позволяющие представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира	Знает: понятия и свойства скалярного, векторного, смешанного произведений; понятие базиса в конечномерном и бесконечно мерном линейном пространстве понятие и аксиомы нормированных, и в частности, евклидовых пространств, понятие ряда Фурье в гильбертовом пространстве.
Умеет применять методы линейной алгебры, геометрии, математического анализа для решения собственно математических и прикладных задач.	Умеет: вычислять ранг матрицы при определении линейной независимости набора векторов, раскладывать вектор по конечному базису, осуществлять процесс ортогонализации системы векторов, раскладывать функцию в ряд по степенному и тригонометрическому базисам, строить интерполяционные многочлены Лагранжа.
Применяет математические методы для объективного научно-исследовательского анализа, моделирования и решения поставленных физико-математических задач в профессиональной деятельности, включая методы исследования уравнений линий и поверхностей, методы аппроксимации функций степенными и тригонометрическими рядами, методы интерполяции и др.	Владеет: методами векторной алгебры и аналитической геометрии для исследования взаимного расположения прямых и плоскостей, методами гармонического анализа, методом Фурье моделирования и анализа физических процессов

Таблица 3. Результаты освоения линии ортогональных разложений

Сформулированные результаты, как нам представляется могут быть достигнуты в результате освоения студентами и педагогами-слушателями курсов повышения квалификации следующих вопросов содержания (см., напр., [3]).

1. Ряды Фурье.

1.1.Конечномерные евклидовы пространства. Базисы.

1.2.Гильбертовы пространства. Функциональные пространства. Степенные и тригонометрические базисы.

1.3.Постановка задачи о разложении периодической функции в сумму простейших гармоник.

1.4.Ряд Фурье. Коэффициенты Фурье. Условия сходимости.

1.5. Ряд Фурье функции на произвольном конечном интервале.

2. Приложения рядов Фурье.

2.2. Уравнение малых поперечных колебаний струны .

2.3. Уравнение малых продольных колебаний стержня.

2.4. Уравнение теплопроводности.

2.5. Уравнение диффузии.

2.6. Уравнение Лапласа. Задача Дирихле в круге.

2.7. Решение задачи Дирихле в круге методом Фурье.

2.8. Интеграл Пуассона.

По итогам освоения курса студентам может быть предложено расчётно-графическое исследование. Приведем в качестве примера одно из предлагаемых заданий.

Струна квадратного поперечного сечения с жестко закрепленными концами в начальный момент времени $t = 0$ оттянута в точке, отстоящей от левого конца на расстоянии $\ell/4$, на заданную величину $\ell/100$, а затем отпущена без толчка. Определить процесс поперечных колебаний струны.

Исследование предполагает:

1. Математическую формулировку задачи (уравнение колебаний, краевые условия, начальное условие).
2. Решение задачи в общем виде по методу Фурье.
3. Подстановка в полученное решение конкретных значений параметров струны.
4. Построение графиков профиля струны в различные моменты времени.

Таким образом, линия ортогональных разложений в значительной мере способствует реализации компетентностного подхода в процессе обучения математике.

3. Ортогональных разложения: классика и современность

Тригонометрические ряды Фурье – важнейший представитель разложений функций по бесконечному ортогональному базису. Такими разложениями активно пользуются во всех сферах науки и техники, где встречаются периодические процессы: в механике, электротехнике, медицине, астрономии, сейсмологии, океанографии и др.

Суть в том, что звуковые, световые волны, океанские приливы, движения космических объектов представляются в виде бесконечной суммы синусоидальных составляющих, которые «переходят от минимума к максимуму и обратно». При этом определяются фазы и амплитуды синусоид, соответствующих определенным частотам.

Основателем этой теории является Жан Батист Жозеф Фурье (1768-1830) — французский математик и физик, иностранный почетный член Петербургской АН. Его труд «Аналитическая теория тепла» (1822) явилась отправным пунктом в создании теории ортогональных тригонометрических рядов (рядов Фурье). В этой работе Фурье вывел дифференциальное уравнение теплопроводности и разработал для его решения (при тех или иных заданных граничных условиях) метод разделения переменных (метод Фурье). В основе этого метода лежит представление функций тригонометрическими рядами. "Аналитическая теория тепла" явилась отправной точкой разработки некоторых общих проблем математического анализа. Фурье привёл первые примеры разложения в тригонометрические ряды Фурье функций, которые заданы на различных участках различными аналитическими выражениями, и, в частности, разрывных функций. Примером такой функции может служить «ступенька» Хевисайда: ее значение равно нулю слева от точки разрыва и единице справа от неё. Данная функция описывает зависимость электрического тока от времени при замыкании цепи.

Однако, ученые-современники Фурье не разделяли утверждение о том, что разрывную функцию можно представить в виде суммы непрерывных синусоидальных функций. Вместе с тем, многие математики расширили сферу изучения данного феномена, выведя его за пределы решения задач теплопроводности.

Поскольку всегда, когда изначальная функция была представлена результатом реального физического измерения, ряды Фурье оказывались сходящимися, возникло предположение, что эта ситуация – общая для всех изначально заданных непрерывных или разрывных функций. Но попытка Фурье доказать этот факт была безуспешной.

Как всегда в подобных случаях, исследование разветвляется на два направления. В первом направлении осуществляется поиск контрпримера, во втором – нахождение классов функций, для которых данное обстоятельство (в нашем случае – сходимость рядов) имеет место. С исследованиями (в обоих направлениях) связан ряд классических результатов (напр., П. Дирихле, Б.Римана и др.) и, в значительной мере, возникновение теории множеств и теории функций действительного переменного. Ниже излагаются условия Дирихле, охватывающие широкий класс функций, для каждой из которых ряд Фурье оказывается сходящимся всюду, а в точках непрерывности – к функции, его породившей. Что же касается первого направления исследований, то даже самый простой случай ряда Фурье непрерывной всюду функции преподносит интересные «сюрпризы». Так, существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в некоторой точке (пример дю-Буа-Реймона, см., напр., [4], с. 470). В связи с подобными примерами (и не только с ними) возникает задача об обобщённом суммировании рядов Фурье. Её решению посвящено большое количество работ (см., напр., [5] – [13]), и данная тематика продолжает своё развитие.

Литература к главе 3

1. Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс] /Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru .

2.Шершнева, В. А. Формирование математической компетентности студентов инж
енерного вуза на основе полипарадигмального подхода: автореф. дисс. докт. пед.наук (13.00.02 – теория и методика обучения и воспитания)/В.А.Шершнева.- Красноярск : ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет». – 2011. -45 с.

4. Куликов, Г.М. Математическое моделирование механических колебаний и процессов тепломассопереноса /Г.М.Куликов, А.Д.Нахман. Тамбов: Изд-во ФГВПО «ТГТУ», 2013. -96 с.
4. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т.1 /А.Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – 615 с.
5. Никольский, С.М. О линейных методах суммирования рядов Фурье / С.М.Никольский//Известия АН СССР, сер. матем. – 1948. – №12. – С.259 –278.
6. Sz. Nagy B. Methodes de summation des series de Fourier. I. Fc. Sz., 12 (1950), 204-210
7. Ефимов, А.В. О линейных методах суммирования рядов Фурье / А.В.Ефимов //Известия АН СССР, сер. матем. – 1960. – №24. – С.743 –756.
8. Теляковский, С.А. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье/ С.А.Теляковский// Изв. АН СССР, сер. матем., т.28, №6, 1964, с. 1209-1236.
9. Баусов, Л.И. О линейных методах суммирования рядов Фурье / Л.И.Баусов //Математический сборник – 1965. – Т. 68(110), № 3. – С.313 – 327
10. Тригуб, Р.М. Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье /Р.М.Тригуб // Изв. АН ССР, сер. Матем., т. 32, 1968, с. 24-29.
11. Дынькин, Е.М. Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения/ Е.М.Дынькин, Б.П.Осиленкер - В кн.: Итоги науки и техники.М., 1983, т.21, с.42-129.
12. Nakhman, A.D. Weigted norm inequalities for the convolution operators/ A.D. Nakhman //Transactions TSTU. –2009. –V.15, № 3. – P. 653-660.
13. Осиленкер, Б.П. Поведение экспоненциальных средних рядов Фурье и сопряженных рядов Фурье в точках Лебега/ Б.П.Осиленкер, А.Д.Нахман // Вестник МГСУ. –2014. –№ 10. – С. 54—63.

Глава 4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СТЕПЕННЫМ БАЗИСАМ: ВОПРОСЫ СОДЕРЖАНИЯ

1. Числовые ряды. Основные понятия. Простейшие свойства

1.1. Рассмотрение степенных базисов начнём с основных понятий и фактов теории числовых рядов. Подробное изложение теории и практики числовых рядов и степенных рядов действительного и комплексного переменного читатель может почерпнуть в источниках [1]-[5].

Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $w_1, w_2, w_3, ..., w_n, ...$. Формально составленная бесконечная сумма вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n + ...$$

или, коротко,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \tag{1.1}$$

называется числовым рядом; общий член последовательности $\{w_n\}$ называется общим членом ряда (1.1). Обозначим через

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n$$

n - ую частичную сумму ряда (1.1); при этом, по определению, $S_1 = w_1$.

Если существует предел вида

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

то числовой ряд (1.1) называется сходящимся, а в противном случае - расходящимся.

Число S назовем суммой сходящегося ряда; говорят также, что ряд (1.1) сходится к сумме S и применяют запись

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

Главная задача, которая решается в теории числовых рядов - сходится или расходится данный ряд; вопрос о его сумме можно ставить лишь тогда, когда доказана сходимость. Сумму же сходящегося ряда всегда можно вычислить приближенно, взяв достаточно большое количество n членов в составе его частичной суммы S_n; при этом точность вычисления увеличивается с ростом n.

1.2. *Пример* 1. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i}{n(n+1)}$$

и найти его сумму.

Решение. Воспользуемся определением сходимости ряда и его суммы, для чего вычислим частичную сумму произвольного (n-го) порядка. Преобразуем общий член ряда к виду

$$\frac{i}{n(n+1)}=i\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=i(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

и сложим первые n членов. При этом мы обнаруживаем, что члены, начиная со второго и кончая предпоследним, будут взаимно уничтожаться:

$$S_n=i((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=i(1-\frac{1}{n+1})).$$

Теперь вычисляем следующий предел:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}i(1-\frac{1}{n+1})=i$$

Таким образом, ряд оказался сходящимся и его сумма $S=i$.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}. \qquad (1.2)$$

Решение. Данный ряд состоит из действительных чисел. Поведение частичных сумм ряда определится следующей легко устанавливаемой оценкой его общего члена:

$$\frac{1}{n}>\ln(n+1)-\ln n.$$

Теперь частичная сумма n-го порядка

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$$

имеет оценку снизу

$$S_n>(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+...(\ln n-\ln(n-1))+(\ln(n+1)-\ln n)=\ln(n+1),$$

откуда вытекает, что $S_n \to \infty$ вместе с $\ln(n+1)$ при $n \to \infty$.

Итак, исследуемый ряд расходится.

Замечание. Указанный ряд называется гармоническим. Ниже будет рассмотрен более общий случай так называемого ряда Дирихле (иначе называемого обобщенным гармоническим рядом).

1.3. Установим некоторые свойства сходящихся рядов. Пусть даны произвольные комплексные числа τ, ρ и сходящиеся числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

суммы которых равны U и V соответственно. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tau u_n + \rho v_n) \tag{1.2}$$

сходится, и его сумма равна $\tau U + \rho V$.

Доказательство легко следует из определений сходимости и суммы ряда. Исключим из рассмотрения случай $\tau = \rho = 0$, в котором утверждение становится очевидным (сумма ряда, состоящего из нулей, равна нулю) и запишем n-ую частичную сумму ряда (1.2):

$$S_n = (\tau u_1 + \rho v_1) + (\tau u_2 + \rho v_2) + \ldots + (\tau u_n + \rho v_n) =$$
$$= \tau(u_1 + u_2 + .. + u_n) + \rho(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = \tau U_n + \rho V_n,$$

где U_n, V_n - частичные суммы соответствующих рядов. В силу их сходимости имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \tau U_n + \lim_{n\to\infty} \rho V_n = \tau U + \rho V.$$

Итак, ряд (1.2) оказался сходящимся к сумме $\tau U + \rho V$.

В частности, при $\rho = 0$ получаем что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau u_n$$

имеет то же поведение, что и

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если исходный ряд был сходящимся, то его сумма умножится на τ.

1.4. Пусть $w_n = u_n + iv_n$, $n = 1,2,...$, так что u_n - действительная а v_n - мнимая части w_n. Ряд (1.1) тогда можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + iv_n). \tag{1.3}$$

Применяя доказанное в п. 1.3 свойство, получаем следующее утверждение.

Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{1.4}$$

составленные из действительных и мнимых частей последовательности w_n, то сходится и ряд (1.3).

Верно и обратное: если сходится ряд (1.3), то имеет место сходимость обоих рядов (1.4).

1.5. По заданной бесконечной последовательности $\{w_n\}$ построим теперь ряд вида

$$w_{N+1} + w_{N+2} + ..., \tag{1.5}$$

где $N = 1,2,...$ и назовем его N-ым остатком ряда (1.1); иными словами, N-ый остаток (1.1) есть ряд, полученный отбрасыванием первых N членов.

