Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЛИНИЯ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Монография

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2022

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» Ю.В.Родионов;
проректор по учебно- методической работе и информатизации ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования» О.Н.Нехорошева

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

УДК 372.851

Нахман, А.Д. Функциональная линия в курсе математики: монография / А.Д.Нахман // «Инновации в образовании». Специальный выпуск. – Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2022. – 85 с.

В работе выстраивается функциональная линия как система понятий, фактов и методов, связанных с понятием функции. Проанализирована её реализация в системе «Школа-вуз»; установлена многоаспектность линии: свойства функций составляют теоретическую основу решений уравнений и неравенств, понятие суперпозиции используется в методе замены переменных, рассмотрении различных инвариантных форм и др. Предложена соответствующая задачная система. Монография адресована исследователям в области образовательных инноваций, студентам вузов, изучающим курс математики, а также преподавателям математики.

Введение

Центральной содержательно-методической линией курса математики в системе «Школа-вуз» является функциональная линия. Её можно охарактеризовать как систему понятий, фактов и методов, связанных с концептом «функция». Истоки линии находятся в начальной школе, где рассматриваются прямо-пропорциональная и обратно-пропорциональная зависимости, решаются линейные уравнения (по сути, отыскиваются нули линейных функций), строятся таблицы соответствия одних числовых значений – другим и проч. В основной школе учащиеся знакомятся с линейными, дробно-линейными и квадратическими функциями, отыскивают значения функций по заданным графикам, работают с иррациональностями, тригонометрическими функциями «углового» аргумента, рассматривают зависимости статистического характера, изучаются прогрессии и др. В итоге формируется (в самом общем виде) понятие числовой функции как однозначного отображения одного числового множества в другое.

В старших классах полной средней школы происходит обращение к трансцендентным основным элементарным функциям: общим степенным, показательным, логарифмическим, тригонометрическим, обратным тригонометрическим. Конструируются понятия элементарной функции, производной как скорости изменения функции, приобретаются начальные умения комплексного исследования функциональных зависимостей.

Стандарты высшего профессионального образования (в частности, ФГОС 3+ и 3++) формулируются в терминах компетентностного подхода и предусматривают, в частности, формирование компетенций на основе блока математических дисциплин. Так, например ФГОС бакалаврского направления «23.00.00 Техника и технологии наземного транспорта» предписывает формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1:

«Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности».

Следует заметить, что процессы математического моделирования и методы математического анализа в том или ином виде реализуется в терминах функций. Индикаторы достижения соответствующей компетенции, должны, по нашему мнению, содержать следующие позиции.

Знать: основные функциональные понятия, понятия предела, непрерывности, производной, дифференциала, первообразной, вероятности как числовой функции на алгебре событий.

Уметь: вычислять пределы функций дискретного аргумента (последовательностей) и непрерывного аргумента, исследовать функцию на непрерывность и классифицировать разрывы, вычислять производные и исследовать зависимости средствами математического анализа.

Владеть: навыками дифференциального и интегрального исчисления, восстановления функций, являющихся решениями дифференциальных уравнений, разложения функций в степенные и тригонометрические ряды.

Углубленный уровень изучения математических дисциплин (уровень магистратуры, дисциплины «Теория функций действительного переменного», «Функциональный анализ») предусматривает также овладение такими понятиями как оператор (линейный оператор) и функционал (линейный функционал).

Глава 1. ИННОВАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К ПОНЯТИЮ ФУНКЦИИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

В настоящей главе на основе традиционной теоретико-множественной идеи и идеи соответствия предложено в курсе математики использовать интегрированный подход к понятию функции, включающий в себя понятия функции истинности высказывания, меры множества, вероятности события и др. В рассмотрение включены многозначные функции. Перечень способов задания дополнен аналитико-неявным и аналитико-параметрическим способами. Реализация данных предложений способствовала бы укреплению внутрипредметных связей в курсе математики школы и вуза, расширению математического кругозора учащихся.

1.1. Понятие функции: ретроспектива

Нормативные документы в области общего и высшего профессионального образования предписывают необходимость модернизации содержания фундаментальной и, в частности, математической подготовки, ознакомления обучающихся с современными понятиями, концепциями и методами. Если речь идёт о математической науке, то одно из основных её понятий – понятие функциональной зависимости, значительно обогатилось за последние сто лет. Так, если в 18-19 вв. преобладал так называемый аналитический взгляд на функцию как на формулу, связывающую одну переменную с другой, то с развитием математики на первый план стала выходить идея соответствия. Согласно концепции П.Л. Дирихле (1837 г.) «y есть функция переменной x, если каждому значению x (принадлежащему некоторому отрезку) соответствует совершенно определенное значение y, причем безразлично каким образом установлено это соответствие - аналитической формулой, графиком, таблицей либо даже просто словами». Таким образом, сформировался взгляд на функцию как отображение множеств, но данный подход относился, прежде всего, к числовым множествам. Вместе с тем зарождались и развивались новые теории, например, теория меры (М.Жордан, А.Лебег) и теория интеграла, в связи с чем стало естественным рассматривать функции множеств (каждому множеству из некоторого их класса соответствует действительное число).

В первой половине двадцатого века был окончательно сформулирован (А.Н.Колмогоровым) аксиоматический подход в понятию вероятности, в основе которого лежало рассмотрение вероятности как нормированной меры на борелевской алгебре событий σ: строилось отображение алгебры σ на отрезок $[0,1]$ числовой оси.

Возникновение теории меры и развитие тории интеграла дали импульс зарождению новой ветви математического анализа – функциональному анализу, тесно связанному с изучением преобразования Фурье, дифференциальных и интегральных уравнений. Центральным понятием функционального анализа является понятие оператора (обычно-линейного) на конечномерных и бесконечномерных пространствах (операторы дифференцирования, интегрирование, свёрточные операторы, и др.).

Взгляд на отображения в новом ракурсе связан с возникновением в конце 30-х годов прошлого века теории алгоритмов (А.Черч, А.Тьюринг). Понятие алгоритма было «математизировано» в виде конструктивно заданного алфавитного оператора, то есть отображения одного абстрактного алфавита в другой.

Стоит отметить также теорию нечётких множеств (Л.Заде, 60-70 годы прошлого века), в которой на алгебре высказываний вводится функция истинности, принимающая значения на отрезке $[0,1]$.

Произошедшее, таким образом, значительное обогащение понятия отображения (функции) должно, по нашему мнению, трансформироваться в образовательную практику.

1.2. Три подхода к понятию функции

Как же представлено в современной учебной литературе понятие функции (речь идёт о стандартных учебниках для общеобразовательных школ и курсах высшей математики для нематематических факультетов)? Прежде всего, здесь рассматриваются числовые функции, хотя в различных разделах (никак не связанная с понятием функции) речь идёт о таких понятиях, как геометрические преобразования (напр., преобразования параллельного переноса и поворота систем координат), вероятность, числовые характеристики случайных величин и др. В свою очередь, понятие числовой функции предполагает только её однозначность. Далее, здесь утвердились следующие три подхода.

1.Динамический (термин – наш). Функция рассматривается как *переменная* числовая величина y, значения которой находятся в зависимости от значений *переменной* x (см.[1] , с.25).

2.Подход на основе идеи соответствия («транспортный» подход – термин наш). Здесь функция понимается как правило f, по которому реализуется «переход» от x к y (соответствие между x и y). Исходное множество, из которого выбирают элементы x, называют областью отправления, а весь используемый их «набор» X – областью определения функции. Множество Y, в которое осуществляется «отправление», называют областью прибытия, а весь формируемый «набор» элементов y - множеством значений функции [2].

3.Теоретико-множественный («кортежный») подход. Функция здесь рассматривается как некоторое подмножество f пар (двухэлементных кортежей), содержащихся в декартовом произведении двух заданных множеств.

Мы считаем, что представленные в современной математике и упомянутые выше зависимости, отображения и т.п. дают повод для расширенного, более ёмкого понятия функции, предполагающего отказ от рассмотрения исключительно числовых множеств, интегрирующего имеющиеся подходы.

Итак, в вузовском курсе математики может быть предложена следующая формулировка.

Пусть даны множества X и Y произвольной природы. Механизм f, формирующий для всех $x \in X$ упорядоченные пары $(x, y) \in X \times Y$ называется функцией f, заданной на X со множеством значений в Y.

При этом первый элемент x каждой пары (x, y) называется прообразом элемента y, а y, в свою очередь, - образом x. Множество всех образов (обозначаемое $f(X)$) называется множеством значений функции f.

Что касается школьного курса математики, то здесь может быть сохранён подход на основе идеи соответствия, однако следует обратить внимание учащихся на то, что объектами соответствия могут быть не только элементы числовых множеств; примером служит соответствие между вектором и его модулем. В случае же числовых областей «отправления» и «прибытия» результатом действия соответствия (отображения, механизма) будут точки (x, y) координатной плоскости (график функции).

Отметим следующие обстоятельства. Как все упомянутые, так и предлагаемое нами понятия функции являются, по сути, неопределяемыми, поскольку опираются, в свою очередь, на первичные понятия (соответствие, правило, механизм), не имеющие строгих математических формулировок.

Далее, выбранный нами термин «механизм» трактуется в расширенном понимании: оператор, преобразователь, процесс или совокупность процессов (см., напр.,[2]); важнейшим является случай, когда механизм формирует для каждого $x \in X$ единственную пару: функция f тогда называется однозначной. Заметим, что в общем случае мы включаем в рассмотрение не только однозначные, но и многозначные функции.

Приведённое расширенное понимание механизма f включает в себя наличие *как динамики, так и соответствия*: операция с *переменными* элементами x состоит в *преобразовании* каждого из них в y, в результате чего образуется множество пар. В отличие от теоретико-множественного подхода функция здесь *не является самим множеством*, а лишь его формирует.

1.3. График функции. Способы задания

Применение термина «механизм» в формулировке понятия функции делает естественным последующий переход к понятию графика функции и рассмотрению способов задания функции; см. таблицу 1.

Характер *действия* механизма f	*Что* формируется в результате действия	*Как* формируются пары
Преобразование x в y	Пары (x, y), совокупность которых есть график функции	Способы задания функции: 1)аналитический; 2)аналитико-ннявный; 3)аналитико-параметрический; 4)табличный; 5)графический; 6)прочие.

Таблица 1. Механизм f и способы его задания

Задание функции (механизма) f предполагает одновременное задание функции f^{-1}, формирующей те же пары, но определённой на множестве значений $f(X)$. А именно, в каждой сформированной механизмом f упорядоченной паре (x, y) элемент y рассматривается как прообраз элемента x, в силу чего удобнее инверсировать пары: $(y, x) \in Y \times X$.

Учащимся следует продемонстрировать примеры однозначных функций, обладающих обратными многозначными. Простейший из них: f формирует на всей числовой оси пары $(x, \sin x)$, а f^{-1} на отрезке $[-1,1]$ пары $(y, \mathrm{Arcsin}\, y)$. При дальнейшем рассмотрении, когда изучены свойства функций, следует отметить, что условия непрерывности и монотонности на заданном отрезке функции f являются достаточными для существования однозначной f^{-1}, но необходимыми не являются. Так, функция $y = x + D(x)$, где $D(x)$- функция Дирихле, разрывна и не монотонна, однако однозначно определённая обратная функция для неё существует: $x = y - D(y)$; [3], с.29-30.

Мы предлагаем расширить традиционную для курсов математики классификацию способов задания функции (способов формирования пар), добавив к аналитическому, табличному и графическому способам аналитико-параметрический и аналитико-неявный; два последних вида задания функций, по нашему мнению, следует ввести уже в школьном курсе на профильном или углубленном уровнях изучения.

Обычно аналитический способ задания (см. [1], с.28) связывают с понятием формулы. Однако последнее понятие трактуется весьма широко: от «разновидности выражения формализованного языка» (см., напр.,[2]) до индуктивно построенного формально-логического определения в терминах пропозиционных переменных и логических операций ([4], с.24). Мы понимаем под аналитическим способом задание механизма в форме императива, предписывающего *выполнение последовательности известных* (обучающемуся) *математических операций.* Ясно, что и в этом случае понятие аналитического способа остаётся, по сути, неопределяемым.

Отметим, что вопрос о том, *как* устроен механизм в случае аналитического задания функции порождает систему весьма полезных упражнений на декомпозиции. В частности, в вузовском курсе математики такой вопрос естественным образом приводит к проблематике разложений в степенные и тригонометрические ряды.

Важнейшим случаем аналитически заданных функций являются элементарные функции. Как в школьном, так и в вузовском курсе следует обратить внимание обучающихся на свойство непрерывности элементарных функций на области определения. Вместе с тем необходимо формирование умений работать с кусочно-элементарными функциями. С одной стороны, многие реальные зависимости представлены именно «кусочно-элементарным» образом. С другой стороны, данное рассмотрение послужит пропедевтическим материалом для изучения операционного исчисления, курс которого предусмотрен основными образовательными программами ряда инженерных направлений подготовки. Так, по нашему мнению, уже в школьном курсе следует познакомить обучающихся с понятием единичной функции Хевисайда и её использованием для записи кусочно-элементарных функций в виде одного аналитического выражения (см., напр., [5], с. 144-145).

В случае вышепредложенного подхода к понятию аналитического способа задания функции неявное и параметрическое задания остаются «в стороне».

Аналитико-неявный способ предполагает, во-первых, что введено понятие функции двух переменных. А именно, речь идёт о механизме F с областью определения $X \times Y$, формирующем для всех $(x, y) \in X \times Y$ упорядоченные тройки $(x, y, z) \in X \times Y \times Z$, где множества X, Y и Z являются числовыми (в общем случае, как и выше, указанные множества могут иметь произвольную природу). Во-вторых, рассматривается именно аналитическое задание F (оно формулируется аналогично соответствующему понятию для функции одной переменной) . Наконец, задаётся уравнения вида $F(x, y) = 0$, порождающего *соответствие каждому значению* x (из некоторого числового множества) *некоторой пары* (x, y)*, являющейся его решением.* Механизм f, формирующий такие пары, в этом случае «явно не прописан», откуда и происходит название способа. В этом способе задания функции мы усматриваем аналогию с известным понятием «чёрного ящика». В отдельных случаях, однако, возможна трансформация к аналитическому заданию. Простейшим примером является случай уравнения окружности $x^2 + y^2 = R^2$ $(R > 0)$. В качестве области определения неявной функции рассмотрим отрезок $[-R, R]$. На этом отрезке удается выделить две аналитически заданные функции (два механизма) $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ и $y = -\sqrt{R^2 - x^2}$, в совокупности порождающих все возможные пары (x,y).

Данный пример даёт дополнительный повод не ограничиваться случаем исключительно однозначных функций. Многозначность, как отмечено выше, может присутствовать также и аналитическом задании. Именно многозначные функции придают значительное своеобразие комплексному анализу, элементы которого изучаются на отдельных направлениях бакалаврской и магистерской подготовки.

Перейдём к рассмотрению параметрического задания функций. Нам представляется, что вводя это понятие, надо базироваться на теоретико-множественной идее. А именно, строится система упорядоченных пар (x, y), каждая из которых порождается значениями аналитически заданных на некотором отрезке функций $x = x(t),\ y = y(t)$.

Стоит обратить внимание обучающихся на связь аналитико-параметрического задания с понятием обратной функции. А именно, в случае однозначно-обратимой функции $x = x(t)$ имеем аналитически заданную функцию $y = y(\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ обратна по отношению к $x = x(t)$.

Наконец отметим, что в способах задания функции, обозначенных выше как «прочие» следует уделить особое внимание заданию последовательностей (функций натурального аргумента) рекуррентным способом. Данный подход сближает «классическую математику» с теорией алгоритмов, и, следовательно, косвенно служит укреплению внутрипредметных связей.

