Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»

Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ИННОВАЦИОННЫЕ ПОДХОДЫ К КОНСТРУИРОВАНИЮ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧНЫХ СИСТЕМ

Монография

Издательская платформа Российской академии естествознания
2023

УДК 372.851

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО
«Тамбовский государственный технический университет»
Ю.В.Родионов;
проректор ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации
работников образования»
О.Н.Нехорошева

Нахман А.Д. Инновационные подходы к конструированию практико-ориентированных задачных систем / Инновации в образовании. - Специальный выпуск. № 2. - 2023. - 87 с.

Анализируются основные положения задачного подхода как важнейшего средства формирования результатов математической подготовки учащихся. В условиях практико-ориентированной обучающей среды первоочередное внимание уделяется приёмам математического моделирования. Приведены характеристики заданий инновационного типа (кейсы, задачи-мотиваторы, задачи-трансформеры и др.); в частности, обсуждается инновационная составляющая задачного подхода в области стохастики. Монография адресована исследователям, занимающимися вопросами образовательных инноваций, а также педагогам-новаторам, заинтересованным в развитии собственной предметной компетентности.

Введение

Одним из преимущественных направлений современного математического образования является подготовка учащихся к использованию математики в решении широкого круга проблем, возникающих в реальном мире за пределами образовательного процесса. Практико-ориентированная технология обучения позволяет ученика из пассивного объекта педагогического воздействия превратить в активного субъекта учебно-познавательной деятельности.

В настоящее время в системе математического образования формируется содержательно- методическая линия практико-ориентированных математических задач, направленная на развитие функциональной грамотности обучающихся. В этой связи научно-методическое сопровождение данной линии является актуальной задачей.

В работе выстроены основные элементы соответствующего содержания и проанализированы особенности некоторых его аспектов.

Проанализированы имеющиеся межпредметные и внутрипредметные связи, обращается внимание на общность и универсальность математических идей и методов. В частности,

-уточняется понятие задачного подхода;

-представлена концепция практико-ориентированных задач;

- приведены характеристики заданий инновационного типа (кейсы, задачи-мотиваторы, задачи-трансформеры и др.)

Прдложен задачный блок для активного обучения и самостоятельного решения.

Глава 1 . МОДЕЛИРОВАНИЕ ИННОВАЦИОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ

В настоящей главе проанализированы этапы становления инноваций в образовательной деятельности. Выделены инновационные элементы в составе традиционных линий курса математики. Предлагается концепция аналитико-геометрической линии и исследуются некоторые особенности векторно-координатного метода как ее инновационного компонента.

1.Концепции образовательных инноваций

Понятия инновации и инновационной образовательной деятельности, несмотря на многочисленные работы в этой области, находятся в стадии становления.

Нашему пониманию инноваций близки концепции нескольких авторов. Так, А.В. Хуторской [1] рассматривает всякую образовательную инновацию в контексте процесса создания, внедрения и освоения соответствующего новшества. Автор выдвигает в связи с этим ряд теоретико-методологических проблем: соотношение традиций и инноваций, содержание и этапы инновационного цикла, отношение к инновациям разных субъектов образования, управление инновациями, подготовка кадров, основания для критериев оценки нового в образовании и др. Приведенный взгляд на инновации в определенной степени дополняет точка зрения В.П.Ващенко [2], который утверждает, что нововведение еще не есть инновация, а деятельность в любой сфере может быть «…инновационной, если в нее привносится новое (знания, технологии, приемы, подходы) исключительно для получения результата, отличающегося высокой востребованностью. В отличие от научного поиска (творчества), идущего изнутри субъекта, инновационный поиск мотивируется внешней средой, а наука при этом является стратегическим ресурсом и инструментом инноваций».

В работе [3] концептуальной схемой, выбираемой в качестве базы для осуществления нововведений в системе образования, провозглашается схема (формула) «традиции – инновации – институции». Как нам представляется, в применении к образовательной деятельности интерпретация данной формулы может быть следующей.

1.Новые идеи и методы «не укладываются» в рамки устоявшихся традиций. В то же время должна осуществиться преемственная связь новшества с лучшими традициями прошлого.

2. Происходит привнесение в «образовательное пространство» вполне определённой социальной практики, существенных изменений в сравнении с имеющейся традицией.