Обозначим при $n > N$ через $S_{N,n}$ n-ю частичную сумму ряда-остатка (1.5)

$$S_{N,n} = w_{N+1} + ... + w_n$$

и, в случае его сходимости, через R_N - сумму этого ряда, т.е.

$$R_N = \lim_{n\to\infty} S_{N,n}.$$

Как оказывается, что *ряд* (1.1) *сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый его ряд-остаток* (1.5). Другими словами, *отбрасывание или добавление конечного числа (первых) членов не влияет на сходимость данного ряда*.

Имеет место также следующее свойство остатка: если (1.1) является сходящимся, то

$$\lim_{N\to\infty} R_N = 0.$$

1.6. *Необходимый признак сходимости ряда*. Если ряд (1.1) сходится, то существует предел (при $n \to \infty$) его общего члена w_n, причем

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0.$$

Обратное утверждение неверно.

Достаточный признак расходимости. Если

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| \neq 0$$

(или если этот предел не существует), то ряд (1.1) расходится.

1.7. *Сумма геометрической прогрессии.*

Пусть a и q - ненулевые комплексные числа. Рассмотрим бесконечную геометрическую прогрессию

$$a, aq, aq^2, \ldots aq^n, \ldots,$$

ряд, составленный из ее членов

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n, \tag{1.6}$$

и исследуем его сходимость.

Случай 1: $|q| \geq 1$; в этом случае $|aq^n| = |a| \cdot |q|^n \geq |a|$. Могут представиться две возможности: либо

$$\lim_{n\to\infty} |aq^n|$$

не существует, либо он существует и согласно неравенству $|q| \geq 1$ его значение не меньше числа $|a| > 0$. В обоих случаях, по достаточному признаку расходимости ряда, получаем, что (1.6) расходится.

Случай 2: $|q| < 1$; в этом случае n-ая частичная сумма ряда (1.6) имеет вид

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

Вычислим теперь предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}(1 - \lim_{n\to\infty} q^n).$$

Последний предел существует, т.к. очевидно, что $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$. Теперь

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

т.е. ряд оказался сходящимся к сумме

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, мы установили, что ряд (1.6) с $a \neq 0$ является сходящимся тогда и только тогда, когда $|q| < 1$ и нашли в этом случае его сумму.

2. Сходимость рядов с положительными членами

2.1. Рассмотрим случай, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2.1)$$

составлен из действительных положительных чисел, т.е. порожден последовательностью $\{a_n\}$, $a_n \in R, a_n > 0, n = 1,2,...;$ такой ряд называют знакоположительным. Обозначим через S_n частичную сумму ряда n-го порядка.

В вопросах исследования знакоположительных рядов потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Если последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, то ряд (2.1) сходится.

Доказательство. С ростом n последовательность $\{S_n\}$ возрастает, т.к. в частичной сумме будут добавляться положительные члены. Кроме того, по условию, эта последовательность ограничена. Но, как известно из анализа, всякая возрастающая ограниченная последовательность имеет предел; в нашем случае существует (конечный) предел вида $\lim_{n\to\infty} S_n$. Это и означает сходимость ряда (2.1).

2.2. Одним из способов исследования сходимости знакопожительного ряда является сравнение его общего члена с общим членом некоторого ряда с известным поведением ("эталонного ряда"). Примером эталонного является ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии. Другие примеры см. в конце настоящего параграфа.

Теорема 1 (сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2.2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{2.3}$$

и при всех $n = 1,2,...$ имеет место неравенство

$$a_n \le b_n. \tag{2.4}$$

Тогда: 1)если сходится ряд (2.3) (к некоторой сумме B) , то сходится и ряд (2.2) (к некоторой сумме A); при этом для их сумм имеет место соотношение $A \le B$;

2)если ряд (2.2) расходится, то расходится и ряд (2.3).

Замечание. Поскольку отбрасывание или добавление конечного числа членов не влияет на сходимость ряда, утверждение теоремы имеет место, если соотношение (2.4) выполняется не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера N.

Доказательство. 1) Если ряд (2.3) сходится, то последовательность $\{B_n\}$ его частичных сумм (как сходящаяся последовательность) ограничена сверху некоторой постоянной C: $B_n \le C$. Если также A_n - последовательность частичных сумм ряда (2.2), то из неравенства (2.4) вытекает, что

$$A_n \le B_n \le C \tag{2.5}$$

при всех n. Следовательно, последовательность A_n ограничена сверху, а тогда по лемме п.1 ряд (2.2) сходится. Переходя к пределу в неравенстве (2.5), получаем также $A \le B$. Утверждение 1) установлено.

2) Если ряд (2.2) расходится, то (2.3) не может быть сходящимся по доказанному утверждению 1).

2.3. Теорема 2 (признак сравнения в предельной форме). Пусть даны два знакоположительных ряда (2.2) и (2.3), причем существует предел вида

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n},\ L > 0. \tag{2.6}$$

Тогда ряды (2.2) и (2.3) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. Согласно (2.6) и определению предела, для каждого $\varepsilon > 0,\ \varepsilon < L$ существует номер N, такой что неравенство

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon$$

имеет место при всех $n > N$. Из последнего соотношения (при указанных n) вытекает, что

$$-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - L < \varepsilon$$

или, одновременно,

$$a_n < (L+\varepsilon)b_n, \quad b_n < \frac{1}{L-\varepsilon}a_n \qquad (2.7)$$

Согласно выбору ε имеет место оценки $L+\varepsilon > 0$ и $L-\varepsilon > 0$. Тогда по ряд с общим членом $(L-\varepsilon)a_n$ ведет себя так же, как (2.2), а ряд с членами $(L+\varepsilon)b_n$ - как (2.3). Теперь, в силу теоремы 1, первое неравенство в (2.7) будет означать, что из сходимости (2.3) вытекает сходимость (2.2), а из расходимости (2.2) - расходимость (2.3). Аналогичные утверждения следует из второго неравенства в (2.6), если "поменять ролями" (2.2) и (2.3). Таким образом, поведение рядов (2.2) и (2.3) - одинаково, что и утверждалось.

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(2^n+1)n}.$$

Решение. Оценим сверху общий член ряда:

$$a_n = \frac{2n+1}{2^n n} = \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n \le 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

составлен из членов геометрической прогрессии с первым членом $a = 3$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$, меньшим единицы; следовательно этот ряд сходится. По теореме 1 сравнения тогда сходится и данный ряд.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1}.$$

Решение. При больших значениях n поведение общего члена ряда

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 3n + 1}$$

определяется поведением старших степеней параметра n, что наводит на мысль рассмотреть последовательность $\{b_n\}$ с общим членом

$$b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

и сравнить (на основании признака в предельной форме) данный ряд с

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$$

последний (гармонический) ряд, как установлено выше, является расходящимся. Имеем

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^2 + 3n + 1} : \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2(1 + 3/n + 1/n^2)} = 1,$$

т.е. $L \neq 0$, откуда заключаем, что поведение сравниваемых рядов одинаково, а значит данный ряд расходится.

2.4. Использование признаков сравнения знакоположительных рядов предполагает наличие некоторого эталона для сравнения. Было бы полезно дополнить список признаков такими, которые позволяли бы исследовать поведение ряда, исходя лишь из вида его общего члена. Такие признаки предлагаются в настоящем и следующем параграфах.

Пусть дан знакоположительный ряд (2.1).

Теорема 3 (радикальный признак Коши). Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} \tag{2.8}$$

Если $K < 1$, то ряд (2.1) сходится; если же $K > 1$, то ряд расходится.

Замечание. В случае $K=1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда: существуют примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов для которых $K=1$.

Доказательство. Согласно (2.8) и определению предела, для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что неравенство

$$|\sqrt[n]{a_n} - K| < \varepsilon$$

имеет место при всех $n > N$. Из последнего соотношения (при указанных n) вытекает, что

$$K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon) \qquad (2.9)$$

Случай 1: $K < 1$. Ввиду произвольности выбора ε положим $0 < \varepsilon < 1 - K$ и обозначим $q = K + \varepsilon$, так что $0 < q < 1$. Из (2.9) вытекает тогда, что $a_n < (K+\varepsilon)^n$ или $a_n < q^n$ при всех $n > N$. Поскольку сумма членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$$

является сходящимся рядом то по первой теореме сравнения (см. также замечание к ней) сходится и ряд (2.1).

Случай 2: $K > 1$. В этом случае выберем ε так, что $0 < \varepsilon < K - 1$ и обозначим $Q = K - \varepsilon$, так что $Q > 1$. Из (2.9) вытекает тогда, что $a_n > (K+\varepsilon)^n$ или $a_n > Q^n$ при всех n, начиная с некоторого номера N. Но в этом случае члены ряда (2.1) не могут стремиться к нулю и ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

Теорема полностью доказана.

Теорема 4 (признак Даламбера). Пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $D < 1$, то ряд (2.1) сходится; если же $D > 1$, то ряд расходится.

Замечание. В случае $D = 1$ (подобно признаку Коши) теорема 2 не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Доказательство мы не приводим, но его идея та же, что и в случае теоремы 1. Отметим только (это потребуется в дальнейшем), что при $D > 1$

расходимость ряда имеет место ввиду нарушения необходимого признака сходимости - достаточного признака расходимости (см. доказательство признака Коши).

Пример 3. Исследовать сходимость ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{n})^{n^2}$$

Решение. Вид общего члена ряда

$$a_n=(\frac{n+1}{n})^{n^2},$$

наводит на мысль использовать признак Коши. Имеем

$$K=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^n=e.$$

Поскольку $K=e=2{,}71...>1$, то данный ряд расходится.

2.5. Следующий признак позволяет свести вопрос об исследовании сходимости знакоположительного ряда к более знакомой задаче об исследовании сходимости несобственного интеграла.

Рассмотрим аналитическое выражение общего члена a_n (формулу, которой он задан) ряда (2.1) и заменим в ней n на x . В результате получим некоторую функцию $a(x)$. Пусть эта функция непрерывна и убывает на промежутке $[1,+\infty)$.

Теорема 3 (интегральный признак Коши). Если несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty}a(x)dx$$

сходится, то сходится и ряд (2.1); если же интеграл расходится, то расходится и ряд.

Доказательство интегрального признака мы не приводим.

Пример 4. Рассмотрим ряд (называемый рядом Дирихле)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p\in R.)$$

Докажем, что этот ряд сходится при $p>1$ и расходится при остальных действительных значениях p.

Начнем со случая $p>0,\ p\neq 1$ и применим интегральный признак Коши. Заменяя в записи общего члена ряда n на x, получим функцию $a(x)=\dfrac{1}{x^p},\ x\in[1,+\infty)$. Ясно, что на указанном промежутке функция $a(x)$ непрерывна и убывает. Исследуем теперь соответствующий несобственный интеграл.

Если $p>1$, то

$$\int_1^\infty a(x)dx=\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx=$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\int_1^T x^{-p}dx=\lim_{T\to+\infty}\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^T=\frac{1}{1-p}\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{T^{1-p}}-1\right)=\frac{1}{p-1}.$$

Итак, исследуемый интеграл оказался сходящимся, откуда и следует сходимость ряда Дирихле.

Если $0<p<1$, то тот же интеграл вычисляется в виде

$$\int_1^\infty a(x)dx=\frac{1}{1-p}\lim_{T\to+\infty}(T^{1-p}-1)=+\infty,$$

откуда следует расходимость ряда.

В случае $p=1$ снова применяем интегральный признак Коши с $a(x)=\dfrac{1}{x}$:

$$\int_1^\infty a(x)dx=\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{T\to+\infty}(\ln x)\Big|_1^T=\lim_{T\to+\infty}\ln T=+\infty,$$

так что ряд Дирихле расходится; тем самым еще раз установлена расходимость гармонического ряда.

Наконец, при $p\le 0$ имеем $a_n=n^{-p}\ge 1$, так что общий член ряда не стремится к нулю, а тогда ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

3. Абсолютная и условная сходимость

3.1. Рассмотрим знакоположительную последовательность

$$\{a_n\},\ a_n\in R, a_n>0, n=1,2,\dots \quad . \tag{3.1}$$

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n-1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{3.2}$$

называется знакочередующимся. Достаточным признаком его сходимости является следующий признак Лейбница, который мы приводим без доказательства.

Теорема 1. Если последовательность (3.1) является убывающей и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

то знакочередующийся ряд (3.2) сходится.

Пример 1. Ряд вида

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + ... \tag{3.3}$$

является сходящимся, поскольку выполнены оба условия признака Лейбница: последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ является, очевидно, убывающей и имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

3.2. Рассмотрим ряд из действительных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{3.4}$$

среди членов которого имеются как положительные, так и отрицательные числа; такой ряд называется знакопеременным. Рассмотрим также ряд, составленный из абсолютных величин членов (3.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \tag{3.5}$$

Будем считать, что количество как положительных, так и отрицательных членов в (3.4) является бесконечным, так как в противном случае вопрос о сходимости сводится к случаю знакоположительных рядов. В самом деле, если, например, количество положительных членов в (3.4) оказывается конечным, то, начиная с некоторого номера, все члены ряда будут отрицательными. Тогда поведение ряда определяется поведением этого остатка, состоящего только из отрицательных членов. Если же изменить знаки всех членов ряда - остатка на противоположные, т.е. умножить все члены на (-1), то его поведение не изменится. Таким образом, вопрос сведен к исследованию сходимости полученного знакоположительного ряда.

Теорема 2. Если сходится ряд (3.5), то сходится и ряд (3.4).

Сходимость ряда (3.4) в этом случае называется *абсолютной*.

