Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ В СИСТЕМЕ «ШКОЛА-ВУЗ»

Монография

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2021

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» Ю.В.Родионов;

кафедра общеобразовательных дисциплин ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

УДК 372.851

Нахман, А.Д. Формирование математической грамотности обучающихся в системе «Школа-вуз»: монография /А.Д.Нахман // «Инновации в образовании». Специальный выпуск. – Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2021. – 80 с.

Анализируется понятие математической грамотности обучающихся. Установлено соответствие между индикаторами достижения математической грамотности и этапами процесса математического моделирования. Предлагаются конкретные рекомендации к формированию математической грамотности. Исследуются смежные вопросы (математический инструментарий реализации компетентностной парадигмы и др.). Работа может быть полезна специалистам в области образовательной инноватики, студентам вузов, преподавателям математики.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа подготовлена по результатам исследований автора, опубликованных в последние годы. Вопросы формирования математической грамотности обучающихся выходят на первый план в условиях перехода от знаниевой к компетеностой парадигме обучения. Суть последней состоит в формировании и развитии способностей не только ориентироваться в теоретических вопросах курса математики и решать специально подобранные учебные задачи, но и применять полученные знания и умения на практике. Практическая ориентация курса математики способствует усилению мотивации математической деятельности, осознанию её прикладного потенциала.

Математическая грамотность являлась и является предметом изучения многих авторов. В настоящем исследовании мы уточняем соответствующее понятие, выявляем индикаторы математической грамотности, предлагаем математический инструментарий реализации компетентностной парадигмы, изучаем роль межпредметного вхаимодействия на примере школ базовой инновационно-технологической подготовки. Утверждается, в частности, что начальное инженерное обучение базируется на технологии межпредметного взаимодействия. В качестве инструмента интеграции предметов естественно-математического цикла рассматривается математическое моделирование. Предложена поэтапная реализация принципа моделирования: на уровне начальной, предпрофильной и профильной подготовки. Приведены возможные темы проектов межпредметного характера.

В последнее время актуальными становятся исследования, посвящённые цифровой трансформации образовательной среды

Мы утверждаем, что цифровая компетенция, понимаемая в широком смысле, включает в себя способности к математическому моделированию и алгоритмизации процессов решения задач. Выявлены цифровые составляющие этапов математического моделирования. Предложен структурносодержательный компонент компетентностно-ориентированных цифровых образовательных ресурсов.

Реализация компетентностного подхода по ряду направлений/специальностей иженерной подготовки предполагает, в соответствии с ФГОС, формирование у выпускников способности «применять математические и естественнонаучные знания, использовать методы математического анализа и моделирования, методы естественных наук при решении задач профессиональной деятельности»; см., напр., компетенцию ОПК -1 в перечне результатов обучения по специальности «08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей». Одним из индикаторов достижения компетенции является умение обрабатывать расчетные и экспериментальные данные вероятностно-статистическими методами. Таким образом, приобретение стохастические знаний и умений является неотъемлемой частью математической подготовки будущих инженеров.

В соответствии с принятой в каждом конкретном вузе основной образовательной программой теория вероятностей и математическая статистика могут изучаться в одном из двух вариантов: отдельным курсом или как один из модулей в составе курса математики. В настоящей статье мы анализируем особенности второго варианта, уточняем возникающие при этом методические задачи и намечаем пути их решения.

Глава 1. ИНДИКАТОРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

1. Понятие математической грамотности

Математические методы решения задач, возникающих во всех сферах деятельности человека, занимают все более прочное место в современной науке и практике. Следовательно, формирование математической грамотности обучающихся - одна из центральных задач, стоящих перед отечественной системой образования.

Результаты многочисленных исследований, и - в первую очередь- международного исследования PISA, свидетельствуют о том, что российские школьники, обладая хорошей теоретической подготовкой, в недостаточной степени способны применить полученные знания на практике. Проблема, таким образом, состоит в необходимости развития общей функциональной грамотности и математической грамотности как важнейшего её компонента [1].

Уточним последнее понятия. Речь идёт об овладении инструментами, позволяющими формулировать, применять и интерпретировать математические факты и методы в процессе решения задач в разнообразных практических контекстах. В частности, достаточный уровень математической грамотности позволяет:

-описывать различные процессы и явления на математическом языке, что необходимо при переходе от содержательных моделей к математическим;

-объяснять обнаруженные закономерности, тенденции и т.п. средствами математической аргументации (математических доказательств);

-интерполировать процессы (выявлять их «промежуточные» состояния, что невозможно сделать, оставаясь в рамках лишь содержательной модели);

- осуществлять экстраполяцию процессов (прогнозировать их состояния за рамками исследуемого временного интервала);

- количественным образом оценивать степень объективной возможности наступления тех или иных событий (вычислять вероятности);

-анализировать статистические распределения, визуализировать их с помощью полигонов и гистограмм, получать точечные и интервальные оценки параметров распределения.

2. Концепция математического моделирования

Одним из основных методологических подходов к исследованию разнообразных реальных процессов является математическое моделирование. Использование математического моделирования в адаптированном к школьному и вузовскому курсу виде служит развитию логического мышления и умений перевести задачу с практическим содержанием на математический язык. Поскольку целью моделирования является получение нового знания (обнаружения новых свойств) путем применения формальных (математических) методов, то в решении практических задач заложен наибольший потенциал для роста мотивации к математической деятельности. Эта мысль неоднократно высказывалась многими ведущими математиками (А.Н.Колмогоров, Б.В. Гнеденко, Н.Я Виленкин и др.; см. статью [2] и библиографию в ней).

Согласно [3], суть математического моделирования состоит в установлении соответствия данному реальному объекту (явлению) некоторого математического конструкта, результат исследования которого позволяет получать необходимые характеристики рассматриваемого объекта. При этом обратное соответствие будет необязательно однозначным; в таком случае результат распространится на группу объектов, а модель приобретает характер универсальности. В частности, довольно часто математическая форма физических законов отражает не одну, а несколько закономерностей. Например, такой конструкт, как линейная зависимость, служит одновременно моделью равномерного движения (путь, скорость, время: $s = vt$), закона Ома (электрическое напряжение, сила тока, сопротивление проводника: $U = IR$) и др.

Если вести речь об оптимальных решениях экономических задач, то интерпретация соответствующей математической модели позволяет определить размер начальных затрат, распределение задействованных ресурсов и т.п., обеспечивающих наибольшую прибыль для данного вида экономической деятельности. Методы оптимизации, в свою очередь, также обладают свойством универсальности. Отметим, что универсальные модели тесно связаны с практико-ориентированными задачами в обобщённом их понимании [4].

Согласно концепции А.А.Ляпунова [5], процесс математического моделирования реализуется следующим поэтапным образом.

1.Прежде всего, строится содержательная модель исследуемого объекта (процесса) в терминах исходной предметной области. В ней концентрируется исходная информация для аналитика, выполняющего формализацию и решение задачи. При построении содержательной модели выделяют основные характеристики, параметры объекта (процесса) и при этом пренебрегают второстепенными факторами. Таким образом, происходит переход к упрощенному, схематическому описанию объекта.

2. Следующий этап – перевод содержательной модели на формальный математический язык, т.е. переход к собственно математической модели.

3. Третий этап состоит в изучении математической модели, т.е. решении полученной математической задачи.

4. Последним является этап интерпретации (истолкования) результата исследования математической модели, следствием чего будет получение новой для исследователя информации о свойствах реального объекта (что, собственно, и является целью моделирования).

Первые два «предматематических» этапа наиболее важны с точки зрения создания модели, адекватной исходному процессу (явлению). Третий этап, собственно математический, определяется характером возникающей математической задачи и имеющимися средствами ее решения. Здесь мы выделяем следующие шаги.

Шаг 3.1. Выбор носителя модели, т.е. той математической теории, на базе которой будет решаться математическая задача.

Шаг 3.2. Выбор метода решения: аналитический (если уровень развития теории позволяет его осуществить), либо численный.

Шаг 3.3. Разработка и реализация алгоритма решения. Например, , в случае декомпозиции периодического процесса в сумму простейших гармоник обращаемся к алгоритму разложения функций в ряд Фурье; при численном решении, например, алгебраических уравнений используем метод (алгоритм) хорд и касательных и др.

Шаг 3.4. Получение результата и (при необходимости) его «цифровая» обработка (числовой ответ, ответ в виде таблицы, графика и т.п.).

3. Декомпозиция индикаторов достижения математической грамотности

Перечислим показатели достаточно высокого уровня математической грамотности обучающегося (достигаемые в процессе математической подготовки) в терминах стандартной триады «знать», «уметь», «владеть»:

- знание (в рамках осваиваемой ООП) основных концепций естествознания, простейших экономических законов, законов общественного развития и др.;
- знание основ алгебры и анализа, тригонометрии, геометрии, позволяющее в значительной степени представлять современную научную картину мира;
-умение определить возможности применения теоретических положений и методов математики для постановки и решения прикладных задач;
-владение математическими приёмами и методами, позволяющими произвести декомпозицию нестандартной задачи в систему стандартных заданий, решение которых и отвечает целям моделирования;

В следующей таблице представлено соответствие между индикаторами достижения математической грамотности и этапами процесса математического моделирования.

	Индикаторы математической грамотности	*Этапы математического моделирования*
1	Способность распознавать в окружающей действительности проблемы, к решению которых могут быть привлечены средства математики	Постановка задачи математического моделирования
2	Умение переформулировать проблему в математических терминах	Формализация проблемы.
3	Владение понятиями¸ фактами, методами, необходимыми для решения полученной математической задачи	«Внутримодельное» решение (решение математической задачи)
4	Умение проанализировать результаты и сделать необходимые выводы, относящиеся к поставленной проблеме	Интерпретация результатов в терминах исходной предметной области

Обсудим состав (декомпозицию) каждого из индикаторов.

Способность найти связь между практической ситуацией и математическим инструментарием её анализа основана на знании таких математических и «околоматематических» понятий как проценты, масштаб, длина, ширина, кратчайшее расстояние, среднее значение, концентрация, скорость движения, производительность труда и др. Здесь же необходимы представления на интуитивном уровне о понятиях «площадь», «объём» и об их свойствах (неотрицательность, аддитивность).

Возможность формализации проблемы предполагает, что обучающийся владеет математической символикой, понятиями прямой и обратной пропорциональности, функциональной и многозначной зависимости, умением записать задачу в терминах уравнений, неравенств и др. математических объектов.

Решение получаемой математической задачи возможно, если обучающийся овладел приёмами преобразований, методами вычислений, свойствами геометрических фигур на плоскости и в пространстве и другими средствами арифметики, алгебры, начал анализа и геометрии.

Результат решения задачи выявляет свойства исследуемого объекта и может быть как количественным (число, таблица, график, уравнение, в явной форме описывающее исследуемую зависимость), так и качественным (прогноз точный или наиболее вероятный, рекомендация, предостережение, «границы дозволенного» и т.п.). Продемонстрируем реализацию вышеуказанного соответствия на следующем примере.

Производится вакцинация от гриппа. Вакцинироваться согласились 90% населения региона. Вероятность заболеть гриппом для невакцинированного индивидуума равна 0,7. Вакцина от гриппа гарантированно действует с вероятностью 0,8. Если даже она не подействовала, то вероятность заболеваемости вакцинируемого снижается до 0,5. С какой вероятностью наступит заболевание гриппом у случайно выбранного индивида?

Решение данной задачи, лежит, очевидно, в области анализа стохастических моделей (индикатор 1, этап моделирования 1). Формализация проблемы (этап 2) осуществляется следующим образом (индикатор 2):

-за основное событие A принимается заболевание гриппом;

-вводятся гипотезы H_1 и H_2: данный индивид –реципиент (получатель вакцины) или не является таковым;

-вводятся субгипотезы H_{11} и H_{12}: вакцина подействовала или не подействовала.

Ищется вероятность события в условиях неопределённости наступления той или иной гипотезы (индикатор 3, этап 3).

На следующем (третьем) этапе моделирования необходима мобилизация вероятностных знаний и умений для решения поставленной задачи. Средством решения является так называемая формула полной вероятности.

В качестве интерпретации результата решения (индикатор 4, этап 4) является количественная («цифровая») характеристика вероятности заболевания и практический вывод о целесообразности вакцинирования.

4. Некоторые рекомендации по формированию математической грамотности обучающихся

На основе анализа результатов мониторинговых исследований в области формирования математической грамотности обучающихся в Тамбовском регионе мы предлагаем следующий ряд практических рекомендаций.

Учителям математики, работающим по программам начального, основного общего и среднего общего образования необходимо:

- формировать готовность к взаимодействию с математической стороной окружающего мира посредством погружения в реальные ситуации (отдельные задания; цепочки заданий, объединенных ситуацией, проектные работы);
- предлагать на каждом этапе решения заданий осуществлять соответствующую математическую аргументацию;
- стимулировать развитие коммуникативных математических умений, которые включают выражение в письменной или устной форме своих мыслей, связанных с математическим содержанием;

Необходимо отдельное внимание уделить:

-отработке навыков преобразования содержательных моделей в математические (система вопросов: «что дано?», «что требуется определить?», какими математическими действиями будет сопровождаться решение?»),

- составлению планов решения;
- формированию рефлексивного компонента математической деятельности («прикидка», оценивание результата, его соответствие естественным ограничениям, его правдоподобие);

-систематическому повторению основных соотношений и фактов, реализуемых при решении практико - ориентированных задач;

-задачам с наиболее часто встречающимися на практике сюжетами (покупки, кэшбэки, прибыли от продаж, расчёт количества закупаемых материалов для ремонтно-строительных работ, проценты по банковским вкладам, уплата кредитов, экономное расходование материалов и ресурсов и проч.).

