Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»

Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ МАТЕМАТИКА В КОНТЕКСТЕ СОВРЕМЕННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПАРАДИГМЫ

Монография

Издательская платформа Российской академии естествознания
2019

УДК 372.851

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» Ю.В.Родионов;
кафедра общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

А.Д.Нахман. Практико-ориентированная математика в контексте современной образовательной парадигмы: монография / «Инновации в образовании». – Специальный выпуск. № 5. – 2019. – 96 с.

В работе изучаются проблемы формирования практико - и профессионально-ориентированных умений средствами предметной области «Математика» у учащихся общеобразовательной школы и студентов бакалаврских направлений подготовки. Разработана концепция содержательно-методической линии математических моделей и обозначены возможности её реализации средствами соответствующих модулей курса математики. Монография адресована исследователям в области образовательных инноваций, преподавателям математики и студентам, изучающим курс высшей математики.

Введение

Важнейшим компонентом в «компетентностном портрете» выпускника средней школы является сформированность навыков математического моделирования. Концепция формирования и развития таких навыков в той или иной степени разрабатывалась во многих документах и литературных источниках (см., напр., [1]-[30]). Соответствующий социальный запрос нашел свое отражение в требованиях Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) к математической подготовке учащегося старшей школы ([25], [26]), согласно которым «изучение предметной области «Математика» должно «обеспечить осознание значения математики … в повседневной жизни человека…, математики – как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления».

Аналогичные ориентиры обозначены и в Концепции развития Российского математического образования ([9]): «…изучение и преподавание математики, с одной стороны, обеспечивают готовность учащихся к применению математики в других областях, с другой стороны, имеют системообразующую функцию, существенно влияют на интеллектуальную готовность школьников и студентов к обучению, а также на содержание и преподавание других предметов».

Навыки математического моделирования занимают важное место среди общих результатов освоения учащимися основной образовательной программы (личностные характеристики, результаты метапредметного характера), и предметных результатов. Востребованность таких навыков обусловлена тем, что математическое моделирование, благодаря бурному развитию вычислительных методов, становится одним из основных методологических подходов к исследованию разнообразных реальных процессов, приобретая все более универсальный характер. В этой связи усилилась необходимость модернизации математического образования ([8]), целью которого является уже не только приобретение учащимися некоторой суммы математических знаний, но, в первую очередь, развитие логического мышления, освоение математического аппарата, необходимого для решения прикладных и практических задач, выработка умений перевести задачу с практическим содержанием на математический язык. В решении таких задач заложен наибольший потенциал для роста мотивации к математической деятельности. Мотив рождается как следствие осознания учащимися возможностей математической науки в описании, исследовании, прогнозировании характера происходящих процессов и явлений. Эта мысль неоднократно высказывалась многими ведущими математиками (А.Н.Колмогоров, Б.В. Гнеденко и др.; см. статью [24] и библиографию в ней). Например, известный учёный и педагог Н.Я. Виленкин, говоря о проблемном методе обучения, рекомендовал постановку проблемы предварять какой-либо прикладной задачей. В этом случае у учащегося не возникнет представления об оторванности математики от практической деятельности человека.

Каждая практическая или прикладная задача, решаемая средствами математики, сопровождается переводом ее условия на математический язык и последующим использованием понятий, фактов и методов математической науки. Следовательно, процесс ее решения является ничем иным, как процессом математического моделирования.

Современный образовательный процесс характеризуется сменой знаниево-ориентированной парадигмы на компетентностную. В этих условиях обострились проблемы и противоречия, связанные с математическим образованием. Среди них – *противоречия* между

- традиционными содержанием и методикой преподавания курса математики и потребностью в его практической и профессиональной ориентированности;
- преобладанием в курсе теоретических положений, их подробным, обремененным техническими деталями, обоснованием, и необходимостью формирования у учащихся операциональных, практико-ориентированных умений;

- возрастанием в курсе «удельного веса» самостоятельной работы и недостаточным для этого уровнем мотивации учащихся и др.

В связи с указанными обстоятельствами приобретает особую актуальность *проблема* сближения в учебном процессе «теоретической» и «реальной» математики, решаемая средствами эффективного использования идей и методов математического моделирования. *Целью* настоящей работы является выстраивание концепции математического моделирования и соответствующей инновационной содержательно-методической линии, «пронизывающей» весь курс математики. При этом, по нашему мнению, речь должна идти не только о реализации межпредметных связей, но и о внутрипредметном моделировании как способе «переноса» знаний, умений и навыков в смежные разделы курса математики.

Объектом нашего рассмотрения является процесс обучения математике в старшей школе и (отчасти) на начальной ступени бакалавриата, а *предметом рассмотрения* – формирование умений, навыков, и, в конечном счете, компетенции математического моделирования.

Мы исходим из предположения о том, что ознакомление учащихся с общей концепцией математического моделирования и решение задач на построение, анализ и интерпретацию математических моделей создаст предпосылки для развития мотивации учащихся к изучению математики и будет способствовать (в соответствии с требованиями ФГОС), достижению следующих результатов освоения основной образовательной программы:

- освоению учащимися межпредметных понятий и универсальных учебных действий;
- формированию представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;
- формированию основ логического, алгоритмического и математического мышления.

Исходя из цели и гипотезы, сформулируем *следующие задачи настоящей работы*:

1. Адаптировать понятийный аппарат и концептуальные положения теории математического моделирования к процессу изучения математики в системе «школа-вуз».
2. Проанализировать существующие подходы к понятию компетенции/компетентности и сформулировать понятие компетенции математического моделирования.
3. Разработать паспорт формирования компетенции математического моделирования .
4. Обозначить содержательное наполнение основных компонент компетенции математического моделирования.

Теоретическая значимость работы, по нашему мнению, состоит в следующем:

- представлены имеющиеся теоретические подходы к понятию математической модели, выделены этапы процесса моделирования, используемые в решении учебных задач;
- приведена содержательная характеристика компетенции математического моделирования (знать/уметь/владеть), уровней и признаков ее проявления;
- введено и проанализировано понятие содержательно-методической линии математических моделей.

Практическая значимость работы нам видится следующей. Поскольку центральной идеей является положение о *необходимости введения в школьном курсе основных понятий, связанных с математическим моделированием*, то решение задач мы предлагаем осуществлять именно с точки зрения указанного положения, т.е. в тесной связи с этапами моделирования, схемой представления модели, интерпретацией результатов и др. Данный тезис иллюстрируется на материале конкретных задач.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ В СИСТЕМЕ «ШКОЛА-ВУЗ»

1. Понятийный аппарат

1.1. Примеры моделей. Ознакомление учащихся с понятийно-категорийным аппаратом математического моделирования мы предлагаем предварить следующими соображениями.

На современном этапе развития науки моделирование служит основным инструментом исследователя, становится одним из главных источников информации о процессах, происходящих в природе и обществе, обнаружения и обоснования имеющихся в этих процессах закономерностей. С ситуациями моделирования мы постоянно встречаемся в практической деятельности, порой этого даже не осознавая. Так, например,

1) решая задания теста, учащийся моделирует для себя ситуацию реального ЕГЭ;

2) проводя учения, подразделения МЧС имитируют свои действия в условиях реальной катастрофы;

3) испытывая автомобиль на стенде, экспериментатор моделирует ситуацию движения автомобиля в различных режимах и в различных дорожных условиях;

4) проводя следственный эксперимент, следователь моделирует обстоятельства реального преступления;

5) летающая авиамодель в иных масштабах и в упрощенном виде моделирует полет настоящего воздушного судна;

6) географическая карта служит моделью реальной местности;

7) диаграмма на экране монитора служит моделью изменения курса валюты за определенный промежуток времени;

8) ЭКГ моделирует работу сердца в виде изображения ломаной линии в системе координат;

9) вычисление (по определенным правилам) вероятности события есть моделирование степени объективной возможности наступления данного события в умозрительном эксперименте;

10) количественные характеристики реально осуществленной выборки служат (с определенными оговорками) моделями тех же характеристик генеральной совокупности некоторых исследуемых объектов;

11) известные формулы прямо пропорциональной зависимости (закон равномерного движения $S = vt$, второй закон Ньютона, записанный в виде $F = ma$ и др.) служат «символьными образами» реальных зависимостей.

Анализируя указанную информацию, можно увидеть разницу между примерами 1-5 и 6-11. В первом случае мы имеем реальное воспроизведение реальных же обстоятельств с теми же (аналогичными) участниками, но в иных условиях, на ином отрезке времени, в иных масштабах, и т.д. Во втором мы наблюдаем иной, нежели в реальных обстоятельствах, способ фиксации ситуации, использование иного «языка» и т.п. Такие примеры могут служить пропедевтическим материалом, предваряющим понятие идеальных, и, в частности, математических моделей (схемы, карты, чертежи, графики, символы, языки программирования и т.п.).

1.2. Различные подходы к понятию модели. Данное понятие (в частности, математическая модель), строго говоря, представляется первоначальным, *неопределяемым понятием*. Оно основывается на интуитивном представлении об изучаемом объекте, вводится его описание через другие понятия, также ранее не определенные (первоначальные).

Приведем имеющиеся в литературе (см., напр., работы [13], [18] и библиографию в них) формулировки (описания) понятия модели.

«Моделирование есть замещение некоторого объекта А другим объектом М. Замещаемый объект А называется оригиналом или объектом моделирования, а замещающий Б – моделью». Другими словами, *модель – это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий возможность изучения некоторых свойств оригинала.*

«Модель есть намеренно упрощенная схема некоторой части реальной жизни, с помощью которой мы надеемся получить рекомендации к решению реальных проблем».

«Объект М является моделью объекта А относительно некоторой системы S характеристик, если М имитирует А по этим характеристикам».

«Модель есть искусственно созданный объект, который, будучи подобен исследуемому объекту (явлению), отображает и воспроизводит (в виде знаковых форм, формул, схем и т.п.) в более простом и огрубленном виде структуру, свойства, взаимосвязи и отношения между элементами данного объекта (явления)».

«Целью моделирования являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой; модель здесь выступает как средство познания свойств и закономерности поведения объекта. Модель представляет собой как бы проекцию объективной реальности под определенным углом зрения».

Общим для этих описаний является положение о том, что моделирование есть замещение одного объекта (оригинала) другим, который и будет называться моделью.

В настоящей работе мы будем придерживаться концепции А. А. Ляпунова (см. напр. [27]), согласно которой «*моделирование есть опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, изучающее не сам объект, а некоторую вспомогательную искусственную или естественную систему (модель):*

-находящуюся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом;

-способную замещать его в определенных отношениях;

-дающую при её исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте».

1.3. Математическая модель: характеристики и этапы моделирования. С понятием модели и целями моделирования учащемуся на доступном уровне целесообразно познакомиться уже в курсе основной школы, при этом уровень строгости изложения должен соответствовать возрастной группе учащихся. Математическая модель «в первом приближении» должна ассоциироваться с неким необычным образом реального объекта или процесса, так что моделирование представляет собою путешествие в сказочную страну «Математика», где живут символы, формулы, графики, геометрические фигуры и др., в которые волшебным образом превратились предметы, связи, взаимоотношения, существующие в реальном мире. При этом задача учащегося – выполнить какие-либо действия и «разгадать», что кроется за итоговой формулой, тем или иным результатом, – словом, восстановить цепочку подлинных событий и фактов.

Ознакомление с «миром моделей» на более строгом уровне возможно в старшей школе. Здесь уже речь пойдет о записи свойств изучаемого объекта, процесса или явления на формальном языке с целью получения нового знания (обнаружения новых свойств) путем применения формальных же (математических) методов.

Согласно [22], под математическим моделированием понимается процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого математической моделью; исследование этой модели, позволяет получать характеристики рассматриваемого реального объекта.

Будем рассматривать *математическую модель как приближенное представление реальных объектов, процессов или систем, выраженное в математических терминах и сохраняющее существенные черты оригинала; при этом математические модели в количественной форме, с помощью* *логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.* В частности, при моделировании физического процесса ему сопоставляется система математических соотношений, решение которой позволяет получить ответ на вопрос о поведении объекта без создания собственно физической модели.

Согласно концепции А.А.Ляпунова, процесс математического моделирования должен состоять из трех следующих основных этапов.

1. Прежде всего, строится так называемая *содержательная модель в терминах исходной предметной области* (иногда называемая также концептуальной моделью).

Концептуальная модель содержит исходную информацию для аналитика, выполняющего формализацию задачи и использующего для этого определенную методологию и технологию.

При построении содержательной модели формулируются так называемые постулаты модели (напр., гипотеза о линейном характере исследуемой зависимости), т.е. происходит переход к упрощенному, схематическому описанию объекта.

2. Следующий этап – *перевод содержательной модели на формальный математический язык*, т.е. переход к собственно математической модели.

3. Третий этап состоит в изучении математической модели, т.е. *решении полученной математической задачи*.

4. Последним является этап *интерпретации* (истолкования) результата исследования математической модели, следствием чего будет получение новой для исследователя информации о свойствах реального объекта (для чего, собственно, и был нужен весь процесс моделирования).

Первые два «предматематических» этапа наиболее важны с точки зрения создания модели, адекватной исходному процессу (явлению). По А.А.Ляпунову ([27]), здесь имеются свои шаги (ступени).

Шаг первый состоит в наблюдении, сборе, коллекционировании материалов.

Шаг второй – «систематизация, инвентаризация, индексирование, поиск системы».

Шаг третий – выдвижение гипотезы, ее проверка, проведение эксперимента.

Шаг четвертый – построение теории или соответствующий феноменологической модели изучаемого явления (модель в первом приближении; модель в статусе временного, подлежащего уточнению решения; ситуация типа «ведем себя так, как если бы…»).

И лишь пятый шаг , как высшая точка процесса, – математическое описание объекта, явления, системы.

Вернемся к этапам моделирования. Третий этап, собственно математический, определяется характером возникающей математической задачи и имеющимися средствами ее решения. Здесь мы выделяем следующие шаги.

Шаг 1. Выбор носителя модели, т.е. той математической теории, на базе которой будет решаться математическая задача.

Шаг 2. Выбор метода решения: аналитический (если он принципиально возможен или если уровень развития теории позволяет его осуществить), либо численный.

Шаг 3. Разработка алгоритма решения (так, для краевой задачи математической физики такой алгоритм заложен в методе Фурье; при численном решении речь может идти о блок-схеме и т.д.).

Шаг 4. Реализация алгоритма. Получение результата.

Наиболее часто здесь возникают уравнения различного характера, неравенства, системы уравнений или (и) неравенств, задачи максимизации (минимизации), оптимизации, и др.

Наконец, четвертый этап – это этап возвращения к исходной предметной области. Именно на этом этапе мы получаем требуемую информацию об исходном процессе (явлении), которую мы не могли получить другими средствами. В частности, если речь идет о процессе, то возникает возможность

- определить состояние процесса в определенные моменты времени, промежуточные между теми, в которые это состояние уже было известно;
- прогнозировать состояние процесса за рамками данного временного интервала.

Первая возможность называется *интерполяцией*, вторая – *экстраполяцией.*

Подводя итог, *цель математического моделирования мы усматриваем в создании и реализации математического аппарата, позволяющего умозрительно обнаружить связи между теми или иными процессами, явлениями, факторами, и предвидеть конечный результат их действия*. Математическая модель по мере накопления фактов перерастает в математическую теорию, которая сама начинает служить источником информации.

1.4. Схема представления модели. Полезно ознакомить учащихся со следующей общей схемой представления модели: $X \to W \to Y$. Здесь X – вектор входных переменных, Y – вектор выходных переменных (исходы модели); W – так называемый оператор модели, обеспечивающий преобразование информации (X преобразуется в Y) в соответствие с задачей, решаемой на модели. Имеются следующие три варианта упомянутых задач:

1) *прямая задача*: известны X и W, необходимо найти Y;

2) *обратная задача* 1: известны Y и W, необходимо найти X;

3) *обратная задача* 2: известны X и Y, необходимо найти W.

В последней задаче случае возможны случаи «черного ящика» – оператор модели полностью неизвестен, и «серого ящика» – при известной структуре оператора неизвестны значения параметров.

Так, например, в учебных задачах, относящихся к моделированию физических процессов, в качестве вектора входных переменных X обычно выбирается набор физических характеристик объектов, подверженных, например, механическим колебаниям (струна, стержень), совокупность теплофизических характеристик материалов, в которых происходит теплообмен; в задачах экономики вектор X определяется набором исходных данных, подлежащих анализу (объем выпускаемой продукции, цены, показатели спроса и др.) и т.д. В основе построения оператора модели лежит некоторый физический закон, закономерности рынка (([1], [3]) и т.п. Получаемый результат (число или набор чисел, функция или совокупность функций, функциональный ряд и др.) и порождает компоненты вектора Y выходных переменных.

Здесь следует подчеркнуть, что поиск оператора модели во многих случаях есть составная часть процесса моделирования.