Обратное утверждение неверно: знакопеременный ряд может быть сходящимся, тогда как (3.5) - расходящийся. Примером служит (3.3), для которого ряд из абсолютных величин - это расходящийся гармонический ряд.

В подобных случаях говорят, что ряд (3.4) *сходится условно*.

Доказательство теоремы 2. Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n \tag{3.6}$$

n-ая частичная сумма ряда (3.6), а

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + ... + |u_n| \tag{3.7}$$

n-ая частичная сумма ряда из абсолютных величин (3.4).

Выделим в (3.4) сумму всех положительных членов, и обозначим ее через S_n^+, а сумму абсолютных величин всех отрицательных членов (в составе S_n) обозначим через S_n^-. Суммы S_n^+ и S_n^-, составленные из положительных чисел, возрастают с ростом n. Тогда, очевидно,

$$S_n = S_n^- - S_n^-,\ \sigma_n = S_n^+ + S_n^-.$$

Последовательность (3.7) имеет предел (ввиду сходимости ряда (3.5)), а значит является ограниченной, т.е. существует постоянная $C > 0$, такая что $\sigma_n \le C$ при всех n. Ясно, что тогда $S_n^+ \le S_n^+ + S_n^- = \sigma_n \le C$, и, точно так же, $S_n^- \le \sigma_n \le C$. Значит, последовательности S_n и S_n^-, будучи возрастающими и ограниченными, имеют конечные пределы. Тогда имеет предел их разность S_n, что и означает сходимость ряда (3.4).

3.3. Вернемся к рассмотрению ряда с комплексными членами,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n, \tag{3.8}$$

одновременно рассматривая соответствующий ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|. \qquad (3.9)$$

Рассмотрим также два ряда, составленные из действительных частей и мнимых частей последовательности $\{w_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \qquad (3.10)$$

где $u_n = \operatorname{Re} w_n, v_n = \operatorname{Im} w_n,\ n = 1,2,...$.

Понятия абсолютной и условной сходимости могут быть, очевидно, перенесены на случай рядов с комплексными членами.

Теорема 3. Ряд (3.8) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся оба ряда (3.10).

3.4. Как следует из результата теоремы 2, достаточные условия сходимости ряда из модулей (3.9) являются одновременно и достаточными условиями сходимости ряда комплексных чисел (3.7). Поэтому признаки сходимости знакоположительных рядов, которым мы выше уделили столь значительное внимание, выступают здесь признаками сходимости (абсолютной) рядов с комплексными членами. Уточним последнюю мысль.

Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|w_n|}$$

(будем называть его числом Коши). Если $K < 1$, то ряд (3.8) сходится абсолютно. Если же $K > 1$, то ряд (3.8) расходится.

Стоит отметить, что при $K > 1$ ряд из модулей (3.9) расходится ввиду того, что не выполнен необходимый признак сходимости, но тогда не могут стремиться к нулю и члены w_n; таким образом и ряд (3.8) оказывается расходящимся.

Аналогично обстоит дело и с "числом Даламбера"

$$D = \lim_{n\to+\infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}:$$

если $D < 1$, то ряд (3.6) сходится абсолютно; если же $D > 1$, то (3.8) расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(i-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}.$$

Решение. Имеем общий член ряда в виде

$$w_n=(i-1)^n \sin\frac{\pi}{2^n}$$

и

$$|i-1|=\sqrt{2},\ \sin\frac{\pi}{2^n}>0;$$

последнее неравенство имеет место, т.к. при $n=1,2,...$ значения аргумента $\frac{\pi}{2^n}$ принадлежат первой четверти тригонометрической окружности. Значит,

$$|w_n|=(\sqrt{2})^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n},$$

а тогда число Даламбера

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{2})^{n+1}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{(\sqrt{2})^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}}=\sqrt{2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2^n}}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

вычисляя последний предел, мы воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin t$ и t при $t\to 0$ в случаях, когда значения t выбраны равными $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ и $\frac{\pi}{2^n}$.

Итак, $D=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, откуда следует, что данный ряд сходится абсолютно.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1-ni}.$$

Решение. Имеем

$$|w_n| = \frac{n}{|1-ni|} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{n}{n\sqrt{\frac{1}{n}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}+1}},$$

и теперь легко заметить, что $|w_n|$ не стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| = 1.$$

Согласно достаточному признаку расходимости, данный ряд будет расходящимся.

4. Равномерная сходимость функционального ряда

4.1. Пусть $S(z)$ есть сумма функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \qquad (4.1)$$

на замкнутой ограниченной области G и при каждом n существует наибольшее значение модуля уклонения $S_n(z)$ от $S(z)$

$$\rho_n = \max_{z\in G} |S_n(z) - S(z)|,\ n = 1,2,...$$

Ряд (4.1) называется равномерно сходящимся на G к сумме $S_n(z)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,$$

и докажем достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

Теорема 1. Если существует числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, такая что для всех $z \in G,\ n = 1,2,...$ имеют место оценки

$$|u_n(z)| \le \alpha_n \qquad (4.2)$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \qquad (4.3)$$

- сходящийся, то ряд (4.1) равномерно сходится на G.

При выполнении условий теоремы 1 говорят, что ряд (4.1) *мажорируем* на G, а знакоположительный ряд (4.3) называется *мажорантным*. В этих терминах теорема может быть сформулирована так: *мажорируемый на G функциональный ряд сходится равномерно на G.*

Отметим также (не приводя здесь соответствующих примеров), что условие мажорируемости является лишь достаточным для равномерной сходимости, но не является необходимым .

Доказательство. Ввиду соотношения (4.2), выполненного на G, имеем абсолютную сходимость (на G) ряда (4.1) к некоторой сумме $S(z)$; при этом

$$S(z) - S_n(z) = r_n(z), \tag{4.4}$$

где $r_n(z)$- сумма ряда - остатка. По определению суммы ряда и ввиду сохранения для функций комплексного переменного привычных свойств пределов (предельный переход под знаком модуля и предельный переход в неравенстве) имеем

$$|r_n(z)| = |\lim_{m\to\infty}(u_{n+1}(z) + \ldots + u_m(z))| = \lim_{m\to\infty}|u_{n+1}(z) + \ldots + u_m(z)| \le$$

$$\le \lim_{m\to\infty}(|u_{n+1}(z)| + \ldots + |u_m(z)|) \le \lim_{m\to\infty}(\alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_m).$$

Сумма под знаком последнего написанного предела представляет собою

m-ю частичную сумму n-го остатка числового ряда (4.3), а значение предела - сумма его n-го остатка, которую мы обозначим через r_n^*:

$$|r_n(z)| \le r_n^*.$$

Ввиду сходимости ряда (4.3) имеем $r_n^* \to 0$ при $n \to \infty$. Согласно (4.4), при выполнении условия теоремы тогда имеем

$$\rho_n = \max_{z\in G}|S(z) - S_n(z)| = \max_{z\in G}|S_n(z) - S(z)| = \max_{z\in G}|r_n(z)| \le r_n^*.$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\rho_n = 0,$$

что и означает равномерную (на G) сходимость ряда (4.1).

4.2. *Теорема* 2. Если ряд (4.1), составленный из функций $u_n(z)$, непрерывных на замкнутой ограниченной области G, равномерно сходится на этой области, то его сумма $S(z)$ непрерывна в каждой точке $z_0 \in G$, т.е.

$$\lim_{z\to z_0} S(z) = S(z_0).(8.4.5)$$

Доказательство. Оценим $|S(z) - S(z_0)|$. Имеем, в силу (8.4.5),

$$|S(z)-S(z_0)|=|(S_n(z)+r_n(z))-(S_n(z_0)+r_n(z_0))|\le$$
$$\le(|S_n(z)-S_n(z_0)|+|r_n(z)|+|r_n(z_0)|)\le|S_n(z)-S_n(z_0)|+2\max_{z\in G}|r_n(z)|=$$
$$=|S_n(z)-S_n(z_0)|+2\rho_n, \qquad (4.6)$$

где, по определению равномерной сходимости ряда, $\rho_n \to 0$ при $n\to\infty$. Поскольку конечная сумма $S_n(z)$ непрерывных (на G) функций является непрерывной, имеем

$$\lim_{z\to z_0} S_n(z)=S_n(z_0) \text{ или } \lim_{z\to z_0}|S_n(z)-S_n(z_0)|=0,$$

а тогда в силу (4.6),

$$\lim_{z\to z_0}|S(z)-S(z_0)|\le \lim_{z\to z_0}|S_n(z)-S_n(z_0)|+2\tau_n=2\rho_n. \qquad (4.7)$$

Левая часть (4.7) не зависит от n, и, следовательно, сохраняет свой вид при предельном переходе (по n), тогда как правая стремится к нулю. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в обеих частях (4.7), получаем

$$\lim_{z\to z_0}|S(z)-S(z_0)|=0,$$

откуда и следует (4.6).

5. Степенные ряды

5.1. Рассмотрение начнем с общих свойств равномерно сходящися рядов функций $f_n(x)\,(n=1,2,...)$ действительного переменного x. Применительно к этому случаю формулировки выглядят следующим образом.

1) Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \qquad (5.1)$$

называется *равномерно сходящимся* на отрезке $[a,b]$ к сумме $S(x)$, если имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a,b]}|S(x)-S_n(x)|=0.$$

2) Если ряд (5.1) *мажорируем* на отрезке $[a,b]$, то он обладает *равномерной сходимостью* на этом отрезке.

3) Ряд (5.1), составленный из функций, *непрерывных* на отрезке $[a,b]$ и *равномерно сходящийся* на $[a,b]$, *обладает непрерывной на этом отрезке суммой и допускает возможность почленного интегрирования* по всякому $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$.

4) Если ряды (5.1) и

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \tag{5.2}$$

обладают *равномерной сходимостью* на отрезке $[a,b]$, и суммы их равны, соответственно, функциям $S(x)$ и $\phi(x)$, то сумма $S(x)$ ряда (5.1) *дифференцируема* при всех $x\in(a,b)$; при этом $S'(x)=\phi(x),\ x\in(a,b)$, так что

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = S'(x).$$

Утверждения 2) и 3) являются частными случаями теорем, установленных выше. Остается доказать утверждение 4). Ввиду равномерной сходимости ряда (5.2) можно произвести его почленное интегрирование по некоторому отрезку $[\alpha,x]\subset[a,b]$. Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x} f_n'(x)dx = \int_{\alpha}^{x}\phi(x)dx.$$

Поскольку

$$\int_{\alpha}^{x} f_n'(x)dx = f_n(x) - f_n(\alpha),\ n=1,2,...,$$

то левая часть последнего соотношения есть разность значений суммы $S(x)$, вычисленных в точках x и α :

$$S(x)-S(\alpha)=\int_{\alpha}^{x}\phi(x)dx.$$

Продифференцируем теперь обе части последнего соотношения и воспользуемся существованием производной интеграла с переменным верхним пределом; в нашем случае

$$\left(\int_{\alpha}^{x}\phi(x)dx\right)' = \phi(x),\ x\in(a,b).$$

В результате получаем дифференцируемость $S(x)$ и соотношение

$$S'(x)-(S(\alpha))' = \phi(x),\ x\in(a,b);$$

при этом $(S(\alpha))'=0$, т.к. α - постоянная величина. Утверждение доказано.

5.2. Рассмотрим ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,\ x \in R \tag{5.3}$$

с действительными коэффициентами a_n, $n = 1,2,\ldots$; будем употреблять также запись

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке $x_0 = 0$, т.к. все его частичные суммы $S_n(x_0) = a_0$, и, следовательно, предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ существует и равен a_0. Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд (5.3) сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится на промежутке, определяемом неравенством $|x| < |x_0|$. Если же x' – точка расходимости, то ряд (5.3) расходится при всех x таких, что $|x| > |x'|$.

Доказательство. 1) Ряд из модулей для (5.3) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n . \tag{5.4}$$

Общий член ряда (5.4) можно представить следующим образом:

$$u_n(x) = |a_n| \cdot |x|^n = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \tag{5.5}$$

где $x_0 \neq 0$ - точка сходимости ряда (5.3). Поскольку в этой точке выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n \to \infty} \left|a_n x_0^n\right| = 0,$$

то для всех n существует постоянная $\mathrm{M} > 0$ такая, что

$$\left|a_n x_0^n\right| \leq M .$$

При условии $|x| < |x_0|$ имеем для $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right|$, что $0 \leq q < 1$. Следовательно, в силу (5.5), справедлива оценка $0 \leq u_n(x) \leq M q^n, 0 \leq q < 1$, и ряд

$$M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots$$

является сходящимся (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). По теореме сравнения знакоположительных рядов тогда сходится и ряд (5.4). Значит, в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$ ряд (5.3) сходится абсолютно, что и утверждалось.

2) В случае $|x| > |x'|$ ряд (5.3) не может сходится в точке *x*. Действительно, в силу $|x'| < |x|$, сходимость (5.3) в точке x означала бы (по первой части теоремы Абеля), что ряд сходится и в точке x'. Но это противоречит условию. Итак, вторая часть теоремы также доказана.

5.3. Из теоремы Абеля вытекает, что всякая точка сходимости x_0 степенного ряда ближе к началу координат, чем любая точка расходимости (если такая имеется). Следовательно, должно существовать некоторое "пограничное" расстояние *R*, такое что при $|x| < R$, т.е в интервале (–*R*, *R*), имеет место сходимость (абсолютная), а при $|x| > R$ (вне интервала) - расходимость ряда (5.3). Число *R* называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а (–*R*, *R*) – его интервалом сходимости.