Рекомендуется регулярное обращение к практико-ориентированным заданиям на уроках математики, используя их как проблемный элемент в начале урока, как модель реальной жизненной ситуации, как задание, устанавливающее межпредметные связи в процессе обучения.

Формирование математической грамотности, таким образом, - это непрерывная деятельность, предполагающая системный подход и использование (в качестве базовой) технологии математического моделирования.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 1

1.Образовательная система «Школа 2100». Педагогика здравого смысла: сборник материалов / Под ред. А. А. Леонтьева. - М.: Баласс. - 2003. -С. 35.

2. Тестов, В.А. Обучение на социокультурном опыте как средство повышения мотивации к изучению математики /В.А.Тестов //Научно-методический электронный журнал «Концепт». - 2016. - № 1 (январь). – С. 6–10.

3. Советов, Б. Я. Моделирование систем /Б.Я.Советов, С.А. Яковлев. - М.: Высш. шк.- 2001. – 343с.

4.Нахман, А.Д. Практико-ориентированные математические задачи/ Нахман А.Д.// Вопросы педагогики.-2020.-№11-1. - С.178-181.

5. Федотов, А.М. А.А.Ляпунов и математическая биология: в кн. «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения»/ А.М.Федотов. - Новосибирск: Академическое изд-во «Гео».- 2011. –587 с.

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ РЕАЛИЗАЦИИ КОМПЕТЕНТНОСТНОЙ ПАРАДИГМЫ

1. Триада «знать-уметь-владеть» в реализации компетентностной парадигмы

Компетентностная образовательная парадигма [1] всё более утверждается в отечественной системе высшего образования. Причины этого достаточно очевидны: бурный рост научно-технической информации по каждому направлению профессиональной подготовки вступает в противоречие с возможностями обучающихся освоить такую информацию. И хотя «дерево» компетентностной парадигмы уходит корнями в когнитивно-информационную (знаниевую) парадигму, востребуемые результаты образования – это, прежде всего, инструменты деятельности, инструменты получения и применения новых знаний.

Сказанное относится и к такой фундаментальной учебной дисциплине, как математика. Традиционно, математика рассматривалась в первую очередь как теоретическая дисциплина. С развитием науки и техники всё большее значение приобретают возможности математики как средства моделирования процессов и явлений. Наконец, в последние годы возросло внимание и к её культурологической функции: математика развивает логическое мышление, приучает к доказательности выдвигаемых положений, формирует дедуктивные и индуктивные приёмы мышления, способствует развитию кругозора - так что в итоге обучающийся приобретает опыт освоения научной картины мира [2]. Следовательно, можно говорить о значительном вкладе математики в формирование общекультурных компетенций.

Индикаторы достижения каждой компетенции определяются триадой «знать, уметь, владеть». Так, например, подготовка по направлению 11.03.01 «Радиотехника» предполагает освоение общепрофессиональной компетенции

(ОПК-1) «Способность использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности» [3]. Индикаторы её достижения (ИД) предполагают:

- знание фундаментальных законов природы и основных физических и математических законов;

-умение применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера;

-владение навыками использования соответствующих знаний и умений при решении практических задач.

Именно индикатор «владеть», по нашему мнению, является определяющим в различии знаниевой и компетентностной парадигм. Таким образом, в компетентностной парадигме на первый план выходит операциональная функция дисциплины «Математика», выступающая в системном взаимодействии со знаниями, умениями, навыками и опытом деятельности, приобретаемыми в ходе освоения смежных дисциплин.

В свою очередь, овладение математическими инструментами деятельности, формируется в процессе решения практико-ориентированных задач. Речь идёт об общих методах и алгоритмах, ориентированных на группу практических и прикладных заданий определённого класса. Согласно концепции, предложенной в [4], эти методы связаны с каким либо математическим понятием или фактом и в каждом случае конкретной задачи подлежат уточнению, детализации, использованию дополнительных условий и т.п. Однако курс математики (как в школе, так и в вузе) не должен превращаться в набор рецептов по решению практических задач. Курс математики должен оставаться теоретическим, сохранять определенный уровень абстрагирования, а задачи практико-ориентированного характера призваны стимулировать введение тех или иных новых понятий, а также иллюстрировать вновь получаемые факты [5].

2. Практико-ориентированные задачи

Практико-ориентированная задача является чисто математической, тогда как формулировка конкретной практической задачи может содержать понятия из смежных предметных областей, избыточные данные и малоценную информацию («шумы»), или, напротив, недостаточный набор данных, дефицит которых должен быть восполнен в результате самостоятельного поиска обучающимся соответствующей информации. В качестве примера рассмотрим следующее задание.

На плане парка указаны места расположения фонарей. Требуется спроектировать прямую дорожку с наилучшей освещенностью.

В решении используется математический инструмент, называемый методом наименьших квадратов, а именно, ищется линейная функция, наилучшим образом описывающая заданную диаграмму рассеяния. В условии задачи недостаёт координат точек (мест расположения фонарей) на плане парка. Ввести соответствующую систему координат и осуществить постановку математической задачи должен сам обучающийся.

Обобщим сказанное. Схема реализации компетентностного подхода средствами решения практико-ориентированных задач может быть представлена следующим образом:

овладение инструментами решения задач данного класса $\rightarrow$

решение практико-ориентированной задачи $\rightarrow$

решение практических задач

Примеры реализации схемы приведены в таблице 1.

Инструмент деятельности	*Практико-ориентированная задача (задачи)*	*Пример практической задачи*
Производная. Исследование функции	Нахождение наибольших и наименьших значений функций	Обеспечение наименьшего количества отходов при вырезании балки из бревна
Симплекс-метод	Наибольшее и наименьшее значения линейной функции в многоугольнике	Нахождение наибольшей прибыли при производстве нескольких видов продукции
Исследования скалярных и векторных плоских и пространственных полей	Нахождение градиента и производных по заданным направлениям	Нахождение скорости и направления наибыстрейшего прогревания пространства в точках заданного температурного поля
Понятие и методы вычисления определённого интеграла	Построение общей схемы применения определённого интеграла	Нахождение массы плоской пластины, тела вращения и др.
Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка	Моделирование процессов показательного роста и выравнивания	Модель рынка с постоянными ценами

Таблица 1. Примеры практико-ориентированных задач

Поскольку практико-ориентированная задача ставится и решается в достаточно общем виде, то используемые шаги решения в совокупности представляют собою алгоритм, требующий строгой аргументации. Важной характеристикой такого алгоритма является свойство его массовости, то есть возможность применения к достаточно широкому кругу задач. Опираясь на полученное решение практико-ориентированной задачи, обучающийся уже не обязан приводить обосновательный компонент решения; необходимо лишь «протестировать» практическую (прикладную) задачу на предмет применимости соответствующего алгоритма.

Остановимся, для примера, на случае такого инструмента деятельности, как решение дифференциальных уравнений первого порядка. В качестве практико - ориентированной рассмотрим задачу моделирования процессов выравнивания. А именно, речь идёт о процессе $y = y(t)$, скорость которого $y'(t)$ пропорциональна разности между значением $y(t)$ величины и некоторым стандартным постоянным значением a. В общем случае, при заданных начальном значении y_0 величины y и коэффициенте пропорциональности $k > 0$ имеем задачу Коши

$$y' = -k \cdot (y - a), \ \ y(0) = y_0.$$

Реализуя алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, получаем

$$y = a + (y_0 - a)e^{-kt}.$$

Перейдём теперь к практической задаче нахождения зависимости $T = T(t)$ температуры T остывающего тела от времени t течения процесса; при этом считаем, что скорость остывания пропорциональна разности между температурой тела и температурой T_1 окружающей среды, а начальная температура T_0 тела задана. Очевидно, что математическая модель процесса остывания есть задача Коши

$$T' = -k(T - T_1), \ \ T(0) = T_0 \quad (k = const > 0);$$

приходим, таким образом, к случаю процесса выравнивания. Используя общий результат решения, получаем зависимость

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}.$$

Отметим дополнительную информацию, получаемую при интерпретации модели: с течением времени происходит выравнивание температуры; она приближается к значению T_1 температуры окружающей среды.

Таким образом, включение в образовательный процесс системы практико-ориентированных задач способствует реализации дедуктивного принципа «от общего- к частному», снабжает обучающегося общими инструментами решения практических (прикладных) задач и тем самым отвечает целям и задачам компетентностного подхода.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 2

1.Лебедев, О.Е. Компетентностный подход в образовании / О.Е. Лебедев // Школьные технологии. - 2004. - №5.- С. 3-12.

2. Перминов, Е. А. Культурологический подход как методологическая основа математического просвещения /Е.А.Перминов //Образование и наука. -2017.- Т.19. - №10.- С.9 -11.

3. Федеральные государственные образовательные стандарты. – Текст : электронный // Национальная ассоциация развития образования и науки. – URL: https://fgos.ru/ (дата обращения: 27.02.2021).

4. Нахман, А.Д. Практико-ориентированные математические задачи /А.Д.Нахман//. Вопросы педагогики. -2020.- № 11-1. –С. 178-181.

5. Нахман, А.Д. Формирование практико-ориентированных умений средствами математики: монография /А.Д.Нахман.- Saarbrucken: Lambert Academic Publishing. - 2016. - 130 с.

Глава 3. МЕЖПРЕДМЕТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В РАМКАХ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛ БАЗОВОЙ ИННОВАЦИОННО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ

1. Межпредметное взаимодействие: общие положения

Привлечения молодежи в сферу науки и высоких технологий в настоящее время является одной из ключевых задач как профессионального, так и общего образования. В условиях обновления содержания образования начальная инженерная подготовка должна занять одно из центральных мест и стать профориентационно-значимым элементом [1].

Концептуальным подходом к решению данной проблемы служит проектирование школ нового типа – инновационных школ базовой инженерно-технологической подготовки. Актуальность их создания продиктована потребностью формирования целостной системы подготовки обучающихся к осознанному выбору профессии инженера, а соответствующая концепция школы созвучна ключевым направлениям реализации национального проекта «Образование». Основные образовательные программы (ООП) и программы дополнительного образования должны быть разработаны в рамках Федеральных образовательных стандартов (ФГОС) нового поколения, но дополнены элементами общеинженерной подготовки, адаптированными к уровням образования. Так, например, элементы общей политехнической подготовки в начальной школе внедряются как в рамках учебной работы на уроках технологии, информатики и математики, так и во внеурочной деятельности (кружки, викторины, олимпиады, промышленный туризм и др.).

Предпрофильный уровень (уровень основной школы) предполагает освоение соответствующих знаний и умений в рамках учебных дисциплин «Физика», «Информатика», «Математика», «Технология», а также в ходе работы факультативов технического направления; предполагается организация профессиональных проб, кружков и конкурсов технического творчества и др.

Наконец, в старшей школе осуществляется профильная подготовка, компонентами которой являются:

- спецкурсы при сетевом взаимодействии школа – ВУЗ (СУЗ) – предприятие;
- специализация по направлениям: «Электротехника», «Информационная инженерия», «Архитектурное проектирование», «Транспорт» и др.;
- организация практики в лабораториях вузов, на предприятиях;
- разработка совместных проектов с использованием возможностей вузов.

2.Теоретические основы межпредметного взаимодействия

В основу модели деятельности школ инновационно-технологической (начальной инженерной) подготовки положен принцип интеграции. На каждом уровне подготовки предусматривается включение учащихся в инженерное знание и в практико-ориентированную деятельность. Знаниевый компонент технологической культуры формируется от первичных сведений об основах общенаучных и общетехнических знаний (1 - 4 классы) через освоение основ общетехнических знаний (5 - 7 классы) и основ общенаучных знаний (8 - 9 классы) до изучения профильно-предметных основ инженерных знаний (10 - 11 классы).

Теоретической основой организации учебного процесса по блоку общих математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин является технология межпредметного взаимодействия, направленная на формирование у обучающихся единого системного знания по данному блоку дисциплин с активным использованием различных информационных ресурсов и цифровых платформ. Данная технология, в частности, предполагает:

- наличие комплекса задач, отражающих идею математического моделирования различных процессов и систем;

- компьютерную поддержку указанного блока дисциплин, разработку проектов междисциплинарного характера, развитие навыков решения простейших профессиональных задач с использованием современного программного обеспечения, программных сред (электронных таблиц, математических, статистических пакетов и др.);
- согласование рабочих программ по блоку общих математических, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин; разработку дидактической модели координации учебных дисциплин;
- научно-методическое сопровождение процесса обучения, включающее разработку методических рекомендаций, пособий межпредметного содержания и т.п.

3. Математическое моделирование как инструмент реализации технологии межпредметного взаимодействия

Представляется, что основополагающим в технологии межпредметного взаимодействия является принцип математического моделирования [2]. Его реализация должна вводиться поэтапно:

а) на уровне начального образования в виде простейших сюжетных задач; при этом сюжетная задача представлена в виде специального текста, в котором обрисована некая житейская или простейшая производственная ситуация, охарактеризованная численными компонентами (задачи на движение, на проценты, задачи финансовой математики и др.);

б) на уровне основного общего образования – преимущественно, в виде анализа уже данной содержательной модели (возможно, частично формализованной – так называемый «серый ящик»);

в) на уровне общего среднего образования (старшие классы) в виде полной четырёхступенчатой реализации процесса моделирования:

- создание (описание) содержательной модели; выявление основных факторов исследуемого процесса/явления и пренебрежение второстепенными факторами;

- формализация модели (постановка математической задачи);
- решение математической задачи
- интерпретация модели.