Литература к главе 1

1.Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов: учебник. М., «Наука», 1967.- 736 с.

2. Википедия: свободная энциклопедия [Электронный ресурс]. Режим доступа: ru.wikipedia.org

3. Шибинский В.М. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа: учебное пособие. М.: «Высшая школа», 2007.-543 с.

4. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. - М.: «Академия», 2008. -448 с.

5. Нахман, А. Д. Теория функций комплексного переменного : учебное пособие. Саратов : «Ай Пи Эр Медиа», 2019. - 212 с. – Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/80317.html

Глава 2. СУПЕРПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ КАК СИСТЕМООБРАЗУЮЩЕЕЕ ПОНЯТИЕ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

В настоящей главе контексте задачного подхода изучается понятие суперпозиции функций. Предмет исследования рассматривается в трёх аспектах: педагогическом, математическом и методическом. Прослеживаются развитие понятия суперпозиции и его связи с другими дефинициями и фактами от начального уровня математического образования до уровней старшей школы и вуза. Выстроена задачная система, компонентами которой являются теоретические упражнения, задания стандартного и конструктивного характера, основанные на свойствах и применении суперпозиций. Предложено соответствующее методическое сопровождение процесса решений.

2.1. Концепция задачного подхода

Как известно, наиболее эффективный путь реализации требований ФГОС [1] в части освоения учащимися новых знаний, умений и навыков пролегает через решение специально разработанных систем учебно-познавательных задач; такой путь именуется задачным подходом ([2], с. 28). Соответствующие задачные системы должны быть ориентированы на активизацию деятельности учащихся, повышение эффективности учебного процесса. и, прежде всего, обеспечивать (см. [3]):

- содержательную основу учебно-познавательной деятельности (представление учебного материала с необходимой полнотой, глубиной и детализацией);
- деятельностную основу процесса познания (формирования и совершенствования предметных и обобщенных способов деятельности);

- личностно-развивающий компонент обучения (формирование гибкости, глубины мышления, развитие познавательной мотивации, интереса к предмету познания и к самой познавательной деятельности, воспитание нравственно-волевых качеств);
- рефлексивный компонент обучения, то есть осознание собственной мыслительной деятельности («что узнали нового ?», «как пришли к полученному результату ?», «какие полезные методы и факты обнаружились в процессе решения и могут ли они быть применены в дальнейшем?»)

Практическая реализация задачного подхода в математике достигается следующими средствами:

–постановка некоторой задачи как способ введения нового понятия;
– «извлечение» нового знания в процессе решения задачи;
–«выход» результата решения в сферу применений в самой предметной области «Математика», в смежных дисциплинах, а также в практической деятельности.

Решённая задача порождает серию новых задач («цепная реакция»), что способствует расширению и углублению сформированного знания, усилению мотивации математической деятельности, развитию способностей к обобщению и систематизации результатов [4].

В контексте функциональной линии задачная система может состоять из теоретических упражнений, стандартных заданий (преимущественно, в форме тестов) и задач повышенной либо высокой сложности (заданий творческого уровня).

Теоретические упражнения связаны с рассмотрением некоторых общих для функциональной линии фактов (формул, «мини-теорем» и т.п.), которые устанавливают сами учащиеся. Соответствующая деятельность учащегося состоит в накоплении и анализе фактов, выдвижении гипотез, их подтверждении путём проведения соответствующего доказательства либо опровержении путём построения контрпримеров, решении стандартных задач в общем виде и др. Система стандартных задач ориентирована на переход от репродуктивной к частично-конструктивной деятельности, что отражено в заданиях на прямое применение формул и правил и последующем переносе известных методов в новые ситуации. Наконец, задачи конструктивного уровня предполагают сочетание нескольких приёмов либо поиск нестандартных приёмов решения.

В настоящей главе предпринята попытка выстраивания задачной системы, связанной с важнейшим для функциональной линии понятием суперпозиции функций, свойствами и применением суперпозиций.

2.2. Развитие понятия суперпозиции функции

Функциональная линия в курсе математики реализуется с помощью ряда опорных понятий, одним из которых является следующее понятие суперпозиции.

Пусть функция $u = u(x)$ задана на множестве X и $U = E(u)$ множество её значений. Пусть, в свою очередь, на множестве U задана $\varphi = \varphi(u)$. Функция f, сопоставляющая каждому $x \in X$ значение $f(x) = \varphi(u(x))$ называется суперпозицией (композицией) функций u и φ или сложной функцией, определённой на X.

В следующей таблице представлены связи понятия суперпозиции с другими понятиями, фактами, методами. Наличие таких связей и их реализация в процессе решения задач может быть кратко выражено тезисом: *суперпозиция функций есть системообразующее понятие в курсе математики*.

Уровень образования	***Суперпозиция: смежные понятия и факты***	***Типы решаемых задач***

Начальная школа (пропедевтический уровень)	Линейные и дробные выражения	Вычисление значений линейных и дробно-линейных функций
Основная школа	Характер четности функций, преобразование графиков, замена переменных, последовательности и прогрессии	Графики функций линейного аргумента, биквадратные уравнения, нахождение членов последовательности с заданными номерами
Старшие классы средней школы	Анализ и синтез суперпозиций, производная сложной функции, множества значений функций, метод математической индукции и др.	Нахождение значений сложных функций, техника дифференцирования, замены переменных в уравнениях и неравенствах, монотонность суперпозиций, задачи с параметрами и др.
Вузы (бакалавриат)	Преобразования параллельного переноса и поворота системы координат, непрерывность сложной функции, элементарные функции, инвариантность формы дифференциала, методы нтегрирования и др.	Приведение к каноническому виду уравнений кривых второго порядка, дифференцирование многоступенчатых суперпозиций, замена переменных в интеграле и др.

Таблица 1. Суперпозиции и смежные понятия/факты

В начальной школе понятие функции формируется на интуитивном уровне как зависимость между величинами; понятие суперпозиции функций здесь ещё отсутствует. Отрабатывается операция *подстановки значений*: «подставьте вместо x в данное выражение следующие числа…», «составьте таблицу значений…», «отметьте точки на координатной плоскости» и т.п.

В основной школе уже возможен анализ и синтез суперпозиций. В последнем случае операция подстановки выполняется на уровне *подстановки выражений*. Более точно, действует следующее правило: чтобы получить (по заданным u и φ) суперпозицию $\varphi(u(x))$, следует *в аналитическом выражении внешней функции φ везде на месте независимой переменной записать аналитическое выражение внутренней функции* $u(x)$.

Приведём соответствующие примеры.

Пример 1 (стандартный уровень). Дана последовательность $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$. Найдите выражение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Заметим, что данная последовательность является суперпозицией: $a_n = \varphi(u(n))$, где $u(n) = 2n-1$, $\varphi(u) = u!$, $n \in N$. Решение основано на только что сформулированном правиле, применённом к последовательности: при нахождении a_{n+1} следует в выражении $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$ на месте n записать $n+1$, то есть

$$a_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)-1)!} \text{ или } a_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Теперь

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = \frac{(2n-1)!}{(2n-1)!(2n)(2n+1)} = \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

Пример 2 (стандартный уровень). Найдите $f(2x) - f(16x)$ если $f(x) = \log_2 x,\ x > 0.$

Решение основано на подстановке в логарифм $2x$ и $16x$ вместо x:

$$f(2x) - f(16x) = \log_2 2x - \log_2 16x = -3.$$

Пример 3 (стандартный уровень). С помощью выделения полного квадрата постройте график квадратичной функции $y = x^2 + 6x + 2$.

В результате выделения полного квадрата $y = (x+3)^2 - 7$, так что приходим к суперпозиции $y = X^2 - 7$ (стандартная парабола) , где $X = x + 3$ (параллельный перенос параболы вдоль оси абсцисс на три единицы влево).

Пример 4 (стандартный уровень). Решите уравнение $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$.

Здесь, по сути, отыскиваются нули суперпозиции $y = X^2 - 8X - 9$, где $X = x^2$.

В курсе старшей школы операция замены переменных получает дальнейшее развитие. Речь идёт об уравнениях и неравенствах, решаемых средством замены переменных (то есть средством перехода от «внутреннего» компонента суперпозиции к «внешнему»). Довольно часто у обучающихся возникает здесь путаница с нахождением области определения. Проблема решается с помощью следующего простого правила: на первом шаге записывают область определения «заменяемой» функции $t = u(x)$, а на втором шаге работают с областью определения задания, записанного в терминах новой переменной t. Область определения $u(x)$ следует принимать во внимание на заключительном шаге - при возвращении к исходной переменной x.

Пример 5 (повышенный уровень, [5], № 517447). Решите неравенство

$$\frac{\log_4 64x}{\log_4 x - 3} + \frac{\log_4 x - 3}{\log_4 64x} \geq \frac{\log_4 x^4 + 16}{\log_4^2 x - 9}.$$

Применим замену переменных $t = \log_4 x$; здесь $x > 0$, при этом t пробегает все действительные значения. Неравенство приводится к виду $f(t) \geq 0$, где $f(t) = \dfrac{2t^2 - 4t + 2}{(t-3)(t+3)}$. Применяем метод интервалов. Областью определения $f(t)$ служит множество $R \setminus \{-3;3\}$. Находя нули, а затем знаки $f(t)$, и возвращаясь к переменной x, будем иметь

$$\left[\begin{array}{l} \log_4 x < -3. \\ \log_4 x = 1, \\ \log_4 x > 3. \end{array}\right.$$

С учётом области определения $t=\log_4 x$ получаем ответ $(0,\frac{1}{64})\bigcup\{4\}\bigcup(64,+\infty)$.

Отдельного внимания заслуживают задачи, в которых после замены переменной рассмотрение сводится лишь к внешней функции (на области значений внутренней функции). Такие задания представляют интерес с точки зрения пропедевтики свойств инвариантности (об инвариантности см. ниже).

Пример (высокий уровень сложности). Найти множество значений функции $y=2\sin x+\cos x$ на отрезке $[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$.

На данном отрезке значения синуса положительны, поэтому задание может быть преобразовано к виду $y=2\sqrt{1-t^2}+t$, где $t=\cos x$. При этом значения косинуса на $[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$ убывают от $\cos\frac{\pi}{4}$ к $\cos\frac{3\pi}{4}$, так что $t\in[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Полученная функция непрерывна, а тогда множество её значений будет находиться между наибольшим и наименьшим значениями, которые, в свою очередь находим с помощью производной. Имеем

$$y'=1-\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}};$$

стационарная точка определится из условия $\sqrt{1-t^2}=2t,\ t\geq 0$; корнем уравнения служит $t=\frac{1}{\sqrt{5}}$, и это – точка максимума.

Таким образом, функция $y=2\sqrt{1-t^2}+t$ возрастает от $y(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt{2}}$ до $y(\frac{1}{\sqrt{5}})=\sqrt{5}$ и затем убывает к $y(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{3}{\sqrt{2}}$. Значит, множеством её значений служит промежуток $[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{5}]$.

Заметим, что возврата к прежней переменой x здесь не потребовалось, т.е. имеет место упомянутая выше инвариантность относительно $t = \cos x$.

Заметим также, что другие подходы к нахождению множеств значений функций представлены в [6].

2.3. Введение в математический анализ: содержание входного тестирования

В вузовском курсе математики понятие суперпозиции возникает во введении в анализ. Степень готовности студентов к работе с суперпозициями может быть выявлена путём проведения тестирования. Приведём одну из возможных подборок тестовых заданий.

1) Выберете выражение, равносильное $\log_2^2 x$:

а) $(\log_2 x)^2$

б) $\log_4 x^2$

в) $2\log_2 x$

г) $\log_4 x$

2) Какие из следующих тождеств справедливы при всех действительных значениях переменной x:

а) $\sqrt{x^2} = x$

б) $\sqrt[3]{x^3} = x$

в) $\log_2 2^x = x$

г) $2^{\log_2 x} = x$.

3) Число $\arccos(\cos 6{,}28)$ равно

а) 6, 28

б) $2\pi - 6{,}28$

в) $6{,}28 - 2\pi$

г) 2π

4) Какие из следующих выражений не существуют:

а) $\ln\ln\ln e$

б) $\sqrt{-\log_{0,15} 15}$

в) $\lg(-\lg\frac{10}{11})$

г) $\sin(\arcsin\frac{\pi}{3})$.

5) Производная функции $\cos^2 x$ равна

а) $\sin^2 x$

б) $2\cos x$

в) $-2\sin x$

г) $-\sin 2x$.

Комментарии. Запись $f^n(x)$ есть обозначение суперпозиции $(f(x))^n$. Непонимание этого факта приводит к выбору студентами дистракторов б), в), г) в задании 1 и одного из дистракторов а), б), в) в задании 5. Кроме того, неверный выбор ответа в задании 5 может быть обусловлен неумением находить производные сложных функций. Дистракторы в задании 2 отражают часто встречающуюся ошибку формального использования тождеств без учёта области их определения. Неверный выбор ответа в задании 3 может означать , что студент не владеет определениями и свойствами обратных тригонометрических функций. Дистракторы б) и в) в задании 4 отражают неумение определять знаки логарифмов.

Выбор обучающимся перечисленных дистракторов в качестве ответов – сигнал о необходимости корректирующих мероприятий (дополнительные занятия, консультации, возможно - чтение адаптивного курса).

2.4. Теоретические упражнения

Приведём перечень возможных теоретические упражнений, направленных на осмысление понятия и свойств суперпозиций.

1) Может ли функция, обладающая свойством $f(x)=f(\frac{1}{x}),\ x\neq 0$, быть монотонной:
а) на $(0;+\infty)$; б) на $(-\infty;0)$?

2) Если функция u четна, а φ -нечётна, то каков характер чётности функций $f(x)=\varphi(u(x))$ и $g(x)=u(\varphi(x))$?

3) Если функция u периодична, а φ -непериодична, то что можно сказать о периодичности функций $f(x)=\varphi(u(x))$ и $g(x)=u(\varphi(x))$?

4) Сконструируйте функцию, обладающую свойством

$$f(f(x))=f^2(x).$$

5) Пусть область определения X функции $u(x)$ и множество U её значений – некоторые промежутки (конечные или бесконечные). Пусть также функции u и φ обладают свойством монотонности на своих областях определения. Каков характер монотонности функции $f(x)=\varphi(u(x))$? Рассмотрите все возможные случаи. Приведите доказательства полученных утверждений.

Комментарии к теоретическим упражнениям.

1) Простейшим является пример следующей функции: $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$. Для монотонности на $(0;+\infty)$ необходим строгий знак неравенства между, например, $f(2)$ и $f(\frac{1}{2})$. Однако, в нашем случае $f(2)=f(\frac{1}{2})$. Аналогично, монотонность отсутствует и на $(-\infty;0)$.

2) – 3) Характер чётности и наличие/отсутствие периодичности суперпозиции устанавливается на основании соответствующего определения; например, в задании 2) следует сравнить $\varphi(u(-x))$ и $\varphi(u(x))$.

4) Речь идёт о функции $f(x)=x^2$.

5)Рассмотрим, например, случай убывания функции u и возрастания функции φ. Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$. Тогда $u(x_2) < u(x_1)$ и $\varphi(u(x_2)) < \varphi(u(x_1))$. Таким образом, $f(x_2) < f(x_1)$, то есть $f(x)$ убывает.

В этом же случае для дифференцируемых (на соответствующих промежутках) функций u и φ доказательство убывания $f(x)$ может быть проведено также с помощью правила дифференцирования сложной функции: $f'(x) = \varphi'(u) \cdot u'(x)$. Здесь $u'(x)$ отрицательна, а $\varphi'(u)$ положительна, так что $f'(x) < 0$ при всех $x \in X$, что и подтверждает убывание $f(x)$.