При всяком $0 < \rho < R$ ряд (5.3) будет сходится и равномерно на отрезке

$[-\rho, \rho]$. Действительно, взяв точку x^*, такую, что $|x^*| = \rho$, имеем абсолютную сходимость в точке x^*, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \rho^n.$$

В то же время, для членов (5.4) имеем оценку

$$\left|a_n x^n\right| \le |a_n| \cdot |x|^n < |a_n| \rho^n.$$

Согласно признаку Вейерштрасса, получаем равномерную сходимость при $|x| \le \rho$. В частности (т.к. непрерывны все степенные функции $u_n(x) = x^n$), непрерывной в интервале сходимости будут и сумма ряда (5.3).

5.4. *Радиус сходимости R* можно найти по одной из формул

$$R = \frac{1}{D} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{K}, \tag{5.6}$$

если существует соответствующее "число Даламбера"

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{5.7}$$

или "число Коши"

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,. \tag{5.8}$$

Формулы (5.6) – (5.8) остаются справедливыми, если $D = 0$ или $(K = 0)$: тогда $R = \infty$, т.е. областью сходимости ряда является вся числовая ось. Если же $D = +\infty$ $(K = +\infty)$, то $R = 0$, т.е. "областью" сходимости является единственная точка $x_0 = 0$. Примеры такого рода см. ниже.

Докажем, (5.6) например, в случае (5.8). Согласно признаку Коши, ряд (5.4) сходится если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} < 1, \text{ т.е. } |x| \cdot K < 1, \tag{5.9}$$

откуда получаем при $|z| < \frac{1}{K}$ сходимость ряда (5.4), а значит и абсолютную сходимость ряда (5.3). В то же время при $|x| > \frac{1}{K}$ из доказательства признака Коши следует не только расходимость ряд из модулей (5.4), но и расходимость (5.3).

Итак, именно число $R = \frac{1}{K}$ оказалось радиусом сходимости согласно определению *R*.

Отметим также, что при $K = 0$ условие (5.9) выполнено при всех *x* (т.е. $R = \infty$), а при $K = \infty$ условие (5.9) не выполнено при любом $x \neq 0$; точка же $x_0 = 0$, как упоминалось, служит точкой сходимости любого степенного ряда ($R = 0$). Утверждение п.5.4 полностью доказано.

5.5. Из результатов п. 5.3 вытекает, что степенной ряд (5.3) мажорируем на всяком отрезке вида $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$, а значит, равномерно сходится на этом отрезке. Отсюда вытекает возможность почленного интегрирования ряда по всякому отрезку, расположенному внутри интервала сходимости.

Возможность же почленного дифференцирования будет обеспечена равномерной сходимостью ряда составленного из производных; см. п.5.2. Достаточно поэтому установить мажорируемость ряда

$$(a_0)' + (a_1 x)' + (a_2 x^2)' + \ldots + (a_n x^n)' + \ldots,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{5.10}$$

на любом отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$. Доказательство мажорируемости проведем в предположении, что существует предел, обозначенный через D в (5.7); следовательно $R = \dfrac{1}{D}$.

Определим радиус сходимости $\widetilde{R}$ ряда (5.10). Соответствующее число Даламбера имеет вид

$$\widetilde{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,|\,a_{n+1}\,|}{n\,|\,a_n\,|} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|\,a_{n+1}\,|}{|\,a_n\,|} = 1 \cdot D,$$

следовательно, $\widetilde{R} = \dfrac{1}{D}$. Таким образом, $\widetilde{R} = R$, и интервалы сходимости рядов (5.10), (5.3) совпадают. Окончательно, имеем мажорируемость ряда (5.10) на всяком отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$, а значит и возможность почленного дифференцирования исходного степенного ряда (5.3).

5.6. Если рассуждения п. 5.5 применить к ряду из производных (5.10), то получаем возможность и его почленного дифференцирования в интервале $(-R, R)$. Повторяя и далее указанные рассуждения, приходим к следующему важному выводу: *степенной ряд, обладающий суммой $S(x)$ в некотором интервале сходимости, можно почленно дифференцировать сколь угодно много раз в этом интервале; при этом сумма ряда из n-ых производных совпадает с $S^{(n)}(x)$.*

5.7. *Примеры.*

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-nx}, \quad a > 1.$$

Решение. Имеем функциональный ряд, который становится степенным после замены переменной $y = a^{-x}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n .$$

Получена сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем y. Ряд сходится тогда и только тогда, когда $|y| < 1$. Значит, область сходимости определяется неравенством $a^{-x} < 1$, откуда при $a > 1$ должно выполняться неравенство $-x < 0$, так что $x > 0$. Окончательно, получили, что область сходимости ряда есть полупрямая $x > 0$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{nx^n}.$$

Решение. Если положить $X = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, то получим степенной ряд действительной переменной X

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n} X^n$$

с коэффициентами вида $a_n = \frac{5^n}{n}$. Число Даламбера находим в виде

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n5^{n+1}}{(n+1)5^n} = 5 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} = 5,$$

откуда $R = \frac{1}{5}$, и интервал абсолютной сходимости ряда определяется соотношением

$$-\frac{1}{5} < X < \frac{1}{5};$$

вне этого интервала степенной ряд расходится. Исследуем концы интервала.

а) $X = \frac{1}{5}$. В этой точке значение общего члена ряда

$$f_n(X) = \frac{5^n}{n} X^n \text{ есть величина } f_n(\frac{1}{5}) = \frac{5^n}{n}(\frac{1}{5})^n = \frac{1}{n},$$

так что приходим к числовому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

(гармонический ряд), который расходится.

б) $X=-\frac{1}{5}$. Имеем

$$f_n(-\frac{1}{5})=\frac{5^n}{n}\frac{(-1)^n}{5^n}=\frac{(-1)^n}{n};$$

полученный знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

является условно сходящимся.

Итак, область сходимости степенного ряда определяется соотношением $-\frac{1}{5}\le X<\frac{1}{5}$. Поскольку $X=\frac{1}{x}$, то остается решить двойное неравенство $-\frac{1}{5}\le\frac{1}{x}<\frac{1}{5}$. Можно записать, что $\frac{1}{|x|}<\frac{1}{5}$ либо $\frac{1}{x}=-\frac{1}{5}$. В первом случае имеем $|x|>5$, что равносильно совокупности двух неравенств: $x>5$, $x<-5$, во втором – $x=-5$. Окончательно имеем область сходимости в виде

$$x\in(-\infty,-5]\bigcup(5,+\infty).$$

6. Разложения по степенным базисам

6.1. Можно доказать, что система степных функций $\{1, x, x^2,...,x^n,...\}$ есть система линейно-независимых функций в следующем смысле: ни одна из них не может быть представлена в виде конечной линейной комбинации, построенной из любой совокупности остальных функций. Следовательно, во множестве всех функций, бесконечно дифференцируемых на данном интервале, представляет интерес задача о разложении каждой из них по указанному степенному базису. При желании, можно перейти от степенного базиса к соответствующему ортогональному (осуществить так называемый процесс ортогонализации [6], с.89; об ортогональных базисах речь пойдёт ниже в главе 5). Таким образом, приходим к задаче о представлении данной функции суммой соответствующего степенного ряда. В случае функции действительного переменного $y=f(x)$, такой ряд имеет вид

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...;a_n\in R, n=0,1,... \qquad (6.1)$$

Как отмечалось выше, в интервале сходимости $(-R,R)$ записанный ряд можно почленно дифференцировать сколь угодно много раз. Поскольку $f(x)$ - его сумма, то она необходимо должна быть дифференцируема сколь угодно много раз. Докажем, что в этом случае разложение (6.1) принимает вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+... \qquad (6.2)$$

Действительно,

а)полагая $x=0$ в (6.1), получаем $a_0=f(0)$;

б)почленно дифференцируя (6.1) и снова полагая $x=0$, имеем $a_1=f'(0)$;

в)в результате второго почленного диффренцирования (6.1) при $x=0$ получаем $f''(0)=2!a_2$, откуда $a_2=\frac{f''(0)}{2!}$;

...г)на (n+1) шаге приходим к равенству $a_n=\frac{f^n(0)}{n!}$, откуда

$$a_n=\frac{f^n(0)}{n!}.$$

Учитывая вид полученных коэффициентов a_n, мы и получаем (6.2); говорят также, что функция $f(x)$ разложена в ряд по степеням x, или, коротко, в ряд Маклорена.

Поскольку в настоящем пункте мы проводим лишь обзорное рассмотрение, то ограничимся формулировкой следующего достаточного условия разложимости в ряд Маклорена функций действительного переменного: *если для всех значений $n=1,2,...$ существует постоянная $C>0$, такая что в некоторой окрестности точки $x_0=0$ выполняется неравенство*

$$|f(x)|+|f^n(x)|\le C,$$

то функция $f(x)$ в этой окрестности есть сумма соответствующего ряда Маклорена (6.2).

Нетрудно поверить, что это утверждение применимо к функциям $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ во всякой окрестности точки $x_0=0$. Если вычислить коэффициенты ряда Маклорена для каждой из них, то получим, что при всех значениях действительного аргумента имеют место разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{6.3}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$$

Остановимся на обосновании, например, соотношения (6.3). Имеем

$$f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = \ldots = e^x,\ n = 1,2,\ldots,$$

а тогда

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1.$$

Подставляя полученные значения в (6.2), мы приходим к (6.3). Для доказательства сходимости ряда (6.3) при каждом x к сумме $f(x) = e^x$, заметим что в каждом интервале $(-R_0, R_0)$ имеет место соотношение

$$|f(x)| + |f^{(n)}(x)| \le C_0,\ n = 1,2,\ldots,$$

где постоянная $C_0 = e^{R_0}$. На основании сформулированного выше достаточного условия разложимости функции в ряд Маклорена тогда *во всяком* фиксированном интервале ряд (6.3) имеет своей суммой именно $f(x) = e^x$. Ввиду произвольности выбранного интервала разложение (6.3) имеет место при всех действительных x, что и утверждалось.

6.2. Вопросы разложения функций по степенным базисам можно рассматривать и в случае функций комплексного переменного, однако соответствующее рассмотрение требует использования специфических методов комплексного анализа (см., напр., [2]), в силу чего мы здесь на этих вопросах не останавливаемся.

Литература к главе 4

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа : учебник. – 10-е изд., стереотип. / А.Ф.Бермант, И.Г. Араманович. – СПб. : Лань, 2003. – 736 с.

2. Нахман, А.Д. Элементы теории функций комплексного переменного: учебн. пособие /А.Д.Нахман. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2007. – 188 с.

3. Воробьев, Н.Н. Теория рядов: учебник/ Н.Н.Воробьев. – СПб.: «Лань», 2002. – 408 с.

4. Нахман, А.Д. Преподавание математики в условиях реализации федерального государственного образовательного стандарта: учебно-методический комплект по элементам математического анализа /А.Д.Нахман, И.Ю.Иванова. – Тамбов: ТОГОАОУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2012. – 115с.

5. Нахман, А.Д. Введение в теорию и практику числовых и функциональных рядов: учебное пособие / А.Д.Нахман. – Palmarium Academic Publishing, Saarbrucken – 2015. – 93 с.

6. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа /Люстерник Л. А., Соболев В. И. – М.:Наука. – 1965. – 520 с.

Глава 5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ: ВОПРОСЫ СОДЕРЖАНИЯ

Разложения в степенные ряды, как выяснено выше, возможны лишь для “очень хороших” функций $f(x)$. Какие же последовательности элементарных функций пригодны для разложения, например разрывных функций (сигналы в электротехнике и т.п.)? Оказывается, система тригонометрических функций

$$\{\cos nx;\ \sin nx\},\qquad n = 0,1,...$$

служит простым и практически всеобъемлющим средством подобных разложений. Эти и другие соображения приводят к рассмотрению тригонометрических рядов, изучаемых в настоящей главе. Необходимые факты из курса математического анализа и смежные вопросы теории рядов Фурье и их приложений см. в источниках [1]-[7].

1. Постановка задачи о разложении периодической функции в тригонометрический ряд

1.1. Математической моделью простейшего периодического процесса (простейшее гармоническое колебание) служит соотношение

$$y = A\sin(\omega t + \gamma), \tag{1.1}$$

где y - величина отклонения точки от положения равновесия, A - амплитуда колебания, ω - круговая частота, γ - начальная фаза. Легко проверить, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период функции (1.1), т.е. период колебаний:

$$y(t+T) = A\sin\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)+\gamma\right) = A\sin(\omega t+\gamma+2\pi) =$$
$$= A\sin(\omega t+\gamma) = y(t).$$

Функцию (1.1) в дальнейшем называем простейшей гармоникой, ее график изображен на рис. 1.1.