Приведём примеры заданий межпредметного цикла, инструментом решения которых служит метод математического моделирования.

1. *Уровень начальной подготовки* (сюжетная задача). Требуется перевезти от песчаного карьера до стройки 32 тонны песка. У транспортного предприятия в наличии грузовики 3-х и 5-тонной вместимости. На сколько больше рейсов будет осуществлено, если перевозить песок 3-х тонными автомобилями в сравнении с пятитонными?

На первом шаге решения осуществляется визуализация содержательной модели (таблица 1):

Виды грузовиков	Общая масса песка	Масса, перевозимая за 1 рейс	Количество рейсов
3-тонные	32 т.	3 т.	?
5-тонные	32 т.	5 т.	?

Таблица 1. Содержательная модель

Решение математической задачи выполняется путём следующих действий:
а) число рейсов 3-х тонных автомобилей равно 32:3=10 (2-в остатке); реально надо выполнить 11 рейсов;
б) число рейсов 5-х тонных автомобилей равно 32:5=6 (2-в остатке); реально надо выполнить 7 рейсов;
в) искомая разность: 11-7=4.

Интерпретация результата: в обоих случаях количество рейсов округляем (с избытком) до целого числа (иначе песок буден перевезён не весь); в последнем рейсе автомобиль окажется недогруженным. В итоге количество рейсов трехтонных автомобилей превышает количество рейсов пятитонных на 4.

2. *Предпрофильная подготовка* (простейшее моделирование). Изготавливается серия приборов, в процессе эксплуатации которых происходит

контролируемое нагревание по закону $T = 1450 + 175t - 12{,}5t^2$, где T-температура T (в кельвинах), а t — время эксплуатации в минутах. Известно, что нагрев прибора свыше 1750 недопустим. Каково наибольшее время непрерывной работы прибора?

Здесь содержательная модель уже дана, и задача частично формализована. Окончательная постановка математической задачи имеет вид: найти решения неравенства $1450 + 175t - 12{,}5t^2 \leq 1750$. Ответом в математической задаче будет промежуток времени $[2; 12]$. На этапе интерпретации решения, принимая во внимание физическую сущность явления, видим, что наибольшее допустимое время $t = 2$ мин., так как дальнейшая эксплуатация прибора приводит к выходу его из строя.

3. *Профильная подготовка* (математическое моделирование – полный цикл). Арка моста имеет форму дуги параболы. Высота арки 2 м, а длина стягивающей ее хорды 24 м. Для придания данной конструкции жёсткости предусмотрено 3 вертикальные стойки, укрепленные в точках хорды и делящих ее на части равной длины. Каковы должны быть высоты стоек?

Содержательная модель требует визуализации: выполнения чертежа дуги параболы, обращённой ветвями вниз с расположением на чертеже трёх вертикальных отрезков.

Формализованная модель имеет вид следующей задачи. Квадратный трёхчлен $y = ax^2 + bx + c$ задан на отрезке $[0;24]$ оси абсцисс. Коэффициенты трёхчлена $y(0) = y(24) = 0, y(12) = 2$. Требуется вычислить значения $y(6)$ и $y(18)$.

Решение задачи сводится к решению системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными. На этапе интерпретации модели делается вывод о точном расположении стоек и их вертикальных размеров.

4. Проектная деятельность

Важным компонентом технологии межпредметного взаимодействия является метод проектов. Метод имеет целью приобретение учащимися новых знаний в тесной связи с реальной инженерной практикой, формирование у них специфических умений и навыков посредством системной организации проблемно-ориентированного учебного поиска. Работа над проектом усиливает мотивацию математической деятельности, формирует умения и навыки общеучебного и коммуникативного характера (навыки поиска и систематизации необходимой информации, умение планировать деятельность, нацеленность на результат, умение презентовать результат и др.).

В рамках рассматриваемой проблемы межпредметного взаимодействия представляются целесообразным следующие темы практико-ориентированных проектов:

- математика и информатика: «Алгоритмически неразрешимые проблемы», «Конструирование словесных алгоритмов решения математических задач»;
- математика и физика: «Математические модели колебательных процессов»; «Комплексные числа и операционное исчисление в задачах электротехники»;
- математика и естественно-научные дисциплины «Математические модели процессов естественного роста»;
- математика и обществознание: «Фиксированные и аннуитентные платежи»; «Задачи линейного программирования»;
- математика и общеинженерные дисциплины: «Прогрессии и конечные суммы в прикладных задачах»; «Транспортная задача».

Выводы

Включение учащихся в практико-ориентированную деятельность и приобретение ими начальных инженерных знаний в значительной степени должны осуществляться с использованием технологии межпредметного взаимодействия. В свою очередь, инструментом интеграции предметов естественно-математического цикла является математическое моделирование. А именно, межпредметное взаимодействие реализуется средствами построения, исследования и интерпретации моделей процессов и явлений, возникающих в реальной жизни, в том числе - простейших производственных процессов.

Системная организация проблемно-ориентированного учебного поиска может быть достигнута путём использованием метода проектов межпредметного характера.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 3

1. Концепция развития инженерного образования на территории Амурской области Электронный ресурс / Электронный фонд правовых и нормативно-технических документов. -2019. - Режим доступа: https://docs.cntd.ru/document/553255509

2. Нахман А.Д. Основные аспекты обучения математическому моделированию в системе «школа-вуз» // Научное обозрение . Педагогические науки .- № 5, 2016.- С.41-57.

Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

1. Цифровые компетенции

Одним из приоритетных направлений современной образовательной политики является цифровая трансформация образовательной среды [1]-[3]. Обязательным условием реализации этого процесса является формирование у всех его участников цифровой компетенции.

В первую очередь, речь идёт об обладании *цифровой грамотностью*, т.е. набором знаний и умений, необходимых для безопасного и эффективного использования цифровых технологий и ресурсов интернета. Далее, необходимо постоянное развитие таких индивидуальных способностей личности, как нацеленность на результат, коммуникативность, рефлексия. Совокупность таких способностей может быть обозначена как *личностная составляющая* цифровой компетенции. Работа в цифровой среде предполагает наличие *цифровой культуры*, т.е. системы ценностей, установок, норм и правил поведения, которую принимает, поддерживает и транслирует команда цифровой трансформации. Наконец, *практическая направленность цифровой деятельности* означает способность использования продуктов этой деятельности для решения практико-ориентированных задач в цифровой среде.

Таким образом*, цифровую компетенцию можно рассматривать как универсальную компетенцию, интегрирующую перечисленные способности и качества личности.*

Цифровая компетенция не существует сама по себе, она всегда «привязана» к той или иной практике. В нашем случае рассматривается учебная математическая деятельность в системе «Школа-вуз». Если обратиться к

Федеральным образовательным стандартам (ФГОС) среднего общего образования [3], то среди результатов обучения математике значатся следующие результаты, непосредственно связанные с цифровой компетенцией:

-сформированность умений математически моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат;

-сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей;

- владение умениями построения вероятностных моделей по условию задачи; исследования случайных величин по их распределению;

-владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

Компетенции, заданные стандартом высшего образования ФГОС ВО 3++(бакалавриат), содержат существенную «цифровую составляющую». Так, например, по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» предписано формирование ряда универсальных (УК) и общепрофессиональных (ОПК) компетенций, среди которых значатся:

УК-1. «Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач»;

ОПК-1. «Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата».

Почему именно математические подходы и методы интегрированы в цифровую деятельность? «В первом приближении» ответ ясен: любая компьютерная программа по большому счёту есть записанная на том или ином языке программирования формула алгебры логики. Есть и более глубокие причины: деятельность в цифровой среде в значительной степени есть работа с *математическими моделями*, а этапы этой деятельности выстраиваются в некоторый алгоритм.

Близкие резоны изложены в [4], где к цифровым компетенциям отнесены:

-алгоритмическое мышление и программирование: от формализованной постановки задач и разработки алгоритма решения до использования современных инструментов программирования;

- анализ данных и методы искусственного интеллекта: от использования математических методов и моделей для извлечения знаний до решения профессиональных задач и разработки новых подходов.

Таким образом, в узком смысле формирование цифровых компетенций в процессе математической деятельности ориентировано на цифровую постановку задачи, её (частичное или полное) решение в цифровой среде, а также цифровую обработку результатов. В широком смысле здесь следует параллельно вести речь также о компетенции математического моделирования и алгоритмизации процесса решения задачи (для чего, в свою очередь, требуются знания и умения в области теории алгоритмов). Обоснуем данный тезис в следующем параграфе.

2. Математическое моделирование: цифровой компонент

Цифровой компонент нередко присутствует на любом из этапов математического моделирования. Так, в процессе построения содержательной модели данный компонент может быть представлен массивом чисел (данные наблюдений), диаграммами, схемами и др. Этап изучения математической модели, т.е. решения математической задачи, характеризуется выбором способа решения – аналитического либо численного. В обоих случаях требуется разработка алгоритма решения, чем, собственно, и представлен здесь цифровой компонент. Так, например, для краевой задачи математической физики соответствующий алгоритм заложен в методе Фурье; при численном решении речь может идти о конструировании блок-схемы.

Этап интерпретации модели снова может содержать цифровой (вычислительный) компонент. Например, вычислительный компонент присутствует в случаях, если требуется определить состояние процесса в моменты времени, промежуточные между теми, в которые это состояние уже было известно (интеполяция) или необходимо прогнозировать ход процесса за рамками данного временного интервала (экстраполяция).

Одна из особенностей математической деятельности в цифровой среде – широкое использование цифровых образовательных ресурсов. В значительной степени этот тезис относится к организации и управлении дистанционным математическим образованием. Так, в Тамбовском государственном техническом университете в настоящее время активно внедряется в образовательный процесс веб-система Moodle (модульная объектно-ориентированная динамическая учебная среда). В настоящее время ведётся содержательное наполнение дистанционного курса высшей математики. Особенностью соответствующего математического материала является его ориентация на методы математического моделирования. Обоснование данного подхода содержится в работе [5]. В составе курса представлены следующие модули:

-элементы математической логики и теории алгоритмов (данный модуль является *интегрированным по отношению к курсам математики и информатики*);

- линейная алгебра и аналитическая геометрия (средства моделирования экономических задач, задач оптимизации);

-дифференциально-интегральное исчисление (задачи геометрии, механики, электростатики, электродинамики, экономики и др.);

-векторный анализ (гидравлика, электродинамика, теплофизика и др.);

- обыкновенные дифференциальные уравнения (задачи сопромата, модели «естественного роста», «процессов выравнивания», рекламы и др.);

-дифференциальные уравнения в частных производных (процессы механических колебаний, теплопроводности, диффузии и др.);

-теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов (прогнозирование событий, статистическая обработка результатов измерений, марковские процессы и др.).

Каждый из перечисленных модулей содержит основы соответствующей математической теории, алгоритмы решении типовых задач, задачи с решениями для активного обучения и контрольный блок в форме тестов. Наряду с традиционными учебными материалами (конспекты лекций, сборники задач и т.п.) использование электронных образовательных ресурсов способствует повышению мотивации к математической деятельности обучающихся и её активизации.

Итак, цифровая трансформация математического образования в значительной степени характеризуется перенесением акцентов с формальной теории и абстрактной постановки задач на методы математического моделирования и алгоритмизации математической деятельности, сопровождаемые широким использованием цифровых технологий и ресурсов.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 4

1.Константинова Д.С., Кудаева М.М. Цифровые компетенции как основа трансформации профессионального образования // Экономика труда. – 2020. – Том 7. – № 11. – С. 1055-1072.

2. Батова М.М. Формирование цифровых компетенций в системе "образование – наука – производство" // Вопросы инновационной экономики. – 2019. – Том 9. – № 4. – С. 1573-1584.

3. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс] - Режим доступа: https://fgos.ru/ (дата обращения: 18.09.2021).

4. Концепция развития цифровых компетенций студентов НИУ ВШЭ [Электронный ресурс]/ Режим доступа: https://www.hse.ru/docs/379771437.html (дата обращения: 18.09.2021)

5. Нахман А.Д. Математическое моделирование как инновационная содержательно-методическая линия в курсе математики // Вестник Тульского ГУ, "Современные образовательные технологии". – Вып.13.– 2014. – С.93-96.

Глава 5. ОСОБЕННОСТИ МОДУЛЯ «ВЕРОЯТНОСТЬ. СТАТИСТИКА» КУРСА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

1. Математическая грамотность в области стохастики

Реализация компетентностного подхода по ряду направлений/специальностей иженерной подготовки предполагает, в соответствии с ФГОС, формирование у выпускников способности «применять математические и естественнонаучные знания, использовать методы математического анализа и моделирования, методы естественных наук при решении задач профессиональной деятельности»; см., напр., компетенцию ОПК -1 в перечне результатов обучения по специальности «08.05.02 – Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей» [1]. Одним из индикаторов достижения компетенции является умение обрабатывать расчетные и экспериментальные данные вероятностно-статистическими методами. Таким образом, приобретение стохастические знаний и умений является неотъемлемой частью математической подготовки будущих инженеров.