1.5. Понятие системы. Системный подход. В общих чертах учащиеся должны иметь представление о математическом моделировании систем и системном подходе. Принцип системности – это философский принцип, выполняющий как мировоззренческие, так и методологические функции. Учащихся, по нашему мнению, следует ознакомить с наиболее употребимыми в литературе определениями (см., напр., [2], [4], [22]) и библиографию в них).

Система – в «первом приближении» – есть совокупность взаимодействующих, взаимосвязанных элементов.

Расширение понятия может быть следующим: система понимается как общенаучная категория для обозначения явлений естественного или искусственного мира, имеющих внутреннюю целостность, завершенную структуру и функциональное назначение.

Дальнейшее расширение и уточнение: системой называют *совокупность элементов, взаимосвязанных между собой таким образом, что возникает определенная целостность, единство*; указанная целостность обладает *новыми интегративными свойствами, отсутствующими у каждого из элементов (эмерджентные свойства).*

Интеграция рассматривается как процесс и результат создания неразрывно связанного, единого, цельного. В соответствии с концепцией В.А.Энгельгардта [30], следует говорить о следующих трех стадиях интеграции:

а) возникновение системы связей между частями;

б) утрата (возможно неполная) частями некоторых своих первоначальных идентификационных качеств при вхождении в состав целого;

в) появление у возникающей целостности новых свойств, обусловленных как свойствами частей, так и возникновением новых систем межчастных связей.

Наличие эмерджентных свойств именуется также синергией. Учащийся должен понимать, что именно синергия отличает систему от простого соединения (синтеза) некоторых элементов. В синергии проявляется суммирующий эффект взаимодействия нескольких факторов, характеризующийся тем, что их действие существенно превосходит эффект каждого отдельного компонента в виде их простой суммы.

Наиболее наглядно синергия проявляется в жизнедеятельности живых организмов, которая сама возможно лишь в результате взаимодействия процессов и явлений, протекающих в организме. Примером синергии в в физике может служить результат соединения двух и более частей радиоактивного материала, которое, с превышением критической массы, порождает выделение энергии в количестве, превышающем суммарное излучение энергии отдельных частей. В общественной жизни знания и усилия социума превосходит суммарные знания и усилия индивидов. В экономике эффектом слияния компаний может быть получение прибыли, превосходящей суммарную прибыль, имевшуюся до их слияния.

Наконец, учащийся должен иметь первоначальное представление о системном подходе: данный подход есть направление о методологии научного познания, в основе которого лежит рассмотрение объекта как системы ([12]). Математическое моделирование является важнейшим компонентом данной методологии, поскольку построение математической модели как раз и призвано (в математической же форме) отразить наиболее важные, существенные связи между элементами моделируемых систем. Удачно построенная и исследованная модель в процессе её интерпретации позволяет выявить в числе свойств системы также наличие синергии.

1.5. Иерархия моделей. Свойство универсальности. Решение практических или прикладных задач часто сопровождается некоторой идеализацией реального объекта или ситуации, пренебрежением малозначительными факторами. Учащийся должен понимать, что при этом необходимо соблюдать разумный баланс между адекватностью модели и ее простотой. Адекватность выступает здесь как требование воспроизведения моделью с достаточной полнотой и точностью всех свойств системы, существенных для целей данного исследования; сложность модели не должна превосходить некоторого предела, определяемого возможностями математического аппарата, которым располагает исследователь. На практике часто исследователь строит последовательность моделей, получающихся одна из другой путем последовательного же отказа от предположений, идеализирующих изучаемую систему. Таким образом, выстраивается иерархическая цепочка математических моделей, уточняющих и обобщающих одна другую. Ясно, что при этом утрачивается простота и растет степень адекватности моделей.

Учащимся школы достаточно иметь лишь общие представления об иерархии моделей. Студенту вуза уже доступно изучение иерархических цепочек моделей многих объектов и процессов, относящихся к их будущей профессиональной деятельности. Например, речь может идти о процессе тепломассопереноса. В простейшем случае рассматривается процесс распространения тепла в стержне при отсутствии источников и поглотителей тепла, и с поддержанием нулевой температуры на его концах. При этом решается однородное уравнение в частных производных с однородными краевыми условиями. Усложнение модели происходит, когда температура на концах стержня может меняться с течением времени. Наконец, отказ от предположения «свободного» теплообмена (т.е. присутствие источников или поглотителей тепла) приводит к так называемой неоднородной (существенно более сложной) краевой задаче.

При достаточно глубоко разработанном математическом аппарате возможен и другой путь изучения моделей: «от общего к частному» ([20]). А именно, исследователь рассматривает и решает математическую задачу в общем виде. Затем, опираясь на соответствующую «общую» модель, путем последовательных рассмотрений частных случаев, он выстраивает цепочку более простых моделей. Данный подход позволяет, установив общие свойства системы, конкретизировать и дополнить их в частных случаях.

Свойство *универсальности* математических моделей проявляется в возможности применения одной и той же модели к объектам (системам) принципиально различной природы, подчиняющимся разным фундаментальным законам. Универсальность математических моделей объясняется, с одной стороны, как единством проявления физических свойств окружающего мира, так и абстрактностью математических теорий, их отвлеченностью от объекта исследования с другой стороны. «Математика - это искусство давать разным вещам одно наименование» ([19]).

Примером простейшей универсальной математической модели является функциональная зависимость $y = kx$. При соответствующем «наполнении» данное уравнение может описывать совершенно разные закономерности (закон равномерного прямолинейного движения при постоянной скорости, размер уплачиваемого налога при постоянном проценте отчисления и др.)

Другим примером служит линейное дифференциальное уравнение второго порядка $x'' = -\lambda^2 x$ с постоянным коэффициентом $-\lambda^2$, описывающее процесс (процессную систему) свободных механических колебаний и электромагнитных колебаний. В приведенных и других примерах универсальных математических моделей (см., напр., [10], [11]) одним и тем же символам следует дать соответствующую данной системе интерпретацию. Таким образом, *в универсальности математических моделей проявляется интегрирующая роль математики и ее методов.*

2. Математическое моделирование при решении учебных задач

Обсудим, как реализуется четырехэтапный процесс математического моделирования применительно к учебным задачам.

2.1. Трансформация содержательной модели в модель математическую. Как правило, в учебных задачах содержательная модель уже представлена в условии задачи. Остается только ее проанализировать и формализовать.

На этапе трансформации содержательной модели в модель математическую мы выделяем два возможных уровня сложности решаемых задач. Первый уровень соответствует уже данной знаковой модели, и тогда остается завершить переход к задаче математической: уточнить постановку, выявить дополнительные условия (ограничения на параметры, начальные или краевые условия и т.п.). Такими являются, например, «задачи с прикладным содержанием» банка контрольно-измерительных материалах ЕГЭ. В значительно большей степени интеграция знаний проявляет себя в случае второго уровня сложности, когда саму знаковую модель предстоит еще построить, на основе, например, вербального описания процесса.

2.3. Особенности некоторых моделей.

1) *Моделирование ситуаций аналитически заданными функциями, уравнениями и их системами*. Таковыми являются, например, ситуации, описываемые в задачах на составление уравнений. Здесь происходит переход от вербальной модели к математической, при этом построение математической модели есть,

по сути, построение ее оператора на основе зависимостей (законов), представленных в условии задачи. Так, например, уравнение вида $f(x)=b$ или система уравнений вида $f(x,y)=p,\ \ g(x,y)=q$ может быть истолкована как информация о выходных значениях (b и (p,q), соответственно) оператора. представленного функциями f и g. Используя эту информацию, следует определить «входные» значения x и y (см. обратную задачу №1 математического моделирования в п.1.4.).

2) *Интерполяция и экстраполяция* позволяют отыскивать аналитические зависимости, близкие к функциям, описывающим реальные закономерности. Так, например, при моделировании состояний систем, меняющихся во времени, на заданном временном интервале $[\tau_1,\tau_2]$ в некоторые фиксированные моменты $t_1, t_2,...,t_n$ наблюдаются значения функции $f(t_1), f(t_2),..., f(t_n)$. Требуется восстановить значения f в другие моменты. Если из каких-либо соображений известен вид функции $f(t;a_1,...,a_m)$, где $a_1,...,a_m$ – неизвестные параметры, то эти параметры могут быть определены из условия совпадения значений функции f в точках t_k с данными наблюдений. Соответствующий способ аппроксимации функции и нахождения «промежуточных» значений и является интерполяцией. Ясно, что для вычисления параметров функции необходимо определенное число наблюдений (измерений) в зависимости от вида искомой функции. Так, для определения коэффициентов многочлена n-ой степени необходимо $n+1$ наблюдений.

Процесс аппроксимации функции и вычисления её значений за пределами интервала $[\tau_1,\tau_2]$ наблюдения представляет собою экстраполяцию. В более широком понимании, всякое научное представление, порожденное математической моделью, есть экстраполяция (с наблюдаемых ситуаций на ненаблюдаемые, с измеренных величин на неизмеренные и т.д.). Расширение понятия экстраполяции на общий случай существования и перспектив развития системы в будущем называется прогнозированием.

Задачи интерполяции и экстраполяции связаны с обратной задачей 2 моделирования, т.е. с поиском оператора W модели. Случай известного вида искомой функции (напр., многочлена) относится к ситуации «серого ящика».

3) *«Внутриматематическое» моделирование*. Примерами могут служить «алгебраические» способы решения геометрических задач. Так, исходя из теорем и формул геометрии, задача трансформируется в уравнение относительно искомой величины или систему уравнений относительно величин, среди которых присутствуют и искомые.

4) Особым случаем моделирования является математическое *моделирование стохастических процессов*, активно внедряющееся в настоящее время в курс математики средней и даже начальной школ (см., напр., [6]).

2.4. Примеры построения математических моделей.

1) Задача интерполяции и экстраполяции. В начале месяца электросчетчик показывал 1050 (квт.), а 20-го числа 2000 (квт.). Считая, что рост потребленной электроэнергии равномерным, определить показания счетчика 5-го числа. Каково должно быть показание счетчика в конце месяца (30-го числа), если потребление электроэнергии будет оставаться равномерным?

Здесь имеется вербальное представление ситуации. Для построения математической модели (нахождения оператора модели) следует знать, что равномерно протекающие процессы описываются линейными функциями. Следовательно, искомая зависимость имеет вид $y = kt + b$ («серый ящик»). Значения $t = 0$ и $t = 5$ можно считать «входными», а $y = 1600$ и $y = 2000$ - «выходными». Параметры k и b искомой линейной зависимости определяются теперь как решения соответствующей системы уравнений. «Восстановленный» оператор есть зависимость вида $y = 20t + 1600$. Теперь возможно нахождение потребленной электроэнергии в любые промежуточные дни и дни после 20-го числа данного месяца (получение этой информации можно отнести к этапу интерпретации модели).

2) Приведём задачу моделирования физического процесса из открытого банка контрольно- измерительных материалах ЕГЭ (www.mathege.ru). В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 6{,}25$ м. – начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин^2, и $b = -\frac{1}{2}$ м/мин – постоянные, t – время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ приведите в минутах).

Данную ситуацию можно отнести к первому уровню сложности моделирования: знаковая модель уже представлена в условии задачи, требуется лишь уточнение модели, т.е. сведение задачи к поиску промежутка решений неравенства $H(t) \geq 0$.

3) В случае того же физического процесса рассмотрим задачу моделирования второго уровня сложности (см. [15]) . Из цилиндрического резервуара (площадь основания которого равна S, а высота равна H), заполненного жидкостью, через отверстие площадью s в его дне начинает вытекать жидкость со скоростью, пропорциональной $\sqrt{h}$, где h – высота жидкости над отверстием; коэффициент пропорциональности k известен. Через сколько времени вся жидкость вытечет из резервуара?

На первом этапе решения требуется построить знаковую модель (формализация задачи), для чего применяем следующие рассуждения. Объем жидкости ΔV, вылившейся за промежуток времени Δt, равен произведению $-S\Delta h$, где Δh - изменение высоты h жидкости над отверстием; очевидно, что высота жидкости убывает, так что $\Delta h < 0$, чем и объясняется появление знака "минус" в записи произведения. С другой стороны, этот же объем равен sl, где l - высота вылившейся (через отверстие площадью s) цилиндрической струйки, при этом l (путь, проделанный жидкостью) приближенно равен $v\Delta t$, поскольку можно считать истечение жидкости за малые промежутки времени Δt практически равномерным. Сравнивая полученные двумя способами значения выражения для объема ΔV вытекшей жидкости, получим

$$-S\Delta h \approx sv\Delta t$$

или, согласно условию (пропорциональность скорости величине $\sqrt{h}$),

$$-S\Delta h \approx k\sqrt{h}s\Delta t.$$

При стремлении к нулю приращения Δt последнее приближенное равенство становится все более точным и может быть заменено равенством соответствующих дифференциалов (взятых с постоянными коэффициентами)

$$-S \cdot dh = k\sqrt{h}s \cdot dt \quad \text{или} \quad -S\frac{dh}{\sqrt{h}} = ksdt.$$

Решая полученное дифференциальное уравнение (этап исследования модели), и учитывая, что в начальный момент резервуар был заполнен (т.е. $h(0) = H$), получаем $-2S\sqrt{h} = kst - 2S\sqrt{H}$.

Теперь возможна интерпретация модели. Резервуар опустеет в тот момент, когда $h = 0$. В этом случае получаем $t = \dfrac{2S\sqrt{H}}{ks}$, что и служит ответом задачи.

4) Приведем пример задачи оптимизации, решаемой средствами дифференциального исчисления. Требуется позолотить ларец формы прямоугольного параллелепипеда (стенки и крышку) объема 72 куб. ед., у которого длина основания вдвое больше его ширины. При каких размерах ларца будет потрачено меньше всего позолоты.

3. Компетенция математического моделирования

3.1. Компетенции: основные понятия. Понятие компетенции/компетентности в современной педагогической науке не является устоявшимся. Поэтому обсудим имеющиеся здесь подходы. В литературе (см. напр., [5], [7], [28], [29]) *компетенция определяется как*

-способность и готовность личности к той или иной деятельности;

- способность (умение) мобилизовать в данной ситуации полученные знания и опыт;
-способность к осуществлению реального жизненного действия;
-возможность эффективно действовать за пределами штатных (учебных) ситуаций;
-инструмент, с помощью которого можно осуществлять различные действия, оказываться подготовленным к новым ситуациям.

Общим для указанных и других определений представляется понимание компетенции как
-способность личности справляться с самыми различными задачами;
-обладание знанием и опытом, позволяющими ей быть успешной в собственной жизнедеятельности;
-умение осуществлять выбор, исходя из адекватной оценки своих возможностей в конкретной ситуации, актуализировать и применять в этой ситуации имеющиеся знания и опыт.

Безусловно, анализ общих моментов и принципиальных различий в приведенных (и других) подходах к пониманию компетенции представляет определенный теоретический интерес, однако, с практической точки зрения достаточно ограничиться рабочим представлением о компетенции как о *способности (возможности)* устанавливать связь между знанием, умением, навыком (ЗУН) и ситуацией, сформировать процедуру решения проблемы.

3.2. Компетентностный подход приобрел особую значимость в в связи с так называемым Болонским процессом и нашел свое отражение в программных документах «Концепция модернизации российского образования на период до 2010 года» ([8]) и «Стратегии модернизации содержания образования» ([23]) .

И хотя соответствующие идеи можно было обнаружить в работах советских и российских педагогов В.В. Краевского, И.Я. Лернера и др., практическая реализация компетентностного подхода началась в странах

Западной Европы и Америке (*competence-based education – CBE*) с конца 60-х годов – периода наиболее активного реформирования систем образования.

Тогда же возникла одна из точек зрения на различие между понятиями «компетенция» и «компетентность», где последнему отводилась роль основанного на знаниях интеллектуально и личностно обусловленного опыта социально-профессиональной жизнедеятельности человека ([7]).

Следует отметить, разрабатываемые в России понятия компетенций имеют (в сравнении с европейским и американским вариантами) существенное различие в их содержательной части ([5]).

В западном варианте преобладает прагматический аспект: «основные характеристики людей», которые «причинно связаны с эффективным выполнением работы», и «проявляются в различных ситуациях, в течение длительного периода времени» и которые могут быть измерены или подсчитана с целью дифференцировать «превосходных» и «средних», или эффективных и неэффективных исполнителей; основной акцент делается на способность демонстрировать работу, соответствующую стандартам.

Отечественный же вариант компетентностного подхода имеет ярко выраженный рефлексивный аспект, выраженный в осмыслении своих собственных действий и их законов. Так, в процессе обучения, где и формируются компетенции, по мнению Е.В.Доманского ([5]), компетентностный подход может запустить механизмы самоактуализации обучения, самоопределения учащегося, освоения своего физического, интеллектуального и духовного развития. С введением компетентностного подхода «образование сделало шаг в сторону понимания того, что основные перемены должны происходить не вне, а внутри учащегося».