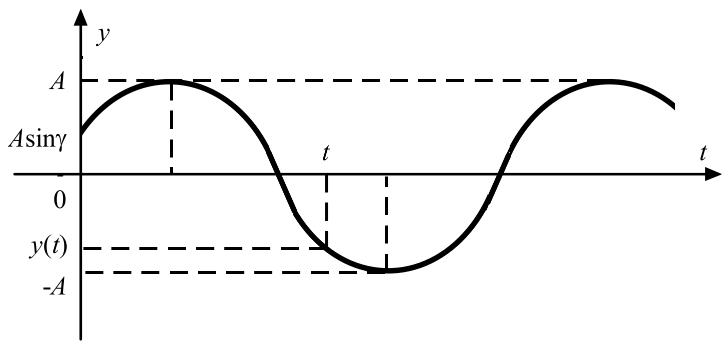

Рис. 1.1. Простейшая гармоника

1.2. Рассмотрим более сложный процесс - результат наложения нескольких простейших гармоник. Например, в случае наложения двух колебаний, имеем движение, осуществляемое по закону

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2). \qquad (1.2)$$

Оно будет периодическим в том и только в том случае, если существует $T > 0$, для которого

$$T = n_1 \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{и} \quad T = n_2 \frac{2\pi}{\omega_2},$$

где n_1 и n_2 - натуральные числа, откуда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ т.е. } \omega_2 = n_2\omega \quad \text{и} \quad \omega_1 = n_1\omega$$

с некоторыми $\omega > 0.$ Следовательно, периодическое движение (1.2) происходит по закону

$$y = A_1 \sin(n_1 \omega t + \gamma_1) + A_2 \sin(n_2 \omega t + \gamma_2);$$

его период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}.$

В частности, наложением двух простейших гармоник вызвано периодическое движение $(n_1 = 1, \;\; n_2 = 2)$

$$y = A_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + A_2 \sin(2\omega t + \gamma_2).$$

Складывая, подобным образом, m простейших гармоник вида

$$y_k = A_k \sin(k\omega t + \gamma_k),$$

получаем закон движения

$$y=\sum_{k=1}^{m} A_k \sin(k\omega t+\gamma_k)$$

с периодом $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

1.3. Возникает обратный вопрос: дано периодическое движение; можно ли его представить в виде суммы простейших гармоник (т.е. как сложное гармоническое колебание). Оказывается, практически всегда это возможно, если привлечь к рассмотрению бесконечные суммы, т.е. ряды из простейших гармоник. Более точно, если $f(t)$- заданная периодическая (с периодом T) функция, то речь идет о представлении вида

$$f(t)=\sum_{n} A_n \sin(n\omega t+\gamma_n),$$

где $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ и сумма, вообще говоря - бесконечная.

1.4. Сформулируем задачу в несколько ином виде. Для этого обозначим через ℓ полупериод $\ell=\dfrac{T}{2}$, тогда каждая гармоника имеет вид

$$A_n \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}t+\gamma_n\right)=A_n \sin\gamma_n \cos\frac{\pi}{\ell}nt+A_n \cos\gamma_n \sin\frac{\pi}{\ell}nt=$$

$$=a_n \cos\frac{\pi}{\ell}nt+b_n \sin\frac{\pi}{\ell}nt,$$

где обозначены $a_n=A_n \sin\gamma_n, b_n=A_n \cos\gamma_n; n=1,2,...$

Если дополнить сумму постоянным слагаемым, обозначив его через $\dfrac{a_0}{2}$, то речь идет о представлении 2ℓ - периодической функции в виде суммы ряда

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi}{\ell}nt+b_n \sin\frac{\pi}{\ell}nt. \qquad (1.3)$$

Точнее, возникает две задачи:

а) каковы коэффициенты a_n, b_n ряда (1.3);

б) при каких условиях (на функцию f) ряд (3.1.3) сходится при всех t и его сумма совпадает с $f(t)$.

Начнем с рассмотрения первой задачи.

2. Коэффициенты Фурье

2.1. Пусть функция *f* имеет период 2π (более общий случай изучим ниже) и существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx.$$

Соотношение (1.3) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (2.1)$$

Идея нахождения коэффициентов a_n и b_n состоит в почленном интегрировании (2.1) после его умножения на любую из функций вида $\cos mx\ (m = 0,1,...)$ и $\sin mx\ (m = 1,2,...)$. Для самой возможности такого интегрирования предполагаем равномерную (на $[-\pi,\pi]$) сходимость соответствующих рядов; пусть, например, получающиеся a_n и b_n удовлетворяют условию сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|),$$

так что ряд (2.1) оказывается мажорируемым. Получив формулы для a_n и b_n при сделанных предположениях, сопоставим затем любой рассматриваемой функции ряд (3.2.1) с найденными коэффициентами.

Итак, приступаем к реализации намеченного плана действий.

2.2. Потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. При любых целых неотрицательных *n* и *m* имеют место равенства:

а) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$, если $n \neq 0$;

б) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$;

в) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$;

г) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$.

Доказательство состоит в непосредственном вычислении интегралов. Например, установим п. в), пользуясь формулой

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right).$$

Имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \qquad m \neq n,$$

так как $\sin k\pi = 0$ для любого целого k.

В частности, при $m = 0, n \neq 0$ получаем второе утверждение п. а). Если же $m = n$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos nx dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos 2nx\right)dx = \frac{1}{2}x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

чем и завершаем доказательство п. в). Остальные утверждения доказываются аналогично.

2.3. Почленно проинтегрируем равенство (2.1):

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx.$$

Согласно утверждению а) леммы получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + 0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \tag{2.2}$$

2.4. Найдем коэффициенты a_n при $n = 1,2,\ldots$ Умножим обе части соотношения (2.1) на $\cos mx$, где m – произвольное натуральное число. Затем почленно проинтегрируем по отрезку $[-\pi,\pi]$. Получаем:

$$\begin{gathered}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\, dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\, dx.\end{gathered} \tag{2.3}$$

Воспользуемся результатами п. а), б), в) леммы п.2. В правой части равенства (2.3) ненулевым будет только интеграл от произведения косинусов при $n = m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \pi;$$

переобозначая m через n, получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \; n = 1,2,... \qquad (2.4)$$

2.5. Аналогично п.2.4, умножая обе части (2.1) на $\sin mx$ $(m = 1,2,\ldots)$, почленно интегрируя и пользуясь результатами п.п. а), б), г) леммы, получаем:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \; n = 1,2,\ldots \qquad (2.5)$$

2.6. Итак, в предложениях п. 2.1, если разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд (2.1) возможно, то его коэффициенты имеют вид (2.2), (2.4), (2.5). Теперь каждой интегрируемой (с модулем) на $[-\pi,\pi]$ и 2π-периодической функции $f(x)$ сопоставим ряд вида (2.1), с коэффициентами (2.2), (2.4), (2.5). В этом случае (2.1) называется рядом Фурье, а (2.2), (2.4), (2.5) - коэффициентами Фурье.

Заметим, что формула для a_0 получается из (2.4) при $n = 0$. Именно по этой причине “нулевой” член был обозначен через $\frac{a_0}{2}$ (а не через a_0): теперь формулы для всех a_n, $n = 0,1,\ldots$ имеют один и тот же вид (2.4). Затем также, что интегралы (2.4), (2.5) существуют, т.к. $f(x)$ интегрируема с модулем, а

$$|f(x)\cos nx| \le |f(x)|,$$
$$|f(x)\sin nx| \le |f(x)|.$$

3. Ряд Фурье функции с периодом 2ℓ

3.1. Рассмотрим случай функции $f(x)$, интегрируемой с модулем на произвольном отрезке вида $[-\ell,\ell]$ и 2ℓ- периодической. Сопоставим ей тригонометрический ряд вида:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi}{\ell}nx+b_n\sin\frac{\pi}{\ell}nx. \qquad (3.1)$$

3.2. Получение формул для коэффициентов Фурье основано на уже изученном случае $\ell=\pi$. Положим в (3.1)

$$z=\frac{\pi}{\ell}x, \text{ тогда } x=\frac{\ell}{\pi}z;\ z\in[-\pi,\pi], \text{ если } x\in[-\ell,\ell] \qquad (3.2)$$

и

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}z\right)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nz+b_n\sin nz. \qquad (3.3)$$

Теперь a_n и b_n - коэффициенты (Фурье) ряда вида (3.3), сопоставленного f как функции от z (стоит заметить, что f как функция от z имеет период 2π); например,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{\ell}{\pi}z\right)\cos nz dz.$$

Возвращаясь к переменной x (см.(3.2)) в этом интеграле и замечая, что $dz=\frac{\pi}{\ell}dx,$ получаем:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos n\frac{\pi}{\ell}x\frac{\pi}{\ell}dx,$$

т.е.

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx; \qquad (3.4)$$

в частности,

$$a_0=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)dx.$$

Аналогичным образом, получаем

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nx\,dx. \qquad (3.5)$$

3.3. Итак, если разложение (3.1) возможно, то его коэффициенты Фурье $a_n(n=0,1,\ldots)$ и $b_n(n=1,2,\ldots)$ вычисляются по формулам (3.4), (3.5).

4. Ряды Фурье четных и нечетных функций

Формулы для вычисления коэффициентов Фурье и сама запись ряда упрощаются, в случае, когда $f(x)$ четна или нечетна. Естественно ожидать (и это мы установим), что четная $f(x)$ раскладывается в ряд по четным же функциям, т.е. только по косинусам; нечетная - только по синусам.

4.1. Пусть $g(x), x \in [-\ell, \ell]$ интегрируема (с модулем) на этом отрезке. Установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. 1) если $g(x)$- четна, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = 2\int_{0}^{\ell} g(x)dx.$$

2) если $g(x)$- нечетна, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = 0.$$

Доказательство. Воспользуемся очевидным равенством

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = \int_{-\ell}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\ell} g(x)dx. \tag{4.1}$$

Сделаем замену переменных $X = -x$ в первом интеграле; при этом $dx = -dX$ и X изменяется от ℓ до 0.

Если $g(x)$- четна, то $g(x) = g(-X) = g(X)$. В этом случае

$$\int_{-\ell}^{0} g(x)dx = \int_{\ell}^{0} g(X)(-dX) = \int_{0}^{\ell} g(X)dX$$

и правая часть (4.1) тогда равна

$$2\int_{0}^{\ell} g(x)dx,$$

чем и доказано первое утверждение леммы.

В случае нечетной $g(x)$при той же замене переменных

$$g(x) = g(-X) = -g(X)$$

и

$$\int_{-\ell}^{0} g(x)dx = \int_{\ell}^{0} (-g(X))(-dX) = -\int_{0}^{\ell} g(X)dX,$$

а тогда правая часть (4.1) имеет вид

$$-\int_0^{\ell} g(x)dx + \int_0^{\ell} g(x)dx = 0;$$

утверждение 2) доказано.

Смысл леммы легко иллюстрируется геометрически.

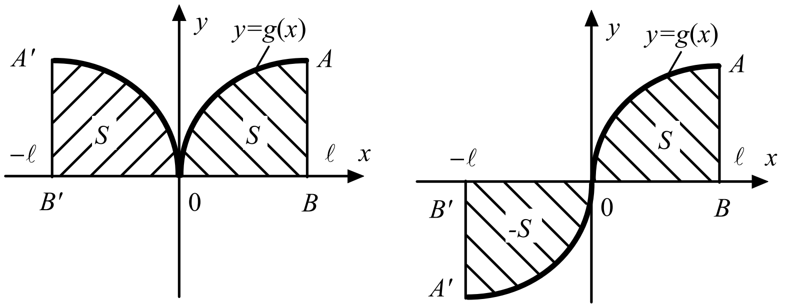

Рис. 4.1. Интегралы чётной и нечётной функций

Если $g(x)$ четна, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = S + S = 2\int_0^{\ell} g(x)dx,$$

где S - площадь криволинейной трапеции OAB; если же $g(x)$- нечетна, то интеграл равен $(-S)+S=0;$ см. рис. 4.1.

2. Установим, что для четной 2ℓ- периодической функции $f(x)$

$$b_n = 0(n = 1,2,\ldots); \tag{4.2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx; \; a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx. \tag{4.3}$$

Заметим, что произведение

$g(x) = f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nx$ – четная функция;

$q(x) = f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nx$ – нечетная функция.

Действительно, например

$$q(-x) = f(-x)\sin\frac{\pi}{\ell}n(-x) = f(x)\left(-\sin\frac{\pi}{\ell}nx\right) = -q(x),$$

т.е. $q(x)$- нечетна; аналогично проверяется четность $g(x)$.

На основании первого утверждения леммы получаем тогда, что

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx = \frac{1}{\ell}\cdot 2\int_{0}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx;\ n = 0,1,\ldots,$$

т.е. соотношения (4.3) доказаны; далее, в силу второго утверждения леммы

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx = 0,$$

т.е. равенство (4.2) установлено.

Итак, если $f(x)$- четна, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi}{\ell}nx,$$

(ряд по косинусам), где a_0 и a_n могут быть вычислены по формулам (4.3).

В частности, при $\ell = \pi$ (случай 2π - периодической функции)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx;\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx.$$

4.3. Аналогично доказывается, что для 2ℓ- периодической нечетной функции коэффициенты Фурье $a_0 = 0;\ a_n = 0\ (n = 1,2,\ldots)$,

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx,$$

т.е. ряд Фурье содержит одни только синусы:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi}{\ell}nx.$$

В частности, нечетная 2π - периодическая функция имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx.$$

5. Условия сходимости ряда Фурье

5.1. Рассмотрим вопрос о сходимости ряда Фурье. Именно, нас интересуют те условия на $f(x)$, которые бы обеспечивали сходимость ряда

(1.4.1) на отрезке $[-\ell,\ell]$ и, при этом, чтобы сумма ряда во всех точках $x\in[-\ell,\ell]$совпадала с $f(x)$.

Как оказывается, выяснение таких условий является довольно сложным делом, поэтому ограничимся только схемой рассуждений.