3. Инновационный опыт становится доступным другим субъектам образовательной деятельности, что предполагает его фиксацию и наличие механизмов трансляции.

4. Происходит институциализация нововведений, т.е. их организационно-управленческое оформление и последующее нормативное закрепление в изменяющейся практике.

5. Следствием системно- целостного характера инновационной деятельности является развитие системы образования (определенных её подсистем).

6. Освоенная инновация со временем перерастает в традицию.

формализованы в виде следующей матрицы.

Этапы становления инновации могут быть

	Социальный заказ	Новая идея, инициатива	Проектирование инновации	Инновация в стадии внедрения и апробации	Диффузия (распространение) новшества	Институциональное закрепление инновации
Возникновение противоречия с традициями	1	0	0	0	0	0
Зарождение инновации	1	1	0	0	0	0
Формирование инновационной политики по данному направлению	1	1	1	0	0	0
Экспериментальная деятельность по освоению новшества	1	1	1	1	0	0
Внедрение новшества	1	1	1	1	1	0

Состоявшаяся инновация	1	1	1	1	1	1

Таблица. Матричная модель становления инновации

Инновационный процесс в самом общем его понимании теперь есть процесс вида:

$(1,0,0,0,0,0) \to (1,1,0,0,0,0) \to (1,1,1,0,0,0) \to (1,1,1,1,0,0) \to (1,1,1,1,1,0) \to (1,1,1,1,1,1)$.

Наличие инверсий элементов любой строки матрицы свидетельствует о нарушении инновационного процесса. Так, например, строка $(0,1,1,0,0,0)$ означала бы, что новшество инициируется научной идеей, проектом, в отсутствии соответствующего социального заказа, а значит, не может быть признано инновацией.

2. Инновационные содержательные линии

Одним из основных направлений инновационной политики в области образования является обновление его содержания.

Содержание образования мы называем инновационным, если оно:

-является актуальным, востребованным, соответствует современным целям образования;

- обладает определенной новизной, интегрирует формально-знаниевый и личностно-деятельностный подходы;
- является практически реализуемым и способным повышать эффективность деятельности субъектов образования.

Так, в математике присутствуют фундаментальные понятия, вокруг которых группируется некоторое содержание (другие понятия, связанные с базовым, суждения и действия, необходимые для их усвоения и т.д.). Соответствующий блок содержания представляет собой некое целостное образование с многочисленными внутренними связями, с использованием специальных методов и определяет специфику методики изучения материала. В подобных случаях об указанном целостном образовании говорят как об определенной содержательно - методической линии в программе изучения данной дисциплины. В контексте инновационного содержания соответствующую *содержательно - методическую линию* будем называть *инновационной.*

С учетом вышесформулированного тезиса о зарождении инновации в рамках традиции, нам представляется, что «формула» возникновения инновационной содержательно-методической линии может быть следующей:

инновационная содержательно-методическая линия=традиционная линия+инновационные элементы.

Речь здесь идет не механическом добавлении к традиционному содержанию курса математики новых элементов (вместе с соответствующими методическими приёмами их изучения), а об интеграции, которая призвана порождать следующие системные эффекты:

-осознание обучающимися возможностей математической науки в описании, исследовании, прогнозировании характера происходящих процессов и явлений;

-расширение возможностей использования приобретаемых знаний и умений на практике и при изучении смежных дисциплин;

-развитие исследовательских навыков обучающихся;

-осознание внутренних связей в математической науке.

Если речь идёт об образовательной деятельности в рамках общего среднего образования, то традиционные содержательные линии могут быть дополнены следующими инновационными элементами:

- числовая линия – введением в теорию комплексных чисел и их приложений;
- функциональная линия – задачами оптимизации;
- тригонометрическая линия – прикладной тригонометрией (полярные координаты, тригонометрическая форма комплексных чисел, исследование гармонических колебаний и др.);
- геометрическая линия – векторно-координатным методом исследования взаимного расположения линий и фигур на плоскости и в пространстве.

В последнем случае можно говорить о более общем явлении: формировании инновационной «сквозной» аналитико-геометрической линии.

Идея введения элементов аналитической геометрии в школьный курс математики не является новой. Линейные операции над векторами, разложения векторов по заданному базису, скалярное произведение векторов в последние десятилетия в том или ином объёме присутствуют в образовательных программах.