3.3. Образовательные компетенции. Связывая процесс формирования компетенций с образовательным процессом, А.В. Хуторской ([29]) вводит понятие образовательной компетенции, определяя ее как «отчужденное, наперед заданное требование к образовательной подготовке учащихся» (в соответствии с государственным заказом, стандартом). «Образовательные компетенции… моделируют деятельность ученика для его полноценной жизни в будущем ». Образовательная компетенция предполагает усвоение не отдельных друг от друга знаний и умений, а овладение комплексной процедурой, в которой для каждого выделенного направления присутствует соответствующая совокупность образовательных компонентов, имеющих личностно-деятельностный характер.

Само определение образовательных компетенций предполагает, что они базируются на ЗУНах, однако никакая компетенция не сводится лишь к этой триаде: ее можно рассматривать как некоторую сферу отношений между знаниями, умениями, навыками формирующейся личности и ее действием в социальной практике. *Компетенция предполагает одновременную мобилизацию знаний, умений и способов поведения в условиях конкретной деятельности.*

В результате формирования образовательной компетенции учащийся приобретает возможность *«переносить знания», решать новые для себя задачи, осваивать новые предметные области, новые виды деятельности* и т.п. Следовательно, можно говорить о возникновении свойств эмерджентности и рассматривать компетенцию как систему.

Как следует из выводов цитированных выше авторов, совокупность компонентами всякой образовательной компетенции являются:

- *ценностно-смысловые ориентации* (компоненты внутреннего мира личности, представляющие собой индивидуальное преломление общественных ценностей, убеждение учащегося в желательности достижения тех или иных целей, включение их в личностный смысловой контекст);
- *кругозор* (наличие представлений о предмете, процессе, явлении, его характерных признаках, умение привести соответствующий пример и контрпример);
- *знание* (в общем случае – результат познания, отраженный в сознании человека в виде совокупности понятий, теоретических построений и представлений, проверенных практикой и удостоверенных логикой; в учебном

процессе – понятое и усвоенное содержание предмета, процесса, явления, способность дать соответствующие данному знанию определения через структуру и связи с другими понятиями);

-*умение* (овладение новым способом действия в процессе решения определенного класса задач, основанное на каком-либо знании);

-*навык* (доведенные до автоматизма умения решать определенные типы задач, способность к действию, достигшему наивысшего уровня сформированности, совершаемому без осознания промежуточных шагов);

- *опыт деятельности* (совокупность практических знаний, умений, навыков, приобретаемых в ходе повседневной деятельности, внутренний результат этой деятельности);

-*личностные качества, рефлексия* (личностные характеристики, необходимые для наиболее эффективной работы в определенной ситуации, процесс осознания субъектом образования собственной деятельности, критическая самооценка, познание своих возможностей).

3.4. Понятие компетенции математического моделирования. Компетенция математического моделирования введена в педагогическую науку сравнительно недавно (см. напр., [21]). Применительно к системе «школа-вуз», данную компетенцию можно определить *как способность актуализировать и применять математические знания и умения при построении, анализе и интерпретации математических моделей в процессе решения задач* как учебных, так и практических.

Согласно приведенной выше структуре образовательной компетенции, выделим следующие компоненты компетенции математического моделирования.

1) *Мотивационно-ценностное отношение к математическим знаниям и умению строить математические модели в процессе учебной и практической деятельности.* Росту мотивации, как подчёркивалось выше, способствуют понимание универсальности математического языка, знакомство со свойством универсальности ряда математических моделей. Изучая «смежные»

дисциплины и, одновременно, будучи знакомым с понятиями, этапами и методами математического моделирования, учащийся должен прийти к убеждению, что математические методы могут выступать в качестве инструмента исследований в различных областях деятельности, в силу чего освоение математических дисциплин становится осознанной целью и подлежит включению в личностный смысловой контекст деятельности учащегося.

2) *Кругозор* и постоянное его расширение – необходимый компонент в компетенции математического моделирования. Речь идет не только об освоении содержания учебных дисциплин, но и постоянном росте культурного уровня учащегося. Интерес ко всему происходящему в мире в настоящее время, к истории, к отечественной и зарубежной культуре, литературе, искусству неизбежно сопровождается анализом явлений и процессов, сравнительными характеристиками, логическими умозаключениями и т.п. В свою очередь, указанные формы мыслительной деятельности способствуют развитию умений выделять главное и отбрасывать второстепенное, кратко и ясно выражать свои мысли, ставить задачи, получать и четко формулировать выводы, а эти умения успешно «встраиваются» в процессы математического моделирования.

3) *Знания и умения* как в области математики, так и в «исходных» предметных областях являются наиболее существенными компонентами данной компетенции. В первую очередь, речь идет об умении актуализировать математические знания применительно к выстраиваемой модели в условиях конкретной ситуации. Владение методом математического моделирования предполагает развитие целого комплекса умений:

- умение решать задачи (постановка вопроса, нахождение нужной информации для решения задачи, анализ проблемной ситуации, выдвижение гипотезы);
- способность к математизации объектов и процессов (определение данных, условий и границ поиска решений, перевод проблемы на язык математики, применение адекватного математического аппарата);

- умение логически мыслить (дедуктивные и индуктивные умозаключения, комбинация логики и интуиции, аргументация выводов и заключений);
- коммуникативные умения (чтение, письмо, речь на языке математики, использование математических символов и формул, построение графиков, схем, диаграмм);
- умение применять современные информационные технологии.

4) *Опыт математической деятельности*, в том числе, и в области математического моделирования, способствует закреплению умений в форме навыков. На основе опыта, приобретенного в процессе решения учебных задач, возникает и развивается способность к переносу математических знаний и умений на незнакомые ситуации, в том числе, возникающие в практической деятельности.

5) Наконец, *рефлексия* как самооценка деятельности в области математического моделирования способствует развитию таких качеств учащегося, как самоконтроль, ответственность, рациональность, самостоятельность.

4. Паспорт компетенции математического моделирования

Для уточнения результатов освоения компетенции математического моделирования в терминах «знать/уметь/владеть» будем использовать так называемый паспорт компетенции. Он включает в себя:

-место и значимость компетенции в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта к уровню сформированности компетенции по окончании освоения образовательной программы (ООП);

-уточнение компонент содержания компетенции;

-структурирование компетенции на уровни, показатели и дескрипторы.

4.1. Формирование компетенции математического моделирования в совокупном ожидаемом результате образования выпускника школы способствует подготовке выпускника к выполнению следующих видов учебной и практической деятельности:

- анализ понятий, фактов, ситуаций из различных предметных областей с использованием логических выводов, математического языка и методов математики и получение, вследствие этого, необходимой информации в рамках соответствующей предметной области;
- интерполяция и экстраполяция результатов;
-прогнозирование поведения процессов средствами вероятностно-статистической теории;
- получение, в конечном счете, практических рекомендаций при решении прикладных задач.

4.2. Уточненные компоненты содержания компетенции:

-предметный – теоретическая основа компетенции математического моделирования, включающая в себя математические знания и умения, а также соответствующие способы действия: использование методов математической логики, геометрии, алгебры, математического анализа и стохастики;
-собственно модельный, предусматривающий осуществление вышеназванных этапов процесса моделирования;
-вычислительный – решение задач в общем виде и с конкретными числовыми значениями величин, предполагающее знание правил и методов вычислений;
-прогностический – направленный на выяснение тенденций развития состояний исследуемого явления или объекта.

4.3. Результаты обучения, раскрывающие структуру компетенции и планируемые уровни ее сформированности. Мы выделяем три следующих основных уровня.

1) Пороговый уровень, как *минимально необходимый* для всех выпускников старшей школы по завершении освоения ООП; на этом уровне предполагается овладение минимальной системой знаний, умений, навыков (ЗУН), что бывает достаточным для анализа простейших математических моделей. Работа с более сложными моделями может осуществляться под руководством преподавателя.

2) Базовый уровень, позволяющий работать с *типовыми задачами*, использовать известные алгоритмы, правила и методы как в решении

собственно математических задач, так и на этапах математического моделирования. Речь идет, по сути, о соответствии требованиям к результатам освоения ООП среднего (полного) общего образования в области математики на базовом уровне.

3) Продвинутый уровень – *максимально возможная выраженность компетенции*, которая важна как качественный ориентир для самосовершенствования. Здесь речь идет о соответствии требованиям к результатам освоения ООП среднего (полного) общего образования в области математики на профильном и углубленном уровнях.

Перечислим основные (по нашему мнению) признаки каждого из перечисленных уровней (знать/уметь/владеть).

На пороговом уровне учащемуся необходимо

-*знать*: основные формулы алгебры и тригонометрии, определения и графики основных элементарных функций, формулировки понятий и фактов геометрии, необходимых для решения простейших планиметрических и стереометрических задач, методы исследования функциональных зависимостей, элементарные положения теории вероятностей и математической статистики;

-*уметь*: выполнять стандартные алгебраические и тригонометрические преобразования и решать простейшие алгебраические и трансцендентные уравнения, выполнять построение на плоскости изображений плоских или пространственных геометрических объектов, вычислять производные и интегралы на основе табличных формул, извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках;

- *владеть*: методами геометрической интерпретации простейших задач на определение взаимного расположения объектов, нахождения их размеров и числовых характеристик (площади, объемы), методами дифференциального исчисления в простейших случаях исследования моделей (например, вычисление скорости, ускорения и т.п.), способами систематизации статистических данных в виде рядов распределения, полигонов и гистограмм.

На базовом уровне учащийся должен

знать: в полном объеме изучаемые в школьном курсе математики формулы алгебры и тригонометрии, функциональные понятия и их графические интерпретации, понятия и факты геометрии, основные положения дифференциально-интегрального исчисления, основные вероятностные схемы и формулы теории случайных событий, а также понятия и факты, связанные с анализом эмпирических распределений;

-*уметь*: проводить доказательства основных известных (из школьного курса) математических утверждений, выполнять основные шаги алгоритма математического моделирования, использовать функционально-графические представления для решения как математических, так и практико-ориентированных задач, использовать факты геометрии для описания предметов окружающего мира, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений;

- *владеть*: навыками устных, письменных, инструментальных вычислений при решении практических задач, символьным языком алгебры, тригонометрии, геометрии и его использованием при формализации задач из смежных областей и практико-ориентированных задач; необходимыми для решения приёмами выполнения преобразований, нахождения корней уравнений и др.; системой функциональных понятий и фактов для описания и анализа реальных зависимостей; способами представления и анализа статистических данных; способами изучения статистических закономерностей в реальном мире; способами построения и изучения простейших вероятностных моделей.

На продвинутом уровне предполагается, что учащийся, в дополнение к знаниям, освоенным на базовом уровне, обладает первичными знаниями аналитической геометрии, комплексного анализа, теории многочленов, дифференциальных уравнений, а также умеет комбинировать известные ему методы доказательств при обосновании новых утверждений, переносить освоенные приемы решения задач на новые, в том числе, практические ситуации.

Продвинутый уровень предполагает, что учащийся владеет:

-специальными приемами решения задач повышенной сложности (напр., задач с параметрами и др.);

- векторно-координатным методом (в дополнение к стандартным геометрическим методам) анализа расположений объектов на плоскости и в пространстве;

- расширенным алгоритмом исследования функциональных зависимостей (включая асимптотическое поведение функций, характер выпуклости и др.) и специальными приемами интегрирования отдельных классов функций;

-стандартными распределениями случайных величин и методами получения точечных и интервальных оценок параметров теоретических распределений.

5. Содержательно-методическая линия математических моделей

5.1. Типы моделей. Мы выделяем четыре основных типа моделей, возникающих при решении учебных задач.

1) *Модели логического типа*: здесь имеет место формализация рассуждений средствами операций над высказываниями и предикатами. Носителем модели является, соответственно, алгебра высказываний или логика предикатов.

2)*Аналитические модели*: здесь процессы функционирования реальных объектов, или систем записываются в виде явных функциональных зависимостей. Эти модели разделяется на классы в зависимости от математической проблемы:

-преобразования (нахождение образа при действии некоторого оператора);

-уравнения (алгебраические, трансцендентные, дифференциальные, интегральные) и неравенства;

- аппроксимационные задачи (задачи интерполяция, экстраполяция, численные методы дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений);
- задачи оптимизации (например, задача линейного программирования).

3) *Геометрические модели*, носителями в которых являются факты и методы геометрии, а объектами исследования – плоские фигуры, поверхности, многогранники, тела вращения и т.д.

4) *Модели стохастического типа* (анализ данных, статистическая обработка результатов наблюдения, вероятностные характеристики случайных событий); см. напр., [6].

5) *Модели смешанного типа*. Так, например, задачи, решаемые средствами аналитической или дифференциальной геометрии используют как аналитический, так и геометрический аппарат; стохастические задачи, решаемые на основе действий над случайными событиями, используют свойства элементов булевых алгебр, общих как для алгебры событий, так и для алгебр множеств и высказываний ([14]).

5.2. Математический анализ как средство моделирования процессов и явлений. В качестве примера рассмотрим возможности средств математического анализа в решении проблем построения аналитических моделей.

Необходимость овладения учащимися элементами математического анализа обусловлена рядом требований, предъявляемых Федеральными государственными образовательными стандартами к результатам освоения основных образовательных программ ([16], [25]).

В частности, изучение элементов математического анализа способствует овладению системой функциональных понятий, развитию умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей. Если функцию одной или нескольких переменных рассматривать как математическую модель реального процесса, то выстраиваются следующие связи понятий.

Таблица 1. Связи характеристик процесса и функциональных понятий

Характеристики процесса	*Функциональные понятия*
Тенденции процесса, проявляющаяся с течением времени.	*Предел функции на бесконечности, асимптотическое поведение.*
Бесперебойное течение процесса (перепады, сбои).	*Непрерывность функции (разрывы).*
Скорость течения процесса.	*Производная функции.*
Изменение состояний в малые промежутки времени.	*Дифференциал функции.*
Рост, падение.	*Монотонность функции.*
Пиковые состояния (апогей, перигей).	*Экстремумы функции (наибольшее, наименьшее значения).*
Воспроизводимость состояний процесса.	*Периодичность функции.*
Промежуточные состояния.	*Интерполяция.*
Прогнозируемые состояния.	*Экстраполяция.*
Восстановление процесса по скорости его течения.	*Неопределенное интегрирование.*
Изменение процесса на временном промежутке, локально зависящего от времени протекания линейным образом.	*Определенный интеграл.*

Таким образом, построение, анализ и интерпретация математических моделей процессов и явлений, требует освоения учащимися основ дифференциально-интегрального исчисления.

5.3. Линия математических моделей. В каждой учебной дисциплине присутствуют фундаментальные понятия, вокруг которых группируется некоторое содержание (другие понятия, связанные с базовым, суждения и действия, необходимые для их усвоения и т.д.); при этом с каждым новым обращением учащихся к этим понятиям происходит обогащение представлений о них. Соответствующий блок содержания представляет собой некое целостное образование с многочисленными внутренними связями, с использованием специальных методов и определяет специфику методики изучения материала.

В подобных случаях говорят об определенной *содержательно - методической линии* в программе изучения данной дисциплины.

Линию математических моделей следует выстраивать в соответствии с уровнями образования. Так, на начальном уровне ([6]) решаются простейшие задачи, связанные практическими ситуациями, возникающими в жизни учащегося (стоимость покупки комплекта канцелярских изделий, систематизация данных о температуре воздуха в течение месяца, вычисление площади квартиры, сумма удержанного подоходного налога и др.).

В основной школе математические модели могут быть представлены традиционными задачами на составление уравнений (проценты, равномерное движение, работа, смеси-сплавы и др.), геометрическими задачами прикладного характера, формализованными задачами из физики и др. предметных областей. Здесь также присутствуют систематическое моделирование комбинаторных ситуаций (использование комбинаторных формул), вероятностное моделирование случайных событий, простейший анализ выборок.

В старшей школе учащийся владеет уже достаточно обширным арсеналом математических методов. В силу этого обстоятельства задачи на составление уравнений могут быть дополнены сложными задачами «финансовой математики» (группа заданий высокого уровня сложности из открытого сегмента контрольно-измерительных материалов ЕГЭ), задачами оптимизации и др. Полезно рассмотрение моделей, требующих использования интеграции методов (например, геометрических, тригонометрических, и алгебраических: геометрические задачи, моделируемые в виде систем уравнений;

геометрических и аналитических: нахождение наибольших площадей, объемов и др.). При изучении математики на профильном уровне возможно конструирование и преподавание элективных курсов: «Математика в экономике», «Дифференциальные уравнения и их приложения», «Элементы математической статистики» и др.

Обсудим, как может быть представлена линия математических моделей в курсе математики бакалавриата инженерных направлений. С нашей точки зрения здесь следует выделить следующие модули.

1) Элементы математической логики и теории алгоритмов (данный модуль является интегрированным по отношению к курсам математики и информатики).

2) Линейная алгебра и аналитическая геометрия (средство моделирования экономических задач, задач оптимизации).