Свойства монотонности суперпозиций, представленные выше, могут быть эффективно использованы в приложениях суперпозиций. Приведём пример.

Задание 1 (высокий уровень сложности). Решите уравнение

$$2 \cdot 2^{\frac{1}{x}} - 9\sqrt{4x-1} + 1 = 0.$$

Решение. Функция $y = 2 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$ положительна, так что ее график расположен в первой и второй четвертях координатной плоскости. График функции $y = 9\sqrt{4x-1} - 1$ расположен в первой и четвёртой четвертях, так что общие точки графиков возможны только в первой четверти. Согласно результату упражнения 5) функция $y = 2 \cdot 2^{\frac{1}{x}}$ при $x > 0$ убывает, а $y = 9\sqrt{4x-1} - 1$ при $x > \frac{1}{4}$ возрастает; следовательно, общая точка, если она существует, – одна. Разность $2 \cdot 2^{\frac{1}{x}} - (9\sqrt{4x-1} - 1)$ при $x = \frac{1}{4}$ положительна, а при $x = 1$ отрицательна. Следовательно, корень уравнения расположен между $\frac{1}{4}$ и 1. Подбором находим $x = \frac{1}{2}$.

Близким по характеру рассуждений, основанных на свойстве монотонности, является следующее

Задание 2 (высокий уровень сложности, [7], с.413, задача 6). Решите уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$$

Решение. Легко заметить, что левая часть уравнения может быть записана с помощью функции $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$ в виде $f(u)-f(v)=0$, где $u=2x+1,\ v=-3x$; тогда $f(2x+1)=f(-3x)$. Функция $f(t)$ возрастает при всех t, в чём можно убедиться, вычислив производную

$$f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\frac{2t^2}{\sqrt{t^2+3}},$$

которая, очевидно, положительна на всей числовой оси. Следовательно, значения аргументов этой функции должны совпадать: $2x+1=-3x$. Значит $x=-0{,}2$.

2.5. Суперпозиции функций в математическом анализе

Выше отмечено, что понятие суперпозиции и основные её свойства «сопровождают» сплошь всю функциональную линию. Так, во введении в анализ устанавливается непрерывность суперпозиции при условии непрерывности её внешнего и внутреннего компонентов. В частности, обосновывается непрерывность любой элементарной функции на области её определения.

Важнейшим является изучаемое затем правило дифференцирования сложной функции. В свою очередь, это правило может быть использовано для обоснования следующих свойств инвариантности дифференциала и интеграла (эти задания могут быть предложены студентам в качестве теоретических упражнений).

1)Докажите свойство инвариантности формы первого дифференциала: равенство $d\varphi(u) = \varphi'(u)du$ имеет место независимо от того, является ли переменная u «свободной» или же представляет собою некоторую функцию $u = u(x)$.

2) Обладают ли свойством инвариантности формы второй дифференциал и вообще дифференциалы высших порядков?

3) Докажите свойство инвариантности формы неопределённого интеграла: равенство

$$\int \varphi(u)du = \Phi(u) + C$$

(где Φ - некоторая первообразная функции φ а C –произвольная постоянная), имеет место независимо от того, является ли переменная u «свободной» или же представляет собою некоторую функцию $u = u(x)$.

Приложениями свойств 1), 3) могут служить формулы замены переменных в неопределённом и определённом интегралах. В этой связи приведём ещё одно упражнение, связанное с решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделёнными переменными.

Найдите общее решение уравнения

$$\varphi(y)y' = g(x).$$

Рассуждения сводятся к интегрированию обеих частей уравнения, записанного в терминах дифференциалов

$$\varphi(y)dy = g(x)dx. \qquad (1)$$

Однако, формальная постановка знаков интеграла была бы некорректной, поскольку левая и правая части уравнения зависят от разных переменных. Требуется уточнение следующего характера. Пусть $y = y(x)$ - какое-либо решение (1). Тогда

$$\varphi(y(x))dy(x) = g(x)dx.$$

Выполняем интегрирование по переменной x:

$$\int \varphi(y(x))dy(x) = \int g(x)dx.$$

Теперь, пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получаем искомое общее решение

$$\int \varphi(y)dy = \int g(x)dx.$$

2.6. Суперпозиции в теории рядов

Суперпозиции последовательностей возникают и в теории числовых и функциональных рядов: признаки Даламбера, Лейбница, преобразование Абеля, формулы радиуса сходимости степенного ряда. Здесь речь идёт о простейшем переходе от члена a_n к a_{n+1}. Так, например, может быть установлена сходимость знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

Имеем (см. пример 1 параграфа 2.2)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(2n+1)} = 0,$$

и, так как полученный предел меньше единицы, то в силу признака Даламбера, ряд сходится.

Синтез суперпозиции может быть также использован для разложения в степенные ряды элементарных функций на основе стандартных разложений. Например, получим представление функции $\exp(-x^2)$ в виде суммы степенного ряда (что, в свою очередь, даёт возможность приближённо вычислять «неберущиеся» определённые интегралы данной функции). Как известно,

$$\exp u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!}. \tag{2}$$

Поскольку представление (2) справедливо на всей числовой оси, то можно выбрать $u=-x^2$. Теперь приходим к следующему разложению суперпозиции:

$$\exp(-x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Литература к главе 2

1. Федеральные государственные образовательные стандарты. – Текст : электронный // Национальная ассоциация развития образования и науки. – URL : https://fgos.ru/

2 . Балл Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект . М.: Педагогика, 1990. - 184 с.

3. Шмигирилова И. Б. Особенности конструирования учебно-поисковых заданий в компетентностном обучении математике // Наука и школа. - 2017.- № 3.- С. 152-160.

4. Нахман А.Д. Задачный подход как технологическая основа процесса обучения математике // Международный журнал экспериментального образования. – 2018. – № 2. – С. 34-39; URL: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=11793

5. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня [Электронный ресурс] // URL: https: ege.sdamgia.ru/

6.Сильвестров, В.В. Как найти множество значений функции // Математика в школе. - 2008. -№ 9. - С. 30-34.

7.Ткачук В.В. Математика абитуриенту. М.: МЦНМО, 2018. - 944 с.

Глава 3. ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА В ПРОГРАММЕ

ПОДГОТОВКИ К ГОСУДАРСТВЕНОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

Эффективным способом реализации функциональной линии на этапе подготовки к ЕГЭ по математике нам представляется *выделение* соответствующего материала *в отдельный блок содержания* "Функции и их свойства", что диктуется необходимостью формирования системно-целостного представления об основных понятиях и фактах, связанных с функциональной зависимостью как центральным понятием в математической науке. Функции и их графики – средство решения многих исследовательских учебных задач и задач математического моделирования, наличествующих в контрольно-измерительных материалах (КИМах) единого государственного экзамена по математике; вместе с тем Рособрнадзором (см., напр., [1], с.16) отмечается недостаточная сформированность у учащихся предметных компетенций по соответствующему материалу.

3.1. Функции и их свойства: вопросы содержания

В настоящей главе предлагается программа блока содержания "Функции и их свойства", предназначенная для обобщающего повторения свойств функций (11 класс) *в формате подготовки к ЕГЭ*. Исходя из этого ориентира, мы свели в программе к минимуму вопросы типа «понятие…», «свойства…», заменив их соответствующей «деятельностной интерпретацией»: «нахождение…», «использование…» и т.п.

Функциональная линия получает развитие в нескольких направлениях: классификация известных функций, формулировка ряда понятий и рассмотрение свойств в общем виде, применение элементов математического анализа в заданиях собственно математических и прикладного характера. В рамках общих целей изучения математики на базовом и профильном уровнях мы рассматриваем следующие задачи:

- интегрирование в некоторые общие представления свойств, которые знакомы учащимся на примерах отдельных функций (напр., характер четности, периодичность и др.);

- выработка обобщенных приемов решения, относящихся к целому классу заданий;

- формирование культуры математических рассуждений и доказательств.

Предлагаемый материал, как хотелось бы надеяться автору, поможет педагогу выделить в подготовке к ЕГЭ ведущий содержательный компонент (чему учить) и соответствующий процессуальный компонент (как обучать).

Материал рассчитан на 30 часов изучения. Контрольные мероприятия целесообразно проводить в форме тестов, по содержанию и форме приближенных к КИМам единого экзамена.

1.Основные понятия. Обзор основных элементарных функций - 4 часа

1.1 Функция и ее график, геометрические интерпретации свойств ограниченности, монотонности, точек экстремумов. Нахождение области определения и множества значений по изображенному графику функции.

1.2 Уравнение как задача о нулях функции. Система уравнений как задача об общих точках графиков функции. Неравенство как задача об интервалах знакопостоянства функции или о взаимном расположении графиков.

1.3 Обзор свойств и графиков основных элементарных функций.

1.4 Системы и совокупности неравенств в применении к нахождению области определения.

2. Суперпозиции функций и их применения - 5 часов

2.1 Суперпозиция функций, синтез и анализ суперпозиций.

2.2 Функции линейного аргумента и преобразования графиков.

2.3 Суперпозиции, содержащие знак модуля. Графики $y=|f(x)|$ и $y=f(|x|)$; преобразования симметрии при построении графиков с модулями.

2.4 Метод замены переменных в преобразованиях, уравнениях и неравенствах. Применение метода в задачах на нахождение множества значений функции.

3.Характер четности и периодичность функций - 3 часа

3.1 Исследование характера четности на основании определения.

3.2 Геометрическая интерпретация характера четности. Определение характера четности по изображенному графику функции. Расположение нулей четных и нечетных функций.

3.3 Периодичность функции, основной период, геометрическая интерпретация свойства периодичности. Определение значений периодической функции по аналитическому выражению (графику), заданному на промежутке длины основного периода.

3.4 Нахождение периода функции, полученной в результате арифметических действий и суперпозиций.

4. Обратная функция - 3 часа

4.1 Функция, обратная данной. Обратимость монотонных функций. Графики взаимно-обратных функций.

4.2 Преобразование суперпозиций, содержащих обратные тригонометрические функции.

4.3 Использование обратной функции в задачах о множестве значений.

5. Последовательности. Прогрессии - 3 часа

5.1 Последовательность как функции натурального аргумента; исследование последовательностей (напр., на монотонность, наибольшее и наименьшее значения) и их поведения на бесконечности.

5.2 Арифметическая и геометрическая прогрессии.

5.3 Сумма бесконечно-убывающей геометрической прогрессии.

6. Непрерывность. Производная. Первообразная - 3 часа

6.1 Геометрические интерпретации свойства непрерывности функции в точке, разрывов первого и второго рода. Исследование непрерывности функций, задаваемых различными аналитическими выражениями на различных областях.

6.2 Производная как скорость изменения функции. Производная и первообразная.

6.3 Производная как угловой коэффициент касательной. Уравнение касательной.

7. Приложения производной и первообразной - 5 часов

7.1 Применение производной к исследованию функции на монотонность и экстремумы.

7.2 Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке. Нахождение наибольших и наименьших значений различных величин.

7.3 Восстановление элементов поведения функции по изображенному графику ее производной.

7.4 Применение техники нахождения наибольших и наименьших значений непрерывной функции к определению множества ее значений.

7.5 Площадь как величина приращения первообразной.

8. Применение свойств функций при решении задач повышенного и высокого уровня сложности - 4 часа

8.1 Использование свойства непрерывности при доказательстве существования корня уравнения и свойств монотонности при доказательстве его единственности.

8.2 Свойство ограниченности и метод мажорант (метод оценки).

8.3 Применение свойств функций и множеств их значений к решению задач с параметрами.

3.2. Методы изучения

Остановимся подробнее на соотношении вопросов содержания и методов его изучения.

1. Обзорное рассмотрение. Материал, используемый как справочный (понятия, их геометрические интерпретации, основные формулы и т.п.), сообщается в рамках объяснительно-иллюстративного метода (предпочтительнее – обзорные лекции). Уже известные учащимся (на примерах конкретных типов функций) понятия и факты остается "собрать воедино", проиллюстрировать в общем случае графически: область определения функции – проекция графика на ось абсцисс, множество значений – проекция на ось ординат, точки пересечения графика с осью абсцисс – суть корни уравнения и т.п.

В виде обзора целесообразно также изложить вопросы, связанные с понятиями и свойствами непрерывности, производной, первообразной. Приоритетными, как и выше, являются геометрические интерпретации (например, свойства непрерывности и точек разрывов, определенного интеграла и т.д.).

2. Алгоритмы. Стандартные задачи рассматриваются в рамках репродуктивного метода; отрабатываются, например,

- алгоритм исследования характера четности;

-алгоритм нахождения периода функции;

-алгоритмы исследования функции на характер монотонности, экстремумы и нахождения наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке.

3. Теоретические упражнения. В таких важных понятиях, как суперпозиция, четность (нечетность), периодичность, обратная функция интегрируются (как отмечено выше) факты и свойства, ранее изученные на примере отдельных функций. "Обобщенному" восприятию способствуют специально подобранные теоретические упражнения. Так, установление (обнаружение, доказательство) некоторых свойств функций может быть осуществлено самими учащимися. Сюда относится, например, нахождение периода функции $y = f(kx + b)$ по известному периоду функции $y = f(x)$ и т.п. Выявленные в результате выполнения теоретических упражнений свойства, в свою очередь, могут быть использованы в процессе решения задач повышенного и высокого уровня сложности.

Выполнение теоретических упражнений способствует предотвращению многих типичных ошибок и неверных аналогий. Это могут быть, например (в рамках темы "Суперпозиции функций"), задания на поиск контрпримеров к "правилам" типа $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $f(kx) = kf(x)$ и т.п.

Приведем одно из возможных теоретических упражнений и его решение.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ при всех $x \geq a$ дифференцируемы, на промежутке $(a,+\infty)$ удовлетворяют условию $f'(x) > g'(x)$ и $f(a) \geq g(a)$. Доказать, что при всех $x \in (a,+\infty)$ выполнено неравенство $f(x) > g(x)$.

Весьма прозрачен смысл этого утверждения: если, например, значения двух функций в некоторой точке a равны, то при $x > a$ значения той функции становятся больше (чем значения другой), которая обладает большей скоростью роста.

Доказательство. По условия задачи, в точке $x = a$ разность $\phi(x) = f(x) - g(x)$ неотрицательна и возрастает с ростом x (поскольку $\phi'(x) > 0$ при $x>a$). Значит, $\phi(x)$ может принимать лишь положительные значения на промежутке $(a,+\infty)$, откуда и вытекает справедливость утверждения.

В качестве приложений можно рассмотреть оценки вида $x > \sin x$ $(x > 0)$ и $x^{\alpha} > \ln x$ $(\alpha \geq 1,\ x > 1)$. Так, например, первая из оценок (очевидная, если $x \geq \frac{\pi}{2}$) при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ следует из равенства $\sin 0 = 0$ и соотношения $\cos x < 1$ для производных соответствующих функций.

3.3. Тематические комментарии

Приведем комментарии к некоторым темам, которые представляются нам наиболее важными (базовыми) в предлагаемом блоке содержания.

Нахождение области определения аналитически заданной функции связано с решением неравенств. Их составление основано на сформированной у учащихся (в процессе изучения курса) системе "запретов" на определенные действия (нельзя делить на ноль, нельзя извлекать корень четной степени из отрицательного числа и др.).