5.2. Для простоты записей считаем, что $f(x)$ 2π - периодична. Частичные суммы *N*-го порядка ряда Фурье

$$S_N(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}a_n\cos nx+b_n\sin nx,\ N=1,2,\ldots$$

после подстановки выражений для коэффициентов Фурье приобретают вид

$$S_N(f,x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\right)+$$
$$+\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt\right)\cos nx+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt\right)\sin nx;$$

при этом в формуле для a_n и b_n переменную интегрирования нам удобно обозначить через *t*. Записывая сумму интегралов в виде одного интеграла, мы получим

$$S_N(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{N}\cos n(t-x)\right)dt, \tag{5.1}$$

если использовать формулу косинуса суммы. После тригонометрических преобразований элементарного характера (их мы опускаем) сумма, содержащаяся в скобках, принимает следующий компактный вид (называемый ядром Дирихле):

$$\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}.$$

В интеграле (5.1) теперь делаем замену переменных $\tau=t-x$. Интеграл по новому отрезку $[-\pi-x,\pi-x]$ оказывается равным интегралу по $[-\pi,\pi]$ (этот факт мы установим ниже в более общей ситуации). Следовательно,

$$S_N(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\tau+x)}{\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau. \tag{5.2}$$

Мы получили очень важную интегральную форму частных сумм ряда Фурье (интеграл Дирихле).

5.3. Вспомним определение сходимости ряда в точке *x*: сходимость к значению $f(x)$ означает, что

$$\lim_{N\to\infty}\left(S_N(f,x)-f(x)\right)=0.$$

Чтобы получить в интегральном виде записанную в скобках разность, заметим, что

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{1}{2}\tau}d\tau,$$

поскольку интеграл от ядра Дирихле (по промежутку $[-\pi,\pi]$) равен числу π; последний факт легко проверяется на основании леммы параграфа 2.

Следовательно,

$$S_N(f,x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\tau+x)-f(x)}{2\sin\frac{1}{2}\tau}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau. \qquad (5.3)$$

5.4. Коэффициенты Фурье a_N и b_N всякой 2π- периодической интегрируемой (с модулем) функции $f(x)$ при $N\to\infty$ стремятся к нулю. Не доказывая этот факт, отметим, что его можно было ожидать ввиду необходимого признака сходимости ряда.

Обозначим

$$\varphi_x(\tau)=\frac{f(\tau+x)-f(x)}{2\sin\frac{1}{2}\tau}.$$

При больших *N* интеграл (6.3) “почти не отличается” от синус коэффициента Фурье функции $\varphi_x(\tau)$. Следовательно, если при выбранном нами $x\in[-\pi,\pi]$ функция $|\varphi_x(t)|$ интегрируема на $[-\pi,\pi]$, то разность $S_N(f,x)-f(x)$ вместе с синус - коэффициентом для $\varphi_x(\tau)$ стремится к нулю при $N\to\infty$.

Сформулируем результат в виде теоремы (признак Дини).

Теорема. Если при данном *x* существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(\tau+x)-f(x)}{\sin\frac{1}{2}\tau}\right|d\tau, \tag{5.4}$$

то в точке x ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{5.5}$$

сходится и имеет сумму, равную $f(x)$.

Заметим, что (5.4) - несобственный интеграл, существование которого определяется поведением $\varphi_x(\tau)$ в окрестности точки $\tau=0$.

5.5. Поскольку выражение $\varphi_x(\tau)$ при малых τ ведет себя также, как разностное отношение в определении производной, то существование интеграла (5.4) обеспечено условием дифференцируемости в точке x функции f.

Итак, ряд Фурье сходится и имеет своей суммой $f(x)$в каждой точке $x\in[-\pi,\pi]$, в которой $f(x)$- дифференцируема.

Выше отмечалось, что условие только лишь непрерывности $f(x)$ в точке x не гарантирует сходимости ряда Фурье.

5.6. Широкий класс функций, которые можно “разложить” в ряд Фурье, определяется следующими условиями (Дирихле)

а) $f(x)$предполагается 2ℓ- периодической и интегрируемой с модулем на$[-\ell,\ell]$;

б) $f(x)$непрерывна на$[-\ell,\ell]$, а если имеет разрывы, то лишь первого рода и точек разрыва (на $[-\ell,\ell]$) - конечное количество;

в) $f(x)$ либо не имеет экстремумов на $[-\ell,\ell]$, либо имеет конечное их количество.

Обозначим односторонние пределы $f(x)$в точке $x_0\in(-\ell,\ell)$следующим образом:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x);\ f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x);$$

имеет место следующая

Теорема Дирихле. Если $f(x)$ удовлетворяет условием Дирихле, то ее ряд Фурье (3.1) сходится в каждой точке. При этом сумма ряда совпадает с $f(x)$ во всех точках *x*, где $f(x)$ непрерывна. Во всякой же точке x_0 разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна числу

$$S_0 = \frac{1}{2}\left(f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)\right)$$

(среднему арифметическому односторонних пределов функции в точке x_0).

5.7. Полезно отметить, что при выполнении условий Дирихле сумму ряда Фурье можно указать и в тех точках (рис. 5.1), где сама $f(x)$не определена. Заметим также, что признаки Дини и Дирихле сходимости ряда Фурье не вытекают один из другого, но вместе охватывают практически все встречающиеся на практике функции.

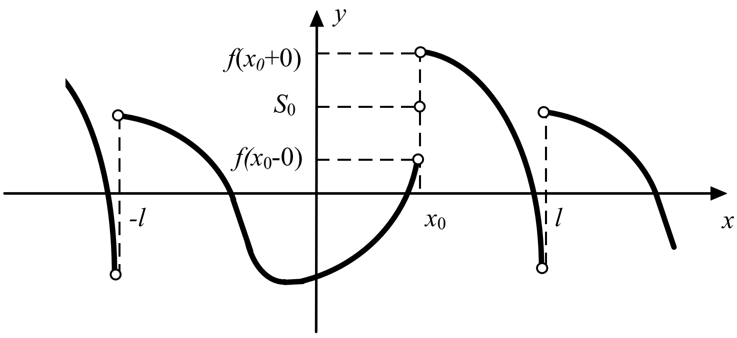

Рис. 5.1. Сумма ряда Фурье

6. Примеры разложений функций в ряды Фурье

6.1. *Пример* 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} a, -\pi < x < 0 \\ b,\ 0 < x < \pi \end{cases}; a,b = const; a \neq b.$$

Решение. 1) Доопределим (графически) $f(x)$ на всю числовую ось, “сдвигая” на $2\pi\kappa\left(\kappa = \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$ основной график (т.е. график, соответствующий $x \in \left(-\pi, \pi\right)$), см. рис. 6.1.

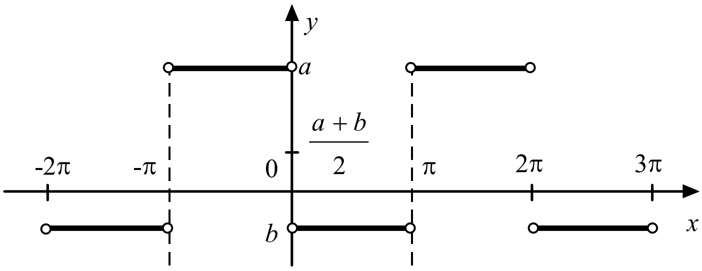

Рис. 6.1. 2π -периодическое продолжение функции

2) Вычислим коэффициенты Фурье. Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} adx + \int_{0}^{\pi} bdx\right) = \frac{1}{\pi}(a\pi + b\pi) = a + b;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} a\cos nxdx + \int_{0}^{\pi} b\cos nxdx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{b}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{n}\cdot 0 + \frac{b}{n}\cdot 0\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} a\sin nxdx + \int_{0}^{\pi} b\sin nxdx\right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{b}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi n}\big(a(1-\cos(-n\pi)) + b(\cos n\pi - 1)\big) =$$

$$= \frac{b-a}{\pi n}(1-\cos n\pi) = \frac{b-a}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right);$$

$n = 1,2,\ldots$

Здесь и в дальнейшем использованы значения тригонометрических функций:

$$\sin 0 = 0;\ \cos 0 = 1;\ \sin n\pi = 0;\ \cos n\pi = (-1)^n;\ \ n = 1,2,\ldots$$

3) Запишем ряд Фурье (см. (3.1))

$$f(x) \sim \frac{a+b}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b-a}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx.$$

Далее, при четных $(n = 2k)$ и нечетных $(n = 2k-1)$ значениях n получаем соответственно:

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 0; n = 2k \\ 2; n = 2k-1 \end{cases},\ k = 1,2,\ldots$$

Следовательно,

$$f(x) \sim \frac{a+b}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(b-a)}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)x$$

или

$$f(x) \sim \frac{a+b}{2} + \frac{2(b-a)}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

4). Исследуем вопрос о сходимости полученного ряда Фурье при $x \in (-\pi, \pi)$, т.е. на интервале, где была первоначально определена $f(x)$. Обратимся к условиям Дирихле. На отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ имеет три точки разрыва первого рода: концевые точки $x = \pm\pi$ и $x = 0$. Экстремумов у данной функции нет. Следовательно, на основании теоремы параграфа 5, полученный ряд сходится на $(-\pi, \pi)$. Его сумма всюду, кроме точки $x = 0$, совпадает с $f(x)$; при $x = 0$ имеем сумму

$$S = S(0) = \frac{a+b}{2},$$

поскольку $f(0-0) = a; f(0+0) = b$. Иначе говоря, сумма $S(x)$ ряда имеет вид

$$S(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x < 0 \\ \dfrac{a+b}{2}, & x = 0 \\ b, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

6.2. *Пример* 2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x) = \sin x,\ x \in (0, \pi)$.

Решение. 1) Нам известно, что в ряд Фурье по косинусам раскладываются четные функции; следовательно, доопределяем $f(x)$ четным образом (симметрия графика относительно оси OY) в смежном интервале $(-\pi, 0)$; далее доопределяем (графическим способом) $f(x)$ так, чтобы она стала 2π-периодической.

2) Вычислим коэффициенты a_n по формулам (4.3):

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx =$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sin(x+nx)+\sin(x-nx))dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\bigg|_0^{\pi}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}-\frac{1-\cos(n-1)\pi}{n-1}\right)=\frac{1-(-1)^{n-1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=\frac{2\left((-1)^{n-1}-1\right)}{(n+1)(n-1)}. \tag{6.1}$$

При вычислении использованы формулы

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos(n+1)\pi=(-1)^{n+1}=(-1)^{n-1}\cdot(-1)^2=(-1)^{n-1}=\cos(n-1)\pi.$$

Результат (6.1) имеет место при $n=0,2,3,\ldots$; в частности нет необходимости отдельно вычислять a_0; при $n=0$ получаем из (6.1)

$$a_0=\frac{2(-1-1)}{-1}=4.$$

Однако, при $n=1$ выражение в правой части (6.1) не существует; следовательно, приходится вычислять a_1:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\bigg|_0^{\pi}\right)=0.$$

Теперь при $x\in(0,\pi)$

$$\sin x\sim\frac{4}{2}+0+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n-1}-1\right)}{n^2-1}\cos nx;$$

ненулевыми будут члены при нечетных $n-1$, т.е. $n=2k, k=1,2,\ldots$; следовательно

$$\sin x\sim 2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-2)}{(2k)^2-1}\cos 2kx$$

или

$$\sin x = 2 - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1},\ x \in (0,\pi).$$

3) Знак равенства в последней записи означает, что $\sin x$ есть сумма полученного ряда Фурье на $(-\pi,\pi)$. Это заключение мы сделали на основании теоремы Дирихле, условие которой на $[-\pi,\pi]$ выполнены (три точки разрыва (устранимого) первого рода: $x=0$ и $x=\pm\pi$; две точки экстремума: $x=\pm\frac{\pi}{2}$).

6.3. *Пример* 3. Функцию $f(x)=2+x$ разложить в ряд Фурье на интервале $(-2;2)$.

Решение. 1) Имеем случай (3.1) при $\ell=2$. Доопределяем функцию так, чтобы она стала периодической (период $T=2\ell=4$), рис.6.2.

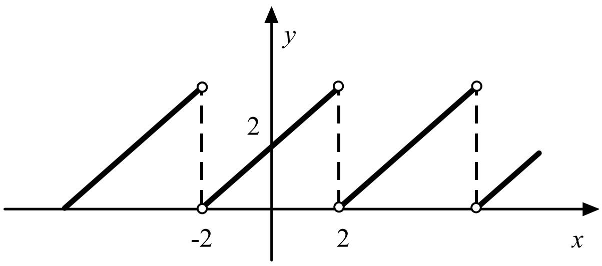

Рис. 6.2. $2l$-периодически доопределённая функция

2) Вычисляем коэффициенты Фурье, используя интегрирование по частям:

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2+x)\cos\frac{\pi}{2}nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}(2+x)\sin\frac{\pi}{2}nx\Bigg|_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi}{2}nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(0 + \frac{4}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi}{2}nx\Bigg|_{-2}^{2}\right) = 0;\ n = 1,2,\ldots;$$

при $n=0$ этот результат “не проходит” (ноль в знаменателе), поэтому вычисляем отдельно a_0:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2+x)dx = \frac{1}{2}\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 4;$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2+x)\sin\frac{\pi}{2}nxdx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}(2+x)\cos\frac{\pi}{2}nx\Bigg|_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2}\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi}{2}nxdx \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot 4\cos\pi n + \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi}{2}nx\Bigg|_{-2}^{2} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n},\ n = 1,2,\ldots.$$

Линейная функция $f(x) = 2 + x$ непрерывна на интервале $(-2,2)$ и не имеет на нем экстремумов; разрывы (первого рода) присутствуют в концевых точках $x = \pm 2.$ Следовательно, по теореме Дирихле, $f(x)$ есть сумма своего ряда Фурье:

$$2 + x = 2 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi}{2}nx,\ x \in (-2,2).$$

7. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на произвольном интервале (*a, b*)

7.1. Пусть интервал (a,b) не симметричен относительно начала координат и модуль $|f(x)|$ интегрируем на этом интервале. В этом случае также можно ставить задачу о разложении функции в тригонометрический ряд. Для этого, прежде всего, следует доопределить функцию периодическим образом на всю числовую ось. В качестве полупериода выбираем $\ell = \frac{b-a}{2}$; теперь мы находимся в стандартной ситуации ряда Фурье функции с периодом 2ℓ. Однако, коэффициенты Фурье вычисляются как интегралы по $(-\ell,\ell)$, тогда как нам удобнее интегрировать по (a,b), т.е. по интервалу, где первоначально была задана (например, аналитически) данная функция. Этого удается достичь благодаря следующему вспомогательному утверждению.