В качестве традиционных компонентов аналитико – геометрической линии можно выделить следующие вопросы:
- прямая на плоскости, взаимное расположение прямых;
- «стандартная» гипербола $y = \frac{k}{x},\ k \neq 0$;
- «стандартная» парабола $y = kx^2,\ k \neq 0$;
- каноническая «полупарабола» $y = k\sqrt{x},\ k \neq 0$;
- каноническая окружность $x^2 + y^2 = R^2,\ R > 0$;
- каноническая сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 0$
- элементы векторной алгебры;
- уравнение плоскости в пространстве.

По нашему мнению, аналитико-геометрическая линия школьного курса может быть дополнена следующими инновационными компонентами:
-параллельный перенос на координатной плоскости;
- канонические уравнения прямых на плоскости и в пространстве (в качестве приложения векторной алгебры), и , в частности, уравнения прямых, заданных двумя различными точками;
- векторно- координатный метод решения стереометрических задач.

Данные вопросы содержания тесно связаны с традиционными, и их изучение не потребует значительных затрат времени. Более того, идея параллельного переноса системы координат порождает единую концепцию преобразования графиков (речь идет об общем методе построение графиков вида квадратного трехчлена, дробно-рациональной функции и др.) , что избавляет педагога от необходимости обсуждать способы преобразования в случаях каждого отдельного типа функции.

В то же время, включение в образовательные программы школы перечисленных вопросов содержания позволит «разгрузить» вузовский курс (модуль курса высшей математики) «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». В этом случае элементы векторной алгебры и её приложений в вузовском курсе могу быть рассмотрены обзорно. Останется лишь дополнить их изучением векторного и смешанного произведений и их приложений. Раздел «Геометрические векторы» таким образом, приобретает иллюстративный характер по отношению к разделам линейной алгебры.

Рассмотрим теперь круг вопросов, связанных с инновационным приёмом решения стереометрических задач векторно-координатным методом.

3.Некоторые особенности векторно-координатного метода

Актуализация данного метода во многом связана с наличием стереометрической задачи повышенного уровня сложности в контрольно- измерительных материалах ЕГЭ (задача №14 в нумерации 2017 г.). Его использование, по мнению педагогов-новаторов, позволяет в ряде случаев избежать сложных геометрических построений и обоснований. Здесь открывается ряд новых возможностей для нахождения:

-угла между скрещивающимися прямыми;

-угла между прямой и плоскостью и между двумя плоскостями;

-расстояния от точки до плоскости и др.

«Попутным» эффектом рассмотрения подобных приложений векторной алгебры является повышение мотивации учащихся к изучению аналитико-геометрических понятий и фактов.

Таких образом, можно говорить о возникшей в педагогической практике потребности в данном инновационном методе, его зарождении, а также и наличии экспериментальной деятельности в соответствующем направлении: так например, в лицеях г. Тамбова аналитико-геометрические идеи активно внедряются в образовательную практику.

Однако, становлению (в частности, проектированию) инновации необходимо определённое методическое сопровождение, и здесь мы обнаруживаем ряд трудностей. Одна из них – отсутствие понятия и свойств векторного и смешанного произведений в школьном курсе, необходимых, в частности, для нахождения нормального вектора плоскости, объема тетраэдра и др. Введение соответствующих понятий и фактов нам представляется нецелесообразным, поскольку требует существенных затрат времени на «попутное» рассмотрение элементов теории матриц и определителей; кроме того в этом случае происходило бы неоправданное дублирование части вузовского курса аналитической геометрии.

Вместе с тем, излагаемый в школьных учебниках способ нахождения уравнения плоскости (и, следовательно, координат её нормального вектора) по трем точкам является как непрозрачным, так и технически сложным, тогда как нахождение координат нормального вектора плоскости служит важным средством для определения её расположения по отношению к другим плоскостям и прямым [4].

Предлагаемый нами инновационный приём состоит в использовании условия перпендикулярности искомого вектора $\vec{n}\{x, y, z\}$ к двум данным векторам плоскости $\vec{p}$ и $\vec{q}$, при условии «нормирования» $\vec{n}$ по одной из координат (например, полагаем $z = 1)$. В этом случае координаты нормального вектора легко определяются как решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными (например, x и y), порождаемой условиями

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{p} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{q} = 0 \end{cases}.$$

Разработка подобных инновационных аналитико-геометрических приёмов может, таким образом, послужить делу существенного обогащения арсенала идей и методов решения стереометрических задач.