Необходимо выделить ситуации, когда неравенства требуется объединить в систему (конъюнкция высказываний - требований), а когда – в совокупность (дизъюнкция); соответственно этому, следует отработать умения находить пересечения и объединения множеств. Примерами первой и второй ситуаций могут служить задачи нахождения областей определения, соответственно, функций $y = \log_x(5 - x)$ и $y = \sqrt{|x+2|-2}$ (в последнем возникает единственное неравенство, решение которого строится как объединение множеств).

Сложная функция (суперпозиция функций; см. также главу 2). Важной составляющей обсуждаемой темы является синтез суперпозиций (построение сложной функции по заданной цепочке основных элементарных функций) и их анализ (восстановление цепочки по заданной суперпозиции). Так, умение решать последнюю задачу необходимо при формировании техники дифференцирования.

Рассмотрение суперпозиций лежит в основе решения задач на характер четности, периодичность (преобразование суперпозиций вида, соответственно, $f(-x)$, $f(x+T)$), на построение графиков функций линейного аргумента и графиков с модулями.

Приведем пример одной из возможных задач на анализ суперпозиций.

О функциях f и g известно, что $f(2x)=4(x-1)$ при всех значениях x и $f(g(x))=\dfrac{4(1-x)}{x}$ при $x\neq 0$. Найти $g(x)$.

Решение. Определим вид функции f. Положим $g=2x$. Ввиду произвольности x получим $f(g)=2g-4$ для каждого значения g. В частности, если $g=g(x)$, то $f(g(x))=2g(x)-4$.

С другой стороны, $f(g(x))=\dfrac{4(1-x)}{x}$. Следовательно, $\dfrac{4(1-x)}{x}=2g(x)-4$.

Отсюда $g(x)=\dfrac{2}{x}$.

Прием замены переменных (состоящий в переходе от суперпозиции $f(\phi(x))$ к функции $f(t)$), может быть использован не только при решении уравнений и неравенств, но нередко позволяет «увидеть» нужную формулу и в процессе упрощения выражений. Для примера, упростим выражение

$$\frac{a^2+b}{a\sqrt{-b}-b}+\frac{a\sqrt{-b}}{b} \text{ с помощью замены } t=\sqrt{-b}.$$

Поскольку $b=-t^2$, то в числителе первой дроби возникает разность квадратов, и, следовательно,

$$\frac{a^2-t^2}{at+t^2}-\frac{at}{t^2}=\frac{a-t}{t}-\frac{a}{t}=-1.$$

Наконец, прием замены переменных позволяет находить множество значений $E(f)$ сложной функции $y=f(\phi(x))$ на основе очевидного утверждения о том, что $E(f)$ совпадает со множеством значений $f(t)$ при

$t \in E(\phi)$. Этот прием (среди других) обсуждается в обстоятельной статье [2]; см. также [3], с.44.

Обратная функция. В этом разделе отрабатывается техника нахождения функций, обратных к данным, обращается внимание на взаимное расположение графиков данной и обратной функции. В рамках темы углубляются знания свойств обратных тригонометрических функций на примере решения задач повышенной сложности.

«Метод обратных функций» полезен в задачах о нахождении множеств значений. Так, примеры статьи [2] стоит дополнить случаем функции $y = \log_{0,1} \frac{300}{1 + \lg(100 + x^2)}$, нахождение множества значений которой представляется наиболее прозрачным (ср. [4], с. 63), если использовать переход к обратной функции. Имеем $x^2 = 10^{300 \cdot 10^y - 1} - 10^2$, и указанная (двузначная) зависимость определена, если $10^{300 \cdot 10^y - 1} \geq 10^2$, т.е. $y \geq -2$. Таким образом, искомое множество есть $[-2, +\infty)$.

Применение свойств функций при решении задач повышенного и высокого уровня сложности. Хотя соответствующие задания носят «нестандартный» характер, их решение облегчается определенными стандартными «функциональными» приемами: схематическим изображением графиков соответствующих функций, исследованием количества корней уравнения на основе анализа характера монотонности функций, методом оценки и др. Приведем пример использования методов дифференциального исчисления в «дискретной» задаче: найти наибольший член последовательности $y_n = \sqrt[3]{5n^2 - n^3 + 46}$.

Решение. Рассмотрение производной в применении непосредственно к y_n (функции, определенной лишь при натуральных значениях аргумента) было бы некорректным, поэтому воспользуемся функцией

$y = \sqrt[3]{5x^2 - x^3 + 46}$ (определенной для всех действительных x), значения которой совпадают с y_n при $x = n,\ n = 1,2,...$ Имеем

$$y' = \frac{x(10-3x)}{3\sqrt[3]{(5x^2 - x^3 + 46)^2}} ,$$

так что в случае $x \geq 1$ точкой экстремума (максимума) является $x_0 = \frac{10}{3}$; эта точка экстремума будет единственной, поскольку знаменатель здесь не меняет своего знака. Наибольший член последовательности y_n теперь, очевидно, следует искать для ближайших к x_0 целых значений $n = 3$ и $n = 4$. Непосредственным подсчетом убеждаемся, что наибольшим является $y_3 = \sqrt[3]{64} = 4$.

Литература к главе 3

1. Единый государственный экзамен 2006. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся/ Рособрнадзор, - М.: Интеллект-Центр. 2006 - 272 с.

3.Нахман А.Д. Функции и их свойства. Задачи для подготовки к ЕГЭ: метод. пособие. Тамбов: ТОИПКРО, 2006. – 61 с.

2.Сильвестров В.В. Как найти множество значений функции. Математика в школе, № 9, 2008, с. 30-34, с.61.

4. Единый государственный экзамен: Математика: Контрол. измерит. материалы/Л.О.Денищева, Е.М.Бойко, и др. М. Просвещение, 2003. -191 с.

Глава 4. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ НЕРАВЕНСТВ

Содержательно-методическая линия неравенств в школьном курсе математики требует первоочередного внимание к теоретико-математической основе их решения и алгоритмизации соответствующего процесса. Данная проблематика согласуется с требованиями ФГОС [1] к предметным результатам освоения соответствующей дисциплины, среди которых значатся «овладение символьным языком алгебры, приемами выполнения тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач».

4.1.Теоретико-математическая основа линии неравенств

Методы доказательств неравенств и их решения имеют глубокую теоретико-математическую основу. В свою очередь, здесь речь идет о формально-логической и функциональной составляющих [2]. С точки зрения математической логики, неравенство представляет собою предикат (одноместный или n-местный) записанный с использованием знака неравенства, а множество решений – это множество истинности соответствующего предиката. Процесс решения есть построение равносильного предиката стандартного вида (например, линейного или квадратичного неравенства), либо равносильного преобразования к конъюнкции/ дизъюнкции таких предикатов. Доказательство неравенства есть доказательство тождественной истинности данного предиката на его предметной области. Следовательно, обновление содержания и обучающих технологий линии неравенств должно сопровождаться ознакомлением учащихся с простейшими понятиями и операциями логики предикатов и их соответствующей теоретико-множественной интерпретацией: решение системы неравенств (множество истинности конъюнкции) интерпретируется пересечением множеств решений каждого из них, а решение совокупности (множество истинности дизъюнкции) – объединением множеств.

Функциональная составляющая процесса решения или доказательства неравенства связана со следующими понятиями и фактами математического анализа:

1) понятие непрерывности функции в точке и на интервале;
2) свойство непрерывности всякой элементарной функции на области определения;
3) свойство сохранения знака непрерывной функции в промежутках между её нулями;
4) свойство монотонности степенной, показательной и логарифмической функций при решении трансцендентных неравенств.

Метод интервалов как универсальный метод решения неравенств многих типов, базируется на вышеуказанных свойствах непрерывных функций, так что его применению должно предшествовать ознакомление с соответствующим теоретическим материалом. В основной школе такое ознакомление возможно на уровне графических интерпретациях, в старших классах – на относительно строгом аналитическом уровне.

К теоретико-математической основе линии неравенств примыкает и её системообразующая роль. Последняя проявляется во взаимосвязи с содержательными линиями числовых систем, тождественных преобразований, функционально-аналитической (например, определение характера монотонности и экстремумов функции с помощью знаков производной), аналитико-геометрической (построение областей на координатной плоскости в случае неравенств с двумя переменными) и другими.

4.2. Алгоритмизация решений

Существенным моментом обновления технологии изучения линии неравенств является алгоритмизация процессов решений ([3], с.60-62).

Процесс решения задачи есть последовательность нескольких видов деятельности (процедур), преобразующих в итоге «входы» (данные условия задачи) в «выходы» (ответы на вопросы задачи). Рассматривают две следующие основные процедуры:

- *алгоритмизацию* - нахождение алгоритма решения данной задачи;
- *редукцию* - упрощение, сведение задачи к той, для которой известен алгоритм решения, или системе таких задач.

В математических задачах процедуре редукции предшествует анализ, то есть последовательность рассуждений, обеспечивающих «движение» от искомых фактов к данным задачи.

Вслед за анализом наступает этап синтеза. Синтетический путь решения задачи - это путь рассуждений, идущих от данных задачи к искомым (устанавливаемым) фактам.

Анализ и синтез, таким образом, дополняют друг друга, составляя единый аналитико-синтетический метод решения.

Алгоритмизация решений неравенства достигается путём использования универсального метода интервалов. А именно, возможно распространение метода со стандартного случая неравенств вида $f(x)g(x)>0$ и $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ на общий случай неравенств вида $F(x)>0$. При этом сохраняются следующие основные шаги алгоритма:

1) нахождение области определения;

2) нахождение нулей функции $F(x)$;

3) определение знаков $F(x)$ в каждом из полученных интервалов; при этом информация о кратности каждого из найденных нулей и значений x, соответствующих пограничным точкам области определения (например, кратность нулей знаменателя) позволяет находить знак лишь в одном из интервалов.

Так, метод может быть напрямую применён к иррациональным неравенствам вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ или $\sqrt{f(x)} < g(x)$, логарифмическим неравенствам с переменным основанием логарифмов, показательно-степенным и др.

4.3. Неравенства с двумя переменными и смежные вопросы

Обновление линии неравенств, с нашей точки зрения, предполагает распространение идеи метода интервалов также на случай неравенств с двумя переменными, что создаёт пропедевтическую основу для изучения в вузовском курсе некоторых вопросов аналитической геометрии и методов линейного программирования.

С точки зрения математической логики, доказательство неравенства есть построение цепочки предикатов, равносильных данному, последний из которых очевидным образом является тождественно-истинным на своей области задания. В качестве завершающего звена такой цепочки выступают следующие «ключевые» неравенства:

а) $|a+b|\le|a|+|b|$ (так называемое неравенство треугольника);

б) $a+\dfrac{1}{a}\ge 2,\ a>0$, либо $a+\dfrac{1}{a}\le -2,\ a<0$ (равенство достигается при $a=\pm 1$, соответственно);

в) неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\dfrac{a+b}{2}\ge 2\sqrt{ab}$, $a\ge 0, b\ge 0$ (равенство достигается при $a=b$) и др.

Технологические приёмы доказательств определяются вышеуказанной теоретико-математической основой таких заданий. А именно, на первом этапе их рассмотрения устанавливаются ключевые неравенства. Так, например, неравенства б) для суммы взаимно-обратных чисел равносильно очевидной неотрицательности квадрата алгебраической суммы $(a\pm 1)^2$.

Следующий этап – изучение приёмов преобразований более сложных неравенств к ключевым.

Отдельного рассмотрения заслуживает метод индукции, применимый к доказательствам утверждений вида $P(n)$, $n \in N$ (и, в частности, неравенств) относительно числовых последовательностей.

4.4. Прикладной аспект линии неравенств

Приложения метода интервалов реализуются в задачах как собственно математических (применение метода интервалов при исследовании монотонности и характера выпуклости функций, а также решении заданий с модулями), так и практико-ориентированных. Примеры последних широко представлены в заданиях №10 открытого сегмента КИМов ЕГЭ по математике профильного уровня [4]. Системы линейных неравенств с несколькими переменными активно используются в задачах экономики. В терминах неравенств (границ погрешностей) формулируются оценки приближенных значений тех или иных физических величин, интервальные оценки параметров распределений случайных величин, методы проверки статистических гипотез.

Подводя итог сказанному, отметим, что рассмотренные нами теоретико-математические основы обновления содержательной линии неравенств в школьном курсе математики и соответствующие им технологические приёмы способствуют усилению мотивации математической деятельности, углублению теоретических знаний в различных областях математики, росту алгоритмической культуры учащихся.

Литература к главе 4

1.Федеральные Государственные Образовательные Стандарты [Электронный ресурс] //Режим доступа: Минобрнауки.рф/документы/336

2. Нахман А.Д. Функции и их свойства в программе подготовки к ЕГЭ// Математика в школе-2010- №3.– С.62-67.

3.Нахман А.Д., Родионов Ю.В. Технологические особенности задачного подхода в обучении математике [Электронный ресурс] : монография / Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. – 100 с. // Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/ 78219.html

4. Решу ЕГЭ: образовательный портал [Электронный ресурс] Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru/

Глава 5. РЕАЛИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЛИНИИ В ЗАДАНИЯХ С ПАРАМЕТРАМИ

Среди задач, поставленных Концепцией развития математического образования [1-4], особая роль отводится обеспечению обучающимся, имеющим высокую мотивацию и проявляющим выдающиеся математические способности, всех условий для развития и применения этих способностей. «Математическое образование должно обеспечивать каждого обучающегося развивающей интеллектуальной деятельностью на доступном уровне, используя присущую математике красоту и увлекательность… Возможность достижения высокого уровня подготовки должна быть обеспечена развитием системы специализированных общеобразовательных организаций и специализированных классов, системы дополнительного образования детей в области математики».

В классах с предпрофильной, профильной и углубленной математической подготовкой в рамках функциональной линии может быть выделена задачная система *исследовательского характера.* В свою очередь, здесь на первое место выходят задачи с параметрами. Именно такие задачи позволяют в полной мере проверить знание основных разделов школьной математики, выяснить уровень математического и логического мышления, первоначальные навыки исследовательской деятельности [5].

5.1. Задачи с параметрами как фактор формирования системности знаний

На сегодняшний день остаются актуальными проблемы отсутствия системности знаний у учащихся, умения переносить полученные знания на аналогичные или иные ситуации, недостаточной самостоятельности мышления. Эти проблемы во многом связаны со слабым использованием в образовательном процессе потенциала внутрипредметных связей. Именно при решении заданий с параметрами интегрируются знания, умения, навыки из:

а) математической логики (конъюнкция, дизъюнкция предикатов, отрицание предиката);

б) теории множеств: пересечение множеств (решения систем), объединение множеств (решения совокупности), дополнения множеств;

в) алгебры (делимость многочленов, разложение на множители, метод неопределенных коэффициентов и др.);

г) геометрии (преобразования симметрии, параллельного переноса, и др.), аналитической геометрии (поиск коэффициентов в уравнении линии, условие пересечение линий, взаимного расположении прямых и др.);

д) анализа функций одной или нескольких переменных (область определения, множество значений, характер четности, условия монотонности и экстремумов функции, свойства непрерывных функций и др.).

Задачи с параметрами представляют собою важный системообразующий фактор в процессе формирования математической компетентности учащихся. Их решение направлено на реализацию следующих целей:

- формирование у учащегося интереса к предмету, развитие их математических способностей;
- развитие исследовательской и познавательной деятельности учащихся;
- обеспечение условий для самостоятельной творческой работы;
- подготовка к ГИА (задания повышенной и высокой сложности) и к обучению в вузе;

Роль и значение задач с параметрами в реализации функциональной линии и соответствующий содержательно-методический компонент представлены ниже; см. также [6-10].