В соответствии с принятой в каждом конкретном вузе основной образовательной программой теория вероятностей и математическая статистика могут изучаться в одном из двух вариантов: отдельным курсом или как один из модулей в составе курса математики. В настоящей статье мы анализируем особенности второго варианта, уточняем возникающие при этом методические задачи и намечаем пути их решения.

2.Стохастический модуль: основные задачи

При изучении стохастики, в особенности на её начальном этапе, «на поверхности» оказываются задачи, решаемые в одно или несколько арифметических действий (вычисление классической вероятности, нахождение числовых характеристик эмпирических распределений и др.), что создаёт у студентов впечатление о скудности и примитивности соответствующего математического аппарата и порождает кажущееся противоречие между вероятностно-статистическими инструментами и глубокими, сложными, строго обоснованными методами «основной» математики. Таким образом, порождается проблема обеспечения естественной и логически обоснованной «встроенности» стохастического модуля в общий курс математики. Нам представляется, что в значительной мере её решение может быть достигнуто путём решения следующих задач:

-задача преодоления устоявшейся в среде студентов иллюзии, что теория вероятностей есть некоторая «побочная ветвь» математики, «несерьёзная» математика, имеющая своим предметом моделирование одних лишь игровых ситуаций (монетки, игральные кубики, стрельба по мишени и т.п.);

- задача сохранения стандартной для математического курса схемы изложения: первичные, неопределяемые понятия; задачи, приводящие ко введению нового понятия; определение и простейшие свойства вновь вводимого объекта; теоремы; примеры, в том числе - решение практико-ориентированных заданий;

- задача реализации внутрипредметных (внутриматематических) связей.

Отметим, что круг взаимоотношений стохастики с другими вопросами науки и практики не исчерпывается внутриматематическими связями. Так, например, в статье [2] отмечается, что именно в этой части курса математики студент получает интуитивные и практические представления о таких философских категориях, как случайное, и необходимое, осознаёт, что в природе, обществе, во многих сферах человеческой деятельности кроме привычного принципа детерминизма действует принцип случайности.

Проанализируем каждую из поставленных выше задач.

Иллюзия об обособленности и примитивности вероятностно-статистической теории нередко подпитывается стилем изложения, однообразием и банальностью задачного материала. Зачастую акценты расставлены так, что основное внимание уделяется классической вероятности и заданиям на непосредственное её вычисление с использованием комбинаторных формул. При всей полезности данного материала следует помнить, что комбинаторика - предмет элементарной и (в некоторой степени) дискретной математики, что это всего лишь один из многих инструментов теории вероятностей. Вместе этим студенты должны понимать ограниченность (недостатки) понятия классической вероятности: требование равновозможности исходов и конечности их количества. Проще всего указанная ограниченность и имеющаяся альтернатива демонстрируются на ситуациях, приводящих к понятию геометрической вероятности (см., напр., [3], с. 47-49).

Задачи на вычисление вероятности того или иного события – благодатный материал для осознания студентами концепции математического моделирования. При этом простота сюжета задачи не служит препятствием к такому осознанию: студент должен понимать, что сюжет остаётся за рамками математической модели, а именно – в составе содержательной модели. Математическая же модель использует формализацию сюжета и является автономной математической задачей. Возвращение к сюжету происходит по получении решения задачи – на стадии интерпретации модели. При этом действует принцип множественности содержательных моделей, отвечающих одному (достаточно общему) решению. Примером может служить задача о выборке. А именно, многочисленные сюжеты укладываются в следующую абстрактную схему. Пусть среди N объектов имеется M меченых (например, окрашенных шаров, фальшивых купюр и т.д.; $0 < M < N$). Какова вероятность события A, состоящего в том, что среди извлеченных случайным образом K объектов окажется ровно L меченых ($0 \le L \le M$)? Ответом на вопрос служит результат вычисления

$$P(A) = \frac{C_M^L \cdot C_{N-M}^{K-L}}{C_N^K},$$

где каждое выражение вида C_n^k есть число сочетаний из n по k.

Другой пример множественности моделей связан с так называемой схемой альтернатив, введённой в [4]. Речь идёт об альтернативе «или и A и B, или не A

и *C*». Каждое событие D, укладывающееся в эту схему, может быть представлены в виде суммы двух несовместных произведений $D = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$. Следовательно, соответствующая вероятность вычисляется в виде

$$P(D) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(C).$$

В схему альтернатив включается формула полной вероятности для двух гипотез

$$P(D) = P(A)P_A(D) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(D)$$

и формула вероятности наступления только одного из двух независимых событий *A* и *B*

$$P(D) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B)$$

Таким образом, «модельный» подход демонстрирует прикладную направленность вероятностно-статистических методов и согласуется с алгоритмами решения практико-ориентированных задач в других разделах курса математики.

3. Стохастический модуль: структурные вопросы

Подход к вероятности как некой абстрактной категории вписывается в общую схему построения математических теорий. Событие и вероятность могут считаться первоначальными понятиями, свойства которых заранее постулируются. А именно, вводится понятие алгебры событий, а такие характеристики, как несовместность и полнота группы событий могут быть выражены в терминах операций над событиями. Так, события A и B называют несовместными, если $A \cdot B = \varnothing$, а группу событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называют полной, если $A_1 + A_2 + ... A_n = E$ (символ $\varnothing$ здесь означает невозможное событие, а символ E - достоверное).

Следует обратить внимание студентов на то обстоятельство, что построение алгебры событий вполне аналогично построению алгебры высказываний и «вписывается» в концепцию булевых алгебр ([5], с.14-17, [6]).

Вероятность $P = P(A)$ события A рассматривается как численная мера степени объективной возможности наступления события. А именно, за единицу измерения принимается вероятность достоверного события, а нижней (нулевой) границей соответствующей шкалы служит вероятность невозможного события. Такой, достаточно общий подход, является, по сути, теоретико-множественным (кортежным), см. [7]; с этим подходом студент уже ознакомлен на примерах числовых функций одной и многих переменных, векторной функции скалярного аргумента и др. Задание вероятности есть задание пар $(A; P(A))$, $A \in \Omega$, на декартовом произведении $\Omega \times [0;1]$, где Ω есть алгебра событий.

Студент, владеющий основными понятиями нечёткой логики, легко обнаружит аналогию между такой её категорией, как функция принадлежности, и вероятностью события.

Изложенный подход к понятию вероятности близок к аксиоматическому, однако, система требований на самом деле здесь оказывается избыточной. Непосредственное рассмотрение системы аксиом может быть предложено студентам с достаточно высоким уровнем математической подготовки. А именно, в этом случае понятие вероятности можно задать путём введения следующих постулатов:

1) $P(A) \geq 0$ (неотрицательность) для всякого $A \in \Omega$;

2) $P(E)=1$ (нормированность вероятности);

3) $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)$ для попарно несовместных событий A_1, A_2, ..., A_n (аксиома аддитивности);

4) $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k)$ (расширенная аксиома аддитивности для попарно несовместных событий).

В случае аксиоматического определения вероятности свойство $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, выполненное для всякой пары противоположных событий $A, \overline{A}$, является уже простейшей теоремой; оно вытекает из аксиом нормированности и аддитивности:

$$1 = P(E) = P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) .$$

В частности, $P(\varnothing) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0$.

Другой простейшей теоремой является утверждение $P(A) \le 1$, справедливое для всякого события A. Оно следует из свойства (1) и аксиомы неотрицательности:

$$1 = P(A) + P(\overline{A}) \ge P(A).$$

Продемонстрированные только что общие подходы к понятию вероятности должны быть затем интерпретированы на конкретных моделях. Речь идёт о классической и геометрической вероятностях; студенты должны понимать, что в конкретных случаях постулаты 1)-4) априори могут быть и невыполненными, а поэтому должны быть *проверены*. Так, формулировка утверждения «классическая вероятность суммы попарно несовместных событий равна сумме их вероятностей» должна уступить место формулировке «для классической вероятности аксиома 3) имеет место».

Следует отметить, что модели понятия вероятности различаются не только способом образования алгебры событий (в классическом случае – всевозможные результаты эксперимента, в геометрическом – всевозможные измеримые подмножества данного множества), но и свойствами вероятности. Например, если в классическом случае достоверное событие и только оно имеет вероятность, равную единице, то в геометрическом $P(A) = 1$ возможно не только для достоверного, но некоторых случайных событий A.

Таким образом, аксиоматический подход и обнаружение аналогий с понятиями и операциями математической логики могут рассматриваться как средства решения второй из вышепоставленных задач.

4. Реализация внутрипредметных связей

Обратимся теперь к вопросам реализации внутрипредметных связей. Изучение теории вероятностей и математической статистики опирается на понятия, факты и методы математического анализа: теорию пределов, дифференциальное исчисление, определённые и несобственные интегралы, кратные интегралы, ряды (включая суммирование рядов) и др.

В нижеприведённой таблице 1 представлены некоторые из вероятностно-статистических категорий, соответствующий им опорный материал, а также смежные математические понятия и факты, использующиеся при распространениях и обобщениях.

	Опорный материал	**Вероятностно-статистическая категория**	**Смежные понятия и факты**
1.	Комбинаторные формулы	Схема Бернулли. Биномиальное распределение.	Бином Ньютона. Полиномиальная схема
2.	Замечательные пределы	Формула Пуассона	Предельные теоремы в схеме Бернулли: асимптотика факториалов, формула Стирлинга, «переход» интегральных сумм в интегралы
3.	Степенные ряды	Специальные дискретные распределения	Суммирование рядов
4.	Определённые интегралы. Несобственные интегралы	Непрерывные распределения. Нормальное распределение.	Специальные интегралы. Интеграл Эйлера-Пуассона.
5.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Выборочное уравнение регрессии	Аппроксимативные методы
6.	Степенные моменты	Числовые характеристики теоретических и эмпирических распределений	Метод моментов оценки параметров распределения. Центральная предельная теорема. Восстановление распределений.

Таблица 1. Вероятностно-статистические категории

Остановимся подробнее на вышеуказанных внутрипредметных связях.

1)Одним из способов получения числовых характеристик биномиального распределения является непосредственное суммирование с использованием разложения бинома Ньютона. Так, продемонстрируем, например, получение соответствующей формулы математического ожидания. Если

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

- вероятность Бернулли наступления данного события ровно k раз в n однотипных опытах (p - вероятность наступления события в единичном опыте, $q = 1 - p$, C_n^k - число сочетаний из n по k), то математическое ожидание числа наступления события в n опытах вычисляется в виде

$$a = \sum_{k=1}^{n} kP_n(k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \cdot p \cdot p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{(n-1)-k} = np(p+q)^{n-1} = np \cdot 1 = np \,;$$

на последнем шаге разложение

$\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{(n-1)-k}$ «свёрнуто» по формуле бинома в $(p+q)^{n-1}$.

2) Доказательства формулы Пуассона

$$\lim_{n \to \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \qquad (np = \lambda = const),$$

как известно [3, с.66], опирается на существование второго замечательного предела. При рассмотрении стохастического компонента в общем курсе математики приводят также два других важных факта – локальную и интегральную теоремы Лапласа. Мы считаем полезным, не приводя полного доказательства, указать используемые при этом идеи. В случае локальной теоремы речь идёт об асимптотической формуле Стирлинга для факториалов больших чисел

$$n! e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,(1 + \alpha_n), \text{ где } \alpha_n \to 0 \text{ при } n \to \infty .$$

Доказательство же интегральной теоремы основано на идее преобразования суммы

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{\nu = k_1}^{k_2} P_n(\nu)$$

в интегральную сумму, а затем, путём предельного перехода (при $n \to \infty$), в разность значений интегральной функции Лапласа

$$\Phi(x)=\int_0^x \varphi(t)dt \quad \text{в точках } x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}} \quad \text{и} \quad x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}};$$

здесь $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. При этом значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ (эти значения представлены в таблицах), могут быть приближённо получены с помощью разложений экспоненциальной функции в степенной ряд и (в случае $\Phi(x)$) путём почленного интегрирования ряда. Тем самым устанавливается связь предельных теорем в схеме Бернулли с теорией степенных рядов.

Интегральная функция Лапласа возникает и в других разделах вероятностно-статистической теории, например, в разделе «Нормальное распределение» . В частности, используется равенство $\Phi(\infty)=\frac{1}{2}$, которое есть ничто иное, как значение интеграла Эйлера-Пуассона. В свою очередь, значение этого интеграла может быть получено средствами перехода к полярным координатам в двойном интеграле. Таким образом, устанавливается связь схемы Бернулли с кратными интегралами.

Стоит отметить возможность применения предельных теорем в обосновании закона больших чисел Бернулли в условиях «сжатой реализации» вероятностно-статистического модуля. А именно, если $w_n(A)=\frac{m_A}{n}$ – относительная частота события A в n опытах и $p=p(A)$ – его вероятность, то для любого $\varepsilon>0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m_A}{n}-p(A)\right|<\varepsilon\right)=1.$$

В качестве обоснования этого закона приведём следующие соображения. Поскольку выражение под знаком предела может быть записано в виде

$$P(np-n\varepsilon<m_A<np+n\varepsilon),$$

то оно представимо приближенно разностью значений

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)-\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

и при $n\to\infty$ получаем предел в левой части (1) равным $2\Phi(\infty)=1$, что и утверждалось.