Резюмируем сказанное. Инновационная деятельность является основным инструментом модернизации математического образования. Обновление традиционных содержательных линий путём «встраивания» инновационных элементов расширяет возможности обучающихся в использовании приобретаемых знаний и умений при решении задач повышенного уровня сложности, а также в практической деятельности и при изучении смежных дисциплин. В качестве одной из инновационных содержательно-методических линий может быть предложена аналитико-геометрическая линия и, в частности, такой её важный компонент, как векторно-координатный метод решения стереометрических задач.

Литература к главе 1

1.Хуторской А.В. Теоретико-методологические основания инновационных процессов в образовании [Электронный ресурс] // Интернет-журнал "Эйдос". – 2005. – Режим доступа: http://www.eidos.ru/journal/2005/0326.htm.

2. Ващенко В.П. О сущности инновационной деятельности и ее нормативно-правовой базе // Наука и промышленность России. – № 2-3. –2002. – С.29-36.

3. Слободчиков В.И. Инновации в образовании: основания и смысл [Электронный ресурс] // Интернет-портал «Исследователь.ru» – 2009. –Режим доступа: http://www.researcher.ru/methodics/nauka/a_1xizkd.html

4. Нахман А.Д. Компетенция математического моделирования в контексте современной образовательной парадигмы // Научное обозрение. Педагогические науки.–№ 3. – 2017. –С.71- 79.

Глава 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТРУМЕНТАРИЙ РЕАЛИЗАЦИИ КОМПЕТЕНТНОСТНОЙ ПАРАДИГМЫ

Становление компетентностной образовательной парадигмы неразрывно связано с триадой «знать, уметь, владеть». Индикатор достижения компетенции «владеть» предполагает освоение ряда инструментов деятельности и, в частности, деятельности математической. Предлагается реализация соответствующего инструментария средствами решения практико-ориентированных задач. Основные положения иллюстрируются примерами.

1.Индикаторы компетенций

Компетентностная образовательная парадигма [1] всё более утверждается в отечественной системе высшего образования. Причины этого достаточно очевидны: бурный рост научно-технической информации по каждому направлению профессиональной подготовки вступает в противоречие с возможностями обучающихся освоить такую информацию. И хотя «дерево» компетентностной парадигмы уходит корнями в когнитивно-информационную (знаниевую) парадигму, востребуемые результаты образования – это, прежде всего, инструменты деятельности, инструменты получения и применения новых знаний.

Сказанное относится и к такой фундаментальной учебной дисциплине, как математика. Традиционно, математика рассматривалась в первую очередь как теоретическая дисциплина. С развитием науки и техники всё большее значение приобретают возможности математики как средства моделирования процессов и явлений. Наконец, в последние годы возросло внимание и к её культурологической функции: математика развивает логическое мышление, приучает к доказательности выдвигаемых положений, формирует дедуктивные и индуктивные приёмы мышления, способствует развитию кругозора - так что в итоге обучающийся приобретает опыт освоения научной картины мира [2]. Следовательно, можно говорить о значительном вкладе математики в формирование общекультурных компетенций.

Индикаторы достижения каждой компетенции определяются триадой «знать, уметь, владеть». Так, например, подготовка по направлению 11.03.01 «Радиотехника» предполагает освоение общепрофессиональной компетенции (ОПК-1) «Способность использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности» [3]. Индикаторы её достижения (ИД) предполагают:
- знание фундаментальных законов природы и основных физических и математических законов;
-умение применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера;
-владение навыками использования соответствующих знаний и умений при решении практических задач.

Именно индикатор «владеть», по нашему мнению, является определяющим в различии знаниевой и компетентностной парадигм. Таким образом, в компетентностной парадигме на первый план выходит операциональная функция дисциплины «Математика», выступающая в системном взаимодействии со знаниями, умениями, навыками и опытом деятельности, приобретаемыми в ходе освоения смежных дисциплин.