5.2. Задачи с параметрами: функциональный подход

В самом общем случае задача с параметром есть задача исследования свойств функции двух переменных $P(x,a)$, в которой требуется :

а)получить информацию о множестве всех возможных значениях параметра a, при условии, что имеется информация о множестве всех значений x;

б)получить информацию о множестве всех возможных значениях x при условии, что имеется информация о множестве всех значений параметра a;
в) получить информацию о всех возможных парах значений (x, a), отвечающих условию задачи.

Формально, $P(x,a)$ содержит две переменные, но с величиной x обычно обращаются именно как с *переменной* (неизвестной) величиной; что же касается значения параметра a, то оно считается *фиксированным*, хотя и неизвестным.

Собственно математические основы решения соответствующих задач заложены в свойствах функций двух переменных. Фактически, задача с одним параметром есть задача о нулях, знаках, экстремальных свойствах таких функций. Преподавателю математики при этом необходимо владеть основами их дифференциально-интегрального исчисления.

Опорными фактами для решения ряда задач с параметрами служат следующие базовые положения из математического анализа.

1. Теорема о существовании корня уравнения $f(x)=0$ в случае непрерывной функции f, принимающей на концах отрезка значения разных знаков.

2. Теорема о единственности корня уравнения $f(x)=g(x)$ (или отсутствии такового) в случае, когда функции f и g имеют различный характер монотонности.

3. Теорема о существовании корня уравнения с параметром: $a=f(x)$: корень существует тогда и только тогда, когда значение параметра a содержится во множестве значений функции f.

Приведем классификацию методов решения и типов задач с параметрами. Мы выделяем среди основных следующие методы их решения.

I. Общие методы:

1. Аналитический.

2. Аналитико-графический.

Последний метод иногда называют графическим, но саму по себе ссылку на изображенный график функции (взаимное расположение графиков функций) нельзя признать достаточной аргументацией каких-либо выводов. График, безусловно, служит важным инструментом поиска решения и иллюстрацией к рассуждениям, однако сами рассуждения строятся на использовании свойств функций. На эти свойства необходимо в стандартных случаях (напр., в случае основных элементарных функций) делать ссылки либо их (свойства) в более сложных случаях устанавливать (см. частные методы ниже).

II.Частные методы:

1) метод мажорант (метод оценки) в уравнениях и неравенствах;

2) использование свойств функций (свойства непрерывности, монотонности, интервалы знакопостоянства и др.);

3) исследование расположения корней квадратного уравнения, которое необходимо при решении многих задач, как непосредственно связанных с квадратным трехчленом, так и сводящихся к нему на каком-либо этапе;

4) использование метода интервалов, «шаблонных» приемов решения уравнений и неравенств с модулями вида

$$|y| = R, \quad |y| < R, \quad |y| > R,$$

стандартные «ходы» такие, как , прием выделения полного квадрата, преобразование линейного тригонометрического выражения к виду

$$A\sin t + B\cos t = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(t + \varphi)$$

и др.

Традиционно задачи с параметрами представлены следующими основными типами:

1) решение уравнений и неравенств в зависимости от значений параметра;

2) нахождение значений параметра, для которых уравнение имеет заданное количество решений;

3)нахождение значений параметра, для которых множество решений уравнений или неравенств обладает заданной характеристикой.

Решение задач с параметрами, как правило, невозможно путем следования стандартному алгоритму и требует от учащегося догадки, «переноса знаний» в новую ситуацию, словом – элементов математического творчества. Поэтому рекомендации для учащихся здесь могут носить лишь самый общий характер.

Прежде всего, полезно изучить приводимые в различных пособиях готовые образцы решений, поскольку используемые в них приемы могут быть в дальнейшем применены в аналогичных ситуациях.

Не стоит сразу браться за сложные задачи: начинать тренинг следует с «почти стандартных» случаев (случаи линейных, квадратных уравнений и неравенств параметрами и т.п.).

Учащемуся необходимо овладеть простейшими логическими понятиями и приемами, в частности, отличать системы неравенств (уравнений) от их совокупности, необходимые условия - от достаточных. Так, например, целые корни многочлена с целыми же коэффициентами (если при этом коэффициент при старшей степени равен единице) необходимо содержатся среди делителей свободного члена; тогда подстановка возможных корней в уравнение (неравенство) позволяет получить определенную информацию об искомом параметре.

«Ключ» к решению многих задач с параметрами содержится в геометрических интерпретациях. Так, например, если изобразить графики функций, содержащихся в левой и правой части рассматриваемого уравнения, то абсциссы точек пересечения графиков будут корнями уравнения, а их (точек) количество указывает на число решений. Такие интерпретации часто существенно упрощают анализ задачи.

Нередко подстановка конкретного значения параметра и «тестирование» этого значения на предмет того, содержится ли оно среди искомых значений, позволяет нащупать путь решения задачи.

Заключительным этапом решения задач с параметрами является запись ответа; важность его правильной записи особенно значима в тех случаях, где присутствует «ветвление» решения (об этом см. ниже). В подобных случаях формирование ответа - это сбор ранее полученных результатов, и здесь следует не только не забыть отразить в ответе все возможные случаи для рассматриваемого параметра, но и упростить, по возможности, ответ при наличии «смыкающихся» случаев.

5.3. Квадратическая функция

Исследование поведения квадратической функции (в частности, нахождение ее нулей и интервалов знакопостоянства) лежит в основе решения многих задач с параметрами. Речь идет о функции

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

Заметим, что при $a = 0$ имеем линейную функцию $y = bx + c,\ b \neq 0.$ Если значение коэффициента a не задано, то рассмотрение случая $a = 0$ является обязательным, а «потеря» этого случая является источником типичных ошибок.

Пример. При каких значениях параметра a уравнение $(2a-1)x^2 + 2x - 1 + 2a = 0$ имеет единственное решение? Найти это решение.

Анализ решения. Поскольку в условии не сказано, что уравнение квадратное, то возможны случаи :

1) $2a - 1 = 0$ – уравнение линейное; очевидно, что оно имеет единственное решение;

2) $2a - 1 \neq 0$- уравнение квадратное; в этом случае совпадение корней единственность решения) гарантируется условием : дискриминант уравнения $D = 0$.

Решение. В первом случае $2a - 1 = 0$ или $a = 0{,}5$ и тогда получаем линейное уравнение $2x = 0$, откуда x=0. Во втором случае дискриминант (найденный по «четной» формуле) имеет вид $D = 1 - (2a-1)^2$ и, следовательно, $D = 0$,

$(2a-1)^2 = 1$, откуда $a = 0$ или $a = 1$. При этом $x = -\dfrac{1}{2a-1}$. В первом случае имеем $x = 1$, а во втором $x = -1$. Получаем «ветвящийся» ответ :

x=0 при $a = 0{,}5$;

x=1 при $a=0$;

$x=-1$ при $a=1$.

Расположение нулей (корней) квадратного трехчлена. Значительная часть задач с параметрами сводится к условию, что нули квадратного трехчлена расположены в некотором заданном интервале (возможно, бесконечном). В основе решения таких задач лежат следующие теоретические положения.

1) Функция вида $y=Ax^2+Bx+C$ $(A\neq 0)$ непрерывна на всей числовой оси; следовательно, между точками, в которых она принимает значения разных знаков, расположен корень этого квадратного трехчлена. В частности, если, например, ордината y_0 вершины (x_0,y_0) параболы отрицательна, а в некоторой точке $x_*>x_0$ значение $y_*=y(x_*)>0$, то между точками x_0 и x_* имеется ровно один корень квадратного трехчлена.

2) Рассмотрим тот частный случай, когда корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена должны быть расположены в конечном интервале (a,b). Изобразив на координатной плоскости соответствующие параболы $y=Ax^2+Bx+C$ при $A>0$ и при $A<0$ (что мы предоставляем читателю), мы приходим к следующим условиям (необходимым и достаточным для расположения x_1 и x_2 в (a,b).

1) При $A<0$:

$$D=B^2-4AC\geq 0; \tag{1}$$

$$x_0=-\frac{B}{2A}\in(a,b),\quad y_0=y(x_0)\geq 0; \tag{2}$$

$$y(a)<0,\quad y(b)<0 \tag{3}$$

2) При $A>0$:

$$D=B^2-4AC\geq 0;$$

$$x_0=-\frac{B}{2A}\in(a,b),\quad y_0=y(x_0)\leq 0;\quad y(a)>0,\quad y(b)>0.$$

Условие (1) необходимо и достаточно для существования действительных корней. Установим необходимость остальных условий для расположения корней в интервале (a,b). Ограничимся случаем 1); рассуждения в случае 2) – аналогичны.

Первое из условий (2) необходимо выполнено (поскольку x_0 обязательно расположено между x_1 и x_2), а второе – следует из соотношений $A<0$ и (1), если учесть, что $y_0=-\dfrac{D}{4A}$. Наконец, условия (3) вытекают из неравенства $y_0=y(x_0)\geq 0$ и известного факта монотонности квадратного трехчлена при $x>x_0$ и $x<x_0$.

Убедимся теперь, что условия (2) и (3) также и достаточны для расположения корней в интервале (a,b). Случай $y(x_0)$=0 уже означает существование двух совпадающих корней на (a,b). Если же $y(x_0)>0$, то в каждом из интервалов (a, x_0), (x_0,b), в силу условий (3) и согласно, рассуждению п.1, существует по одному корню квадратного трехчлена.

Итак, при $A<0$ условия (1) - (3) оказываются необходимыми и достаточными для расположения корней в интервале (a,b).

Приведем задачи другого типа, связанные с расположением параболы, и в частности, нулей квадратного трехчлена.

Задача 1. При каком значении параметра *k* неравенство

$$x^2-(4k+1)x+4k^2+2k-6\geq 0$$

выполняется для любого *x* из интервала (-∞, 5] ?

Анализ задачи. Интервал (-∞, 5] должен содержаться во множестве решений неравенства. Следовательно, достаточно найти это множество и «погрузить» в него указанный интервал.

Решение. Найдём корни квадратного трёхчлена. Имеем дискриминант

$$D=(4k+1)^2 - 4(4k^2+2k-6) = 25 \text{ и } x_{1,2} = \frac{4k+1\pm 5}{2},$$

так что $x_1 = 2k-2$ и $x_2 = 2k+3$. Поскольку ветви параболы

$$y= x^2 - (4k+1)\,x + 4k^2+2k-6$$

обращены вверх, то решением неравенства являются два луча:

$$(-\infty,\ 2k\text{-}2] \quad \text{и} \quad [2k+3,\ +\infty).$$

Теперь данный луч $(-\infty, 5]$ должен целиком содержаться в $(-\infty, 2k\text{-}2]$, откуда $2k\text{-}2 \geq 5$, или $k \geq 3{,}5$.

Задача 2. Найти все значения *a*, при которых множество решений неравенства $x^2\text{-}(2x\text{-}3)a \geq 0$ содержит отрезок [3;6].

Анализ задачи. Рассмотрение всевозможных расположений параболы

$$y=x^2\text{-}2ax\text{-}3a$$

относительно отрезка [3;6] может подсказать ключ к решению. Так, если абсцисса x_0 вершина параболы расположена вне отрезка [3;6] (или совпадает с одним из его концов), то в силу монотонности квадратической функции на соответствующих лучах (левее и правее x_0) ее знак совпадет со знаком значения $f(3)$ и $f(6)$ соответственно. Если же x_0 расположена внутри отрезка, то неравенство $y\geq 0$ может быть выполнено на [3;6] тогда и только, когда вершина параболы расположена в верхней полуплоскости или на оси абсцисс, так что дискриминант квадратного трехчлена должен быть не больше нуля. Выполняя решение в соответствии с приведенным анализом, приходим к ответу $a \in (-\infty, 1]$.

Задача 3. При каких значениях параметра *a* множество значений функции $f(x) = ax^2 + x + 1$ содержит отрезок $[-1;1]$.

Как и в предыдущих двух задачах, имеем «погружение», на этот раз – отрезка $[-1;1]$ во множество значений функции. Следовательно, найдем множество значений $E(f)$.

Случай 1: $a = 0$. Имеем линейную функцию $f(x) = x + 1$, для которой

$$E(f) = (-\infty;+\infty),\ \text{так что}\ [-1;1] \subset E(f).$$

Случай 2: $a\neq 0$. Имеем квадратный трехчлен, графиком которого является парабола

$$y = ax^2 + x + 1$$

с вершиной

$$x_0 = -\frac{1}{2a}; \qquad y_0 = \frac{4a-1}{4a} = 1 - \frac{1}{4a}.$$

Если $a>0$, то ветви параболы направлены вверх и отрезок $[-1;1]$ оси ординат должен быть «не ниже» y_0:

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{a} \le -1 \\ a > 0 \end{cases}, \text{ откуда } \frac{4}{a} \ge 2 \text{ , и, следовательно, } \quad 0 < a \le 2.$$

Если же $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз и отрезок $[-1;1]$ должен быть «не выше» y_0 :

$$\begin{cases} 1 - \frac{4}{a} \ge 1 \\ a < 0 \end{cases},$$

а решением этой системы, очевидно, являются все $a < 0$.

Объединяя результаты всех трех рассмотренных случаев, имеем окончательно

Ответ: $a \in (-\infty, 2]$.

Использование *теоремы Виета.* Следует обратить внимание учащихся, что теорема Виета применима, если предварительно наложить (проверить) условие: дискриминант квадратного трехчлена $D \ge 0$. Весьма частым приемом при ее использовании является формула выделения полного квадрата

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

Приведем соответствующий

Пример 1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$$

больше, чем 12?

Решение. Если D - дискриминант уравнения, то

$$\frac{1}{4}D = a^2 - a^2 + a = a,$$

так что действительные корни уравнения существуют при $a \geq 0$. Далее, по теореме Виета получаем

$$x_1 + x_2 = 2a \ \text{ и } \ x_1 \cdot x_2 = a^2 - a.$$

Следовательно,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 2a^2 + 2a.$$

Итак, согласно условию задачи, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 2a^2 + 2a > 12, \\ a \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (a+3)(a-2) > 0, \\ a \geq 0, \end{cases}$$

решая которую, получаем $a > 2$.

Пример 2. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + x\sqrt{a^2 - 4a} - a - 2 = 0$ принимает наименьшее значение? Найти это значение.

Решение. Убедимся, что уравнение имеет действительные корни, вычислив дискриминант $D = a^2 + 8$, так что $D > 0$ при всех значениях a. С учетом области определения $\sqrt{a^2 - 4a}$ получаем существование корней при любом $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. Теперь, согласно теореме Виета,

$$x_1 + x_2 = -\sqrt{a^2 - 4a}, \ \ x_1 x_2 = -a - 2,$$

и тогда

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = a^2 - 2a + 4.$$

Осталось найти наименьшее значение функции $f(a) = a^2 - 2a + 4$ на множестве $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$. При этом абсцисса вершины соответствующей параболы a=1, так что $f(a)$ убывает при $a < 1$ и возрастает при $a > 1$. Следовательно при $a \leq 0$ имеем $f(a) \geq f(0) = 4$, а при $a \geq 4$ получаем $f(a) \geq f(4) = 12$. Значит, наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения, равное 4, достигается при $a = 0$.

5.4. «Ветвление» ответов

Решить уравнение или неравенство, содержащее параметр (параметры) - это значит для каждого допустимого значения параметра (каждой допустимой системы значений параметров) найти множество всех решений данного уравнения или неравенства.

Более подробно, фиксировав значение параметра, решаем данную задачу известными (соответствующими типу задачи) методами. Но получаемый ответ может определяться допустимыми для данных операций значениями параметров (например, при необходимости деления обеих частей уравнения на выражение, содержащее параметр, надо выделить тот случай, когда это выражение равно нулю). Отсюда и возникает так называемое ветвление ответов. Поясним сказанное примерами.