3) Дифференциально-интегральное исчисление (задачи геометрии, механики, электростатики, электродинамики, экономики и др.).

4) Векторный анализ (гидравлика, электродинамика, теплофизика и др.).

5) Обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи сопромата, модели «естественного роста», «процессов выравнивания», рекламы и др.).

5) Дифференциальные уравнения в частных производных (процессы механических колебаний, теплопроводности, диффузии и др.).

6) Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов (прогнозирование событий, статистическая обработка результатов измерений, марковские процессы, моделирование случайных процессов методом Монте-Карло и др.).

5.4. Инновационные содержательно-методические линии. Содержательно-методическую линию данной предметной области будем называть *инновационной* ([17]), если соответствующее содержание

- является востребованным на ступенях как общего (школьного), так и профессионального образования;

- определенной новизной, интегрирует формально-знаниевый и личностно-деятельностный подходы;
-является практически реализуемым и способным повышать эффективность деятельности субъектов образования;
-апробировано и по результатам апробации может быть внедрено и распространено (диффундировано).

Идея наполнения школьного курса задачами «реальной математики» не является новой, однако проблема выстраивания «сквозной» линии математических моделей, формирования соответствующего содержания и технологий нуждается в дальнейшей разработке. Содержательно-методическая линия математических моделей в школьном курсе приобретает особую актуальность в связи с утверждением в математическом образовании компетентностного подхода, и в частности, в связи с включением в контрольно-измерительные материалы ГИА за курсы основной и старшей школ задач компетентностно – ориентированного характера. Востребованность данной линии возрастает при переходе к профессиональному образованию. Так, во ФГОСах высшего образования, и в частности, актуализированных стандартах (например, ФГОС 3+ по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство») среди требований к результатам освоения программы бакалавриата, указывается, что «…выпускник, освоивший программу бакалавриата, должен обладать следующими общепрофессиональными компетенциями:
-способностью использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-1);
-способностью выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-2)».

В настоящее в образовательных организациях создаются инновационные площадки по апробации линии математических моделей. В частности, автором осуществляется научно-методическое сопровождение деятельности стажировочной площадки по мероприятию 2.4 «Модернизация технологий и содержания обучения в соответствии с новым федеральным государственным образовательным стандартом посредством разработки концепций модернизации конкретных областей, поддержки региональных программ развития образования и поддержки сетевых методических объединений» Федеральной целевой программы развития образования на 2016 год.

Таким образом, можно говорить о процессе обобщения и диссеминации эффективных моделей и технологий реализации Концепции развития математического образования в части линии математических моделей.

Основные выводы по материалам главы 1

В условиях перехода на новые федеральные образовательные стандарты общего (ФГОС) и высшего профессионального образования (ФГОС 3+) и реализации Концепции развития российского математического образования актуализируется проблема формирования практико - и профессионально-ориентированных умений средствами общеобразовательных предметных областей. Особую актуальность приобретает *проблема сближения в учебном процессе «теоретической» и «реальной» математики*, решаемая средствами эффективного использования идей и методов математического моделирования.

В этой связи мы предлагаем выделить в курсе математики «сквозную» *содержательно-методическую линию математических моделей*, в реализации которой заложен наибольший потенциал для *роста мотивации учащихся к математической деятельности*. Данная линия обладает признаками инновационности (востребованность, определенная степень новизны в содержании курса и методике его преподавания, практико-ориентированная направленность и др.). Реализация линии моделей направлена на формирование у учащихся *компетенции математического моделирования*, которую мы определяем как способность актуализировать и применять математические знания и умения при построении, анализе и интерпретации математических моделей в процессе решения учебных и практических задач.

Мы анализируем имеющиеся подходы к понятию математической модели, *адаптируем соответствующий понятийно-категорийный аппарат к процессу решения учебных задач* и демонстрируем на примерах процесс построения, анализа и интерпретации моделей.

Литература к главе 1

1. Бордовский Г. А., Кондратьев А. С., Чоудери А. Д. Физические основы математического моделирования. – М.: Издательский центр Академия, 2005. – 320 с.

2. Волкова В.И., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. – СПб.: Изд. СПбГТУ, 1997. –510 с.

3. Воронин А. А., Губко М. В. и др. Математические модели организаций: учебное пособие. – М.: Ленанд, 2008. – 360 с.

4. Гайдук А.Р. Непрерывные и дискретные динамические системы. – М.: Учебно-методический и издательский центр «Учебная литература», 2004. – 252с.

5. Доманский Е.В. Рефлексия как элемент ключевой образовательной компетенции [Электронный ресурс] // Интернет–журнал «Эйдос». – 2003. – 24 апреля. – Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2003/0424.htm (дата обращения 1.09.16).

6. Зайцев В.Л., Каратеева С.А., Нахман А.Д. Элементы математической логики и стохастики: учебно-метод. пособие. – Тамбов: ТОПКРИО, 2008. – 46 с.

7. Зимняя И.А. Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования // Высшее образование сегодня. – 2003. – №5. – С.34-42.

8. Концепция модернизации российского образования на период до 2010 г. Модернизация российского образования. Документы и материалы. – М.: Изд-во ВШЭ, 2002. – С.263 – 282.
9. Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.htm (дата обращения 1.09.2016).
10.Куликов Г.М., Нахман А.Д. Математическое моделирование механических колебаний и процессов тепломассопереноса. – Тамбов: ТГТУ, 2013. – 96 с.
11. Куликов Г.М., Нахман А.Д. Метод Фурье в уравнениях математической физики. - М.: Машиностроение, 2000. – 156 с.
12. Лебедев С.А. Философия науки: словарь основных терминов. – М.: Академический Проект, 2004. – 320 с.
13. Моисеева Л.Т. Методы математического моделирования процессов в машиностроении: курс лекций [Электронный ресурс] – Курск, 2008. – 46 с. – Режим доступа: http://www.twirpx.com/file/1243710 (дата обращения 1.09.16)
14. Нахман А.Д. Булевы алгебры как основа для изучения математической логики, теории множеств, теории вероятностей // Вестник ТГТУ. – 2005. – Т.11, №1Б. – С.246-253.
15. Нахман А.Д. Дифференциальные уравнения: метод. пособие. – Тамбов: ТОПКРИО, 2007. – 64 с.
16. Нахман А.Д., Иванова И.Ю. Преподавание математики в условиях реализации федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования: учебно-методический комплект по элементам математического анализа.– Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2012. – 115 с.
17. Нахман А.Д. Математическое моделирование как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики // Вестник Тульского ГУ, "Современные образовательные технологии". – Вып.13.– 2014. – С.93-96.
18. Новик И. Б., О философских вопросах кибернетического моделирования. – М.: Знание, 1964. – 40 с.

19. Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1990. –736с.
20. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. –320 с.
21. Серебрякова И.В. Современные задачи менеджмента в области математического моделирования // Вестник ЮУрГУ. Серия «Образование. Педагогические науки», 2013 – Т. 5, № 2. – 2013. – С.98-104.
22. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем. – М.: Высш. шк., 2001. – 343с.
23. Стратегия модернизации содержания общего образования: материалы для разработки документов по обновлению общего образования. – М.: ООО «Мир книги», 2001. – 18 с.
24. Тестов В. А. Обучение на социокультурном опыте как средство повышения мотивации к изучению математики // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2016. – № 1 (январь). – С. 6–10. – Режим доступа: URL: http://e-koncept.ru/2016/16002.htm (дата обращения 1.09.16)
25. Требования к результатам освоения основной образовательной программы среднего (полного) общего образования [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.lomonholding.ru/articles/detail (дата обращения 1.09.16)
26. Федеральные Государственные Образовательные Стандарты [Электронный ресурс] / – Режим доступа: Минобрнауки.рф/документы/336 (дата обращения 1.09.16)
27. Федотов А.М. А.А.Ляпунов и математическая биология . В кн. Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2011. –587 с.
28. Фишман, Б.Е., Кузьмина Б.С. Методологические аспекты проблемы компетентностной избыточности. // Материалы XIX Всероссийской научно-методической конференции «Проектирование образовательных программ высшего профессионального образования на компетентностной основе». Сборник № 4. –Москва-Уфа: Уфимский государственный авиационный технический университет. – 2009. – С.32-42.

29. Хуторской А.В. Технология проектирования ключевых и предметных компетенций [Электронный ресурс] // Интернет-журнал "Эйдос", 2005. – 12 декабря – – Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2005/1212.htm (дата обращения 1.09.16)
30. Энгельгардт В.А. Интегратизм – путь от простого к сложному в познании явлений жизни. В кн.: Материалы к 2-му Всесоюз. совещ. по филос. вопр. соврем. Естествознания. – М.: Ин-т философии АН СССР, 1970. – 48 с.

Глава 2. ЛОГИКО-АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: СОДЕРЖАТЕЛЬНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ

1. Цели и задачи

Логико-алгоритмические знания и умения являются неотъемлемым компонентом математической компетенции бакалавров инженерных направлений подготовки. Решение всякой учебной, либо профессионально-ориентированной задачи, доказательство любого утверждения сопровождается определенным логическим выводом. Освоение модуля «Математическая логика и теория алгоритмов» в составе дисциплины «Высшая математика» способствует развитию логического мышления, привитию студентам навыков построения формальных логических моделей и применения этих моделей в математике и ее приложениях.

Целью настоящей настоящего рассмотрения является исследование логико-алгоритмического компонента математической компетенции обучающихся. В соответствии с поставленной целью решены следующие задачи:

1) сформулировано понятие логико-алгоритмического компонента математической компетенции обучающихся и установлена роль логико-алгоритмической культуры в формировании системы общекультурных компетенций;

2) на основе положений нормативных документов, регламентирующих математическое образование, авторами предложены требования к знаниям и умениям, приобретаемым обучающимися в процессе логико-алгоритмической подготовки (пропедевтический уровень и уровень бакалавриата);

3) сформулированы принципы, на которых, по мнению авторов, должна быть основана логико-алгоритмическая практика в процессе освоения обучающимися курса математики;

4)предложено понятие логико-алгоритмического моделирования и описан круг соответствующих задач.

С переходом к реализации актуализированных ФГОС (ФГОС 3+) высшего образования повышаются требования к результатам обучения математике. Набор традиционных знаний, умений, навыков (ЗУН) уступает место *математической компетенции*. Последняя представляет собою *систему*, компонентами которой, помимо ЗУН являются: мотивационно-ценностное отношение к математическим знаниям, кругозор, опыт деятельности, рефлексия.

Современная концепция предметной области «Математика» предполагает формирование способности обучающегося установить связь между практической или прикладной задачей и математическим аппаратом (понятиями, утверждениями, фактами, алгоритмами), который может быть применен для решения данной задачи. При этом речь идет о

а) решении задач «внутри» предметной области «Математика» (задача решается путём переноса знаний и умений из другого раздела математики); в этом случае мы говорим о «внутрипредметном» моделировании (см. п. 3 настоящей работы);

б) решении практико-ориентированных задач, в формулировке которых содержательная модель практической ситуации уже представлена и остается применить соответствующий математический аппарат (см. п.4. настоящей работы);

в) выходе за пределы предметной области «Математика», когда процесс решения практических или прикладных задач (в том числе, профессионально-ориентированных и квазипрофессиональных) предполагает реализацию всех этапов математического моделирования: построение содержательной модели, формализацию задачи, математическое решение и интерпретацию результата (см. [1]). Так, например, квазипрофессиональные математические задачи, учебные по форме и профессиональные по содержанию, имеют интегративную сущность, поэтому их решение возможно только при сочетании математических и специальных (профессиональных) знаний, умений и навыков ([2]).

2. Роль логико-алгоритмической культуры в формировании системы общекультурных компетенций

Как известно, в актуализированных ФГОС высшего образования [3] выделены следующие классы компетенций бакалавров:

а)общекультурные;

б)общепрофессиональные;

б)профессиональные.

Класс, в который включена математическая компетенция, определяется направлением профессиональной подготовки. Будем называть *логико-алгоритмическим компонентом математической компетенции совокупность знаний, умений, навыков в области логико-алгоритмической теории и практики, необходимых для решения математических, практико-ориентированных и прикладных задач путем формализации рассуждений и выстраивания обоснованных алгоритмов.*

Особенностью данного компонента является его «присутствие» в составе каждого из видов компетенций. Так, неоспорим тот факт, что решение любой профессионально-ориентированной задачи сопровождается определенным логическим выводом, выстроенным по законам математической логики, хотя, возможно, и без формализации рассуждений. Процесс решения предполагает соответствие между совокупностью данных и прогнозируемых (а затем – и получаемых) результатов, то есть, по сути, – реализацию некоторого «алфавитного» оператора, который и является алгоритмом.

Далее, общекультурную компетенцию принято понимать как совокупность знаний, навыков, элементов культурного опыта, позволяющих индивиду свободно ориентироваться в социальном и культурном окружении и оперировать его элементами. Как указано выше, в числе компонент логико-алгоритмической компетенции мы рассматриваем такую составляющую, как *кругозор.* Интерес, проявляемый ко всему происходящему в мире в настоящее время, к истории, к отечественной и зарубежной культуре, литературе, искусству, неизбежно сопровождается анализом явлений и процессов, сравнительными характеристиками, логическими умозаключениями и т.п. В свою очередь, указанные формы мыслительной деятельности способствуют развитию умений выделять главное и отбрасывать второстепенное, кратко и ясно выражать свои мысли, ставить задачи, получать и четко формулировать выводы, а эти умения успешно «встраиваются» в математическую деятельность, в том числе – в процессы математического моделирования.

В контексте формирования системы общекультурных компетенций здесь следует говорить о такой их составляющей, как логико-алгоритмическая культура ([4]). Последняя понимается как специфическая подсистема культуры, которая прямо и непосредственно связана с социально-информационной, информационно-математической деятельностью, информационной культурой, культурой мышления ([5]). Высокий уровень сформированности логико-математической культуры способствует развитию активных, самостоятельных форм приобретения знаний, повышает мотивацию обучения, гарантирует правильность принимаемых решений.

Таким образом, *логико-алгоритмическая культура является инвариантным ядром математической компетенции*, поскольку (независимо от направления профессиональной подготовки), неразрывно связана с мотивационно-ценностным компонентом данной компетенции и компонентом «кругозор». С другой стороны, наличие данной культуры содействует формированию следующих компонент в системе общекультурных компетенций ([6]):

- способности к научному пониманию процессов и явлений в различных сферах жизни и деятельности, а также к аргументированному их объяснению:

- способности ориентироваться в актуальных проблемах общественной жизни (в сути проблем, причинах их возникновения, мнениях о путях решения);

- умений различать факты, суждения, оценки, устанавливать их связь с определенной системой ценностей, определять собственное аксиологическое поле;

- коммуникативных умений, включающих в себя речевую культуру, логичность рассуждений, убедительность объяснений.

Следовательно, формирование и развитие логико-алгоритмическая культуры обучающегося способствует усилению культурообразующей роли образования.

3. Требования к содержанию логико-алгоритмической подготовки обучающихся в системе «школа-вуз»

Согласно Закону РФ «Об образовании» система образования является непрерывной, поскольку предусматривает преемственность образовательных программ и государственных образовательных стандартов различного уровня и направленности. Сущность преемственности в обучении заключается в преодолении разрыва между разными ступенями образования в процессе непрерывного получения, расширения, углубления и развития знаний и умений,

в установлении необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения.

С точки зрения принципа преемственности, содержательно-методические проблемы логико-алгоритмической подготовки бакалавров следует рассматривать в контексте системы «школа-вуз».

Выделим два уровня логико-алгоритмической подготовки в данной системе:

-пропедевтический уровень, включающий в себя начальные понятия и простейшие факты математической логики и первичные представления об алгоритмах, приобретаемые в рамках учебных дисциплин «Математика» и «Информатика» средней школы;

- уровень бакалаврской подготовки (речь идет об инженерных направлениях подготовки).

В следующей таблице приведены требования к результатам освоения логико-алгоритмической содержательной линии. Данные требования мы формулируем, основываясь на положениях следующих нормативных документах в области математического образования: ФГОС среднего (полного) общего образования и высшего образования [3] и Концепции развития Российского математического образования [7].