3) При рассмотрении дискретных величин с бесконечным количеством значений активно используются понятия и факты, изученные в теме «Числовые и функциональные ряды». Так, например, нахождение числовых характеристик геометрического распределения связано с суммированием степенных рядов. А именно, речь идёт о случайной величине X, представляющей собой число испытаний, проведенных до первого появления A в схеме Бернулли; $p = p(A),\ q = 1 - p$. Ясно, что ряд распределения X имеет вид

X	1	2	3	…	m	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{m-1}	…

Математическое ожидание есть сумма ряда

$$M(X) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m p_m = \sum_{m=1}^{\infty} mpq^{m-1} = p\sum_{m=1}^{\infty} \frac{dq^m}{dq}.$$

Далее,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{dq^m}{dq} = p\frac{d}{dq}\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right),$$

поскольку степенной ряд $\sum_{m=1}^{\infty} q^m$ можно почленно дифференцировать на области сходимости $q \in (0;1).$ Получаем тогда

$$M(X) = p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p\frac{(1-q)+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Подобные связи с теорией рядов возникают и при рассмотрении и других специальных распределениях, например, распределения Пуассона.

4) Рассмотрение непрерывных распределений напрямую связано:

- с определёнными интегралами (вероятность принятия случайной величиной значений в данном интервале);

- несобственными интегралами (свойство нормированности плотности распределения, числовые характеристики);

- с интегралами, обладающими переменным верхним пределом (восстановление функции распределения по плотности распределения);

Наиболее важным из непрерывных распределений является распределение нормальное.

Как отмечалось выше, оно связано со значениями интегральной функции Лапласа и специальным интегралом Эйлера-Пуассона. Так, нахождение числовых характеристик нормального распределения может быть предложено студентам в качестве задания для самостоятельного выполнения, поскольку служит полезным упражнением в технике интегрирования (например, интегрировании по частям).

5) В том случае, когда ищется зависимость $y = \phi(x;\alpha,\beta,...)$ (так называемое выборочное уравнение регрессии), «наилучшим образом» описывающую расположение точек $(x_j, y_j),\ j = 1,2,...$ на диаграмме рассеяния, применяют методику минимизации суммы квадратов уклонений

$$\Phi(\alpha,\beta,...) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - \varphi(x_j;\alpha,\beta,...))^2$$

посредством надлежащего выбора параметров $\alpha,\beta,...$. Инструментом такого выбора оказываются необходимые условия экстремума функции $\Phi(\alpha,\beta,...)$, состоящие в том, что все ее частные производные по переменным $\alpha,\beta,...$ должны обратиться в ноль: $\Phi'_\alpha = \Phi'_\beta = ... = 0$

Если числа $\alpha,\beta,...$ определятся однозначным образом, то они и будут искомыми точечными оценками параметров $a,b,...$ в уравнении регрессии. Таким образом, актуализируются знания и умения, приобретённые обучающимися в процессе изучения дифференциального исчисления функций нескольких переменных.

6) Степенные моменты (в интегральной форме) знакомы студенту по механическим приложениям интегралов. Как оказывается, это понятие вновь «всплывает» при рассмотрении числовых характеристик случайных величин. Так, математическое ожидание служит начальным моментом первого порядка, а дисперсия – центральным моментом второго порядка; при этом начальные и центральные моменты непрерывных распределений определяются в виде

$$\nu_l = \int_{-\infty}^{\infty} x^l f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \mu_l = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^l f(x)dx\,,\ l = 1,2,...,$$

соответственно. Формула вычисления дисперсии может быть выражена в терминах моментов следующим образом: $\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2$. Далее, моменты распределений используются в формулировке условия центральной предельной теоремы. Кроме того, следует отметить метод моментов как метод получения точечных оценок параметров эмпирических распределений. Более подробную информацию о выборочных моментах эмпирических распределений студенты могут самостоятельно изучить по источнику [5], с. 169-172.

5. Восстановление непрерывных теоретических распределений

В соответствии с Концепцией развития математического образования в РФ [8] «…образовательные организации высшего образования должны обеспечить передовой уровень фундаментальных и прикладных исследований в области математики и их использование в математическом образовании». С указанным тезисом согласуется «аппроксимативная методика» восстановления непрерывных теоретических распределений, основанная на теоремах сходимости средних разложений Фурье [9] ; для определённости рассматриваем распределения на отрезке [-1;1]. Изложение методики (в упрощенном виде) может быть сведено к следующим положениям.

1.На основе выборочных данных (свидетельствующих о наличии непрерывного теоретического распределения) строится система начальных эмпирических моментов $\{\nu_1, \nu_2, ...\}$.

2.Конструируются агрегаты вида

$$c_0 = \frac{1}{2},\ c_k = 2^{k-1}\nu_k + \sum_{l=0}^{k-1}\beta_l \nu_l,\ k = 1,2,...\,,$$

в которых $\{\beta_k\}$-последовательность коэффициентов разложения

$$\cos n\tau = 2^{n-1}\cos^n \tau + \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k \cos^k \tau,\quad n = 1,2,...;\quad \beta_0 = 1;$$

3. Рассматривается система многочленов Чебышева

$$\{p_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ p_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x),\ n=1,2,...\}$$

4. Инициируется процесс

$$f(x)\sqrt{1-x^2} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k^n c_k p_k(x),$$

в котором λ_k^n - элементы произвольной треугольной матрицы

$$\Lambda=\{\lambda_k^n,\ k=0,1,...;n=0,1,...;\ \lambda_0^n=1;\ \lambda_k^n\to 1\ (n\to\infty)\},$$

удовлетворяющей условию квазивыпуклости; например,

$$\lambda_k^n = 1-\frac{k}{n+1},\ k=0,...,n;\ \lambda_k^n=0 \text{ при } k>n$$

(см. [10], с.594).

Полученная таким образом функция $f(x)$ аппроксимирует искомую плотность теоретического распределения, «сглаживая» при этом разрывы первого рода (если они имеются).

Наиболее успешным студентам может быть предложен творческий проект, темой которого является разработка соответствующего вычислительного алгоритма.

Выводы

Изложение модуля «Вероятность и статистика» в составе курса математики (в сравнении с «изолированным» курсом стохастики) обладает определённым своеобразием. Прежде всего, здесь должна быть преодолена иллюзия «упрощенности», элементарности положений стохастики. Особое внимание следует уделить практико-ориентированной направленности стохастических знаний и методов, что достигается «модельным» подходом, то есть приведением процесса решений задач в соответствие со стандартными этапами математического моделирования (содержательная модель – формализация – решение математической задачи –интерпретация решения).

Концепция «встроенности» вероятностно- статистического модуля в общий курс математики реализуется как структурными средствами построения математических теорий (первичные понятия, аксиомы, определения, теоремы), так и средствами установления внутрипредметных связей; в последнем случае, по нашему мнению, значительное внимание должно быть уделено моментам распределения. Предложенные подходы способствуют интенсификации изложения и подчеркивают общность и универсальность основных математических идей и приёмов.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 5

1. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс] - Режим доступа: https://fgos.ru/ (дата обращения: 30.08.2020).

2.Аристова, Е.Ю. Методика преподавания курса «Теория вероятностей и математическая статистика в техническом вузе. /Е.Ю.Аристова//Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук.-2015. -№4.-С.64-66.

3.Гутер, Р.С. Основы теории вероятностей /Р.С.Гутер, Б.В.Овчинский – М.: Просвещение.-1967. – 159 с.

4. Нахман, А.Д. Технологические приемы решения вероятностных задач /А.Д.Нахман // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 3. - Режим доступа:: http://science-education.ru/ru/article/view?id=9613 (дата обращения: 30.08.2020).

5. Чистяков, В.П. Курс теории вероятностей /В.П.Чистяков. -М.: Наука, 1987 г. -240 с.

6.Нахман, А.Д, Задачи на вычисление вероятности события /А.Д,Нахман //-Математика в школе. – 2011.- № 1. - С. 34-41.

7. Нахман, А.Д. Инновационные подходы к понятию функции в курсе математики /Нахман А.Д. // Вестник ТулГУ.- 2019.-Вып.18.- С. 167-170.

8. Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс] - Режим доступа : www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения: 30.08.2020).

9. Nakhman, A.D. Semigroups of bounded transforms of weighted Lebesgue spaces /A.D. Nakhman , B.P. Osilenker //International Journal Of Applied And Fundamental Research. – 2016. – № 5 – URL: www.science-sd.com/467-25072 (accessed 30.08.2020)

10. Аткинсон, Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи /Ф.Аткинсон. - М.: Мир, 1968. -750 с.

Глава 6. ФОРМИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ СРЕДСТВАМИ ЗАДАЧНОГО МАТЕРИАЛА

1. Классическая вероятность: типовые задачи

Задача1. Во вновь построенном доме имеется 20 квартир, среди которых 8 расположены на крайних этажах. Квартиры распределяются по жребию. Найти вероятность того, что эти 8 квартир достанутся данным восьми семьям-переселенцам.

Решение. Поскольку всего участников жеребьевки – 20, то элементарные исходы опыта – это упорядоченные выборки из 20 по 20, т.е. перестановки. Количество всевозможных исходов, таким образом есть n=20!

Если событие A состоит в том, что 8 квартир на крайних этажах достанутся восьми семьям-переселенцам, то число благоприятных исходов m_A можно вычислить следующим образом. Среди данных восьми семей возможно 8! способов распределения квартир на крайних этажах, и каждый такой способ сочетается с остальными 12! способами распределения квартир среди остальных 12 участников жеребьевки. Согласно принципу умножения $m_A = 8!\cdot 12!$ Итак,

$$P(A) = \frac{m_A}{m} = \frac{8!12!}{20!} = \frac{1}{125970}.$$

Задача 2. В торговую сеть поступают однотипные товары двух производителей. Первый производитель поставляет 80% стандартных изделий, второй – 60%. Для контроля выбрано случайным образом по одному изделию каждого производителя. Какова вероятность, что

а) оба изделия стандартны;

б) только одно из них стандартно; в) хотя бы одно стандартно.

Решение. а) Обозначим через A событие, состоящее в том, что оба изделия стандартны. Выразим A через события A_1 – изделие первого производителя стандартно и A_2 – изделие второго стандартно. Ясно, что $A = A_1 A_2$, причём события A_1 и A_2 независимы. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}6 = 0{,}48.$$

б) Пусть событие B – ровно одно изделие стандартно; в этом случае $B = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1 A_2$. Поскольку вероятности событий A_1 и A_2 постоянны в условиях проводимого контроля, то A_1 и $\overline{A}_2$,– независимы; точно также независимы $\overline{A}_1$ и A_2, и при этом произведения $A_1\overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 A_2$, очевидно, несовместны. Тогда

$$P(B) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = 0{,}8 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}44.$$

в) C – хотя бы одно изделие стандартно; очевидно, что $C = A_1 + A_2$, причем события A_1 и A_2 – совместны; следовательно

$$P(C) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 0{,}8 + 0{,}6 - 0{,}48 = 0{,}92.$$

Задача 3. По самолету выпущена ракета. Она может быть уничтожена Самолет может уничтожить ее с вероятностью 0,6. Если этого сделать не удается, то ракета поражает самолет с вероятностью 0,8. Какова вероятность поражения самолета ракетой?

Решение. Поражение самолета – сложное событие C, состоящее в совместном наступлении события A – неуничтожении ракеты и события B – поражения в этом случае самолета ракетой. Следовательно, $C=AB$. Теперь

$$P(C) = P(A)P_A(B).$$

Перейдем к нахождению вероятностей. Событие A противоположно событию уничтожения ракеты, следовательно,

$$P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4; \quad \text{при этом} \quad P_A(B) = 0{,}8.$$

Теперь

$$P(C) = 0{,}4 \cdot),8 = 0{,}32$$

Задача 4. 20 % информации поступает с первого сервера, 80 % – со второго. Вероятность поступления фейковой информации для первого сервера равна $P_1 = 0{,}1$; для второго – $P_2 = 0{,}05$.

1) Какова вероятность, что информация с наугад выбранного сервера поступит фейковая?

2) Поступила фейковая информация. Какова вероятность, что её поставил первый сервер?

Р е ш е н и е . Пусть A – событие обнаружения фейка. Возможны гипотезы: H_1 – он поступил с сервера №1, H_2 – с сервера 2. Очевидно, что выполнены условия несовместности и полноты группы H_1 и H_2. Здесь $P(H_1) = 0,2$; $P(H_2) = 0,8$; $P_{H_1}(A) = 0,1$; $P_{H_2}(A) = 0,05$. Тогда:

1)по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0,2 \cdot 0,1 + 0,8 \cdot 0,05 = 0,06;$$

2)по формулам Бейеса для первой из гипотез

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,06} = \frac{1}{3}.$$

Задача 5. Компьютерной диагностике подвергается группа участников диспансеризации, среди которых 10% страдают некоторыми заболеваниями.

В результате диагностики болезнь выявляется с вероятностью 0,95, и с вероятностью, равной 0,03 здоровый участник признается больным. У произвольно выбранного протестированного участника компьютер выявил заболевание. Какова вероятность, что произошла ошибка?

Р е ш е н и е . Пусть событие A состоит в том, что протестированный участник признан больным. Возможны предположения (гипотезы):

H_1 – тестируется участник, страдающий заболеванием;

H_2 – тестируется здоровый участник.