Пример 1. Решить уравнение

$$(a-1)\cdot x^2+2\cdot(2a+1)\cdot x+4a+3=0.$$

Анализ задачи. На первый взгляд, следует применять формулу решения квадратного уравнения. Однако, лишь при $a\neq1$ оно – квадратное, а при $a=1$ уравнение является линейным. Значит, целесообразно рассмотреть это уравнение как семейство уравнений, получающихся из него при следующих значениях параметра: 1) $a=1$; 2) $a\neq1$. Этими двумя случаями и буден порожден «ветвящийся» ответ.

Решение. 1) При $a=1$ уравнение имеет вид $6x+7=0$, и из него получаем $x=-\frac{7}{6}$.

2) Из множества значений параметра $a\neq1$ выделим те значения, при которых дискриминант уравнения обращается в ноль:

$$\frac{D}{4}=(2a+1)^2-(a-1)(4a+3)=0.$$

После упрощений получаем $\frac{D}{4}=5a+4$.

Из условия $\frac{D}{4}=0$ находим $a=-\frac{4}{5}$, и в этом случае квадратное уравнение будет иметь единственный корень (более точно – два совпадающих корня). В случае $a < -\frac{4}{5}$, будет $D < 0$ и уравнение корней не имеет; если же $a > -\frac{4}{5}$ (но $a \neq 1$), то $D >$ 0, и уравнение обладает двумя различными действительными корнями. Осталось найти эти корни. Имеем при $D \geq 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1},$$

причем при $a = -\frac{4}{5}$ (случай $D = 0$), получаем $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: 1) если $a < -\frac{4}{5}$, то корней нет;

2) если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$;

3) если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$;

4) если $\begin{cases} a > -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases}$ то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 2. Решить уравнение $\left|x^2 - 1\right| + \left|a(x-1)\right| = 0$.

Решение. Ввиду неотрицательности модулей данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left|x^2 - 1\right| = 0, \\ \left|a(x-1)\right| = 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ a(x-1) = 0. \end{cases}$$

При $a \neq 0$ второе уравнение системы, а значит, и система, имеет единственное решение $x = 1$. Если же $a = 0$, то из второго уравнения получаем, что x – любое действительное число, а из первого уравнения – $x = \pm 1$. Следовательно, в этом случае система имеет два решения: $x = 1$ или x

$=-1$.

Ответ: если $a \neq 0$, то $x = 1$; если $a = 0$, то $x = \pm 1$.

Особенностью решения неравенств с параметрами является то, что нули исследуемой функции обычно зависят от параметра и, следовательно, приходится рассматривать их «взаимоотношения», т.е различные случаи их расположения.

Пример 3. При всех значениях параметра a решить неравенство $ax-3x^2<0$.

Решение. Имеем $x(a-3x)<0$, откуда нулями функции $f(x)=x(a-3x)$ являются $x_1=0$ и $x_2=\frac{a}{3}$. Теперь возникают следующие три возможных случая расположения нулей на числовой оси.

1)Точка x_2 расположена правее x_1, т.е. $a>0$. Графиком функции $f(x)$ является парабола, ветви которой обращены вниз, и, следовательно, $f(x)$ отрицательна при $x\in(-\infty;0)\cup(\frac{a}{3};\infty)$.

2) Точка x_1 расположена правее x_2, т.е. $a<0$. В этом случае получаем $x\in(-\infty;\frac{a}{3})\cup(0;\infty)$.

3) Наконец, остается случай совпадающих корней, т.е. $a=0$. Имеем тогда $-3x^2<0$ и, следовательно, $x\in(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. Этот ответ можно «соединить» с ответом, найденным в п.2.

Ответ: $x\in(-\infty;0)\cup(\frac{a}{3};\infty)$ при $a>0$; $x\in(-\infty;\frac{a}{3})\cup(0;\infty)$ при $a\le 0$.

Пример 4. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$\frac{(5\cdot 0{,}2^x-0{,}2^a)x}{x-a-1}>0.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{(0{,}2^{x-1}-0{,}2^a)x}{x-a-1}>0,$$

заметим, что точка $x=a+1$, которая служит одним из нулей числителя, не содержится в области определения неравенства. Ввиду убывания показательной функции вида $y = 0{,}2^t$, содержащаяся в числителе дроби функция $f_1(x) = 0{,}2^{x-1} - 0{,}2^a$ и $f_2(x) = x - a - 1$ имеют разные знаки. Следовательно ,

$$f_3(x) = \frac{0{,}2^{x-1} - 0{,}2^a}{x - a - 1} < 0 \text{ при всех } x \neq a + 1,$$

а значит неравенство выполнено лишь при $x < 0$. Остается проанализировать расположение точек $x = 0$ и $x = a + 1$ на числовой оси.

Случай 1. Точка $x = 0$ - левее точки $x = a + 1$, т.е. $a + 1 > 0$, или $a > -1$. В этом случае все $x < 0$ являются решениями неравенства. Теми же самыми остаются все решения неравенства в том случае, если $a + 1$=0, т.е. $a = -1$.

Случай 2. Точка $x = 0$ расположена правее точки $x = a + 1$, т.е. $a < -1$. В этом случае все $x < a + 1,\ a + 1 < x < 0$ являются решениями неравенства.

Итак,

$$x \in (-\infty, 0) \text{ при } a \geq -1;$$

$$x \in (-\infty, a + 1) \cup (a + 1,\ 0), \text{ если } a < -1.$$

5.5.Трансцендентные функции в уравнениях и неравенствах

Иррациональные уравнения, содержащие параметр, как и обычные иррациональные уравнения, решаются с помощью, вообще говоря, неравносильных преобразований (получения уравнения-следствия). Так, при возведении в квадрат обеих частей уравнения вида

$$\sqrt{f(x,a)} = g(x,a)$$

возникает ограничение на знак его правой части, в результате чего найденные корни $x = x(a)$ должны удовлетворять условию $g(x,a) \geq 0$.

Пример 1. Решить уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$.

Решение: Приведем уравнение к виду

$$\sqrt{a - x^2} = x - 1$$

и потребуем $x-1\geq 0$ или $x\geq 1$. В результате возведения в квадрат обеих частей уравнения получим $a-x^2=(x-1)^2$, так что, в частности, оказывается выполненным условие существования квадратного корня $a-x^2\geq 0$. Далее, выполняя тождественные преобразования, получим

$$x^2-x+0{,}5(1-a)=0;$$

дискриминант этого уравнения $D = 2a - 1$. Теперь:

1) при $a > 0{,}5$ имеем $x_{1,2} = 0{,}5\cdot(1 \pm \sqrt{2a-1})$;
2) при $a = 0{,}5$ получим $x = 0{,}5$;
3) при $a < 0{,}5$ уравнение не имеет действительных корней.

Условию $x\geq 1$ не удовлетворяет второй из случаев; в случае $a > 0{,}5$ значение

$$x_2 = 0{,}5\,(1-\sqrt{2a-1})\leq 0{,}5$$

и, следовательно, также не удовлетворяет ограничению на корни исходного уравнения.

Наконец, $x_1 = 0{,}5\,(1+\sqrt{2a-1})$ при $a > 0{,}5$ удовлетворит условию $x\geq 1$, если

$$0{,}5\,(1+\sqrt{2a-1})\geq 1 \text{ или } \sqrt{2a-1}\geq 1,$$

откуда получаем $a\geq 1$.

Итак, при $a \geq 1$ имеем $x = 0{,}5\cdot(1+\sqrt{2a-1})$; при $a < 1$ уравнение не имеет решений.

Пример 2. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$\sqrt{x-3}(x+a)\geq 0.$$

Исследование всех возможных расположений значения а относительно точки -3 *и нахождение знаков функции* $f(x) = \sqrt{x-3}(x+a)$ в соответствующих интервалах приводит к следующему результату:

$$x\in[3;+\infty) \text{ при } a\geq -3;$$

$$x=3 \text{ либо } x\in[-a;+\infty) \text{ при } a<-3.$$

В задачах, содержащих *показательную функцию*, ограничение на параметр возникает ввиду того, что значения показательной функции – положительны. Приведем следующий

Пример. При каких значениях параметра r уравнение

$$15\cdot 10^{x}-20=r-r\cdot 10^{x+1}$$

не имеет корней?

Решение. Преобразуем уравнение к виду

$$15\cdot 10^{x}+10r\cdot 10^{x}=r+20 \quad \text{или} \quad 10^{x}(15+10r)=r+20.$$

В случае $15+10r=0$, т.е. $r=-1{,}5$, имеем при всех x неверное соотношение 0=–1,5+20, т.е. убеждаемся в отсутствии корней . В противном случае

$$10^{x}=\frac{r+20}{10r+15}.$$

Поскольку все значения показательной функции положительны, то решений нет при

$$\frac{r+20}{10r+15}\le 0,$$

т.е. $r\in[-20,-1{,}5)$. Окончательно, $r\in[-20,-1{,}5]$.

Особенностью решения логарифмических уравнений и неравенств с параметрами является наличие области определения, что вносит определенные условия на параметр.

Пример 1. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2-\log_{a^2}(1+x)=3\log_a\sqrt{x-1}-\log_{a^2}(x^2-1)^2.$$

Решение. Легко проверить, что уравнение определено при $x>1$; при этом $a>0$, $a\neq -1$ и $a\neq 1$.

Преобразуем уравнение следующим образом

$$\log_a a^2+\log_a(x^2-1)=\log_a(\sqrt{x-1})^3+\log_a\sqrt{x+1},$$

$$\log_a(a^2(x^2-1))=\log_a((\sqrt{x-1})^3\sqrt{x+1}),$$

$$a^2(x^2-1)=(x-1)\sqrt{(x-1)(x+1)},$$

$$a^2\,(x-1)\,(x+1) = (x-1)\,\sqrt{(x-1)(x+1)}\,.$$

Так как на области определения $x \neq -1$ и $x \neq 1$, то можно сократить обе части уравнения на $(x-1)\sqrt{x+1}$. Тогда

$$a^2\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}\,,$$

и после возведения в квадрат обеих частей получим

$$a^4\,(x+1) = x-1 \text{ или } x(1-a^4) = a^4+1.$$

При $a \neq -1$ и $a \neq 1$ имеем

$$x = \frac{1+a^4}{1-a^4}.$$

Для того чтобы значения x являлось решением уравнения, должно выполняться условие $x > 1$, то есть

$$\frac{1+a^4}{1-a^4} > 1.$$

Осталось решить полученное для параметра a неравенство:

$$\frac{1+a^4}{1-a^4} - 1 > 0, \text{ или } \quad \frac{2a^4}{1-a^4} > 0.$$

Так как $a > 0$, то полученная дробь положительна, если $1 - a^4 > 0$, то есть при $0 < a < 1$.

Итак, при $0 < a < 1$ найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

Ответ: при $a \leq 0$, $a = 1$ уравнение не определено;

при $a > 1$ уравнение не имеет решений;

при $0 < a < 1$ решениями являются $x = \dfrac{1+a^4}{1-a^4}$.

Пример 2. Найти все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции

$$y = \log_{a+1}(a^x - a^{ax+2})$$

имеются двузначные натуральные числа, но не содержится ни одного трехзначного натурального числа.

Решение. Область определения будет найдена в результате решений неравенств

$$a^x - a^{ax+2} > 0 \text{ и } a+1>0,\ a+1 \neq 1$$

Последние два условия, очевидно, выполнены при всех заданных положительных значениях a.

Вообще говоря, рассмотрение должно содержать случаи всех положительных значений a, в том числе и $a=1$. Однако область определения данной функции, определяемая решениями неравенства $a^x > a^{ax+2}$ при $a=1$ - пуста.

В случае $a>1$ имеем область определения логарифмической функции, т.е. множество решений неравенства $a^x > a^{ax+2}$, в виде $x > ax+2$, или $x(1-a)>2$. Поскольку рассматривается случай $1-a<0$, то меняем знак неравенства при делении на $1-a$:

$$x < 2/(1-a).$$

Получаем отсюда, что при $a>1$ значения x всегда отрицательны, а тогда область определения не может вообще содержать натуральных чисел.

В случае же $0<a<1$ имеем $x<ax+2$, т.е. $x(1-a)<2$. Поскольку $1-a>0$, то приходим к неравенству

$$x < 2/(1-a).$$

Потребуем одновременно, чтобы правая граница значений x превышала число 10, но не превышала числа 100, т.е.

$$2/(1-a) > 10 \text{ и } 2/(1-a) \leq 100\,(0<a<1).$$

Тогда множество меньших значений x содержит хотя бы одно натуральное двузначное число (по меньшей мере, число 10), но не может содержать трехзначных чисел (поскольку значения x оказались левее точки 100).

Решаем первое неравенство с учетом условия $0<a<1$:

$$1-a<0{,}2 \text{ или } a>0{,}8$$

В случае второго неравенства имеем

$$1-a > 0{,}02 \text{ или } a \le 0{,}98.$$

Окончательно получаем $a \in (0{,}8,\, 0{,}98]$.

Ответ: $a \in (0{,}8,\, 0{,}98]$.

5.6. Задачи с параметрами, содержащие тригонометрические функции

Особенности решения таких задач состоят в ограничении на возможные значения функций $y = \sin x,\; y = \cos x$ $(y \in [-1{,}1])$ и существующих связях между тригонометрическими функциями. Продемонстрируем сказанное в следующем примере.

Пример. При каких значениях параметра *a* уравнение

$$\cos x - \frac{1}{2} = \sqrt{\cos 4x - \cos x + a}$$

имеет хотя бы одно решение?

Анализ задачи. Решения x существуют при ограничении

$$\cos x - \frac{1}{2} \ge 0, \quad \text{то есть} \quad \cos x \ge \frac{1}{2}.$$

Указанное ограничение предстоит использовать, если в решении будет введена соответствующая замена переменных. Параметр a следует, далее, выразить из преобразованного уравнения, в результате чего станет возможным определить условия, при которых уравнение имеет решения.

Решение. В результате возведения в квадрат имеем:

$$(\cos x - \frac{1}{2})^2 = \cos 4x - \cos x + a.$$

В частности, те решения, которые будут найдены, удовлетворяют области определения уравнения

$$\cos 4x - \cos x + a \ge 0.$$

Теперь имеем

$$\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4} = \cos 4x - \cos x + a,$$

откуда, понижая степень, получим

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}=\cos 2\cdot 2x+a.$$

Далее, по формуле косинуса двойного угла, будем иметь

$$\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}=2\cos^2 2x-1+a$$

или

$$a=\frac{-8\cos^2 2x+2\cos 2x+7}{4}.$$

Значит, значения параметра a должны принадлежать множеству значений $E(f)$ функции

$$f(x)=\frac{-8\cos^2 2x+2\cos 2x+7}{4} \text{ при условии } \cos x\geq\frac{1}{2}.$$

Неравенство $\cos x\geq\frac{1}{2}$ имеет решения $-\frac{\pi}{3}+2\pi k\leq x\leq\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$,

откуда

$$-\frac{2\pi}{3}+4\pi k\leq 2x\leq\frac{2\pi}{3}+4\pi k, k\in Z, \text{ или } -\frac{1}{2}\leq\cos 2x\leq 1.$$

Теперь

$$a\in E(g(t)), \text{ где } g(t)=\frac{-8t^2+2t+7}{4} \text{ при } \quad t=\cos 2x.$$

Осталось решить стандартную задачу на поиск наибольшего и наименьшего значений функции $g(t)$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2};1\right]$, которая решается с использованием производной. Имеем $g'(t)=\frac{1}{2}-4t$; критическая точка

$$t_0=\frac{1}{8}\in\left[-\frac{1}{2};1\right]; \text{ при этом } g\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{57}{32};\ g(1)=\frac{1}{4};\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Значит,

$g_{наименьшее}=\frac{1}{4}$; $g_{наибольшее}=\frac{57}{32}$; $\mathrm{E}(g)=\left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right]$, и, наконец, $a\in\left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{4};\frac{57}{32}\right]$.