7.2. *Лемма*. Если $g(x)$ имеет период $T = b - a$ и $\ell = \frac{b-a}{2}$, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

Доказательство. Пользуясь известным свойством “аддитивности” определенного интеграла, запишем равенство

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = \int_{-\ell}^{a} g(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx + \int_{b}^{\ell} g(x)dx. \qquad (7.1)$$

В первом интеграле сделаем замену переменных $t = x + 2\ell$, тогда $g(x) = g(t - 2\ell) = g(t)$ в силу 2ℓ- периодичности функции g; пределы интегрирования преобразуются к виду

$$t_1 = -\ell + 2\ell = \ell;\ t_2 = a + 2\ell = a + (b - a) = b.$$

Итак,

$$\int_{-\ell}^{0} g(x)dx = \int_{\ell}^{b} g(t)dt = -\int_{b}^{\ell} g(t)dt.$$

Подставляя результат в равенство (7.1), видим, что первый и последний интеграл “взаимно уничтожается”, после чего и имеем утверждение леммы.

3.7.3. В формулах (3.3.4), (3.3.5) подинтегральные функции 2ℓ-периодичны, следовательно, интегрирование в них (на основании леммы) можно производить по интервалу (a,b).

Например, для

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx$$

в силу равенства $\ell = \dfrac{b-a}{2}$ получаем:

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{2\pi}{b-a}nxdx; \qquad (7.2)$$

в частности,

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

аналогично,

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{2\pi}{b-a}nxdx. \qquad (7.3)$$

Итак, функция $f(x)$, заданная на (a,b), имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2\pi}{b-a}nx + b_n\sin\frac{2\pi}{b-a}nx,$$

где коэффициенты ряда вычисляются по формулам (7.2), (7.3).

8. Ряд Фурье в комплексной форме

8.1. Ряд Фурье (3.1) может быть записан в более компактной форме, и коэффициенты могут быть вычислены по одной формуле (вместо трех формул для $a_0, a_n, b_n, n = 1,2,\ldots$), если привлечь к рассмотрению функции комплексного переменного. Основным “инструментом” здесь служит формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Из нее, в свою очередь, вытекает, что

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2};\ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \tag{8.1}$$

$n = 1,2,\ldots$

8.2. Рассмотрим ряд Фурье 2π -периодической функции $f(x)$. Общий член ряда, согласно (8.1), принимает вид

$$\begin{aligned} &a_n \cos nx + b_n \sin nx = \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{inx}\left(a_n + \frac{1}{i}b_n\right) + e^{-inx}\left(a_n - \frac{1}{i}b_n\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{inx}(a_n - ib_n) + e^{-inx}(a_n + ib_n)\right), \end{aligned} \tag{8.2}$$

т.к. $\frac{1}{i} = -i.$ При этом (см.(2.4), (2.5))

$$a_n - ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx;$$

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx.$$

Обозначим

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx. \tag{8.3}$$

Теперь

$$\frac{1}{2}(a_n - ib_n) = c_n;\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_{-n}, \tag{8.4}$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\cdot 0\cdot x}dx = c_0. \qquad (8.5)$$

8.3. Запишем ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

в комплексной форме. Согласно (8.2), (8.4), (8.5) имеем:

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right).$$

Частичные суммы этого ряда

$$S_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right)$$

после группировки слагаемых с положительными и отрицательными индексами принимают вид

$$S_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx};$$

при этом во второй сумме переобозначено $(-n)$ на *n, а* затем слагаемые объединены в одну сумму.

Следовательно, ряд Фурье имеет следующую комплексную форму:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формуле (8.3) при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8.4. Для функции $f(x)$, имеющей период 2ℓ, ряд Фурье (3.1) в комплексной форме будет следующим:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{\ell}nx},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\frac{\pi}{\ell}nx}dx.$$

Этот результат получается рассуждениями, подобными приведенным в пп. 8.2, 8.3.

9. Линейные нормированные и эвклидовы пространства

Для того, чтобы ввести важные обобщения понятия ряда Фурье, напомним читателю понятия линейного пространства, нормы и др.

9.1. Пусть L - непустое множество элементов X, Y, ... Оно называется линейным (или векторным) пространством, если в нем каким-либо способом введены операции сложения элементов и умножения на число (линейные операции), удовлетворяющие условиям:

а) Для любых X, $Y \in \mathsf{L}$ элемент $U = X + Y$ определен однозначно и

1) $X + Y = Y + X$ (переместительность сложения);

2) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (сочетательность сложения);

3) В L существует элемент 0 (ноль) такой что

$$X + 0 = X$$

для любого $X \in \mathsf{L}$;

4) Для каждого $X \in \mathsf{L}$ существует элемент $-X$ (противоположный элемент), такой что

$$X + (-X) = 0;$$

б) для любого $X \in \mathsf{L}$ и любого α (вообще говоря, комплексного) элемент $\alpha X \in \mathsf{L}$ определен однозначно и

1) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$ (сочетательный закон умножения на число);

2) $1 \cdot X = X$;

в) выполняются распределительные законы вида

1) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$;

2) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$.

Если рассматриваемые в пп. б), в) числа $\alpha, \beta, \ldots$ - комплексные, то и L называется комплексным линейным пространством, а если действительные – то действительным линейным пространством.

9.2. Примерами линейных пространств могут служить:

а) пространство R^3 всех геометрических векторов с линейными операциями, изученными в курсе аналитической геометрии;
б) пространство R^n всех матриц-строк ("векторов") вида $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где $x_j (j = 1, \dots, n)$ - произвольные действительные числа; линейные операции здесь выполняются "покоординатно" (обычным для матриц способом).

Случай а) является частным случаем для б), если каждый вектор отождествить с тройкой его координат; пространство R^n предполагаем действительным.

Как известно, в R^3 максимально возможное количество линейно-независимых векторов равно трем. Это означает, во-первых, что ни один из выбранных трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не выражается линейным образом (как результат линейной операции) через остальные два, а во-вторых, любой четвертый вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде

$$\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$$

с некоторыми действительными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Подобным образом обстоит дело и в произвольном R^n. А именно, в R^n существует n линейно-независимых векторов $J_1, J_2, \dots, J_n$, т.е. векторов, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \dots + \lambda_n J_n = 0$$

тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$; например, это совокупность $J_1(1,0,\dots,0), J_2(0,1,\dots,0), \dots, J_n(0,0,\dots,0,1)$. Указанное условие означает (как нетрудно доказать), что никакой из J_j не выражается линейным образом через остальные. В то же время присоединение ко множеству $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ любого вектора $X \in R^n$ делает новую совокупность линейно зависимой, т.е.

$$X = \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \dots + \mu_n J_n$$

с некоторыми коэффициентами $\mu_j (j = 1, \dots, n)$. Число n называют размерностью пространства R^n, а множество $\{J_1, J_2, \dots, J_n\}$ - базисом в R^n.

В общем случае произвольного линейного пространства L число n называется его размерностью, если существует и равно именно n максимально возможное количество линейно независимых векторов в L; множество же самих этих векторов называется базисом в L.

Не всякое линейное пространство имеет конечную размерность. Так, очевидно, что класс $C_{[a,b]}$ всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций (с действительными значениями) образует линейное пространство с обычными операциями сложения функций и умножения их на действительные числа. Выше указывалось, что ни одна из функций $1, x, x^2, \ldots, x^m$ не выражается линейным образом через остальные, однако при любом m к этому множеству можно добавить степенную функцию x^{m+1} и полученная совокупность будет сохранять свойство линейной независимости.

В подобной ситуации, когда в L можно указать как угодно большое количество линейно независимых векторов, говорят, что L бесконечномерно.

9.3. Пусть теперь каждому элементу X линейного пространства L поставлено в соответствие некоторое единственное действительное число $\|X\|$, удовлетворяющее условиям (аксиомам):

1) $\|X\| \geq 0$ причем $\|X\| = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$;

2) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ для любых $X, Y \in L$;

3) $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$ для любого числа λ.

Тогда число $\|X\|$ называется нормой элемента X, а само L - линейным нормированным пространством.

В приведенных выше примерах норма вводится следующим образом: в R^n полагаем

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2};$$

в частности, для R^3 норма $\|X\|$ - это модуль (длина) вектора X; в $C_{[a,b]}$ полагаем

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Аксиомы нормы в обоих случаях легко проверяются.

9.4. Пусть в действительном линейном пространстве L каким-либо способом введено скалярное произведение, т.е. каждой паре элементов $X, Y \in L$

поставлено в соответствие действительное число (X,Y), удовлетворяющее условиям (аксиомам):

а) $(X,Y)=(Y,X)$;

б) $(X,Y_1+Y_2)=(X,Y_1)+(X,Y_2)$;

в) $(\lambda X,Y)=\lambda(X,Y)$;

г) $(X,X)\geq 0$, причем $(X,X)=0$ тогда и только тогда, когда $X=0$.

В этом случае линейное пространство L называется эвклидовым. Так, пространство R^n становится эвклидовым, если в нем ввести скалярное произведение в виде

$$(X,Y)=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k .$$

9.5. В эвклидовом пространстве можно ввести норму с помощью равенства

$$\|X\|=\sqrt{(X,X)}. \tag{9.1}$$

Аксиома 1) нормы очевидна; аксиома 3) легко проверяется:

$$\|\lambda X\|=\sqrt{(\lambda X,\lambda X)}=\sqrt{\lambda(X,\lambda X)}=\sqrt{\lambda(\lambda X,X)}=\sqrt{\lambda^2(X,X)}=|\lambda|\cdot\|X\|.$$

Для проверки аксиомы 2) нормы потребуется следующее неравенство Коши-Буняковского

$$|(X,Y)|\leq\|X\|\cdot\|Y\|, \tag{9.2}$$

которое мы сейчас и докажем. Очевидно, что для любого действительного числа λ, в силу аксиом а) – г) скалярного произведения

$$0\leq(\lambda X+Y,\lambda X+Y)=\lambda^2(X,X)+2\lambda(X,Y)+(Y,Y)=$$

$$=\|X\|^2\lambda^2+2(X,Y)\lambda+\|Y\|^2.$$

Итак, полученный квадратный (относительно λ) трехчлен неотрицателен при всех λ. Это возможно тогда и только тогда, когда его дискриминант

$$D=(X,Y)^2-\|X\|^2\cdot\|Y\|^2\leq 0.$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного неравенства

$$(X,Y)^2\leq\|X\|^2\cdot\|Y\|^2,$$

приходим к утверждению (9.2).

Из (9.2) вытекает, в частности, что

$$\|X+Y\| = \sqrt{(X+Y,X+Y)} = \sqrt{(X,X)+2(X,Y)+(Y,Y)} \le$$

$$\le \sqrt{\|X\|^2 + 2\|X\|\cdot\|Y\| + \|Y\|^2} = \sqrt{(\|X\|+\|Y\|)^2} = \|X\|+\|Y\|.$$

Этим установлена аксиома 2) нормы (3.1).

9.6. Возникает вопрос: если L – линейное нормированное пространство, при каких условиях на введенную в нём норму, пространство L является также и эвклидовым ? На этот вопрос отвечает следующая

Теорема. Линейное нормированное пространство L является эвклидовым тогда и только тогда, когда для любых $X, Y \in \mathsf{L}$ выполняется равенство

$$\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = 2\left(\|X\|^2 + \|Y\|^2\right). \tag{9.3}$$

Геометрический смысл (9.3) в R^3 хорошо известен: сумма квадратов сторон параллелограмма (построенного на векторах X и Y как на сторонах) равна сумме квадратов его диагоналей (которыми станут длины $X+Y$ и $X-Y$ соответственно).

Необходимость условия (9.3) легко проверяется. Действительно, если L - эвклидово пространство, то $\|X\|^2 = (X,X)$, а значит, пользуясь аксиомами скалярного произведения, получаем

$$\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 = (X+Y,X+Y) + (X-Y,X-Y) =$$

$$= (X,X)+2(X,Y)+(Y,Y)+(X,X)-2(X,Y)+(Y,Y) = 2\left(\|X\|^2+\|Y\|^2\right),$$

что и требовалось.