2. Практико-ориентированные задания

Овладение математическими инструментами деятельности, формируется в процессе решения практико-ориентированных задач. Речь идёт об общих методах и алгоритмах, ориентированных на группу практических и прикладных заданий определённого класса. Согласно концепции, предложенной в [4], эти методы связаны с каким либо математическим понятием или фактом и в каждом случае конкретной задачи подлежат уточнению, детализации, использованию дополнительных условий и т.п. Однако курс математики (как в школе, так и в вузе) не должен превращаться в набор рецептов по решению практических задач. Курс математики должен оставаться теоретическим, сохранять определенный уровень абстрагирования, а задачи практико-ориентированного характера призваны стимулировать введение тех или иных новых понятий, а также иллюстрировать вновь получаемые факты [5].

Практико-ориентированная задача является чисто математической, тогда как формулировка конкретной практической задачи может содержать понятия из смежных предметных областей, избыточные данные и малоценную информацию («шумы»), или, напротив, недостаточный набор данных, дефицит которых должен быть восполнен в результате самостоятельного поиска обучающимся соответствующей информации. В качестве примера рассмотрим следующее задание.

На плане парка указаны места расположения фонарей. Требуется спроектировать прямую дорожку с наилучшей освещенностью.

В решении используется математический инструмент, называемый методом наименьших квадратов, а именно, ищется линейная функция, наилучшим образом описывающая заданную диаграмму рассеяния. В условии задачи недостаёт координат точек (мест расположения фонарей) на плане парка. Ввести соответствующую систему координат и осуществить постановку математической задачи должен сам обучающийся.

Обобщим сказанное. Схема реализации компетентностного подхода средствами решения практико-ориентированных задач может быть представлена следующим образом:

овладение инструментами решения задач данного класса →
решение практико-ориентированной задачи →
решение практических задач

Примеры реализации схемы приведены в таблице 1.

Инструмент деятельности	***Практико-ориентированная задача (задачи)***	***Пример практической задачи***
Производная. Исследование функции	Нахождение наибольших и наименьших значений функций	Обеспечение наименьшего количества отходов при вырезании балки из бревна
Симплекс-метод	Наибольшее и наименьшее значения линейной функции в многоугольнике	Нахождение наибольшей прибыли при производстве нескольких видов продукции
Исследования скалярных и векторных пло-	Нахождение градиента и производных по за-	Нахождение скорости и направле-

ских и пространственных полей	данным направлениям	ния наибыстрейшего прогревания пространства в точках заданного температурного поля
Понятие и методы вычисления определённого интеграла	Построение общей схемы применения определённого интеграла	Нахождение массы плоской пластины, тела вращения и др.
Методы решения дифференциальных уравнений первого порядка	Моделирование процессов показательного роста и выравнивания	Модель рынка с постоянными ценами

Таблица 1. Примеры практико-ориентированных задач

Поскольку практико-ориентированная задача ставится и решается в достаточно общем виде, то используемые шаги решения в совокупности представляют собою алгоритм, требующий строгой аргументации. Важной характеристикой такого алгоритма является свойство его массовости, то есть возможность применения к достаточно широкому кругу задач. Опираясь на полученное решение практико-ориентированной задачи, обучающийся уже не обязан приводить обосновательный компонент решения; необходимо лишь «протестировать» практическую (прикладную) задачу на предмет применимости соответствующего алгоритма.

Остановимся, для примера, на случае такого инструмента деятельности, как решение дифференциальных уравнений первого порядка. В качестве практико - ориентированной рассмотрим задачу моделирования процессов выравнивания. А именно, речь идёт о процессе $y = y(t)$, скорость которого $y'(t)$ пропорциональна разности между значением $y(t)$ величины и некоторым стандартным постоянным значением a. В общем случае, при заданных начальном значении y_0 величины y и коэффициенте пропорциональности $k > 0$ имеем задачу Коши

$$y' = -k \cdot (y - a),\ \ y(0) = y_0.$$

Реализуя алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, получаем

$$y = a + (y_0 - a)e^{-kt}.$$

Перейдём теперь к практической задаче нахождения зависимости $T = T(t)$ температуры T остывающего тела от времени t течения процесса; при этом считаем, что скорость остывания пропорциональна разности между температурой тела и температурой T_1 окружающей среды, а начальная температура T_0 тела задана. Очевидно, что математическая модель процесса остывания есть задача Коши

$$T' = -k(T - T_1), \quad T(0) = T_0 \qquad (k = const > 0);$$

приходим, таким образом, к случаю процесса выравнивания. Используя общий результат решения, получаем зависимость

$$T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}.$$

Отметим дополнительную информацию, получаемую при интерпретации модели: с течением времени происходит выравнивание температуры; она приближается к значению T_1 температуры окружающей среды.