5.7. Задачи на «отсечение» корней

Особенность таких задач состоит в том, что некоторые из получаемых корней уравнения следует «отсечь» согласно условию задачи или (и) области определения уравнения. Соответственно, возникают специальные условия на параметр.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$(ax^2 - 4x + 1)(x^2 - 4x - 5) = 0$$

имеет три действительных различных корня?

Анализ задачи. Возможно не более четырех различных корней уравнения. Следовательно, первый из перемножаемых многочленов должен иметь либо ровно один корень (или два совпадающих), либо два различных действительных корня, один из которых совпадет с корнем второго многочлена.

Решение. Многочлен $P(x) = x^2 - 4x - 5$ имеет два различных корня $x_1=5$ и $x_2= -1$. Следовательно, для многочлена $Q(x) = ax^2 - 4x + 1$ возможны три следующих случая.

1) $Q(x)$ – многочлен первой степени, т.е. $a = 0$, так что его корнем служит $x_3 = \dfrac{1}{4}$ – число, отличное от x_1 и x_2. В этом случае имеем ровно три различных корня.

2) Корни многочлена $Q(x)$ при $a \neq 0$ совпадают и отличны от x_1 и x_2:

$$D = 0;\ 4 - a = 0;\ a = 4.$$

В этом случае

$$Q(x) = 4x^2 - 4x + 1 \text{ и } x_3 = x_4 = \frac{1}{2}.$$

Один из корней квадратного трехчлена $Q(x)$ равен x_1 (либо x_2), а другой отличен от x_2 (либо от x_1). Имеем при $x = 5$

$$Q(5) = 25a - 20 + 1 = 0;\ a = \frac{19}{25}.$$

Легко проверить, что второй корень $Q(x)$ отличен от $x_2= -1$.

В случае же $x = -1$ имеем

$$Q(-1) = a + 4 + 1 = a + 5; \quad a + 5 = 0; \; a = -5;$$

в этом случае второй корень $Q(x)$ отличен от $x_1=5$.

Ответ: $a \in \{-5, 0, \frac{19}{25}, 4\}$.

Перейдем к рассмотрению дробно-рациональных уравнений, содержащих параметр. Особенность их решения состоит в наличии неравносильных преобразованиях к уравнению вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ - некоторый многочлен. Неравносильность, в свою очередь, обусловлена случаями обращения знаменателя дроби в ноль, что и служит «поводом» для отсечения корней.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{x^2 - ax + 1}{x + 3} = 0$$

имеет единственное решение?

Анализ задачи. Квадратный трехчлен, записанный в числителе дроби, имеет, вообще говоря, не более двух действительных корней (возможно, совпадающих). Единственность корня возможна, если его дискриминант равен нулю (и при этом корень содержится в области определения уравнения), или если дискриминант больше нуля, но один из корней не входит в область определения.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Имеем дискриминант уравнения $D = a^2-4$, отсюда $D = 0$, если $a = \pm 2$; в обоих случаях найденный единственный корень уравнения ($x = 1$, $x = -1$ соответственно) содержится в области определения. Если же «запретный» $x = -3$ есть корень уравнения $x^2-ax+1 = 0$, то подставив это значение, получаем $a = -\frac{10}{3}$, причем при таком значении a второй корень квадратного уравнения (как легко проверить) отличен от -3.

Ответ: $a = \pm 2$ или $a = -\dfrac{10}{3}$.

Пример 3. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} + \frac{a^2-3}{a(x+1)(x+2)} = 0 \quad .$$

Решение. При a=0 уравнение не определено. Если $a \neq 0$, то в результате преобразований (и, в частности, приведения к общему знаменателю) получаем, что числитель дроби

$$x^2+2\,(1-a)\,x + a^2 - 2a - 3 = 0 \text{ при условии } (x+1)(x+2) \neq 0.$$

Дискриминант уравнения $\frac{D}{4} = (1-a)^2 - (a^2 - 2a - 3) = 4$. Следовательно, его корни $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 3$.

Исключим теперь из рассмотрения такие значения x, при которых $x_1+1=0$, $x_1+2=0$, $x_2+1=0$, $x_2+2=0$. А именно, исключаем случаи

1) $(a+1)+1=0$, т.е. $a = -2$; таким образом, при $a = -2$ - x_1-посторонний корень уравнения;

2) $(a+1)+2=0$, т.е. $a = -3$; таким образом, при $a = -3$ - x_1 - посторонний корень уравнения ;

3) $(a-3)+1=0$, т.е. $a=2$; таким образом, при $a=2$ x_2 - посторонний корень уравнения ;

4)наконец, $(a-3)+2=0$, т.е. $a=1$; значит, при $a = 1$ x_2 - посторонний корень уравнения.

Следовательно, при $a = -2$ надо вычислить только x_2: $x_2 = -5$; при $a = -3$ получаем $x_2 = -6$.

При $a=2$ имеем $x_1=3$, а при $a=1$ получаем $x_1=2$.

Окончательно имеем:

если $a = 3$, то $x = -6$;

если $a = -2$, то $x = -5$;

если $a=0$, то корней нет;

если $a = 1$, то $x=2$;

если $a=2$, то $x=3$;

в остальных случаях уравнение имеет пару корней

$$x_1 = a + 1,\ x_2 = a - 3.$$

5.8. Производные функций в задачах с параметрами

Здесь можно выделить два основных класса задач: задачи на исследование свойств функции (в том числе на нахождение области значений) и задачи на тему «Касательная». К первому классу примыкают задачи на нахождение множества значений функции.

Следует иметь в виду, что условие касания прямой $y = kx + b$ графика функции $y = f(x)$ в точке x_0 равносильно выполнению одновременно следующих двух условий:

$f'(x_0) = k$ и $kx_0 + b = f(x_0)$ (совпадение ординат в точке касания x_0).

Приведем примеры соответствующих задач с параметрами.

Пример 1. При каком значении параметра a прямая $y = 1 - 2x$ является касательной к графику функции $y = ax^2 + 2x - 1$?

Решение. Согласно только что сформулированным условиям имеем в точке x касания одновременно выполненными условия

$$(ax^2 + 2x - 1)' = -2) \quad \text{и} \quad 1 - 2x = ax^2 + 2x - 1.$$

Следовательно, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 2ax + 2 = -2 \\ ax^2 + 4x = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{a} \\ a\dfrac{4}{a^2} - \dfrac{8}{a} = 2 \end{cases},$$

откуда $a = -2$.

Пример 2. Найти значение $b - 5a$, если (при соответствующих значениях параметров a и b) прямая $y = b - ax$ является касательной к графику функции

$$y=\frac{\log_{-a}(x^2-5x-a)}{\log_{-a}e}$$

в точке $x=5$.

Решение. Данная функция определена, если $x^2-5x-a>0,\ a<0, a\neq -1$. Далее, $y=\ln(x^2-5x-a),\ y'=\dfrac{2x-5}{x^2-5x-a}$, и, согласно геометрическому смыслу производной, имеем

$$\frac{2x-5}{x^2-5x-a}=-a,\ x=5,$$

откуда $\dfrac{5}{-a}=-a$, т.е. $a=\pm\sqrt{5}$, или, с учетом условий на параметр, $a=-\sqrt{5}$.

Далее, касательная при $x=5$ должна иметь общую точку с графиком функции, т.е. $y(5)=-5a+b$ или $\ln(-a)=-5a+b$, откуда для $a=-\sqrt{5}$ имеем $\ln\sqrt{5}=5\sqrt{5}+b$, так что $b=\ln\sqrt{5}-5\sqrt{5}$.

Окончательно получаем уравнение касательной в виде $y=-x\sqrt{5}+\ln\sqrt{5}-5\sqrt{5}$ и $b-5a=\dfrac{1}{2}\ln 5.$

5.9. Экстремальные свойства функции

Как правило, речь идет об интервалах монотонности и экстремумах функции и об ее наибольшем и наименьшем значениях; важно, чтобы учащиеся не путали понятия максимума (минимума) и наибольшего (наименьшего) значения функции. Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. При каком значении параметра a наибольшее значение функции

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^3+7x^2+1$$

на отрезке $[a;6{,}97]$ равно $11{,}25$.

Решение. Воспользуемся стандартным алгоритмом поиска наибольшего значения функции на отрезке. Найдем производную: $f'(x)=x(x^2-9x+14)$.

Среди критических точек $x = 0, x = 2, x = 7$ только первые две расположены левее $6{,}97$. Исследуя знаки производной, получаем: $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ и при $x \in (2, 6{,}97]$, а также $f'(x) > 0$ при $x \in (0, 2)$. Следовательно, $x = 0$ оказывается точкой минимума функции, а $x = 2$ - точкой максимума. Тогда для $x \in [0, 6{,}97]$ все значения $f(x) \le f_{\max} = f(2) = 9$, и, следовательно, на этом отрезке не может быть точки, в которой значение функции равно $11{,}25$. Значит, возможен лишь случай расположения точки a левее нуля. Значение функции, равное $11{,}25$ наводит на мысль рассмотреть $x = -1$; действительно, $f(-1) = 11{,}25$. Поскольку функция убывает при $x \in (-\infty, 0)$, то такое значение аргумента - единственное. Итак, выбрав левым концом отрезка $a = -1$, имеем на этом отрезке (а именно, в точке a) значение функции, равное $11{,}25$ наибольшим.

Ответ: $a = -1$.

Пример 2. При каких значениях параметра *a* функция

$$f(x) = 8ax - a\sin 4x - 7x - \sin 5x - a$$

возрастает при всех *x*?

Решение. Условие $f'(x) \ge 0, x \in (-\infty; +\infty)$ служит достаточным для возрастания. Имеем

$$f'(x) = 8a - 4a\cos 4x - 5\cos 5x - 7 .$$

Теперь неравенство

$$8a - 7 + (4a\cos 4x + 5\cos 5x) \ge 0$$

должно быть выполнено, при всех *x*, так

$$4a\cos 4x + 5\cos 5x \le 8a - 7 .$$

Наименьшее значение

$$p(x) = 4a\cos 4x + 5\cos 5x$$

достигается, если одновременно $\cos 4x = 1$; $\cos 5x = 1$, что, в свою очередь, возможно, например, при $x = 0$. Имеем: $p(0) = 4a + 5$, так что неравенство $4a\cos 4x + 5\cos 5x \le 8a - 7$ принимает вид $4a + 5 \le 8a - 7$, откуда $a \ge 3$.

Ответ: $a \ge 3$.

Следующая задача связана с отысканием множества значений функции.

*Пример 3***.** При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x-1}=\sqrt{x-5}+a$ имеет корни?

Решение. Изучим

$$f\ (x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x-5}\text{, поскольку } a=\sqrt{x-1}-\sqrt{x-5}\,.$$

Удобно преобразовать $f\,(x)$ к виду

$$f\,(x)=\frac{\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-5}\right)\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}\right)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}},\ \ f\,(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-5}}\,.$$

На области определения D(f) = $[5;+\infty)$ имеем убывание (к нулю) значений $f(x)$; при этом $f\,(5)=\ 2$. Итак, E(f) = $(0;2]$, а $a\in(0;2]$.

Ответ: $(0;2]$.

5.10. Задачи, сводящиеся ко введению параметра

Порой постановка задачи такова, что в условии речь не идет о параметрах, однако в процессе анализа задачи возникают необходимость нахождения значений именно некоторых параметров. Приведем примеры таких заданий.

Пример 1 . Доказать, что при всех действительных значениях x и y имеет место неравенство

$$x^2+10y^2-6xy+10x+10y^2-26y+30>0.$$

Решение. Функцию двух переменных

$$\phi(x,y)=x^2+10y^2-6xy+10x+10y^2-26y+30$$

можно рассматривать и как квадратный трехчлен относительно переменной x, обращаясь с y как с *параметром* («параметризованный» квадратный трехчлен). В этом случае неравенство следует переписать виде

$$x^2+(-6y+10)x+(10y^2-26y+30)>0$$

и теперь достаточно доказать, что полученный трехчлен

$$f_y(x)=x^2+(-6y+10)x+(10y^2-26y+30)$$

с положительным старшим коэффициентом обладает отрицательным (при всех значениях y) дискриминантом

$$\frac{D}{4}=(3y-5)^2-(10y^2-26y+30)=-(y^2+4y+5).$$

Но, и в самом деле, при всех значениях y имеем соотношение

$$-(y^2+4y+5)<0$$

(дискриминант последнего трехчлена отрицателен), откуда вытекает, что $f_y(x)<0$ для всех x при каждом значении параметра y. Таким образом, функция $\phi(x,y)$, введенная выше, оказывается отрицательной для всех пар значений x и y, что и требовалось установить.

Среди задач, сводящихся ко введению параметра, особое место занимают задачи на делимость многочленов. Начнем с задачи, в которой параметры присутствуют явно.

Пример 2. При каких значениях a и b многочлен

$P(x)=x^4-ax^2+bx-12$ делится нацело на $T(x)=x^2-2x-3$.

Решение. На основании определения делимости многочленов можно записать тождество $P(x)=T(x)q(x)$, в котором через $q(x)$ обозначено частное от деления. Находя корни многочлена T (x), разложим его на множители:

$$T(x)=(x-3)(x+1).$$

Теперь

$$x^4-ax^2+bx-12=(x-3)(x+1)q(x);$$

в записанном *тождестве* удобно выбрать значения $x=3$ и $x=-1$. В обоих случаях правая часть тождества обращается в ноль; в первом случае имеем $81-9a+3b-12=0$, во втором – $1-a-b-12=0$.

Приходим, следовательно, к системе уравнений для нахождения a и b:

$$\begin{cases}-3a+b=-23\\ -a-b=11\end{cases}$$, откуда находим $a=3,\ b=-14$.

Продемонстрированный здесь метод *неопределенных коэффициентов* применяется и при решении следующей задачи.