Таблица 1. Требования к результатам логико-алгоритмической подготовки обучающихся в терминах «знать, уметь, владеть»

Знать, уметь, владеть	*Пропедевтический уровень: требования к результатам логико-алгоритмической подготовки выпускников средней школы*	*Требования к результатам логико-алгоритмической подготовки, бакалавров (инженерные направления подготовки)*
Знать (иметь представление, понимать)	*Выпускники средней школы:* *-имеют представление о возможностях применения формального математического аппарата к решению задач, возникающих в теории и практике;* *- имеют представления об аксиоматическом построении математической теории, о логическом статусе аксиом, определяемых и неопределяемых понятий, определений и теорем;* *-понимают, что законы логики*	*Бакалавры инженерных направлений подготовки знают:* *-понятие формулы и классификацию формул алгебры высказываний и логик предикатов;* *-понятия предикатов и операции над предикатами;* *- основные тавтологии и равносильности алгебры высказываний и логики предикатов;* *- требования к алгоритмам и способы задания*

	математических рассуждений имеют универсальный характер и применимы во всех областях человеческой деятельности.	*алгоритмов;* *- основные алгоритмические системы (машина Тьюринга, рекурсивные функции, нормальные алгоритмы Маркова);* *-тезис Черча и Тьюринга о вычислимых функциях и теорему Тьюринга;* *-примеры алгоритмически неразрешимых задач.*
Уметь	*Выпускники средней школы умеют:* *- проводить дедуктивные и индуктивные рассуждения при доказательстве теорем и решении задач;* *- аргументировать суждения, делать логически обоснованные выводы, отличать доказанные утверждения от недоказанных;* *-формализовать составные высказывания путём построения таблиц истинности;* *-строить словесные алгоритмы и соответствующие блок-схемы.*	*Бакалавры инженерных направлений подготовки умеют:* *-преобразовывать формулы алгебры высказываний и логики предикатов;* *-строить нормальные формы формул алгебры высказываний;* *-находить множества истинности предикатов;* *-устанавливать следование и равносильность предикатов;* *- оперировать с кванторами;* *-строить машину Тьюринга.*
Владеть	*Выпускники средней школы*	*Бакалавры инженерных*

	владеют: *- стилем мышления, характерным для математики, его абстрактностью, доказательностью, строгостью;* *- математической символикой;* *- навыками алгоритмического мышления и понимают необходимость формального описания алгоритмов.*	*направлений подготовки владеют:* *- синтаксисом и семантикой алгебры высказываний и логики предикатов;* *-способами оценки сложности алгоритмов;* *- языком кванторов и предикатов для записи математических утверждений;* *-навыками алгоритмического описания математических задач.*

Вышеприведенные требования к результатам освоения логико-алгоритмической линии демонстрируют развитие этих результатов от первичных представлений и простейших умений, освоенных выпускником школы до конкретных знаний и умений в области логико-математического моделирования процессов и явлений (формализации рассуждений средствами операций над высказываниями и предикатами) и выстраивания алгоритмов решения практических и прикладных задач в том числе – и в профессиональной деятельности бакалавра.

4. Логико-алгоритмическая практика в процессе освоения обучающимися курса математики

Речь идет о практике решения математических задач, использующей знания и умения в области математической логики, а также понятия, факты и методы теории алгоритмов. Сформулируем несколько принципов, на которых основана данная практика.

4.1. Принцип построения контрпримеров к утверждениям основан на законах логики предикатов. Так, если мы имеем высказывание $\forall x\, P(x)$, то, согласно законам де Моргана для кванторов, отрицанием $\neg(\forall x\, P(x))$ будет утверждение $\exists x\, \bar{P}(x)$. Это означает, что проверить недостоверность данного утверждения можно, построив соответствующий контрпример. Так, убедиться в том, что условие непрерывности функции в точки является лишь необходимым для ее дифференцируемости в точке («любая дифференцируемая в данной точке функция является в ней и непрерывной»), можно, построив пример непрерывной в некоторой точке функции, не обладающей в ней производной (этим свойством обладает функция $y = |x|$ в точке $x = 0$).

4.2. Принцип проверки равносильности переходов. Если заданы одноместные предикаты $P(x)$ и $Q(x)$ на некоторой предметной области X, то следование предикатов $P(x) \Rightarrow Q(x)$ означает, что высказывание $Q(x_0)$ истинно для всякого x_0, для которого истинно $P(x_0)$. Убедиться в следовании предикатов можно путём сравнения множеств истинности M_P^+ и M_Q^+: следование $P(x) \Rightarrow Q(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $M_P^+ \subseteq M_Q^+$.

Равносильность предикатов $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ определяется как совместное следование $P(x) \Rightarrow Q(x)$ и $Q(x) \Rightarrow P(x)$. Другими словами истинность $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ есть истинность конъюнкции $(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow P(x))$. Формулируемый нами принцип проверки означает, что замена предложения $P(x)$ на $Q(x)$ возможна путём проверки равенства множеств истинности $M_P^+ = M_Q^+$. На практике, для конечных множеств истинности, это означает, что переход $P(x) \Rightarrow Q(x)$ станет равносильным, если выполнена проверка включения $M_Q^+ \subseteq M_P^+$. Так, уже на пропедевтическом уровне освоения логико-алгоритмической линии, учащемуся должно быть известно, что решение иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ путем перехода к уравнению-следствию $f(x) = g^2(x)$ требует проверки корней, найденных для последнего уравнения.

4.3. Принцип построения систем и совокупностей. Данный принцип означает, что всякая математическая задача, сведённая к совместному выполнению условий $P_1(x), P_2(x),..., P_n(x)$ есть задача о системе таких условий (например, системе неравенств), а значит, предполагается нахождение множества истинности, общего для указанных предикатов: $M^+_{P_1} \cap M^+_{P_2} \cap ... \cap M^+_{P_n}$. Если же задача преобразована к рассмотрению нескольких попарно исключающих друг друга условий $P_1(x), P_2(x),..., P_n(x)$, то получена задача о совокупности условий (например, совокупности неравенств), и, следовательно, требуется найти множество $M^+_{P_1} \cup M^+_{P_2} \cup ... \cup M^+_{P_n}$.

Понимание данного принципа, то есть логических основ построения и решения систем и совокупностей, способствует устранению типичных для таких задач ошибок и затруднений обучающихся.

4.4. Принцип распознавания стандартных классов задач и следования алгоритму их решения состоит в следующем:

1) проверить характерные признаки принадлежности задачи данному классу;

2) выполнить последовательно шаги соответствующего алгоритма.

Полезным компонентом логико-алгоритмической деятельности является построение словесных алгоритмов Так, например, на основе теорем о функциях, непрерывных на отрезке и теорем об условиях экстремумов (необходимых и достаточных) обучающийся может самостоятельно построить алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции отрезке.

4.5. Принцип поиска специальных приёмов решения алгоритмически неразрешимых задач. Прежде всего, обучающийся должен иметь представления о классах таких задачах, и, следовательно, не тратить время и усилия на поиск соответствующих универсальных формул и правил. Последовательность действий по решению каждой такой задачи не может считаться алгоритмом, поскольку здесь утрачивается свойство массовости алгоритма, то есть возможность его применения к целому классу однотипных задач, различающихся конкретными значениями исходных данных. Покажем на примере, как реализуется данный принцип.

Пример. В какой момент времени t процессы $f(t)=\sin(t-1)$ и $g(t)=\frac{1}{3}(t-1)^3+t+1$ имеют равные скорости протекания?

Прежде всего найдём скорости протекания процессов: $f'(t)=\cos(t-1),\ g'(t)=(t-1)^2+1.$ Трансцендентное уравнение

$$\cos(t-1)=(t-1)^2+1$$

не «вписывается» ни в один из известных классов алгоритмически разрешимых уравнений. Специальный (основанный на анализе областей значений функций f' и g') прием состоит в оценке левой части уравнения сверху, а правой – снизу:

$$\cos(t-1)\le 1\le (t-1)^2+1\,.$$

Следовательно,

$$\begin{cases}\cos(t-1)=1\\(t-1)^2+1=1\end{cases},\ \text{откуда}\ t=1.$$

5. Логико-алгоритмическое моделирование

5.1. Логико-математической моделью объекта, процесса или явления мы называем систему математических отношений, описывающих связи между его элементарными звеньями с помощью логических операций. В свою очередь, *алгоритмической моделью процесса мы называем конечную последовательность элементарных действий* $\{a_n\}$*, ведущую от совокупности исходных M данных к требуемому конечному результату R.* Поскольку речь идет об однозначном соответствии $M\to R$ (так называемом алфавитном операторе), такое моделирование относится к математическому. Можно также здесь говорить о логико-алгоритмическом моделировании, поскольку каждый переход a_n обусловлен определенным звеном цепочки логических действий (логического вывода).

5.2. Обсуждавшаяся выше логико-алгоритмическая практика обучающихся в процессе освоения курса математики может быть дополнена прикладными и практико-ориентированными задачами. Речь здесь может идти, как указывалось выше, о приложениях как «внутриматематических», так и выходящих за пределы собственно предметной области «Математика».

В дополнение к типам задач, приведённых в п. 3, укажем следующее важное приложение. На основе аналогии логических операций и действий над случайными событиями, могут конструироваться представления «комбинированного» случайного события в виде результата действий над простыми событиями (с заданными вероятностями). Такая конструкция позволяет применять затем стандартные теоремы о вероятностях (см. [8]).

Алгоритмическое моделирование целесообразно использовать в приближенных вычислениях. Так, например, учащимся может быть предложено построение алгоритма нахождения корня алгебраического уравнения по методу половинного деления.

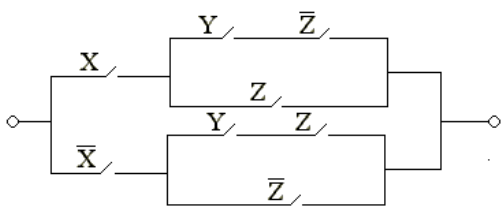
К задачам практико-ориентированного характера относятся «классические» задачи на упрощение релейно-контактных схем (РКС). В основе их решения лежат следующие интерпретации: последовательное соединение переключателей есть конъюнкция соответствующих пропозиционных переменных, а параллельное соединение – их дизъюнкция. Принцип упрощения состоит в следующем:

1) представить (формализовать) содержательную модель РКС, то есть записать соответствующую формулу алгебры высказываний (АВ);

2)упростить формулу с помощью основных равносильностей АВ;

3) интерпретировать результат в виде «более экономной» РКС.

В качестве примера рассмотрим следующую РКС:



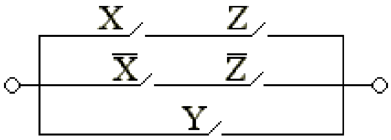
Её анализ состоит в упрощении формулы

$$\left(X\wedge((Y\wedge\bar{Z})\vee Z) \right)\vee\left(\bar{X}\wedge((Y\wedge Z)\vee\bar{Z}) \right)$$

к виду

$$(X\wedge Z)\vee(\bar{X}\wedge\bar{Y})\vee Y \ .$$

Следовательно, приходим к более экономной схеме



5.3. Решение профессионально-ориентированных задач с помощью логико-алгоритмического моделирования возможно в рамках изучения общеинженерных и специальных дисциплин, что способствует расширению представлений студентов о возможностях математического моделирования и укреплению межпредметных связей.

Основные выводы по материалам главы 2

Сформулированы понятия логико-алгоритмического компонента математической компетенции обучающихся. Обсуждается роль логико-алгоритмической культуры в формировании системы общекультурных компетенций. Предложены требования к знаниям и умениям, приобретаемым обучающимися в процессе логико-алгоритмической подготовки (пропедевтический уровень и уровень бакалавриата). Вводится понятие логико-алгоритмического моделирования и предлагается круг соответствующих задач.

Литература к главе 2

1. Антонова, Н.А. Современные требования информационного общества к уровню алгоритмической подготовки специалистов информационного профиля/Н.А.Антонова // Материалы междунар. научн.-практич. конф. Наука и ее роль в современном мире: Том 4. – Караганды: Изд-во Болашак-Баспа. - 2009. – С. 89-94

2. Нахман, А.Д. Технологические аспекты формирования профессионально-математической компетентности магистрантов на основе решения профессионально ориентированных задач/ А.Д. Нахман, А.Ю. Севостьянов// Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. - №4(35). - 2011.-С.182-187

3. Федеральные Государственные Образовательные Стандарты [Электронный ресурс] / Минобрнауки.рф/документы/336 (дата обращения 1.02.2017).

4. Нахман, А.Д. Формирование логико-алгоритмической культуры студентов инженерных направлений подготовки: учебно-методическое пособие [Электронный ресурс] /А.Д.Нахман. - Издательская платформа Российской академии естествознания. Инновации в образовании. - 2016. - №5.- 60 с. Режим доступа: http://innovations.esrae.ru/14-14 (дата обращения 1.02.17)

5. Наумов, А.А. Алгоритмическая культура в контексте подготовки специалистов в области информатики/А.А.Наумов // Вестник Московского педагогического ун-та. Серия: Информатика и информатизация образования. МГПУ (Москва).- 2006.- №7.- С. 268-269.

6. Лебедев, О.Е. Культурологические основы образовательных стандартов современной школы / О.Е. Лебедев // Педагогика : Научно- теоретический журнал. – 2008. – №2 2008. – С. 110-115.

7. Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс] // Math.ru : офиц. сайт. – Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.pdf (дата обращения: 1.02.2017).

8. Нахман, А. Д. Задачи на вычисление вероятности события/А.Д.Нахман// Математика в школе. - 2011. - № 1. - С. 34-41.

Глава 3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ СТОХАСТИКА В СИСТЕМЕ ДОВУЗОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ

1.Проблемное поле

В условиях обновления содержания высшего профессионального образования немаловажную роль играет проблема разработки научно-методических основ непрерывной стохастической подготовки. В свою очередь, формирование системы начальных вероятностно-статистических знаний и умений уже на довузовском уровне служит пропедевтической основой освоения соответствующего блока содержания в курсе математики вуза. Необходимость начальной стохастической подготовки вытекает из основных положениях Концепции развития Российского математического образования [1], а требования к ней отражены в новых Федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС) начального, основного общего и общего среднего образования [2].

Несмотря на достаточно длительный период апробации стохастического материала в курсе основной и старшей школы (а в последние годы – и начальной школы) сохраняются противоречия между

- необходимостью формирования у обучающихся практико- ориентированных и прикладных знаний и умений и абстрактностью, оторванностью от практики основной части изучаемого математического материала;
- достаточно элементарным характером стохастических заданий и сложным, глубоким инструментарием «традиционной» школьной математики;
- между преимущественно интуитивным, эмпирическим подходом к основным понятиям и фактам и необходимостью построения по возможности строгого изложения, приближенного к аксиоматическому подходу.

Первое из перечисленных противоречий порождает проблему разработки содержательного и технологического компонентов системы обучения математическому (и в частности, стохастическому) моделированию. В первую очередь, здесь предстоит решить задачу оптимального распределения стохастического материала по уровням образования.

Второе противоречие порождает достаточно легкомысленное отношение многих обучающихся к стохастике, как разделу курса математики, посвящённому (по их представлениям) задачам о монетках, игральных кубиках и картах и т.п.

Третья противоречие в значительной степени связано со вторым, и генерирует как проблему реализации внутрипредметных связей при изучении вероятностно-статистического материала (см., напр., [3]), так и проблему устранения его дублирования в школьном и вузовском курсах математики.

Разумеется, что в рамках одной статьи невозможно получить решение указанных проблем; вместе с тем мы намечаем определенные пути, приближающие к такому решению.

2. Стохастика: содержательный компонент

Прежде всего, сформулируем наше понимание термина «Стохастика». Стохастика - это раздел математики, находящийся в тесной связи с практической деятельностью человека. Вместе с тем, это современная ветвь математики, интегрирующая в себе понятия и факты дискретной математики (алгебра множеств, комбинаторика), теории функций действительного переменного (мера), теории рядов (распределения Пуассона, геометрическое и др.), дифференциально-интегральное исчисление (функция и плотность распределения), теория специальных интегралов (интеграл Эйлера-Пуассона и др.) , интерполяционной теории, эргодической теории и теории аппроксимаций (использование средних рядов и интегралов, восстановление распределений по их моментам и др.). Предмет стохастики - изучение количественных закономерностей массовых случайных явлений, и, в частности, - численное прогнозирование случайных событий,.

Стохастическая содержательная линия, занимает особо важное место в курсе математики, так как, с одной стороны, является неотъемлемой составляющей «реальной» математики, а с другой – обладает уникальным потенциалом для реализации объективно существующих внутрипредметных связей. В свою очередь, реализация таких связей способствует формированию у учащихся целостного представления о математике как науке, «переносу» знаний и умений из одного раздела изучаемой дисциплины в другой, порождает возможности использования математических методов и алгоритмов в новых условиях.

Обсудим вопрос о распределении содержания стохастической подготовки по уровням образования. Так, ФГОС основного общего образования [2] среди предметных требований к результатам освоения основной образовательной программы называет: «овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; развитие умений описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений».

Изложим наши представления о характере соответствий между уровнями довузовской математической подготовки, осваиваемыми инструментальными уровнями и блоками осваиваемого содержания (таблица 1).