Требуется найти вероятность гипотезы H_2, при условии, что наступило событие A; следовательно применима формула Бейеса

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}.$$

По условию задачи гипотезы имеют вероятности $P(H_1)$= 0,1 и $P(H_2)$= 0,9. Соответствующие условные вероятности события имеют вид

$$P_{H_1}(A) = 0{,}95;\ P_{H_2}(A) = 0{,}03.$$

Вероятность события A находим по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) = 0{,}1 \cdot 0{,}95 + 0{,}9 \cdot 0{,}03 = 0{,}122;$$

теперь

$$P_A(H_2) = \frac{0{,}9 \cdot 0{,}03}{0{,}122} = \frac{27}{122}.$$

Задача 6. На складе вперемешку лежат 50 экземпляров книг, которые являются первыми и вторыми томами сочинений Дж. Р. Р. Толкиена, причём число тех и других больше единицы. Возможно ли при этом условии взять случайным образом пару книг, чтобы с вероятностью, равной $\frac{1}{7}$ это оказался бы двухтомник?

Решение. Пусть первых томов K штук, а вторых L штук. Можно считать, что книги берутся поочерёдно. Вероятность взять сначала первый том, а затем и второй том по формуле вероятности произведения будет $P_1 = \frac{K}{50} \cdot \frac{L}{49}$, вероятность выбора обратном порядке $P_2 = \frac{L}{50} \cdot \frac{K}{49}$. Следовательно, вероятность сформировать двухтомник тем или иным способом по формуле вероятности суммы есть $P_1 + P_2 = 2 \cdot \frac{K \cdot L}{50 \cdot 49}$. По условию задачи получаем систему уравнений в целых числах

$$\begin{cases} \dfrac{KL}{25 \cdot 49} = \dfrac{1}{7} \\ K + L = 50 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} KL = 25 \cdot 7 \\ K + L = 50 \end{cases}.$$

Первому уравнению удовлетворяют следующие пары натуральных чисел, больших единицы: (25;7), (35;5). Однако ни одна из них не удовлетворяет второму уравнению (можно также непосредственно решить систему, чтобы убедиться, что у неё натуральных решений нет).

Ответ: невозможно.

2. Схема Бернулли: типовые задачи

Задача 1. Найти вероятность того, что событие A появится в пяти независимых опытах: а) два раза; б) менее двух раз, если вероятность появления события A в одном опыте $p = 0,4$.

Р е ш е н и е . а) Пусть событие B состоит в появлении A ровно два раза в пяти опытах. Тогда по формуле Бернулли

$$P(B) = P_5(2) = C_5^2 (0,4)^2 \cdot (0,6)^2 = 0,3456.$$

б) Если событие C означает появление A менее двух раз, то есть или ни разу ($k = 0$) или один раз ($k = 1$), то

$$P(C) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^5 + C_5^1 \cdot 0,4 \cdot 0,6^4 =$$
$$= 0,14256 + 0,4752 = 0,61776.$$

Задача 2. Футбольная команда играет с равносильным соперником серию матчей (в случае ничьей назначаются буллиты). Что вероятнее: выиграть два матча из четырех или три из шести?

Р е ш е н и е . Имеем схему Бернулли, в которой вероятность события в единичном опыте (выигрыша в матче) $p = \frac{1}{2}$, $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Сравним $P_4(2)$ и $P_6(3)$. Имеем

$$P_4(2) = C_4^2 (\frac{1}{2})^2 (\frac{1}{2})^2 = \frac{6}{16}, \quad P_6(3) = C_6^3 (\frac{1}{2})^3 (\frac{1}{2})^3 = \frac{5}{16}.$$

Следовательно, вероятность выиграть 2 матча из 4 – выше.

Задача 3. Тест по математике сдают 15 студентов. Вероятность преодолеть пороговое значение для каждого из них 0,9. Найти наивероятнейшее число успешно прошедших тестирование и его вероятность.

Р е ш е н и е. Так как n =15, p = 0,9, то по формуле (10.3) имеем

$$16 \cdot 0,9 - 1 \le m_o \le 16 \cdot 0,9 \quad \text{т.е.} \quad m_o = 14.$$

Теперь

$$P_{15}(14) = C_{15}^{14}(09)^{14}(0,1)^1 \approx 0,343.$$

Задача 4. а) Вероятность того, что на странице рукописи имеется хотя бы одна опечатка, равна 0,2. Найти вероятность того, из 400 страниц книги ровно 104 содержат опечатки.

б) При тех же условиях найти вероятность того, что будет не менее 72 и не более 104 страниц с опечатками.

Решение. а) Можно использовать локальную формулу Лапласа, где $n = 400$, $p = 0,2$, $q = 0,8$; тогда

$$x_{n,k} = \frac{104-80}{8} = 3.$$

Поскольку $\varphi(3) = 0,0044$, то будем иметь

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}}\varphi(3) = \frac{0,0044}{8} = 0,00055.$$

б) Используем интегральную формулу Лапласа, в которой $n = 400$, $p = 0,2$, $q = 0,8$; тогда

$$x_{n,k_1} = \frac{72-80}{8} = -1, \quad x_{n,k_2} = \frac{104-80}{8} = 3.$$

Находим $\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0,3413$, $\Phi(3) = 0,4986$. Следовательно,

$$P_{400}(72 \le k \le 104) = \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) + \Phi(1) = 0,8399.$$

Задача 5. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью p=0,9544 утверждать, что относительная частота выпадения герба отклонилась от 0,5 не более, чем на 0,05?

Решение. Согласно приближенной формуле (11.2) имеем

$$0,9544 = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| < 0,05\right) \approx 2\Phi\left(0,05\sqrt{\frac{n}{0,5(1-0,5)}}\right),$$

где m – число появлений герба при n подбрасываниях монеты. Отсюда

$$0,9544 \approx 2\Phi(0,05\sqrt{4n}) \quad \text{или} \quad \Phi(0,1\sqrt{n}) \approx 0,4772.$$

По таблице значений интегральной функции Лапласа находим значение аргумента интегральной функции Лапласа: $0{,}1\sqrt{n} \approx 2$ откуда $n \approx 400$. Итак, монету надо бросить 400 раз.

Задача 6. Вероятность того, что абонент неправильно наберет телефонный номер, принимается для всех абонентов равной 0,001. Определить вероятность того, что среди 500 произведенных независимо один от другого вызовов, ровно один абонент наберет неправильно телефонный номер.

Решение. Число опытов n = 500 велико, вероятность неверного набора номера в каждом опыте p = 0,001 –мала. Следовательно, применяем формулу Пуассона, в которой $\lambda = np = 0{,}5$. Поскольку $e^{-0{,}5} \approx 0{,}6065$, то

$$P_{500}(1) \approx \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6065}{1!} = 0{,}30325\,.$$

Задача 7. В течение года из аэропорта города N отправляется 1200 авиарейсов. Вероятность задержки каждого вылета по метеоусловиям равна 0,005. Какова вероятность задержки по метеоусловиям в течение года не менее 2 рейсов?

Решение. По условию задачи, вероятность наступления события в единичном опыте (задержки рейса по метеоусловиям) мала: p=0,005, тогда как число опытов (число рейсов) велико: n=1500. Следовательно, в расчетах возможно использование формулы Пуассона. Событие задержки не менее 2 рейсов противоположно событию задержки $k \le 1$ рейсов. Имеем $\lambda = np = 1200 \times 0{,}005 = 6$ и

$$p_{1500}(0 \le k \le 1) = p_{1500}(0) + p_{1500}(1) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} = 7e^{-6},$$

т.е.

$$p_{1500}(k \ge 2) = 1 - 7e^{-6} \approx 0{,}97.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Образуют ли полную группу следующие события: A – два попадания в мишень при двух выстрелах, B – ни одного попадания при тех же двух выстрелах ?

2. Рассматриваются следующие события: A – первое из полученных электронных писем содержит навязчивую рекламу (СПАМ), B – второе письмо содержит СПАМ. Выразить с помощью операций сложения и умножения через события A и B и (или) им противоположные следующие события:

а) событие С – ни одно из писем не содержит СПАМ;

б) хотя бы одно письмо содержит СПАМ;

в) только одно письмо содержит СПАМ.

3. Вероятность дождливой погоды в предстоящий выходной день равна 0,7. Вероятность удачной рыбалки в дождливую погоду равна 0,8, а в ясную погоду – 0,4. Какова вероятность, что в предстоящий выходной рыбалка будет удачной.

4. Заявки работодателей на специалистов инженерных, экономических и юридические направлений поступают на биржу в отношении 6:3:1. Вероятность того, что претендент на вакансию инженера удовлетворит требованиям работодателя равна 0,8, на вакансию экономиста – 0,8, на вакансию юриста – 0,5. Найти вероятность, что

а) случайно выбранный на бирже претендент устроится на работу по своей специальности;

б)вероятность того, что устроившийся на работу специалист – экономист.

5. Имеется 10 двадцатидолларовых купюр, из которых 4 купюры фальшивые. Наугад *поочередно* извлекают две купюры и отыскивают вероятность события A, состоящего в том, что обе эти купюры окажутся фальшивыми. Можно ли применять формулу Бернулли, если а) купюра после извлечения и проверки возвращается в пачку; б)выборка безвозвратная.

Найти $P(A)$ в каждом из случаев а) и б).

6. Вероятность продать по оптимальной цене каждый из пяти пакетов акций в период их падения равна 0,25. Какова вероятность продажи по оптимальной цене большей части пакета?

7. В прямоугольник вписаны две окружности равного радиуса, касающиеся друг друга внешним образом. В прямоугольник случайным образом брошена точка. Какова вероятность, что она не попадет ни в один из кругов?

8. В семье 5 детей; вероятность рождения мальчика в данной местности равна 0,6. Найти вероятности следующих событий:

а) в семье две девочки;

б) в семье не менее двух девочек;

в) в семье мальчиков больше, чем девочек

9. В данной местности левши составляют 5% населения. Какова вероятность, что на факультете, где обучаются 400 человек, окажутся не менее 3 левшей?

10. Студент одинаково плохо подготовился к каждому из трех экзаменов. С какой вероятностью он сдает каждый экзамен, если хотя бы один из них он сдаст с вероятностью 0,578125

11. Каждый из трех независимо работающих сигнализаторов своевременно сообщает о нарушении заданного режима работы реактора с вероятностью, соответственно, $p_1 = 0{,}9$; $p_2 = 0{,}8$; $p_3 = 0{,}75$. Какова вероятность того, что при нарушении заданного режима работы сигнала не поступит?

12. Среди пяти одинаковых по внешнему виду саженцев три – элитных. Наугад взяты два саженца. Какова вероятность, что ровно один из них элитный?

13. Вероятности своевременного поступления платежа на карты, приобретённые в банках А, Б, В равны соответственно $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}6$. На каждую из карт банков А,Б,В перечислены средства. Какова вероятность того, что ровно на две карты перевод поступит своевременно ?

14. Вероятность того, что каждый данный клиент банка потребует в течение календарного года закрытия своего лицевого счета, равна 0,002. Какова вероятность, что среди 1000 клиентов отделения сбербанка трое потребуют в течение года закрытия лицевых счетов?

Ответ записать в виде десятичной дроби приближенно с точностью до 0,01.

15. Сколько следует разместить люменисцентных ламп на потолке офиса, чтобы офис был освещен (хотя бы одной лампой) с вероятностью 0,99968, если вероятность перегорания каждой лампы равна 0,2?

3. Дискретные случайные величины

Пример 1. Ремонтная компания обслуживает два участка водопровода. В силу их изношенности вероятность порыва сети на первом равна 0,3, на втором – 0,2. Составить ряд распределения случайной величины X- числа участков, не требующих ремонта. Найти математическое ожидание и дисперсию величины X.

Решение. Рассматриваемая случайная величина X может принять одно из следующих значений: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ соответственно следующим событиям: имеются порывы на обоих участках, имеется ровно один порыв и порывов на обоих участках не будет. Вероятности нормального функционирования сети на каждом из участков равны соответственно, 0,7 и 0,8. Согласно теореме о вероятности произведения событий

$$P(X=2)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56;\ P(X=0)=(1-0{,}7)(1-0{,}8)=0{,}06.$$

Осталось найти вероятность $P(X=1)$ того, что будет ровно один порыв; здесь можно воспользоваться свойством (1.1) вероятностей в ряде распределения:

$$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=0{,}38.$$

Итак, ряд распределения случайной величины X принимает вид:

x	0	1	2
p	0,6	0,38	0,56

Найдем теперь математическое ожидание и дисперсию случайной величины X. Пользуясь формулами (1.2) и (1.6) , получаем

$$M(X) = 0 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}38 + 2 \cdot 0{,}56 = 1{,}5$$

и

$$D(X) = 0^2 \cdot 0{,}6 + 1^2 \cdot 0{,}38 + 2^2 \cdot 0{,}56 - 1{,}5^2 = 0{,}37 .$$

Пример 2. Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x	x_1	x_2
p	0,3	0,7

Найти значения x_1 и x_2, если известны математическое ожидание $M(X)=$ 2,7 и дисперсия $D(X)= 0{,}21$.