Пример 2. Многочлен $P(x)$ делится нацело на $x-1$ и на $x+1$, а при делении на $x-3$ дает остаток, равный 8. Найти остаток от его деления на

$$x^3+3x^2-x-3.$$

Учащийся, владеющий теоремой Безу, сразу сделает заключение, что из условия задачи вытекают соотношения

$$P(1)=P(-1)=0 \text{ и } P(3)=8.$$

Если же эта теорема не знакома, то на основании определения делимости многочленов с остатком можно заключить, что

$$P(x)=(x-1)q_1(x),$$

$$P(x)=(x+1)q_2(x),$$

$$P(x)=(x-3)q_3(x)+8,$$

$$P(x)=(x^3+3x^2-x-3)q_4(x)+r(x)\quad;$$

здесь $q_k(x),\ k=1,2,3,4$ - соответствующие частные от делений, остаток $r(x)$ от деления на многочлен третьей степени есть многочлен степени, меньшей третьей (т.е. не выше второй), так что $r(x)=ax^2+bx+c$ и

$$P(x)=(x^3+3x^2-x-3)q_4(x)+ax^2+bx+c\quad.$$

Таким образом, задача сведена к нахождению *параметров* (именно, a, b, c) в последнем тождестве. Для их нахождения достаточно выбрать значения переменной x равные именно 1, -1 и 3. Заметим, что многочлен x^3+3x^2-x-3 при каждом из этих значений оказывается равным нулю. Последовательно полагая $x=1,\ x=-1,\ x=3$, имеем систему уравнений для a, b и c:

$$\begin{cases} 0=a-b+c \\ 0=a+b+c \\ 8=9a-3b+c \end{cases},$$

откуда получаем $a=1,\ b=0,\ c=-1$. Значит искомый остаток

$$r(x) = x^2 - 1.$$

5.11. Разные задачи с параметрами

Пример 1. Доказать, что при всех $p \neq 0$ имеет место неравенство

$$(1 + ctg\, x)\sin^3 x + (1 + tg\, x)\cos^3 x < \frac{p^4 + 1}{p^2} \quad .$$

Решение. Заметим, что правая часть неравенства не зависит от *x*, а левая – от *p*. Следовательно, достаточно найти такое число, которое «разграничивает» левую и правую части: левая меньше этого числа, правая – больше (возможно также, что одна из частей неравенства совпадет с этим числом). Если, реализуя этот план, правую часть записать в виде $p^2 + \dfrac{1}{p^2}$, то получим при всех $p \neq 0$, что

$$p^2 + \frac{1}{p^2} \geq 2 \quad .$$

Действительно, последнее неравенство – стандартное:

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad (a > 0) \qquad \text{при } a = p^2.$$

Осталось оценить левую часть доказываемого соотношения сверху тем же числом 2. Для этого, раскрывая скобки, выделим в отдельное слагаемое сумму кубов, а затем попытаемся вынести общий множитель:

$$(1 + ctg\, x)\sin^3 x + (1 + tg\, x)\cos^3 x = \sin^3 x + \cos^3 x +$$
$$+\frac{\cos x}{\sin x}\sin^3 x + (1 + ctg\, x)\sin^3 x + (1 + tg\, x)\cos^3 x = \sin^3 x + \cos^3 x +$$
$$+\frac{\cos x}{\sin x}\sin^3 x + \frac{\sin x}{\cos x}\cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x) +$$
$$+(\sin x + \cos x)\sin x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x) =$$
$$= \sin x + \cos x.$$

Поскольку $\sin x$ и $\cos x$ не превосходят числа 1 и при этом одновременно не обращаются в единицу, то при всех *x* имеет место оценка

$$\sin x + \cos x < 2.$$

Итак, левая часть доказываемого неравенства при всех значениях переменной x оказывается меньше числа 2, а правая его часть не меньше 2,

Значит, при всех значениях x и всех $p \neq 0$ неравенство установлено.

Пример 2. При каких значениях параметра a все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющие неравенству $y > 5(x-a)^2 - \sqrt{9-a^2}$, одновременно удовлетворяют и $y > x^2 - 3$?

Решение. Задача «при каком соотношении m и n все решения неравенства $y > m$ одновременно являются решениями неравенства $y > n$» имеет очевидный ответ: $n \leq m$. Тогда в данном примере потребуем, чтобы

$$x^2 - 3 \leq 5(x-a)^2 - \sqrt{9-a^2} \text{ при всех } x,$$

или

$$4x^2 - 10ax + 5a^2 + 3 - \sqrt{9-a^2} \geq 0.$$

Найдем дискриминант

$$D = 100a^2 - 16(5a^2 + 3 - \sqrt{9-a^2}) = 20a^2 + 16\sqrt{9-a^2} - 12.$$

Дискриминант меньший либо равный нулю определит искомый параметр:

$$5a^2 - 12 + 4\sqrt{9-a^2} \leq 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{9-a^2} \leq 12 - 5a^2,$$

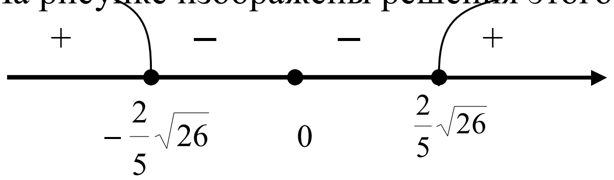
$$\begin{cases} 12 - 5a^2 \geq 0, \\ 9 - a^2 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \leq \dfrac{12}{5}, \\ a^2 \leq 9. \end{cases} \Leftrightarrow a^2 \leq \frac{12}{5}$$

откуда $-\sqrt{\dfrac{12}{5}} \leq a \leq \sqrt{\dfrac{12}{5}}$. Далее,

$$9 - a^2 \leq \frac{144 - 120a^2 + 25a^4}{16}, \text{ откуда}$$

$$25a^4 - 104a^2 \geq 0$$

На рисунке изображены решения этого неравенства:

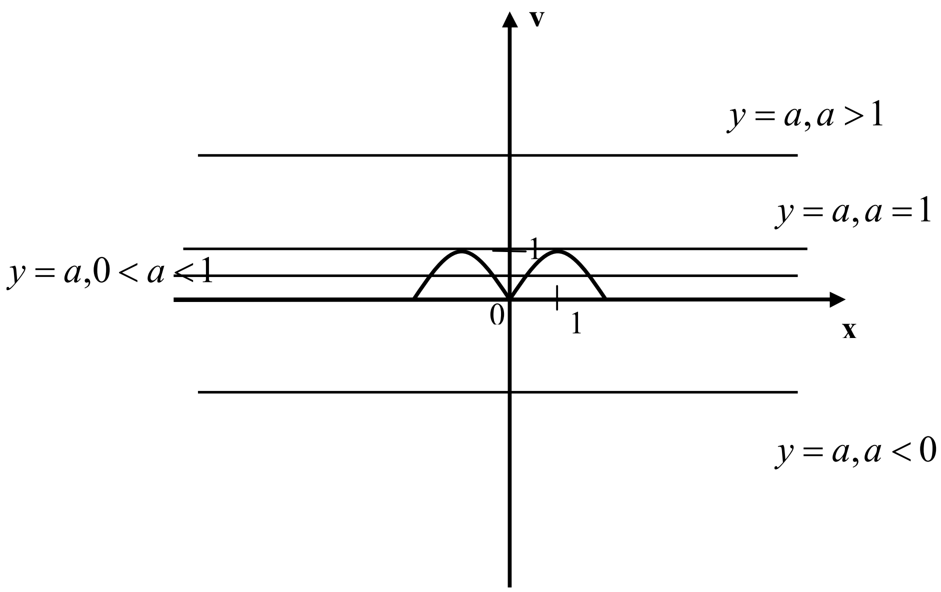


С учетом условия $-\sqrt{\dfrac{12}{5}} \le a \le \sqrt{\dfrac{12}{5}}$ имеем

Ответ: $a = 0$.

Пример 3. Для каждого значения параметра a определить число решений уравнения $\sqrt{2|x| - x^2} = a$.

Решение. Построим графики функции $y = \sqrt{2|x| - x^2}$ и прямую $y = a$, параллельную оси OX:



Анализ их взаимного расположения (предоставим его читателю) приводит к следующему ответу.

Ответ: если $a < 0$, или $a > 1$, то решений нет;

если $a = 0$, то имеются 3 решения;

если $a = 1$, то имеются 2 решения;

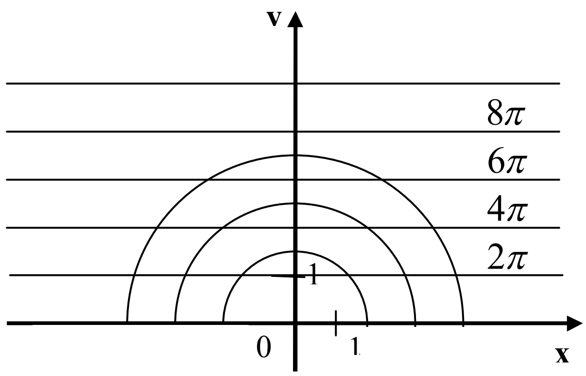
если $0 < a < 1$, то имеем 4 решения.

Пример 4. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно 8 решений.

Решение. Имеем $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi k, \quad k \in \mathrm{Z}$. Рассмотрим функции

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и $y = 2\pi k$.

Первая из них задает семейство полуокружностей с центром в точке с координатами $(0;0)$, вторая - семейство прямых параллельных оси абсцисс.



Число корней будет равно числу 8, если радиус полуокружности будет больше 6π и меньше 8π, то есть $6\pi < r < 8\pi$. Заметим, что r есть $|a|$.

Ответ. $-8\pi < a < -6\pi$ или $6\pi < a < 8\pi$.

Пример 5. При каком значении параметра *a* область определения функции $y = \sqrt[6]{-x^2 + 4x + a} + \sqrt{x - 3}$ состоит из одной точки?

Решение. Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ -x^2 + 4x + a \geq 0 \end{cases}.$$

Второе неравенство приводится к виду $x^2 - 4x - a \leq 0$ или $x \in [x_1; x_2]$ где $x_1 = 2 - \sqrt{4 + a}, x_2 = 2 + \sqrt{4 + a}$. Пересечение полученного отрезка с лучом $[3;+\infty)$ в одной точке возможно, если $x_2 = 3$ (в противном случае пересечений либо нет, либо в пересечении содержится бесконечно много точек). Итак, $2 + \sqrt{4 + a} = 3$, откуда *a* =-3.

Ответ: -3.

Пример 6. При каких значениях параметра *a* числа $(2^a - 1)$ и $(3^a - 3)$ являются решениями неравенства

$$a^{\frac{2x+4}{x-1}} \geq a^{\frac{4x+8}{x+1}} ?$$

Решение. Решаем данное неравенство. Рассмотрим 2 случая.

Случай 1: a>1; тогда

$$2(x+2)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+1}\right)\ge 0;\quad \frac{2(x+2)(3-x)}{(x-1)(x+1)}\ge 0;\ x\in[-2;-1)\cup(1;3].$$

При $a>1$ числа $\left(2^a-1\right)>1$ и $\left(3^a-3\right)>0$, следовательно они могут быть заключены только в $(1;3]$, так что $a\in(\log_3 4;\log_3 6]$.

Случай 2: $0<a<1$;

$$\frac{2(x+2)}{x-1}\le\frac{4(x+2)}{x+1}$$

(решаем то же неравенство, но с противоположным знаком), откуда $x\in(-\infty;-2]\cup(-1;1)\cup[3;+\infty)$. При $0<a<1$ имеем , очевидно

$$0<\left(2^a-1\right)<1 \text{ и } -2<\left(3^a-3\right)<0,$$

то есть эти числа могут быть расположены только в промежутке $(-1;1)$, откуда $a\in(\log_3 2;1)$.

Ответ: $a\in(\log_3 2;1)\cup(\log_3 4;\log_3 6]$.

Пример 7. При каких значениях параметра a многочлен

$$p(x)=ax^2+3x+2a^2-3$$

имеет два различных целых корня?

Решение. Потребуем $a\neq 0$ (иначе многочлен обладает одним корнем) и дискриминант

$$D=9-4a(2a^2-3)\ge 0\ .$$

Согласно теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{3}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{2a^2-3}{a} \end{cases},$$

причем оба эти числа обязаны быть целыми. Число $-\dfrac{3}{a}$ является целым при $a=\pm1;\pm3$. Тогда число $\dfrac{2a^2-3}{a}$ при каждом из таких a – тоже целое (что легко проверить). Но условию $D \geq 0$ удовлетворяет только $a = \pm 1{,}3$.

Ответ: $\pm 1{,}3$.

5.12. Задачный материал для самостоятельного решения обучающимися

1. При каждом значении параметра a решить уравнение $(a^2 - 1)x = a+1$.

2. При каждом значении параметра a решить неравенство $|x + 3| > -a^2$.

3. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - x + 4 = 0$ имеет единственное решение?

4.При каких значениях параметра a неравенство $(x-a)(x-2) \leq 0$ имеет единственное решение?

5. При каком значении параметра k наименьшее значение функции $f(x) = x^2+6x+1$ равно $k+4$?

6 .При каком значении параметра k корни трёхчлена $x^2 - 2k\,x + (k^2 - 4)$ находятся справа от точки $x = -6$?

7. В зависимости от значения параметра a найти число корней уравнения $x + \sqrt{x + \frac{1}{4} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}} = a.$

8. Найти критические точки функции $f(x) = (2x-1)\sqrt[4]{x-a}$.

9. Найти все действительные значения a, при которых область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1 - \log_{5+4a-a^2}(5-a) - \log_{5+4a-a^2}(4 + \sin x)}$$

совпадает с множеством всех действительных чисел.

10. При каких значениях параметра a неравенство $9^{x^2} + 2(a-1)3^{x^2} + a^2 - 2 > 0$ выполнено для всех x?

Литература к главе 5

1. Письмо Минобрнауки России от 17.06.2013 г. № 08-733 «О концепции математического образования» [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.informio.ru/update/school

2. Концепция развития Российского математического образования [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html

3. Аверина И.В., Нахман А.Д. Уровневая модель системы мероприятий по реализации концепции развития российского математического образования [Электронный ресурс] //Актуальные инновационные исследования: наука и практика. –2014. – № 1. – Режим доступа: http://www.actualresearch.ru .pdf

4. Концепция развития российского математического образования. Проект МГУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.msu.ru/science/mathobr.html

5. Нахман, А.Д., Иванова И.Ю. Содержательный аспект математической компетентности обучающихся: монография. Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации», 2013. 172 с.

6. Нахман А.Д. Инновационные содержательно-методические линии курса математики: монография. Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации». – 2012. – 112 с.

7. Нахман А.Д. Булевы алгебры как основа для изучения математической логики, теории множеств, теории вероятностей // Вестник ТГТУ. – 2005. – Т.11. – №1Б. – С.246-253.

8. Нахман А.Д., Иванова И.Ю. Преподавание математики в условиях реализации федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования: учебно-методический комплект по элементам математического анализа.– Тамбов: ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования», 2012. – 115 с.

9. Ткачук В.В. Математика абитуриенту. -М: МЦНМО , 2000 -892 С.

10. Нахман А.Д. Функции и их свойства. Задачи для подготовки к ЕГЭ/ Метод. пособие. - Тамбов: ТОИПКРО, 2006. – 61 с.

Заключение

Функциональная линия как система понятий, фактов и методов, связанных с понятием функции, «пронизывает» весь курс школьной и вузовской математики. В терминах функций реализуются, в частности, методы математического моделирования. В контексте компетентностного подхода индикаторы достижения компетенций, связанных с математическим моделированием, формулируются как триада «знать», «уметь», «владеть», относящаяся к функциональным понятиям и фактам. Среди последних особое место занимает понятие суперпозиции. Развитие данного концепта прослеживается на всём протяжении курса от начальной школы до старших классов средней школы и вузовского бакалавриата. В отношении предмета исследования (суперпозиция как системообразующее понятие математики) осуществляется трёхаспектное рассмотрение: педагогический аспект (реализация содержательного, деятельностного, личностно-развивающего и рефлексивного компонентов обучения в контексте задачного подхода) математический аспект (например, инвариантные формы и их применения), методический аспект (пути поиска решения заданий, методическое сопровождение процесса решений и др.). Предложена соответствующая задачная система: теоретические упражнения, задания стандартного уровня (в тестовой форме), повышенного и высокого уровня. Приложения суперпозиций могут быть представлены, в частности, методом интегрирования дифференциальных уравнений с разделёнными переменными и степенными разложениями элементарных функций, полученными на основании стандартных разложений.

Теоретико-математическая основа решения уравнений и неравенств (в частности, метод интервалов) содержится в свойствах непрерывных функций; здесь важное место отводится характеру четности, монотонному поведению функций и т.п.

В значительной степени функциональный подход реализуется в задачах с параметрами; последние служат важнейшим фактором формирования системности математических знаний. Задачи с параметрами могут быть также использованы в качестве эффективного средства пропедевтики понятий и свойств функций нескольких переменных.

Функциональная линия, реализуемая в системе «Школа-вуз», служит основой для дальнейшего изучения теорий функций действительного и комплексного переменного, а также функционального анализа.

ОГЛАВЛЕНИЕ