Таблица 1. Уровни подготовки и блоки содержания

Уровень подготовки	***Инструментальный уровень***	***Блоки содержания***
Начальная школа	*Наглядно-интуитивный уровень*	*Виды событий. Опыты с подбрасываниями монеты*

		и игрального кубика. Визуализация данных. Частоты. Относительные частоты. Первичное представление о классической вероятности. Подсчет количеств исходов путем перебора вариантов.
Основная школа	*Логико-комбинаторный уровень*	*Комбинаторные принципы сложения и умножения Число перестановок, размещений и сочетаний. Классическая вероятность и её свойства. Геометрическая вероятность. Устойчивость относительной частоты. Построение вариационных рядов, полигон и гистограмма.*
Старшие классы средней школы	*Логико-аналитический уровень*	*Вероятность суммы и произведения событий. Схема гипотез. Схема Бернулли. Получение точечных оценок параметров теоретического*

		распределения на основе эмпирических данных.

На начальном уровне стохастической подготовки простейшими инструментами познания вероятностно-статистических фактов выступают наблюдение, опыт, интуиция, простейшие обобщения. Уровень основной школы предполагает овладение комбинаторными принципами для непосредственного вычисления вероятности события, а также построение простейших логических выводов в рамках алгебры высказываний [4]. Учащиеся старших классов средней школы способны овладеть теоремами сложения и умножения вероятностей, формулами полной вероятности и Байеса, формулой Бернулли и ее следствиями, то есть применить логико-аналитический аппарат к решению учебных и практических задач. Отметим значительный потенциал стохастических знаний и умений в реализации прикладной и практико-ориентированной направленности обучения математике (см. [5]) . Наш подход дополняет некоторые положения работы [6].

3.Технологические приёмы введения стохастических понятий на этапе довузовской поготовки

Традиционно, технологию обучения рассматривают как систему педагогических действий, коммуникаций, выстраиваемую в соответствии с целевыми установками, конкретным ожидаемым предметным или метапредметным результатом, и направленную на достижение планируемых результатов обучения.

Технологический прием мы рассматриваем как элемент технологии, отвечающий на конкретный вопрос: «как данному материалу обучить результативно?»

3.1.Основными понятиями теории вероятностей, как основы стохастики, являются понятия события и его вероятности.

Понятие вероятности, по нашему мнению, должно предваряться классификацией событий и действиями над событиями. Здесь, основываясь на интуитивном представлении о событиях, следует рассматривать их при выполнении некоторого данного комплекса условий и подразделить на

1) достоверные (обоначение – событие U) – наверняка происходящие;
2) невозможные (обозначение: $\varnothing$) – которые наверняка не происходят;
3) случайные события A, B,... – те, что могут как произойти, так и не произойти.

Указанная классификация событий доступна уже на начальном уровне стохастической подготовки. При этом важно подчеркнуть, что с изменением комплекса условий может измениться характер события. Так, например, событие «наугад взятое натуральное число делится нацело на 8» является случайным на множестве всех четных натуральных чисел и невозможным на множестве нечётных чисел.

Введение в рассмотрений операций над событиями возможно в курсе основной школы. Речь идет о сложении и умножении событий. Сумма $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ конечного количества событий A_1 , A_2 ,... , A_n вводится как событие, состоящее в наступлении (в результате проводимого опыта) хотя бы одного из указанных событий.

Произведение $B = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ конечного количества событий определяется как событие, состоящее в совместном появлении (в результате опыта) событий A_1 , A_2 ,... , A_n .

В частности, операция сложения двух событий $A+B$ имеет словесный аналог «*хотя бы одно из A и B» (* «*или A*, *или B, или и A, и B*»), а операция умножения двух событий имеет словесный аналог «*и A*, *и B*»; «*не A*» служит словесным аналогом операции перехода к событию A , противоположному *A*. Такая *вербальная характеристика событий* позволяет выражать «составные» события через простейшие.

3.2. Следующий шаг - **понятия, характеризующие «взаимоотношения» событий.** Речь идет, прежде всего, о попарной несовместности (A_1 и A_2

несовместны, если $A_1 \cdot A_2 = \varnothing$) и полноте группы событий (группа событий A_1 , A_2 , … , A_n полна, если $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = U$, т.е. в результате опыта наступает хотя бы одно из них).

Мы считаем необходимым рассмотрение простейших упражнений на действия над событиями; такие упражнения способствуют развитию логического мышления обучающихся. Представим некоторые из них.

Упражнение 1. Событие A – учащийся 9 класса сдаст ОГЭ по математике на оценку не более, чем «4». Каким будет событие, противоположное A (объяснить, почему).

Упражнение 2. Друзья Игорь и Олег собираются участвовать в олимпиаде по математике. Событие A – Игорь войдёт в тройку призёров, B- Олег войдет в число призёров.

а) Совместны или не совместны события A и B?

б) Образуют ли они полную группу?

в) В чём состоят события $AB, \bar{A}B, A+B$?

г) Выразить через А и В следующее событие: только один из друзей войдёт в троку призёров.

3.3. Центральным и образующим **основные связи** в содержании стохастического материала является понятие вероятности. Речь идет о *количественном выражении* (*численной мере*) $P(A)$ *степени объективной возможности наступления того или иного случайного события А*.

В начальной школе нахождению классической вероятности предшествуют понятия «вполне вероятно», «маловероятно» «более (менее) вероятно», употребляемые на интуитивном уровне. Например, «вполне вероятно, что учащийся, уверенно владеющий правилами русского языка, напишет диктант на отличную оценку». Или: «более вероятно, что наугад выбранное натуральное двузначное число будет четным, нежели оно будет кратным семи».

Следующий шаг – переход к понятию классической вероятности случайного события, которое, с нашей точки зрения, может быть введено как *доля благоприятных* (для наступления A) *исходов опыта в общем количестве* *равновозможных исходов* опыта. Нахождение этой доли может быть осуществлено в виде правильной дроби, а также в процентной форме.

В качестве примера, устанавливающего связи между понятиями доли, процентов и вероятности приведем следующее задание.

В таксопарке 200 легковых автомобилей, среди которых 40 иномарок. Какова доля иномарок в таксопарке? Изобразите долю иномарок в виде круговой диаграммы. Каков процент иномарок в таксопарке? Какова вероятность, что на вызов такси приедет случайно оказавшаяся поблизости иномарка?

По нашему мнению, рассмотрение в основной школе конкретных моделей вероятности, следует предварить шкалой для вычислений вероятности:

$$P(U)=1, \quad P(\varnothing)=0, \quad P(A)\in[0,1]; \tag{1}$$

Здесь A-любое случайное событие.

Вероятность в учебных задачах представлена тремя следующими моделями:

-классическая вероятность;

-относительная частота события (*статистическая вероятность*)*;*

-геометрическая вероятность.

Комбинаторные формулы (в контексте стохастического материала) выступают как *средства подсчета количества всевозможных выборок* (количество элементарных исходов опыта), характеризуемых определённым образом.

При этом выборки-размещения различаются как самими элементами, так и их порядком; выборки-сочетания разнятся только самими элементами (порядок их следования несущественен), выборки перестановки из m элементов друг от друга могут отличаться лишь порядком следования элементов. Именно такие признаки обычно используются для распознавания вида выборок в теории вероятностей.

Приведём примеры комбинаторных задач *именно в контексте выборок.*

Задача 1. а) Какое максимальное число шестизначных телефонных номеров может быть в городской телефонной сети?

б) Какое максимальное число таких номеров может начинаться с цифры 5?

Задача 2. На заседании Думы из 6 возможных кандидатов выбирают комитет из 3-х человек. Сколько существует способов формирования этого комитета?

В первом задании может быть использован комбинаторный принцип умножения (так, в п.б) имеем число номеров 10^5), во втором – выборки различаются лишь составом их элементов так что их число есть число сочетаний $C_6^3 = 20$.

3.4. Классическая вероятность. Это понятие вводится применительно к так называемому пространству Ω *элементарных исходов опыта*, то есть множеству *n простейших исходов, которые*

а) *попарно несовместны;*

б) *образуют полную группу;*

в) *равновозможны* (объективно ни один из исходов не является более возможным, чем любой другой).

Если количество всех элементарных исходов $\nu(\Omega) = n$, причем m из них *благоприятствует* изучаемому событию A (т.е. в результате наступления каждого из этих исходов наступает и событие A), то *классическая вероятность* события A вводится в виде

$$P(A) = \frac{m}{n} .$$

При вычислении классической вероятности следует, таким образом, последовательно *провести качественный анализ ситуации* (наличие пространства элементарных исходов) и *количественный анализ* (подсчет n и m).

Пример. В плэй-листе закачано 20 треков, среди которых 5 композиций на русском языке. Звукооператор случайным образом выбирает трек для радиотрансляции. Какова вероятность выбора трека на русском языке?

При решении данной задачи необходимо убедиться в применимости классической модели, то есть провести качественный анализ. Условие *случайного* выбора только одного трека обеспечивает наличие пространства элементарных исходов (попарная несовместность, полнота группы и равновозможность исходов). Далее следует этап количественного анализа: если A – событие выбора русскоязычного трека, то $n = 20,\ m = 5,\ P(A) = 0{,}25.$

Очевидны постулированные выше свойства; при этом следует произвести следующее уточнение: $0 < P(A) < 1$ для всякого *случайного события* A. Действительно, здесь $0 < m_A < n$, а поэтому указанная двухсторонняя оценка вероятности события имеет место.

3.5. Относительная частота события A, наступившего в результате проведения n опытов m раз, вводится в виде

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Данное понятие целесообразно ввести в начальной школе; дальнейшее его развитие происходит в основной школе. Полезно, чтобы учащиеся эмпирически обнаружили (например, на опытах с монеткой или игральным кубиком) *свойство устойчивости* относительной частоты: с ростом количества однотипных опытов она колеблется относительно некоторого числа *р, которое и принимается за статистическую вероятность* события A.

Свойством устойчивости объясняется интерес к обработке эмпирических распределений (к анализу вариационных рядов), когда исследуемый количественный признак X генеральной совокупности представлен случайной выборкой из n элементов, которую ранжируют и группируют. Относительные частоты значений (вариант) дают при этом первичное представление о вероятностях этих значений.

3.6.Геометрическая вероятность – понятие, позволяющее численно прогнозировать событие в опыте с бесконечным (несчетным) набором исходов. Данное понятие может быть смоделировано следующим образом: в некоторую ограниченную область E бросается точка, причем попадания ее в любые части, имеющие одинаковую меру, считаются равновозможными. Если событие A – ее попадание в область $A \subset E$ и $S(A)$, $S(E) \neq 0$ – соответственно меры A и E, то геометрическая вероятность события A вводится в виде

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(E)}.$$

Понятие геометрической вероятности открывает широкие возможности использования внутрипредметной связи стохастики с геометрией.

Пример. Лесной массив можно считать прямоугольным треугольником с катетами 3 и 4 км. Очаг возгорания имеет форму круга радиуса 0,5 км. Пожаротушение проводится сбросом воды с вертолета. Какова вероятность, что при нулевой видимости (задымление) сброс будет проведён в точности в очаг возгорания?

4. Задачный материал

4.1.Вероятность суммы и произведения событий. Основная вероятностная схема, изучаемая в основной школе –схема составных событий; в нашей терминологии - «аддитивно-мультипликативная схема». В её рамках изучаются классические вероятности:

1) суммы несовместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B);$$

2) взаимно противоположных событий A и $\overline{A}$

$$P(\overline{A})=1-P(A);$$

3)произведения зависимых событий

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B),$$

где $P_A(B)$ есть вероятность события B, вычисленная при условии, что A произошло (так называемая *условная вероятность*);

4) произведения независимых событий (вероятности событий A и B постоянны в условиях данного опыта)

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B);$$

4) суммы двух совместных событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

5) суммы n совместных событий

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}).$$

Рассматривая данную вероятностную схему, следует предостеречь учащихся от типично (и принципиально!) неверных формулировок типа: «вероятность суммы равна сумме вероятностей; вероятность произведения равна произведению вероятностей».

4.2. Типовые задачи. В качестве одного из технологических приемов теперь может быть предложен пошаговый алгоритм решения задач на нахождение вероятности составного события [4], который мы демонстрируем на следующем примере.

Пример. На мониторе 2 плэй-листа, в которых закачано по 20 треков, среди которых только на одном из них 5 композиций на русском языке. Звукооператор случайным образом выбирает плей-лист, и затем на нём трек для радиотрансляции. Какова вероятность выбора трека на русском языке?

Шаг 1 (введение в рассмотрение изучаемого события). Требуется определить вероятность события *A* –выбора композиции на русском языке.

Шаг 2 («разложение» составного события). A – событие равносильное выбору (во-первых) листа с 5-ю русскими треками (событие *B*) и (во-вторых) выбору на нём трека на русском языке (событие *C*). Событие *A* есть, таким образом, наступление *B* и *C*, то есть *A=BC.*

Шаг 3. Выбор инструмента нахождения вероятности. Применяем соответствующую формулу

$$P(BC) = P(B) \cdot P_B(C).$$

Шаг 4. Подстановка данных. Вычисление. Имеем $P(B) = \frac{1}{2}$. Далее $P_B(C)$ - вероятность выбора на этом листе русскоязычного трека: $P_B(C) = \frac{5}{20}$. Следовательно,

$$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}125.$$

Возможности использования стохастических знаний и умений при принятии решений продемонстрируем на следующих примерах.

Пример 1. Что вероятнее: выиграть 2 из 4-х шахматных партий у равносильного противника или 3 из 6?

Сравнение найденных вероятностей ($\frac{6}{16}$ и $\frac{5}{16}$) показывает, что слабую свою подготовку к турниру игроку легче скрыть при меньшем числе сыгранных партий.

Пример 2. В денежной лотерее 1% процент выигрышных билетов, в вещевой – 5%, в денежно-вещевой – 3%. Стоимость билетов в каждой лотерее – одна и та же. Что выгоднее для желающего получить хотя бы один выигрыш – купить по одному билету денежной и вещевой лотерей, или два билета денежно-вещевой лотереи?

Сравнение результатов (0,5995 и 0,5991) показывает, что в данных лотереях первый вариант – предпочтительнее.

4.3. Теоретические упражнения («мини-теоремы») – эффективный технологический приём организации исследовательской деятельности учащихся.

*Упражнение 1. Д*оказать, что относительная частота события обладает свойствами:

$$w(E)=1, \quad w(\varnothing)=0, \quad 0<w(A)<1.$$

Упражнение 2. Если геометрическая вероятность $P(A)=1$, то означает ли это, что A – достоверно ? Если $P(A)=0$, то обязательно ли A - невозможное событие ?

*Упражнение 3.*Доказать равенство $C_m^k = C_m^{m-k}$.

Упражнение 4. Доказать, что для любых двух событий A и B имеет место неравенство

$$P(A+B) \le P(A)+P(B).$$

Упражнение 5. Доказать, что выборочная средняя $x_в$ принимает значения

$$x_в \in [x_{\min}, x_{\max}],$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ - соответственно наибольшее и наименьшее значения вариант x_k.

Основные выводы по материалам главы 3

Обоснована необходимость разработки содержательного и технологического компонентов системы обучения стохастике на довузовском этапе математической подготовки. Выявлены противоречия, порождающие проблему исследования научно-методических основ стохастической подготовки. Отмечено, что система начальных вероятностно-статистических знаний и умений служит пропедевтикой освоения соответствующего блока содержания в вузовском курсе математики. Предложено распределение вероятностно-статистического материала по уровням образования: начальный, основная школа, старшие классы средней школы. Установлено соответствие между указанными уровнями и инструментами познания фактов стохастики (начальная школа – наглядность и интуиция; основная школа – логика и комбинаторные принципы; старшая школа – логико-аналитические инструменты). Утверждается, что понятие вероятности должно предваряться классификацией событий и определениями действий над ними, а также, что первичное представление о вероятности события должно уточняться на каждом этапе довузовской подготовки. Рассмотрены некоторые технологические приёмы введения вероятностно-статистических понятий и фактов. Предложены, в частности, пошаговые алгоритмы определения операций над событиями и вычисления классической вероятности комбинированных событий. Основные положения работы иллюстрируются средствами оригинального задачного материала.

Предложенные технологические приёмы введения и анализа понятий и фактов стохастики , а также предложенные виды заданий способствуют:

а) осознанию учащимися важности стохастических знаний и умений в практической деятельности, в выборе оптимальных решений;

б) развитию логических умений;

б) реализации внутрипредметных (внутриматематических) связей.

Литература к главе 3

1. Концепция развития Российского математического образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа : www.math.ru/conc/vers/conc-3003.htm (дата обращения: 01.06.2017).

2. Федеральные Государственные Образовательные Стандарты [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Минобрнауки.рф/документы/336 (дата обращения: 01.06.2017).

3.Терехова Л.А. Элементы стохастики как средство усиления внутрипредметных связей школьного курса математики /Л.А.Терехова //Вестник Тамбовского университета. Серия: Гуманитарные науки. – 2008. - № 5. - С. 347- 350.

4. Нахман, А.Д. Технологические приемы решения вероятностных задач [Электронный ресурс] /А.Д.Нахман // Современные проблемы науки и образования: электронный научный журнал. – 2013. – №3. URL: http://science-education.ru/ru/article/view?id=9613 (дата обращения: 24.12.2017)

5. Щербатых, С. В. Научно-методические особенности реализации прикладной направленности обучения стохасике в профильных классах общеобразовательной школы: монография / С. В. Щербатых. - Елец : Елецкий гос. ун-т им. И. А. Бунина, 2008. - 201 с.