Таким образом, включение в образовательный процесс системы практико-ориентированных задач способствует реализации дедуктивного принципа «от общего- к частному», снабжает обучающегося общими инструментами решения практических (прикладных) задач и тем самым отвечает целям и задачам компетентностного подхода.

Литература к главе 2

1.Лебедев, О.Е. Компетентностный подход в образовании / О.Е. Лебедев // Школьные технологии. - 2004. - №5.- С. 3-12.

2. Перминов, Е. А. Культурологический подход как методологическая основа математического просвещения /Е.А.Перминов //Образование и наука. -2017.- Т.19. - №10.- С.9 -11.

3. Федеральные государственные образовательные стандарты. – Текст : электронный // Национальная ассоциация развития образования и науки. – URL: https://fgos.ru/ (дата обращения: 27.02.2021).

4. Нахман, А.Д. Практико-ориентированные математические задачи /А.Д.Нахман//. Вопросы педагогики. -2020.- № 11-1. –С. 178-181.

5. Нахман, А.Д. Формирование практико-ориентированных умений средствами математики: монография /А.Д.Нахман.- Saarbrucken: Lambert Academic Publishing. - 2016. - 130 с.

Глава 3. ИННОВАЦИОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Вопросы теории и теоретические упражнения

Теоретические вопросы традиционно ориентированы на репродуктивный уровень освоения материала («сформулируйте определение, теорему» и т.п.), тогда как более высокие уровни требуют осмысления, сопоставления и противопоставления фактов, их геометрических интерпретаций и т.п. Здесь предпочтительнее формулировки типа «верно ли», «приведите пример» и др. Так, в области математического анализа, вопросы могут быть например, следующими.

1.Приведите пример функции,

а)имеющей одну точку разрыва первого рода;

б) имеющей две точки разрыва второго рода.

2.Можно ли привести пример функции,

а)непрерывной в данной точке, но не дифференцируемой в ней;

б) обладающей производной в некоторой точке, но имеющей в этой точке разрыв?

В случае утвердительного ответа приведите соответствующий пример.

3. Может ли касательная пересечь график функции в точке касания? Если ответ утвердительный, то приведите соответствующий пример.

4. Эквивалентны ли понятия максимума (минимума) функции и ее наибольшего (наименьшего) значения на данном отрезке? Если ответ отрицательный, то приведите соответствующий пример.

5.Может ли касательная, проведенная в точке минимума функции, иметь уравнение $y = -0{,}1x$? Обоснуйте ответ.

6. Всегда ли непрерывная на данном открытом интервале функция достигает своего наибольшего значения ? А на отрезке непрерывности?

7.Верно ли утверждение: «Если общий член числового ряда на бесконечности имеет своим пределом число 0, то ряд сходится»? Обоснуйте свой ответ.

8.Может ли быть так, что некоторый степенной ряд сходится на промежутке $[0;+\infty)$ и расходится на $(-\infty;0)$? Ответ обоснуйте.

Освоению теоретических фактов в значительной мере способствуют «минитеоремы» - теоретические упражнения, а также ключевые задачи, поставленные и решаемые в самом общем виде. Так, в ряде случаев, традиционные доказательства теорем могут быть сведены к решению последовательности теоретических упражнений. Приведем примеры некоторых упражнений в области математического анализа и стохастики.

1. Пользуясь результатом $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, вывести формулу для подсчета количества элементов $n(A \cup B \cup C)$ в объединении трех множеств.

2.Каков наибольший из биномиальных коэффициентов в разложении $(1+x)^{2n}$?

3.Равны ли тождественно суммы

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k ?$$

4. На основании аксиом вероятности докажите, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, для всякой пары противоположных событий $A, \overline{A}$.

5. Докажите, что выборочная средняя $\overline{x}_B$ принимает значения $\overline{x}_B \in [x_{\min}, x_{\max}]$, где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – соответственно наибольшее и наименьшее значения вариант x_k.

6. Докажите, что производная функции двух переменных, вычисленная в данной точке в направлении градиента, равна модулю градиента.