Решение. Согласно данному ряду распределения

$$M(X) = x_1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}7 \quad \text{и} \quad D(X)=x_1^2 \cdot 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}7 - 2{,}7^2.$$

Имеем, следовательно, систему алгебраических уравнений для нахождения x_1 и x_2

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 2{,}7 \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 - 2{,}7^2 = 0{,}21 \end{cases},$$

которую несложно преобразовать к виду

$$\begin{cases} x_1 = 9 - \dfrac{7}{3}x_2 \\ \dfrac{5}{3}x_2^2 - 9x_2 + 12 = 0 \end{cases}.$$

Найдя из последнего квадратного уравнения значения x_2, получаем затем пару решений системы

$$x_1 = 2,\ x_2 = 3 \qquad \text{и} \qquad x_1 = \frac{17}{5},\ x_2 = \frac{12}{5}.$$

Поскольку в ряде распределения значения ДСВ расположены в порядке возрастания, то $x_1 < x_2$. Следовательно, $x_1 = 2,\ x_2 = 3$.

Пример 3. Случайное событие *A*, имеет вероятность $P(A) = p$.Построить функцию распределения индикатора η наступления события и найти его числовые характеристики $M(\eta)$ и $D(\eta)$.

Решение. Индикатор определён как дискретная случайная величина с рядом распределения

η	0	1
p	q	p

где $q = 1 - p$.

Имеем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ q, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию:

$$M(\eta) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p,\ D(\eta) = 0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot p - p^2 = p(1-p) = pq.$$

Итак, математическое ожидание индикатора события *A* равно его вероятности p, а дисперсия – произведению pq.

4. Непрерывные случайные величины

Пример 1. Плотность распределения некоторой непрерывной случайной величины *X* имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ c \cdot x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases},$$

где c – постоянная величина. Найти значение c, функцию распределения $F(x)$ и вероятность $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$.

Решение. Согласно свойству нормированности имеем

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{1} c \cdot x \cdot dx + \int_{0}^{+\infty} 0 \cdot dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} \cdot c \cdot x^2 \Big|_0^1 + 0 = \frac{1}{2} \cdot c,$$

откуда $c = 2$. Теперь

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}.$$

Найдем $F(x)$; рассмотрим при этом все возможные здесь случаи: $x \le 0$, $0 < x < 1$, $x \ge 1$. Имеем

1) при $x \le 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0;$$

2)при $0 < x < 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{-\infty}^{x} 2x \cdot dx = x^2;$$

3) при $x \ge 1$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{-\infty}^{1} 2x \cdot dx + \ \ + \int_{1}^{x} 0 \cdot dx = 1.$$

Таким образом (см. рис.),

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}.$$

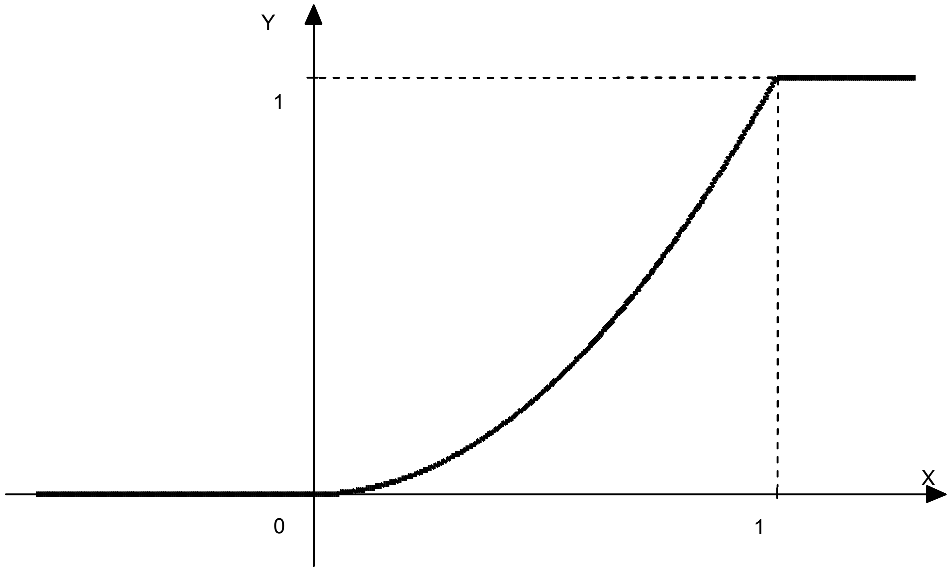

Рис. Функция распределения

Для нахождения вероятности $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2})$ заметим, что $\frac{3}{2} \in [1, +\infty)$, $\frac{1}{2} \in [0,1)$. Тогда в соответствии с найденным видом $F(x)$, будем иметь

$$P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}.$$

5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Пример. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ 1 - x^2, & -1 < x \le 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения $f\ (x)$, математическое ожидание $M(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Решение. Плотность распределения найдём в соответствии с её определением как производную от $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1; \\ -2x, & -1 < x \le 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Полезно построить графики $y = F(x)$ и $y = f(x)$, см. рис.:

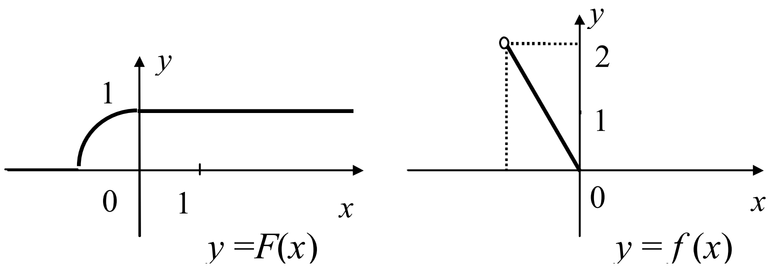

Рис. Графики функции и плотности распределения

Далее, будем иметь

$$M(X) = \int_{-1}^{0} x(-2x)dx = -\frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{0} = -\frac{2}{3};$$

$$D(X) = \int_{-1}^{0} x^2(-2x)dx - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{2}{4}x^4\Big|_{-1}^{0} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

6. Специальные виды дискретных распределений

Равномерное распределение ДСВ. Выше была введена равномерно распределённая дискретная случайная величина *X*. Её числовые характеристики имеют вид:

$$M(X) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}, \quad D(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

Итак, математическое ожидание равномерно распределенной величины равно в точности среднему арифметическому всех значений случайной величины (этот факт уже отмечался), а дисперсия равна среднему квадратов значений величины минус квадрат ее среднего значения.

Гипергеометрическое распределение ДСВ. Рассмотрим задачу о выборке . Из N объектов, среди которых M меченых ($1 \le M \le N-1$), случайным образом извлекается k объектов ($1 \le k \le N-1$). В качестве случайной величины X рассмотрим число меченых объектов в извлеченной выборке. Ее значения $l \in \{0,1,...,\min(k,M)\}$. Как показано выше

$$P(X=l) = \frac{C_M^l \cdot C_{N-M}^{k-l}}{C_N^k}.$$

Говорят в этом случае , что дискретная случайная величина X распределена *гипергеометрическим* образом. Можно доказать, что

$$M(X) = \frac{kM}{N},\ D(X) = \frac{kM}{N-1}(1-\frac{M}{N})(1-\frac{k}{N}).$$

Биномиальное распределение. Пусть дискретная случайная величина X принимает значения, равные количеству появлений события A в n испытаниях, при условии, что в каждом опыте вероятность p=P(A) одна и та же; $q = 1-p$ (схема Бернулли). Ее закон распределения называется *биномиальным*. В первой строке ряда распределения величины X будут записаны возможные значения $X=0,\ X=1,...,X=n$, во второй строке – соответствующие вероятности Бернулли:

X	0	1	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Название распределения объясняется тем, что сумма всех вероятностей представляет собой сумму членов разложения бинома Ньютона

$$(p+q)^n = 1.$$

Биномиальный закон распределения широко используется при статистическом контроле качества продукции, при описании функционирования систем массового обслуживания, в теории стрельбы и т.д.

Числовые характеристики биномиальной случайной величины X имеют вид: $M(X) = np$, $D(X) = npq$.

Установим, например, первое из соотношений. В соответствии с рядом распределения будем иметь

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}.$$

Заметим, что суммирование фактически производится по k=1,..., n , так как при k=0, слагаемое обращается в ноль. Преобразуем полученную сумму следующим образом:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \cdot p \cdot p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)}$$

(общий множитель np вынесен за знак суммы). Перенумеровав члены (то есть заменив индекс суммирования $k-1$ на k), получаем

$$M(X) = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k} p^k q^{(n-1)-k} =$$

$$= np(p+q)^{n-1} = np \cdot 1 = np,$$

что и утверждалось.

Следующие два распределения относятся к случаю дискретных случайных величин с бесконечным перечнем значений.

Распределение Пуассона. Говорят, что дискретная случайная величина X распределена *по закону Пуассона* с параметром λ, если она принимает значения $\{0,1,2,..., m,...\}$ с вероятностями

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \qquad (m = 0,1,2,...).$$

Закон Пуассона можно понимать как «предельный случай» биномиального закона, в котором $n \to \infty$ и $\lambda = np = const$. Запишем ряд распределения:

X	0	1	2	…	m	…
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\dfrac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$	…	$\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	…

Корректность рассмотрения «предельного» ряда будет подтверждена, если мы установим что сумма всех вероятностей остается равной единице. Итак, вычислим сумму ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \quad .$$

Использовав разложение экспоненты e^{λ} по степеням λ (ряд Маклорена)

$$e^{\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \quad ,$$

получаем сумму в виде

$$e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1,$$

что и требовалось установить.

Как оказывается, математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают между собою и и равны параметру λ этого распределения:

$$M(X) = \lambda, \;\; D(X) = \lambda .$$

Так, например,

$$M(X) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Геометрическое распределение. Пусть снова имеется схема Бернулли, в которой вероятность $p = p(A), \; 0 < p < 1$ события A остаётся неизменной и $q = 1 - p$. Но теперь речь пойдёт о случайной величине X, представляющей собой число испытаний, проведенных до первого появления A. Обозначим через p_m вероятность наступления события A в m-ом опыте, тогда как в первых m–1 испытаниях A не произошло:

$$p_1 = p \quad \text{(событие } A \text{ наступило уже в первом опыте);}$$

$$p_2 = p(\bar{A} \cdot A) = qp \quad \text{(событие } A \text{ не наступило в первом опыте,}$$

но наступило во втором);

…

$$p_m = p(X = m) = p(\bar{A} \cdot \bar{A} \ldots \cdot \bar{A} \cdot A) = q^{m-1} p \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, получаем ряд *геометрического* распределения

X	1	2	3	...	m	...
P	p	pq	pq^2	...	pq^{m-1}	...

Название объясняется тем, что вероятности p_m образуют бесконечную геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q.

Докажем, что математическое ожидание случайной величины X, есть число, обратное вероятности появления события в одном испытании:

$$M(X) = \frac{1}{p}$$

Имеем

$$M(X) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m p_m = \sum_{m=1}^{\infty} mpq^{m-1} = p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{dq^m}{dq} = p \frac{d}{dq}\left(\sum_{m=1}^{\infty} q^m\right) =$$

$$= p \frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right) = p \frac{(1-q)+q}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p};$$

при вычислении использована возможность почленного дифференцирования степенного ряда с общим членом q^m, $0 < q < 1$. Соотношение доказано.

Можно также доказать, что геометрически распределенная случайная величина X имеет дисперсию

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Пример 1. Компания производит изделия, 4% из которых имеют отклонение от стандарта. Для контроля качества отбирают 200 изделий. Найти ожидаемое количество изделий с отклонениями от стандарта.

Решение. Пусть X – число обнаруженных нестандартных изделий. Величина X распределена, очевидно, биномиальным образом с числом опытов $n = 200$ и вероятностью обнаружения нестандартности вс каждом единичном опыте $p = 0{,}04$. Ожидаемое (среднее) количество нестандартных изделий есть тогда математическое ожидание $M(X)$. В соответствии с числовыми характеристиками биномиального распределения $M(X) = np = 200 \cdot 0{,}04 = 8$.

Заметим, что непосредственное вычисление математического ожидания было бы связано в построением ряда распределения, содержащего 201 значение случайной величины и вычислением 201 вероятности !

Пример 2. Неопытный футболист бьёт три пенальти. Вероятность поражения ворот всякий раз $p = \frac{1}{6}$. Какова вероятность того, что он поразит ворота с третьего раза? Каково среднее число пенальти, которые нужно пробить в этом случае для попадания в ворота?

Решение. Рассмотрим случайную величину X – число выполненных ударов по воротам. Имеем геометрическое распределение с вероятностью $p = \frac{1}{6}$ наступления события в единичном опыте и числом опытов m=3. Согласно результатам, полученным выше

$$p_3 = p(X = 3) = (1 - \frac{1}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{49}{216}.$$

Среднее число ударов по воротам есть математическое ожидание

$$M(X) = \frac{1}{p} = 6.$$

Пример 3. В каршеринговой компании имеются всего два свободных автомобиля. Известно, что ежедневный спрос подчиняется распределению Пуассона и в среднем составляет 1,3 машины в день, при этом, арендатор не отдаёт каких-либо предпочтений ни одной из них. Какова вероятность, что в любой из дней:

1) ни один автомобиль не будет востребован;

2) будут востребованы обе машины.