6. Китаева, И.В. Критерии и уровни сформированности стохастической компетенции учащихся при изучении математики в основной школе/И.В.Китаева, С.В.Щербатых //Вектор науки Тольяттинского государственного университета.- 2013. - №3.- С.110-112.

Глава 4. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Моделирование средствами дифференциальных уравнений: содержательный аспект

Методы математического моделирования процессов и явлений занимают всё большее место в содержании математических дисциплин, изучаемых в высшей школе. Данное обстоятельство согласуется с основными положениями Концепции развития математического образования и требованиями ФГОС нового поколения к «компетентностному портрету» современного инженера. Так, стандарт направления подготовки 08.03.01 «Строительство» предписывает овладение общепрофессиональными компетенциями, среди которых:

-способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-1);

-способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-2).

Для освоения соответствующий компетенций студенту необходимо:

-знать основные понятия и факты теории дифференциальных уравнений;

-уметь привлекать методы математического анализа и дифференциальных уравнений для объективного научно-исследовательского анализа, моделирования и решения поставленных физико-математических задач в профессиональной деятельности;

-владеть навыками использования математических методов (аналитических и графических) для получения характеристик исследуемой модели и анализа результатов исследования.

Указанные структурные составляющие компетенций в значительной степени формируются в процессе изучения теории дифференциальных уравнений, и – прежде всего- за счёт возможностей многочисленных приложений этой теории. Дифференциальные уравнения служат мощным методом математического моделирования. Изучая какие-либо явления в природе, экономике, общественной жизни и т.д., исследователь прежде всего создает его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель. Выделяя основные характеристики явления и пренебрегая второстепенными характеристиками явления, исследователь записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Часто эти законы могут быть формализованы в форме дифференциальных уравнений. Именно так происходит при изучении механики сплошной среды, химических реакций, колебательных и теплофизических процессов, электрических и магнитных явлений и др.

Созданию математической модели сопутствуют не только постановка задачи в форме дифференциального уравнения, но и запись дополнительных условий: начальных или/и граничных. Так возникают математические модели в виде задачи Коши или краевой задачи.

Далее необходимо решение математической задачи математическими же методами. На этом этапе исследователь определяет характер уравнения (уравнение обыкновенное или в частных производны), класс, которому оно принадлежит (например, обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка), анализирует существование решения, и – в случае положительного ответа – имеющиеся методы решения таких уравнений или (при их отсутствии) сталкивается с необходимостью разработать новые.

Отметим, что для проверки адекватности математической модели очень важны теоремы именно существования решений соответствующих дифференциальных уравнений, поскольку из существования решения реальной задачи (например, задачи из физики, химии, биологии) не следует существование решения построенной математической задачи.

В процессе работы с математической моделью для исследователя предпочтительнее построить аналитическое решение задачи, поскольку в этом случае он получает полное описание процесса, может обнаружить «пиковые» ситуации (они проявляют себя в точках экстремумов), его тенденции (например, поведение при неограниченном течении времени) и др. Однако, получение решения в виде явной аналитической зависимости не всегда возможно (так бывает в случаях алгоритмически неразрешимых задач), либо крайне трудоёмко. В этих случаях используются численные алгоритмы. Они позволяют получить результат с приемлемой степени точности, задействовать такие математические методы, как метод конечных разностей, метод наименьших квадратов, интерполяционные и другие.

В конечном счёте, исследователь получает описание процесса в математических терминах. Далее наступает этап интерпретации модели. Здесь выявляются не только количественные, но качественные характеристики явлений. Нередко возникает возможность предсказать дальнейшее протекание процесса (экстраполяционный эффект) и, например, новые физические эффекты. Критерием правильности выбора математической модели является практика, сопоставление данных математического исследования с экспериментальными данными.

Необходимость решать дифференциальные уравнения (например, в задачах механики находить траектории движения) во многом явилась стимулом к развитию дифференциально-интегрального исчисления. Так, законы Ньютона представляют собой, по сути, математические модели механического движения. В небесной механике оказалось возможным не только получить и объяснить уже известные факты, но и сделать новые открытия (например, открытие Леверье в 1846 году планеты Нептун на основе анализа дифференциальных уравнений).

В настоящее время теория обыкновенных дифференциальных уравнений представляет собой богатую, широко разветвленную теорию и постоянно развивающуюся теорию.

Цель изучения модуля "Дифференциальные уравнения" состоит в ознакомлении учащихся с элементами теории и способами решений уравнений нового для них типа – дифференциальных.

Задачами изучения данного модуля являются:

- расширение представлений учащихся о прикладных аспектах математики;
- совершенствование в использовании математического аппарата, в частности, аппарата дифференциально-интегрального исчисления;
- формирование устойчивого интереса к изучению дисциплин естественно-математического цикла, развитие творческих способностей;
- способствование формированию качеств самостоятельности и самоактуализации.

Изучение дифференциальных уравнений направлено на приобретение знаний:

- о дифференциальных уравнениях как математических моделях реальных процессов;
- об основных понятиях и фактах теории дифференциальных уравнений;
- о классах уравнений, решаемых аналитически;
- о методах решений уравнений стандартных типов.

Перечень приобретаемых умений:

- моделировать простейшие процессы (движения точки и др.) в виде дифференциальных уравнений;
- решать задачу интегрирования (в случае уравнений первого и высших порядков);
- разделять переменные и сводить уравнения других типов к случаю разделения переменных;
- понижать порядок (в случае соответствующих уравнений второго порядка);

- решать линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Нам представляется необходимым изучение следующих вопросов содержания модуля «Дифференциальные уравнения».

Тема 1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши. Некоторые типы дифференциальных уравнений 1-го порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные, Бернулли. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Тема 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Простейшие свойства решений однородного уравнения. Линейная зависимость и линейная независимость решений. Структура общего решения линейного однородного и неоднородного уравнений.

Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Тема 3. Системы дифференциальных уравнений.

Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений. Метод исключения.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений.

Более подробное изложение теоретических и практических вопросов по теме «Дифференциальные уравнения» читатель может найти в книгах [1] –[5].

2.Уравнения первого порядка: задачный материал

Задача 1. В сосуд, содержащий 5 л воды, непрерывно со скоростью 1 л/мин раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 кг соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 10 минут?

Считать, что втекающий газ (или жидкость) вследствие перемешивания равномерно распределяется по всему объему сосуда. Тогда функция y(t), где t –время, а y(t) – концентрация вещества (в долях), подчиняется закону $Vy' = a(c_0 - y)$. *Здесь V – объем сосуда, a(t) - скорость поступления вещества в сосуд,* c_0 *– концентрация данного вещества (в долях) в поступающем растворе.*

Решение. По условию задачи V=5, a=1, c_0=0,3. Следовательно, дифференциальное уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$5y' = 0.3 - y\,.$$

Начальная концентрация соли в воде равна нулю, следовательно, начальное условие имеет вид

$$y(0) = 0\,.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\dfrac{dy}{dt}$:

$$5\frac{dy}{dt} = 0.3 - y;$$

разделяем переменные:

$$5\frac{dy}{0.3 - y} = dt.$$

Далее интегрируем

$$5\int \frac{dy}{0.3 - y} = \int dt;$$

$$-5\ln|0.3 - y| = t + C;$$

$$\ln|0.3 - y| = -t/5 + C;$$

(так как C – произвольная константа, то заменяем $-C/5$ на C). Проводим преобразования, чтобы из полученного уравнения выразить y.

$$0.3 - y = e^{C - t/5};$$
$$y = 0.3 - e^{C - t/5};$$
$$y = 0.3 - Ce^{-t/5}.$$

Находим константу C из начального условия:

$$0 = 0.3 - Ce^{0};$$
$$C = 0.3.$$

Окончательно, зависимость концентрации соли от времени имеет вид

$$y(t) = 0.3(1 - e^{-t/5}).$$

Находим значение $y(t)$ в момент времени t=10.

$$y(10) = 0.3(1 - e^{-10/5}) \approx 0.3(1 - 0.135) \approx 0.260.$$

Если концентрация соли в сосуде составляет 0.260 кг/л, а объем сосуда 5л, то масса соли в сосуде составит $0.260 \cdot 5 = 1.3$ кг.

Ответ: через 10 мин в сосуде будет 1.3 кг соли.

Задача 2. Начальная температура тела 5 градусов. За 10 мин оно нагрелось до 15 градусов. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 22 градуса. Когда тело нагреется до 20 градусов?

Принять, что скорость нагревания (или остывания) тела пропорциональна разности температуры тела и температуры окружающей среды. Тогда функция y(t), где y – температура тела, а t – время, подчиняется закону $y' = k(h - y)$. *Здесь k – коэффициент теплообмена, h(t)- температура окружающей среды.*

Решение. По условию задачи *h(t)*=22, $y(0) = 5$, $y(10) = 15$, $y(T) = 20$. В задаче требуется найти время T. Дифференциальное уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$y' = k(22 - y).$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = k(22 - y);$$

разделяем переменные:

$$\frac{dy}{22 - y} = kdt.$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{22 - y} = k\int dt;$$

$$-ln|22 - y| = kt + C;$$

$$ln|22 - y| = -kt + C;$$

(так как C – произвольная константа, то заменяем $-C$ на C). Проводим преобразования, чтобы из полученного уравнения выразить y.

$$22 - y = e^{C-kt};$$
$$y = 22 - e^{C-kt};$$
$$y = 22 - Ce^{-kt}.$$

(так как C – произвольная константа, то заменяем e^C на C)

Находим константы C и k из условий:

$$\begin{cases} y(0) = 5 \\ y(10) = 15 \end{cases}.$$

Подставляя в эти условия найденное решение, получим

$$\begin{cases} 22 - Ce^0 = 5 \\ 22 - Ce^{-10k} = 15 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C = 17 \\ 17e^{-10k} = 7 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C = 17 \\ k = 0.1 \cdot ln\dfrac{17}{7} \end{cases}$$

Окончательно, зависимость температуры тела от времени имеет вид

$$y(t) = 22 - 17e^{-0.1ln(17/7)\cdot t}.$$

По условию задачи $y(T) = 20$:

$$22 - 17e^{-0.1ln(17/7)\cdot T} = 20.$$

Отсюда получаем

$$e^{-0.1 ln(17/7)\cdot T} = \frac{2}{17};$$
$$-0.1 ln(17/7)T = ln(2/17);$$
$$T = -10\frac{ln(2/17)}{ln(17/7)};$$
$$T \approx 24.12.$$

Ответ: через 24.12 мин тело нагреется до 20 градусов.

Задача 3. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0.44 мг. Через сколько лет распадется 50 % имеющегося радия?

Использовать закон радиоактивного распада – количество радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент. Тогда функция y(t), где t - время, а y(t) – масса радиоактивного вещества, подчиняется закону $y' = -ky$*, где k – некоторая постоянная.*

Решение. По условию задачи $y(0) = 1$ (г), $y(1) = 1 - 0.00044 = 0.99956$ (г), $y(T) = 0.5$ (г). В задаче требуется найти время T (в годах). Дифференциальное уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$y' = -ky.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = -ky;$$

разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y} = -kdt.$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{y} = -k\int dt;$$

$$ln|y| = -kt + C;$$

$$y = e^{C-kt};$$
$$y = Ce^{-kt}.$$

(так как C – произвольная константа, то заменяем e^C на C)

Находим константы C и k из условий:

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y(1)=0.99956 \end{cases}.$$

Подставляя в эти условия найденное решение, получим

$$\begin{cases} Ce^0 = 1 \\ Ce^{-k} = 0.99956 \end{cases},$$

$$\begin{cases} C=1 \\ k=-ln\,0.99956 \end{cases}.$$

Окончательно, зависимость температуры тела от времени имеет вид $y(t)=e^{ln(0.99956)\cdot t}$. По условию задачи $y(T)=0.5$:

$$e^{ln(0.99956)\cdot T} = 0.5.$$

Отсюда получаем

$$\ln(0.99956)T = \ln(0.5);$$

$$T = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.99956)}; \quad T \approx 1575.$$

Ответ: через 1575 лет распадется 50% имеющегося радия.

Задача 4. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально квадрату скорости лодки. Начальная скорость лодки 3 м/сек, через 5 секунд её скорость составила 2 м/сек. Какая скорость будет у лодки через 10 секунд от начала торможения?

Считать, что скорость тела y(t), где t - время, подчиняется закону $my' = -ky^2 + f$. *Здесь m – масса тела, k – коэффициент сопротивления среды, а f – приложенная сила.*

Решение. По условию задачи $f=0$, $y(0)=3$, $y(5)=2$ В задаче требуется найти значение $y(10)$. Дифференциальное уравнение, описывающее процесс, имеет вид

$$y' = -\frac{k}{m}y^2.$$

Полученное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Заменяем y' на $\frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{k}{m} y^2;$$

разделяем переменные:

$$\frac{dy}{y^2} = -\frac{k}{m} dt.$$

Далее интегрируем

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{k}{m} \int dt;$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{k}{m} t + C;$$

$$y = \frac{1}{k/_m t - C}.$$

Находим константы C и $\frac{k}{m}$ из условий:

$$\begin{cases} y(0) = 3 \\ y(5) = 2 \end{cases}.$$

Подставляя в эти условия найденное решение, получим

$$\begin{cases} 3 = \dfrac{1}{-C} \\ 2 = \dfrac{1}{\frac{5k}{m} - C} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} C = -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{k}{m} = \dfrac{1}{30} \end{cases}.$$

Окончательно, зависимость скорости тела от времени имеет вид $y = \frac{30}{t + 10}$.

Тогда $y(10) = \frac{30}{10 + 10} = 1.5$.

Ответ: через 10 секунд скорость лодки будет равна 1.5 м/сек.

Задача 5. Сосуд объема V=2 л содержит воздушную смесь (воздух и азот). Из сосуда вытекает $a(t)=2t$ л воздушной смеси в минуту, и такое же количество смеси втекает, причем во втекающей смеси количество азота составляет $b(t)=t^3$ л за минуту. Определить количество азота (л) в сосуде в момент T=1 мин, если в момент t=0 в сосуде содержалось V_0=0.1 л азота. Количество азота в сосуде подчиняется закону $y' = b - a\dfrac{y}{V}$.

Решение. Согласно условию задачи, дифференциальное уравнение, описывающее изменение количества азота в сосуде, имеет вид

$$y' = t^3 - 2t\frac{y}{2};$$
$$y' + ty = t^3.$$

Полученное уравнение является линейным, следовательно, решаем его с помощью подстановки Бернулли

$$y = u(t)v(t); \quad y' = u'v + uv'.$$

Получаем уравнение

$$u'v + uv' + tuv = t^3;$$
$$u'v + u(v' + tv) = t^3.$$

Положим $v' + tv = 0$, тогда $u'v = t^3$.

Решаем последовательно, разделяя переменные, полученные уравнения

а) $\dfrac{dv}{dt} + tv = 0;\ dv = -tvdt;$

$$\frac{dv}{v} = -tdt;$$

$$\int\frac{dv}{v} = -\int tdt, \quad \text{или} \qquad \ln v = -\frac{t^2}{2},$$

откуда $v = e^{-t^2/2}$ (выбрана одна из первообразных v (t)).

б) $u'v = t^3$ или $\dfrac{du}{dt}e^{-t^2/2} = t^3;$

$$du = t^3 e^{t^2/2}dt:$$

$$\int du = \int t^3 e^{t^2/2}\,dt.$$

Представляем интеграл в левой части в виде $\int t^2 \cdot te^{t^2/2}dt$ и интегрируем по частям:

$$U = t^2; \quad dV = te^{t^2/2}dt;$$
$$dU = 2tdt; \quad V = \int te^{t^2/2}dt = \int e^{t^2/2}d\frac{t^2}{2} = e^{t^2/2}.$$

Следовательно,

$$\int t^2 \cdot te^{t^2/2}dt = t^2e^{t^2/2} - \int e^{t^2/2}2tdt = t^2e^{t^2/2} - 2\int e^{t^2/2}d\frac{t^2}{2} =$$
$$= t^2e^{t^2/2} - 2e^{t^2/2} + C = e^{t^2/2}(t^2 - 2) + C,$$

т.е. $u = e^{t^2/2}(t^2 - 2) + C$ (в отличие от случая а) здесь ищется общее решение).

Поскольку $y = uv$, то ответ имеет вид

$$y = (e^{t^2/2}(t^2 - 2) + C)e^{-t^2/2} = t^2 - 2 + Ce^{-t^2/2}.$$

Из начального условия $y(0) = V_0 = 0.1$ получаем

$$0.1 = 0^2 - 2 + Ce^0; \quad C = 2.1;$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$y = t^2 - 2 + 2.1e^{-t^2/2}.$$

Найдем значение искомой функции в момент T=1: $y(1) = 1^2 - 2 + 2.1e^{-1/2} \approx -1 + 1{,}274 = 0{,}274$ (л).