Обратное утверждение может быть установлено, если скалярное произведение в L ввести следующим образом:

$$(X,Y) = \frac{1}{4}\left(\|X+Y\|^2 - \|X-Y\|^2\right). \tag{9.4}$$

Теперь следует проверить, что для (9.4) выполнены аксиомы скалярного произведения, если имеет место соотношение (9.3). Мы установим только а) и г), не приводя громоздкой проверки двух других аксиом (их проверку читатель может найти в рекомендуемой литературе, напр., [2]). Во-первых, заметим, что

$$(X,X) = \frac{1}{4}\|2X\|^2 = \|X\|^2,$$

откуда сразу вытекает г). Легко проверяется и аксиома а):

$$(Y,X)=\frac{1}{4}\left(\|Y+X\|^2-\|Y-X\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\|X+Y\|^2-|-1|^2\cdot\|X-Y\|^2\right)=(X,Y).$$

9.7. Угол φ между ненулевыми векторами X,Y эвклидового пространства L определим с помощью соотношения

$$\cos\varphi=\frac{(X,Y)}{\|X\|\cdot\|Y\|}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского (9.2) имеем, что $|\cos\varphi|\le 1$, т.е. введенное определение корректно.

Векторы X и Y называются ортогональными в L, если $(X,Y)=0$, или, что то же самое, для угла φ между ними $\cos\varphi=0$.

9.8. Если L - комплексное линейное пространство, то эвклидовым оно становится в случае введения в нем комплекснозначного скалярного произведения, удовлетворяющего аксиомам:

а') $(X,Y)=\left(\overline{Y,X}\right)$;

б') $(X_1+X_2,Y)=(X_1,Y)+(X_2,Y)$;

в') $(\lambda X,Y)=\lambda(X,Y)$;

г') $(X,X)\ge 0$, причем $(X,X)>0$, тогда и только тогда, когда $X\ne 0$.

Здесь использован стандартный символ комплексного сопряжения: если $z=a+bi$, то $\bar{z}=a-bi$.

Примером эвклидового комплексного пространства может служить класс C^n последовательностей вида

$$X=(x_1,\ldots,x_n),$$

где все x_k $(k=1,\ldots,n)$ – комплексные числа, а линейные операции (как и в R^n) определяются (выполняются) покоординатным образом. Скалярное произведение задается в виде

$$(X,Y)=\sum_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k,$$

при этом аксиомы а') - г') проверяются без труда.

Более детально введенные в настоящем параграфе понятия и факты будут изучены ниже на примере класса Ф.

10. Ортогональные системы функций

10.1. Выше были получены формулы для коэффициентов тригонометрического Фурье. В основе результата лежало следующее свойство системы тригонометрических функций

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}:$$

интеграл (по отрезку $[-\pi, \pi]$) от произведения двух различных функций равен нулю, а интеграл от квадрата любой из них – ненулевой. Указанное свойство ассоциируется с понятием ортогональности в эвклидовом пространстве. В связи с этим введём в рассмотрение класс Ф функций f, интегрируемых с квадратом на некотором отрезке $[a, b]$:

$$\Phi = \left\{ f : \int_a^b f^2(x)dx < \infty \right\}.$$

10.2. Докажем, что Ф - линейное пространство с обычными операциями сложения функций и умножения на число. Для этого следует проверить два следующих свойства.

а) Вместе с $f \in \Phi$ любая $\lambda f \in \Phi$ (λ - произвольное постоянное число).

Действительно,

$$\int_a^b (\lambda f(x))^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx < \infty.$$

б) Вместе с любыми $f_1 \in \Phi$ и $f_2 \in \Phi$ их сумма $(f_1 + f_2) \in \Phi$.

Действительно,

$$(f_1 + f_2)^2 = f_1^2 + 2f_1 f_2 + f_2^2,$$

при этом $2|f_1 f_2| \le f_1^2 + f_2^2$ (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим), откуда (попутно) вытекает интегрируемость модуля произведения. Значит,

$$(f_1+f_2)^2 \le f_1^2 + 2|f_1 f_2| + f_2^2 \le 2\left(f_1^2+f_2^2\right),$$

откуда следует интегрируемость с квадратом суммы $f_1 + f_2$.

Аксиомы п. 9.1 легко проверяются.

10.3. Скалярное произведение в действительном Ф введем следующим образом:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx;$$

интегрируемость модуля произведения установлена в п. 10.2, аксиомы скалярного произведения легко проверяются. Норма любой $f \in \Phi$ есть число

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Неравенство Коши-Буняковского принимает вид

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

В комплексном Ф (f и g с– комплекснозначны) по определению полагаем

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

10.4. В действительном Ф система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется ортогональной на $[a,b]$, если ортогональна любая их пара, т.е.

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, m \ne n, \text{ но } \int_a^b \varphi_n^2(x)dx \ne 0, \quad n,m = 1,2,\ldots$$

В комплексном Ф определение ортогональной системы функций выглядит следующим образом:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}dx = 0, m \ne n; \quad \int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}dx \ne 0.$$

Нумерация системы функций может начинаться и с $n = 0$ или может быть принята иная система нумерации.

Пример 1. Система функций (рассматриваемая в Ф)

$$\left\{\ldots, e^{-inx}, \ldots, e^{-x}, 1, e^{x}, \ldots, e^{inx}, \ldots\right\}$$

ортогональна на $[-\pi,\pi]$. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = 0,\ n \neq m; \qquad (10.1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{inx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-inx}dx = 2\pi.$$

Соотношение (10.1) можно проверить непосредственно, если учесть, что

$$\overline{e^{inx}} = \cos nx - i\sin nx = \cos(-nx) + i\sin(-nx) = e^{-inx}.$$

Замечание. Для читателей, знакомых с интегралом Лебега, отметим, что изучаемый здесь (при условии интегрируемости функций по Риману) класс Ф является подпространством лебеговского пространства L^2.

11. Ряды по ортогональным функциям

11.1. Выше была установлена аналогия между перпендикулярностью векторов и ортогональностью функций. В аналитической геометрии важной является задача разложения произвольного вектора по ортогональным векторам базиса. Подобным же образом возникает задача о разложении произвольной функции $f \in \Phi$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$, ортогональной в Ф, т.е. о представлении вида

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots\ . \qquad (11.1)$$

В случае тригонометрической системы имеем круг вопросов, связанных с тригонометрическими рядами Фурье. В общем же случае предстоит выяснить:

а) какими должны быть коэффициенты c_n в разложении (11.1), если оно возможно на некотором отрезке $[a,b]$;

б) каковы достаточные условия сходимости ряда (11.1) в данной точке x, на отрезке $[a,b]$ и т.п., и в каких случаях сумма ряда совпадает с $f(x)$.

В предположениях сходимости (во всех точках $x \in [a,b]$) ряда (11.1) и возможности его почленного интегрирования определим вид коэффициентов c_n. Для этого умножим обе части (11.1) на $\varphi_m(x)$ и почленно проинтегрируем полученное соотношение

$$f(x)\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)\varphi_m(x).$$

Имеем:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Ненулевым будет только слагаемое при $n = m$ (в силу ортогональности системы $\{\varphi_n\}$):

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x)dx,$$

откуда при

$$\alpha_m = \int_a^b \varphi_m^2(x)dx \neq 0$$

получаем

$$c_m = \frac{1}{\alpha_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx, \qquad (11.2)$$

при этом интеграл в правой части конечен в силу неравенства Коши-Буняковского.

Итак, разложение (11.1) возможно с коэффициентами (11.2).

11.2. Наиболее простой вид коэффициенты (11.2) имеют при $\alpha_m \equiv 1$.

Ортогональная система $\{h_n(x)\}$ называется ортонормированной (на $[a,b]$), если

$$\int_b^a h_n^2(x)dx = 1; \quad n = 1,2,\ldots$$

Переход от системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ к ортонормированной происходит, очевидно, если рассмотреть систему

$$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\varphi_n(x); \quad n = 1,2,\ldots$$

Ортогональность $h_n(x)$ в пространстве Ф и нормированность очевидны:

$$\int_a^b h_n(x)h_m(x)dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n\alpha_m}}\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0 \ (n \neq m);$$

$$\int_a^b h_n^2(x)dx = \frac{1}{\alpha_n}\int_a^b \varphi_n^2(x)dx = \frac{1}{\alpha_n}\alpha_n = 1.$$

Итак, разложение

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n h_n(x) \tag{11.3}$$

по ортонормированной системе $\{h_n(x)\}$ возможно с коэффициентами

$$c_n=\int_a^b f(x)\,h_n(x)dx. \tag{11.4}$$

11.3. *Пример.* Система $\left\{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x\right\}$, $n=1,2,\ldots;$ $\ell=const>0$, ортогональна на отрезке $[0,\ell]$. Действительно, при $n\neq m$ имеем

$$\int_0^\ell \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\ell\left(\cos(n-m)\frac{\pi}{\ell}x-\cos(n+m-1)\frac{\pi}{\ell}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\ell\sin(n-m)\frac{\pi}{\ell}x}{\pi(n-m)}-\frac{\ell\sin(n+m-1)\frac{\pi}{\ell}x}{\pi(n+m-1)}\right)\Bigg|_0^\ell=0.$$

Кроме того,

$$\alpha_n=\int_0^\ell \sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\ell\left(1-\cos(2n-1)\frac{\pi}{\ell}x\right)dx=\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{2\pi(2n-1)}\sin(2n-1)\frac{\pi}{\ell}x\Bigg|_0^\ell=\frac{\ell}{2}. \tag{11.5}$$

11.4. Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$, для которой модуль $|f(x)|$ интегрируем на $[0,\ell]$ (при этом уже не требуем интегрируемости квадрата функции на $[0,\ell]$). Сопоставим каждой такой функции $f(x)$ разложение вида

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x \tag{11.6}$$

в ряд по указанной ортогональной системе. В силу (11.4), (11.5) коэффициенты имеют вид

$$c_n=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}xdx,$$

при этом они существуют, так как справедливо неравенство

$$\left| f(x)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x \right| \le |f(x)|.$$

Отметим, что достаточные условия сходимости ряда (11.6) к значениям $f(x)$ будут такими же, как для рядов Фурье по классической тригонометрической системе.

11.5. Обсудим круг вопросов, связанных со сходимостью (11.3). Очевидно, что возможность представления $f(x)$ в виде суммы ряда (11.3) должна быть связана со свойствами ортонормированной системы $\{h_n(x)\}$ и функции $f(x)$. Кроме того, само понятие сходимости ряда к $f(x)$ можно сформулировать в различных смыслах. Например, это сходимость: а) в данной точке x; б) во всех точках отрезка $[a,b]$; в) равномерная сходимость на $[a,b]$; г) сходимость в смысле нормы пространства Ф и др. Остановимся на последнем виде сходимости: речь идет о соотношении

$$\lim_{n\to\infty}\|S_n(x)-f(x)\|=0, \tag{11.7}$$

где $S_n(x)=c_1h_1(x)+c_2h_2(x)+\ldots+c_nh_n(x)-$ n-ая частичная сумма по ортонормированной системе $\{h_n(x)\}$; норма в Ф введена выше.

Если имеет место равенство (11.7), то говорят что ряд (11.3) сходится к $f(x)$ в среднем. Так, в случае, если $S_n(x)$ значительно отличается (при больших n) от $f(x)$ на “маленьком” множестве (например, в нескольких точках), то равномерная сходимость уже не имеет место, тогда как (11.7) сохраняется. Следовательно, сходимость в среднем в ряде случаев предпочтительнее. Кроме того, погрешность от замены значений $f(x)$ значениями $S_n(x)$, вычисляемая в виде

$$\|S_n(x)-f(x)\|$$

связана с известным способом наименьших квадратов, широко применяемым в вычислительной практике.

Ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной в классе Ф, если для любой $f\in\Phi$ ряд Фурье (11.3) сходится в среднем к функции f. Отметим без доказательства, что тригонометрическая система

$$\{1;\sin x,\cos x;\ldots;\sin nx,\cos nx;\ldots\}$$

полна в пространстве Ф (интегрирование производится по отрезку $[-\pi,\pi]$).

Литература к главе 5

1. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного/Я.С. Бугров, С.М. Никольский. - М.: Наука, 1989. - 464 с.

2. Колмогоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. - М.: Наука, 1989. - 623 с.

3. Лыков, А.В. Теория теплопроводности /А.В.Лыков - М.: Высшая школа, 1967. - 600 с.

4. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1977. - 736 с.

5. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа . Т.2 / Г.М.Фихтенгольц - М.: Наука, 1968. - 464 с.

6. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды. /Н.К.Бари. – М.: Физматлит, 1961. - 936 с.

7. Куликов, Г.М. Метод Фурье в уравнениях математической физики: учебное пособие/ Г.М.Куликов, А.Д. Нахман. – М: «Машиностроение». – 2000. – 155 с.

Заключение

Инновационная деятельность является основным инструментом модернизации математического образования. Мы предлагаем выделить в курсе математики (применительно к системе «Школа-вуз»), линию ортогональных разложений, восходящую от элементов векторной алгебры к теории рядов Фурье в общих функциональных пространствах. Поскольку содержание данной линии отражает некоторые современные математические идеи и востребовано как в самой математике, так и в «смежных» дисциплинах, то оно, по нашему мнению, может быть признано инновационным. К инновационному опыту апробации указанного содержания относятся, например, использование в школьном курсе векторно-координатного метода решения стереометрических задач, а в вузовском курсе – использование первичных понятий и фактов теории сходимости и обобщённого суммирования рядов Фурье.

ОГЛАВЛЕНИЕ