Решение. По условию задачи, случайная величина X есть число число заказов в день и она распределена по закону Пуассона, при этом количество k заказов может быть, вообще говоря, неограниченным. Вероятность поступления ровно k заказов вычисляется по формуле Пуассона. При этом параметр λ есть математическое ожидание величины X (см. п. 5.4) или ее среднее значение, которое, по условию, равно 1,3. Следовательно,

$$P(X=k)=\frac{1{,}3^k e^{-1{,}3}}{k!},\ k=0{,}1{,}2{,}3{,}...$$

В частности, если не заказан ни один автомобиль, то $X=0$ и

$$P(X=0)=\frac{1{,}3^0 e^{-1{,}3}}{0!}=e^{-1{,}3}\approx 0{,}27\,.$$

Если же, как минимум, на оба автомобиля поступили заказы, то число заказов $X\geq 2$ и

$$P(X\geq 2)=1-P(X<2)=1-(P(X=0)+P(X=1))=$$
$$=1-(\frac{1{,}3^0 e^{-1{,}3}}{0!}+\frac{1{,}3^1 e^{-1{,}3}}{1!})\approx 0{,}37$$

7. Равномерное и показательное распределения непрерывных случайных величин.

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***равномерному закону*** на отрезке $[a,b]$, если ее плотность вероятности постоянна на этом отрезке:

$$f(x)=\begin{cases} \nu, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b], \end{cases} \qquad \nu = const.$$

Из свойства нормированности плотности распределения будет вытекать, что

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0\quad, & x\notin[a,b]. \end{cases}$$

Действительно,

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b \nu\, dx = c(b-a),\ \text{откуда}\ \ \nu=\frac{1}{b-a}.$$

Найдем теперь функцию распределения

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\,.$$

Имеем, очевидно, при $x\le a$ значения $F(x)$=0. При $a<x\le b$ получим:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_a^x\frac{1}{b-a}dt=\frac{x-a}{b-a}.$$

Наконец, при $x>b$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dt+\int_a^b\frac{1}{b-a}dt+\int_a^x 0dt=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0\quad, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b\\ 1, & x>b. \end{cases},$$

Графики функций изображены на рисунке :

а) *б*)

Плотность и функция равномерного распределения.

Докажем, что для равномерно распределенной на отрезке $[a,b]$ случайной величины X

$$M(X)=\frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Имеем

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

Формула для дисперсии доказывается аналогично:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Непрерывная случайная величина X называется распределенной по ***показательному закону*** с параметром $\lambda>0$, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

Эта функция действительно может служить плотностью распределения, т.к. она, очевидно, неотрицательна и для неё выполнено свойство нормированности:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-\lambda x}dx=\lambda\lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\left.e^{-\lambda x}\right|_0^A\right)=$$

$$=(\lim_{A\to\infty}e^{-\lambda A})-(-1)=0+1=1.$$

Найдем функцию показательного распределения $F(x)$. Ясно, что $F(x)=0$ при $x\leq 0$. Если $x>0$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt=0-\frac{\lambda}{\lambda}\left.e^{-\lambda t}\right|_0^x=-(e^{-\lambda x}-e^0)=1-e^{-\lambda x}.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x<0, \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0. \end{cases}$$

Графики плотности и функции показательного распределения представлены на рисунке:

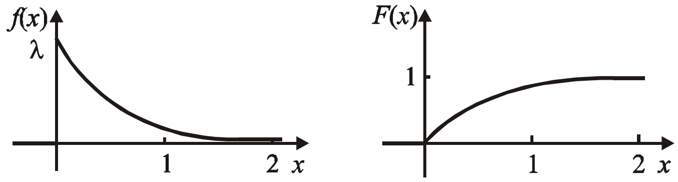

Рис. Плотность и функция показательного распределения.

Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно проверить, что математическое ожидание и дисперсия показательно распределенной случайной величины имеют, соответственно, значения

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \text{ и } D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Найдем, например, математическое ожидание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = -\lim_{A\to\infty}\int_{0}^{A} xde^{-\lambda x} =$$

$$= -\lim_{A\to\infty}\left(xe^{-\lambda x}\Big|_0^A - \int_0^A e^{-\lambda x}dx\right) = -\lim_{A\to\infty}\left(\frac{A}{e^{\lambda A}} - 0 +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^A\right) = -\frac{1}{\lambda}\lim_{A\to\infty}(e^{-\lambda A} - 1) = \frac{1}{\lambda};$$

здесь предел вида

$$\lim_{A\to\infty}\frac{A}{e^{\lambda A}} = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda A}} = 0$$

вычислен по правилу Лопиталя.

Из полученных соотошений следует важное свойство: для случайной величины, распределенной по показательному закону, математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению, т.е.

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Приведём примеры показательного и равномерного распределений.

Пример 1. Установлено, что время работы прибора до первой поломки является случайной величиной *T*, распределенной по показательному закону с параметром λ.

Обозначим через *A* случайное событие, состоящее в том, что прибор будет работать безотказно на интервале $[0,t]$. Вероятность этого события $P(A) = P(T > t) = 1 - P(T \le t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$.

Аналогично, если *C* – случайное событие, заключающееся в безотказной работе прибора на интервале времени $[0, t+\tau]$, то $P(C) = e^{-\lambda(t+\tau)}$.

Далее, пусть *B*– случайное событие, состоящее в том, что прибор будет безотказно работать на интервале времени $[t, t+\tau]$.Из определения случайных событий *A*, *B* и *C* следует, что $C = A \cdot B$. Тогда $P(C) = P(A)P_A(B)$. Найдем теперь $P_A(B)$, то есть условную вероятность того, что прибор будет безотказно работать на интервале $[t, t+\tau]$ при условии, что он уже проработал безотказно на интервале $[0,t]$. Имеем

$$P_A(B) = \frac{P(C)}{P(A)} = \frac{e^{-\lambda(t+\tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda\tau}.$$

Полученное значение вероятности оказалось не зависящем от *t*; следовательно событие *B* не зависит от *A*. Другими словами, вероятность безотказной работы прибора на промежутке времени $[t, t+\tau]$ зависит только от длины этого промежутка τ, и не зависит от того, сколько времени прибор проработал до этого. Подобное явление называют свойством «отсутствием последействия»

Пример 2. Сегмент $[a,b]$ оси OX представляет (моделирует) собою шкалу некоторого прибора, причем вероятность попадания указателя в некоторый отрезок шкалы пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его места на шкале. Проверить, что случайная величина *X* – отметка указателя прибора, распределена по равномерному закону и найти вероятность того, что при испытании указатель остановится на отметке в правой половине шкалы прибора.

Решение. Имеем непрерывную случайную величину *X*, распределенную на отрезке $[a,b]$. По условию, для любых двух точек x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ отрезка $[a,b]$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = k(x_2 - x_1),$$

где k - постоянный коэффициент пропорциональности. В частности, $1 = P(a \le X \le b = k(b-a)$, откуда находим $k = \dfrac{1}{b-a}$. Следовательно,

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \frac{1}{b-a}(x_2 - x_1)$$

Теперь построим функцию распределения $F(x) = P(X < x)$. Поскольку случайная величина X распределена на отрезке $[a,b]$, то

$$F(x) = 0 \qquad \text{при } x \le a$$

и

$$F(x) = P(X < x) = P(X \le b) = 1 \text{ при } \quad x > b.$$

Далее,

$$F(x) = P(X < x) = P(a \le X \le x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad a < x \le b.$$

Полученная $F(x)$ совпала с функцией равномерного распределения (6.2), что и требовалось установить.

Рассмотрим случайное событие A – расположение указателя в правой половине шкалы прибора. Это событие равносильно неравенству $\dfrac{a+b}{2} < X \le b$, так что соответствующая вероятность может быть вычислена в виде

$$P(A) = \frac{1}{b-a}\left(b - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. На химическом производстве в случае превышении предельно допустимой концентрации (ПДК) в воздухе вредных веществ должны сработать три независимо работающих сигнализатора. Вероятность отказа каждого из них в случае превышения ПДК равна 0,2. Составить ряд распределения числа

сигнализаторов, не сработавших в этом случае. Найти вероятность того, что откажет не более одного сигнализатора.

2. Трое баскетболистов на тренировке издалека бросают мяч в корзину. Вероятность успешного броска для первого спортсмена 0,5, для второго и для третьего – по 0,7. Пусть X - число попаданий в корзину, в случае, когда каждый сделал по одному броску. Составить ряд распределения X, найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

3. В пачке из 10 театральных билетов три билета – на премьеру. Наудачу взяты 3 билета. Составить ряд распределения случайной величины X - числа билетов на премьеру среди отобранных. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых билетов окажется на премьеру.

4. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,6. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не попадет в первый раз в мишень. Составить ряд распределения случайной величины X -числа патронов, выданных стрелку.

5. Независимым образом испытывается 3 энергоблока. Вероятность отказа в испытании каждого из них составляет 0,1. Составить ряд распределения случайной величины X –числа отказавших блоков. Найти ее математическое ожидание и дисперсию. Вычислить вероятности событий:

а) $X = 0$; б) $X < 3$.

6. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,5. Найти закон распределения X, зная математическое ожидание $M(X) = 4$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = 2$.

7. Случайная величина X задана на всей числовой оси функцией распределения $F(x) = \frac{2}{\pi} arctg\, x.$ Найти

а) вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в промежутке [-1; 0];

б) плотность распределения $f(x)$.

8. Случайная величина X задана интегральной функцией (функцией распределения)

$$F(x)=\begin{cases}0,\ x\le 0\\ \dfrac{x^2}{18}+\dfrac{x}{6}, 0<x\le 3\\ 1,\ x>3\end{cases}.$$

Найти: а) дифференциальную функцию $f(x)$ (плотность распределения);

б) математическое ожидание;

в) среднее квадратическое отклонение случайной величины X;

г) вероятность попадания значений X в интервал $(-1;1)$.

9. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ v\sqrt{x}, & 0<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Найти значение параметра v, функцию распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

10. Случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma=0{,}4$. Найти вероятность того, что дважды в трех испытаниях отклонение X от ее математического ожидания будет меньше 0,3.

11. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=1{,}5\sin 3x$ в интервале $(0;\pi/3)$ и $f(x)=0$ вне этого интервала. Найти вероятность того, что при трех опытах значение X дважды попадет в интервал $(\pi/6;\ \pi/4)$.

12. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=ax^2+4{,}5x-6 \text{ при } x\in[2;4];\ f(x)=0 \text{ при } x\notin[2;4].$$

Найти а)значение параметра a;

б) математическое ожидание.

13. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x)=\frac{1}{2}x \text{ при } x\in[0;\,c];\, f(x)=0 \text{ при } x\notin[0;c].$$

Найти а)значение параметра c ;

б)вероятность $P(-100 < X < 1)$.

14. Некоторая случайная величина подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием 50 и дисперсией 36. Найти вероятность того, что отдельное значение случайной величины заключено в интервале от 40 до 60. Ответ записать с точностью до 0,1.

15. Дискретная случайная величина X принимает три возможных значения: $x_1 = -2$ с вероятностью $p_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = 1$ с вероятностью $p_2 = \frac{1}{3}$ и некоторое значение x_3 с вероятностью p_3. При этом известно, что математическое ожидание случайной величины $M(X)$ равно 1. Найти дисперсию $D(X)$.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. КОМПЛЕКСНЫЕ ЗАДАНИЯ

1.При формировании кадрового резерва на управленческие должности проводят собеседование с 6 кандидатами. Вероятность того, что каждый данный кандидат удовлетворит требованиям к управленческой должности, равна $\frac{1}{3}$. Какова вероятность, что

а)все кандидаты войдут в кадровый резерв;

б) ни один из них не удовлетворит предьявляемым требованиям;

в) хотя бы один кандидат этим требованиям удовлетворит.

С каким количеством кандидатов надо провести беседу, чтобы среднее число тех, кто может войти в кадровый резерв, составило 3 человека? Какова вероятность, что именно столько человек войдут в кадровый резерв?

2. В администрацию субъекта РФ ежемесячно поступает примерно тысяча писем. Подсчитано, что обычно в каждом сотом письме содержится

конструктивное предложение. Какова вероятность, что в очередном месяце поступит

а) хотя бы одно конструктивное предложение;

б) ровно два предложения?

в) не менее двух предложений?

Каково математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа конструктивных предложений?

3. В городе N имеется 10 финансовых компаний, среди которых 4 находятся на грани банкротства. Клиент выбирает для хранения и умножения средств случайным образом 2 компании. Составить ряд распределения числа X выбранных компаний, имеющих высокий риск банкротства. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

С какой вероятностью можно утверждать, что хотя бы одна из выбранных компаний окажется на грани банкротства?

4. Азартный гражданин приобретает лотерейные билеты до момента первого выигрыша. Вероятность выигрыша для каждого приобретённого билета равна $\frac{1}{100}$. С какой вероятностью ему достаточно приобрести 4 билета? Каково среднее число билетов, которые необходимо приобрести до момента первого выигрыша?

5.Случайная величина X представляет собою значения отклонения параметра производимого изделия от стандарта. Известно, что X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X) = 0{,}5$ и дисперсией $D(X) = 0{,}01$. Какова вероятность, что в трех опытах

а)её значения отклонятся от среднего не менее, чем на 0,1 хотя бы один раз?

б)такие отклонения будут наблюдаться все три раза?

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ 5

1. Нахман А.Д,, Пчелинцев А.Н., Протасов Д.Н. Практико-ориентированные задачи по высшей математике [Электронный ресурс]: учебное пособие. – Тамбов: Издательский центр ФГБОУ ВО "ТГТУ".- 2021. – 80 с.
2. Нахман А.Д,, Пчелинцев А.Н., Протасов Д.Н. Элементы стохастики - компетентностный подход [Электронный ресурс]: учебное пособие. - Тамбов. Издательство ФГБОУ ВО "ТГТУ".- 2020. - 80 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