Ответ: количество азота в сосуде в момент T=1 мин равно 0, 274 л.

3.Уравнения высших порядков: задачный материал

Задача 1. *Течение процесса y=y(t) описывается уравнением* $y'' = g(t) = \dfrac{5}{(t-4)^3}$, *скорость процесса в момент t=0 равна нулю, начальное состояние процесса y(0)=1 . Найти состояние процесса в момент* $t = 2$. *Вычисления провести с точностью до 0.1*

Решение. Требуется решить задачу Коши

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{5}{(t-4)^3} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Согласно правилам интегрирования, имеем

$$y' = \int \frac{5}{(t-4)^3}\,dt;$$

$$y' = \int 5(t-4)^{-3}\,dt;$$

$$y' = \frac{-5}{2(t-4)^2} + C_1.$$

Из начального условия находим значение константы C_1:

$$0 = \frac{-5}{2(0-4)^2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{5}{32}.$$

Далее находим

$$y = \int \left(\frac{-5}{2(t-4)^2} + C_1\right)dt;$$

$$y = \frac{5}{2(t-4)} + C_1 t + C_2;$$

$$y = \frac{5}{2(t-4)} - \frac{5}{32}t + C_2.$$

Из начального условия находим значение константы C_2:

$$1 = \frac{5}{2(0-4)} - \frac{5}{32}\cdot 0 + C_2;$$

$$C_2 = 1 + \frac{5}{8} + \frac{5}{32} = \frac{57}{32}.$$

Окончательно, получаем решение задачи Коши, описывающее состояние процесса.

$$y(t) = \frac{5}{2(t-4)} - \frac{5}{32}t + \frac{57}{32}.$$

Найдем состояние процесса в момент $t = 2$:

$$y(2) = \frac{5}{2(2-4)} - \frac{5}{32}\cdot 2 + \frac{57}{32} = \frac{27}{32}.$$

Вычисляя значение констант с точностью до 0.1, получим $y(2) \approx 0{,}8$.

Ответ. Состояние процесса в момент $t=2$ равно $y(2)\approx 0{,}8$.

Задача 2. *Процесс колебания материальной точки массой m под действием силы упругости* $F_y=-ky$, *силы сопротивления среды* $F_c=-hy'$ *и внешней силы* $F(t)$, *где t- время, а y(t)- отклонение от состояния равновесия y=0, может быть описан уравнением вида* $y''+py'+qy=f(t)$. *Здесь* $p=\dfrac{h}{m},\quad q=\dfrac{k}{m},\quad f(t)=\dfrac{F(t)}{m}$. *Найти закон движения точки, если известны значения p=2, q=10,* $f(t)=\sin 3t$, *а также координаты точки в моменты времени* $t_0=0$ *и* $t_1=5$: *y(0)=0, y(5)=0.*

Решение. Требуется решить уравнение

$$y''+2y'+10y=\sin 3t,$$

причем положение точки в начальный момент и в момент $t_1=1$ заданы:

$$y(0)=0,\quad y(5)=0.$$

Найдем общее решение ЛНУ. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2+2\lambda+10=0.$$

Это уравнение для соответствующего ЛОУ имеет комплексные корни $\lambda_{1,2}=-1\pm 3i$, поэтому общее решение ЛОУ получаем в виде

$$y_0=e^{-t}(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t).$$

Поскольку контрольное число $S=3i$ не совпадает ни с одним из корней, то частное решение ЛНУ ищем в виде

$$y_ч=M\cos 3t+N\sin 3t.$$

Находя

$$y'_ч=-3M\sin 3t+3N\cos 3t,$$

$$y''_ч=-9M\cos 3t-9N\sin 3t$$

и подставляя результаты в ЛНУ, получаем

$$-9M\cos 3t-9N\sin 3t+2(-3M\sin 3t+3N\cos 3t)+10(M\cos 3t+N\sin 3t)=\sin 3t;$$
$$\cos 3t(-9M+6N+10M)+\sin 3t(-9N-6M+10N)=\sin 3t;$$
$$\cos 3t(M+6N)+\sin 3t(-6M+N)=\sin 3t;$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой частях, получаем

$$\begin{cases} M+6N=0 \\ -6M+N=1 \end{cases}.$$

откуда $M=-\dfrac{6}{37}, N=\dfrac{1}{37}$ так что

$$y_ч=-\frac{6}{37}cos\,3t+\frac{1}{37}sin\,3t\,.$$

Следовательно, общее решение ЛНУ

$$y=y_0+y_ч=e^{-t}(C_1\,cos\,3t+C_2\,sin\,3t)-\frac{6}{37}cos\,3t+\frac{1}{37}sin\,3t\,.$$

Теперь подставим краевые условия: $t=0$ и $y=0,\ t=5$ и $y=0$:

$$\begin{cases} C_1-\dfrac{6}{37}=0 \\ e^{-5}(C_1\,cos\,15+C_2\,sin\,15)-\dfrac{6}{37}cos\,15+\dfrac{1}{37}sin\,15=0 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем:

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{6}{37} \\ C_2=\dfrac{(6\,cos\,15-sin\,15)e^5-6\,cos\,15}{37\,sin\,15} \end{cases}.$$

Вычисляя с точностью до двух знаков после запятой, получаем

$$\begin{cases} C_1\approx 0{,}16 \\ C_2\approx -31{,}94 \end{cases}.$$

Окончательно,

$$y(t)\approx e^{-t}(0{,}16\,cos\,3t-31{,}94\,sin\,3t)-0{,}16\,cos\,3t+0{,}03\,sin\,3t$$

искомое отклонение в любой момент времени *t*.

Ответ: $y(t)\approx e^{-t}(0{,}16\,cos\,3t-31{,}94\,sin\,3t)-0{,}16\,cos\,3t+0{,}03\,sin\,3t$.

4. Другие примеры практико-ориентированных дифференциальных уравнений

Задача 1. *Пусть движение материальной точки на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 5x + 2y \end{cases}.$$

Здесь t-время, (x(t); y(t)) – координаты точки в момент t, $(x'(t); y'(t))$ *– скорость точки в момент t. Найти закон движения { x(t) и y(t)}.*

Решение. Имеем систему линейных однородных уравнений первого порядка. Построим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или

$(4-\lambda)(2-\lambda)+5=0$, так что $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i.$.

Следовательно,

$$y_1 = e^{3t}\cos 2t;\ y_2 = e^{3t}\sin 2t;$$

$$y = e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t).$$

Второе уравнение системы запишем в виде

$$x = \frac{1}{5}(y' - 2y).$$

Теперь

$$y' = 3e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^{3t}(-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t),$$

или

$$y' = e^{3t}((3C_1 + 2C_2)\cos 2t + (3C_2 - 2C_1)\sin 2t).$$

Тогда

$$x = \frac{1}{5}(e^{3t}((3C_1 + 2C_2)\cos 2t + (3C_2 - 2C_1)\sin 2t) - 2e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)),$$

следовательно,

$$x = \frac{1}{5}e^{3t}((C_1 + 2C_2)\cos 2t + (C_2 - 2C_1)\sin 2t).$$

Ответ: $\begin{cases} x = \frac{1}{5}e^{3t}((C_1 + 2C_2)\cos 2t + (C_2 - 2C_1)\sin 2t) \\ y = e^{3t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) \end{cases}$

Задача 2. Построить *математическую модель движения (падения) парашютиста***.** Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения с заданным коэффициентом пропорциональности k; масса парашютиста задана и равна m.

Решение. Установить закон его движения – значит найти функцию $y = y(t)$, выражающую расстояние от начального положения парашютиста до его положения в момент времени t.

Формализуем задачу. Введём в рассмотрение действующую на парашютиста силу тяжести, численно равную mg (где g – ускорение свободного падения), а также противоположно ей направленную силу сопротивления воздуха, численно равную $-kv$, где $v(t)$ – скорость движения, так что $v(t) = \frac{dy}{dt}$. Согласно второму закону Ньютона результирующая этих сил $mg - kv$ есть произведение ma, где a- ускорение движения $a(t) = \frac{dv}{dt}$. Итак, закон движения в дифференциальной форме запишется в виде

$$ma = mg - kv \quad \text{или} \quad my'' = mg - ky'.$$

Представим полученное линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка в стандартной форме

$$y'' + \mu y' = g, \quad \text{где } \mu = \frac{k}{m}.$$

Пусть, для определённости, начальная скорость парашютиста равна нулю; очевидно, при этом, что в момент $t = 0$ и искомое расстояние $y = 0$. Таким образом, заданы начальные условия

$$y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0.$$

Итак, математической моделью процесса движения парашютиста служит задача Коши для линейного дифференциального уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, постоянной правой частью и нулевыми начальными условиями.

Согласно вышеизложенному алгоритму следует записать структуру общего решения $y = y_0 + y_ч$ и перейти к рассмотрению соответствующего однородного уравнения

$$y'' + \mu y' = 0$$

Корнями характеристического уравнения $k^2 + \mu k = 0$ являются действительные и различные числа $k_1 = 0,\ k_2 = -\mu$, так что

$$y_0 = C_1 + C_2 e^{-\mu t}.$$

Теперь найдём частное решение неоднородного уравнения. Поскольку правая часть $g = const$, и среди корней характеристического уравнения содержится число 0, то частное решение имеет вид $y_ч = At$, где A – некоторая постоянная величина. Находя производные $(y_ч)' = A,\ (y_ч)'' = 0$, и подставляя их в уравнение, получаем

$$0 + \mu A = g \text{, откуда } A = \frac{g}{\mu}.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y_ч = \frac{g}{\mu} t$ и общее решение найдено:

$$y = C_1 + C_2 e^{-\mu t} + \frac{g}{\mu} t.$$

Осталось удовлетворить начальным условиям, для чего находим первую производную

$$y' = -\mu C_2 e^{-\mu t} + \frac{g}{\mu}.$$

Подставляя одновременно $t = 0,\ y = 0,\ y' = 0$, получим систему алгебраических уравнений для определения соответствующих начальным условиям значений C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ -\mu C_2 + \dfrac{g}{\mu} = 0 \end{cases}, \quad \text{откуда} \quad C_2 = \frac{g}{\mu^2}, \quad C_1 = -\frac{g}{\mu^2}$$

Теперь получаем закон движения парашютиста

$$y = \frac{g}{\mu^2}(e^{-\mu t} - 1) + \frac{g}{\mu} t.$$

Вспоминая, что $\mu = \dfrac{k}{m}$, приходим к зависимости вида

$$y = \frac{gm^2}{k^2}(e^{-\frac{k}{m}t} - 1) + \frac{gm}{k} t.$$

На этапе интерпретации модели можно, например, в любые заданные моменты времени определить положение парашютиста.

Только что рассмотренная задача может быть поставлена и как краевая, если известна высота H, на которой находился самолёт в момент прыжка парашютиста и момент приземления τ:

$$\begin{cases} y'' + \mu y' = g \\ y(0) = 0 \\ y(\tau) = H \end{cases}.$$

В общее решение

$$y = C_1 + C_2 e^{-\mu t} + \frac{g}{\mu} t$$

теперь следует подставить краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 + C_2 e^{-\mu\tau} + \dfrac{g}{\mu}\tau = H \end{cases}$$

Решая эту систему относительно C_1 и C_2, получаем

$$\begin{cases} C_1 = -C_2, \\ C_2(-1 + e^{-\mu\tau}) + \dfrac{g}{\mu}\tau = H \end{cases},$$

откуда

$$C_1 = -\frac{H - g\tau\mu^{-1}}{e^{-\mu\tau} - 1}, \quad C_2 = \frac{H - g\tau\mu^{-1}}{e^{-\mu\tau} - 1}.$$

Теперь мы можем записать закон движения парашютиста

$$y = \frac{H - g\tau\mu^{-1}}{e^{-\mu\tau} - 1}(e^{-\mu t} - 1) + \frac{g}{\mu}t,$$

в котором $\mu = \dfrac{k}{m}$.

Задача 3. Построить, используя метод Эйлера, приближенное решение задачи Коши в точке $x_1 = 0.5$ для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} y' = \cos(xy) + y/5 \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Отрезок $[x_0; x_1]$ разбить на $n_1 = 5$ равных частей. Вычисления проводить с точностью до 0.001.

Решение. Имеем $x_0 = 0,\quad x_k = 0.5,\quad n = 5$, шаг разбиения, очевидно, $h = 0{,}1$. Согласно начальному условию $y_0 = 1,$ и $f(x, y) = \cos(xy) + y/5$. Теперь находим значения приближенного решения в узлах:

1) $x_1 = x_0 + h = 0.1;\ y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \cdot (\cos(0 \cdot 1) + 1/5) = 1.12;$

2) $x_2 = x_1 + h = 0.2;\ y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.12 + 0.1 \cdot (\cos(0.1 \cdot 1.12) + 1/1.12) = 1.242;$

3) $x_3 = x_2 + h = 0.3;\ y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.242 + 0.1 \cdot (\cos(0.2 \cdot 1.242) + 1/1.242) = 1.364;$

4) $x_4 = x_3 + h = 0.4;\ y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 1.364 + 0.1 \cdot (\cos(0.3 \cdot 1.364) + 1/1.364) = 1.483;$

5) $x_5 = x_4 + h = 0.5;\ y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 1.483 + 0.1 \cdot (\cos(0.4 \cdot 1.483) + 1/1.483) = 1.595;$

Следовательно, приближенное решение найдено: $y_5(x_k) = 1.595$.

Основные выводы по материалам главы 4

Дифференциальные уравнения служат мощным методом математического моделирования. Часто закономерности протекания различных процессов могут быть формализованы в форме дифференциальных уравнений. Именно так происходит при изучении механики сплошной среды, химических реакций, колебательных и теплофизических процессов, электрических и магнитных явлений и др. В этой связи сформулированы цели и задачи изучения модуля "Дифференциальные уравнения" и представлен общирный практико-ориентированный задачный материал.

Литература к главе 4

1.Бермант А. Ф., Арамонович И. Г. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1967. 736 с.

2.Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969. 640 с.

3.Нахман А. Д. Дифференциальные уравнения. Тамбов.: Тамб. гос. техн. ун-т, 1999. 96 с.

4.Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. М.: Наука, 1978. Т. 1: 456 с., Т. 2: 576 с.

5.Нахман А.Д., Плотникова С.В. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и их приложениям. Тамбов: изд-во ТГТУ, 2005 г. 96 с.

6. Нахман А.Д. Концепция математического моделирования в содержании математического образования: монография – Тамбов, ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2015. – 138 с.

Заключение

В настоящей работе изучаются проблемы формирования практико - и профессионально-ориентированных умений средствами предметной области «Математика» у учащихся общеобразовательной школы и студентов бакалаврских направлений подготовки. Проанализированы требования ФГОС и Концепции развития российского математического образования к приобретению учащимися первичных навыков математического моделирования. Приведен соответствующий понятийно-категорийный аппарат. Четырехэтапный процесс математического моделирования адаптирован к учебным задачам. Рассмотрены различные подходы к понятию образовательных компетенций и введена в рассмотрение компетенция математического моделирования. Приведена содержательная характеристика (знать/уметь/владеть), уровней и признаков ее проявления. Сформулировано понятие содержательно-методической линии математических моделей и обозначены возможности её реализации средствами соответствующих модулей курса математики.

Оглавление

Введение
Глава 1. ОСНОВНЫЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ В СИСТЕМЕ «ШКОЛА-ВУЗ»
1. Понятийный аппарат
2. Математическое моделирование при решении учебных задач
3. Компетенция математического моделирования
4. Паспорт компетенции математического моделирования
5. Содержательно-методическая линия математических моделей
Основные выводы по материалам главы 1
Литература к главе 1
Глава 2. ЛОГИКО-АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: СОДЕРЖАТЕЛЬНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
1. Цели и задачи
2. Роль логико-алгоритмической культуры в формировании системы общекультурных компетенций
3. Требования к содержанию логико-алгоритмической подготовки обучающихся в системе «школа-вуз»
4. Логико-алгоритмическая практика в процессе освоения обучающимися курса математики
5. Логико-алгоритмическое моделирование
Основные выводы по материалам главы 2
Литература к главе 2
Глава 3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННАЯ СТОХАСТИКА В СИСТЕМЕ ДОВУЗОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ
1. Проблемное поле
2. Стохастика: содержательный компонент
3.Технологические приёмы введения стохастических понятий

на этапе довузовской поготовки
4. Задачный материал
Основные выводы по материалам главы 3
Литература к главе 3
Глава 4. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
1. Моделирование средствами дифференциальных уравнений: содержательный аспект
2.Уравнения первого порядка: задачный материал
3.Уравнения высших порядков: задачный материал
5. Другие примеры практико-ориентированных дифференциальных уравнений
Основные выводы по материалам главы 4
Литература к главе 4
Заключение