7. С помощью замены переменных $t = \dfrac{y+a}{x+b}$ найдите общее решение дифференциального уравнения вида

$$y' - \frac{y+a}{x+b} = (x+b) f'(x)$$

(a, b - любые постоянные величины, f - произвольная дифференцируемая на всей числовой оси функция).

2. Варьирование задач

Метод варьирования задачи состоит в получении задачной системы из некоторой «базовой» задачи путем варьирования её содержания и (или) формы. В результате получается набор заданий - «клонов», решения которых способствует формированию упомянутых выше умений сопоставлять или противопоставлять математические понятия, методы и факты. Примером может служить задание на нахождение области определения функции вида

$y = kx\lg(p\lg qx)$, где k, p, q - заданные постоянные (базовое задание). А именно, требуется найти области определения функций

а) $y = x\lg(\lg x)$ б) $y = x\lg(-\lg x)$ в) $y = -x\lg(-\lg(-x))$.

Приведем другие примеры заданий-клонов.

Найдите области определений функций

1. а) $y = \sqrt{-\sqrt{x^2-1}}$ б) $y = \sqrt{-\sqrt[3]{x^2-1}}$ в) $y = \sqrt[3]{-\sqrt{x^2-1}}$

2. а) $y = \arcsin(\mathrm{tg}\, x)$ б) $y = \mathrm{tg}(\arcsin x)$ в) $y = \mathrm{arctg}(\sin x)$

Среди данных зависимостей переменной y от переменной x укажите зависимости функциональные:

1. а) $2^{|x|}0{,}5^{-y} = 0{,}5$ б) $2^{x}0{,}5^{-|y|} = 0{,}5$ в) $2^{-|y|}0{,}5^{|x|} = 0{,}5$

2. а) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

Найдите множество всех значений функции:

а) $y = 2^{\frac{x}{2}}$ б) $y = 2^{\frac{2}{x}}$ в) $y = (\frac{2}{x})^2$

Исследуйте данную функцию на непрерывность:

а) $y = 3^{\frac{3}{x-3}}$ б) $y = 3^{\frac{3}{x-3}} \cdot 3^{\frac{3}{3-x}}$

в) $y = \begin{cases} \cos(x - \frac{3\pi}{2}), & x \le \frac{3}{4} \\ -\sin x, & x > \frac{3}{4} \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} \cos(x + \frac{3\pi}{2}), & x \le \frac{3}{4} \\ \cos(x - \frac{3\pi}{2}), \ , & x > \frac{3}{4} \end{cases}$

3. Задания-кейсы

Кейсы, представляют собою комплексные компетентностно-ориентированные учебные задания по моделированию различных жизненных ситуаций. Их решение требует оптимального сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся. Так, например, кейс-задания представлены в составе контрольно-измерительных материалов итоговой аттестации по математике (ОГЭ) выпускников основной школы [8]. Нами разрабатываются системы стохастических кейсов (см. [7] и библиографию в ней); приведем один из них.

В городе N имеется 10 финансовых компаний, среди которых 4 находятся на грани банкротства. Клиент выбирает для хранения и умножения средств случайным образом 2 компании. Составить ряд распределения числа X выбранных компаний, имеющих высокий риск банкротства. Постройте многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и средне-квадратическое отклонение случайной величины X. С какой вероятностью можно утверждать, что хотя бы одна из выбранных компаний окажется на грани банкротства?

Решение данного кейса способствует формированию практико-ориентированных умений комплексного описания поведения случайной величины:
- умения численно прогнозировать степень возможности тех или иных значений случайной величины (вычислять вероятность извлечения выборки с заданной характеристикой объектов);
- строить ряд распределения дискретной случайной величины (ДСВ) и геометрически интерпретировать распределение;
- находить среднее значение случайной величины (математическое ожидание);
- находить числовые характеристики степени рассеяния ДСВ (дисперсию и средне-квадратическое отклонение).

4. Задачи-трансформеры и обратные стохастические задачи

Задачи-трансформеры представляют собою задания на моделирование ситуаций или процессов с целью их изучения одновременно в детерминистском и стохастическом направлении в зависимости от вопроса задачи.

Обсудим например, следующее задание. Биржевыми аналитиками установлено, что стоимость акций компании в последний месяц года должна изменяться по закону $y=(x-8)^2 e^{15-x}$, где x – календарная дата, $x=1, 2, ..., 30$ (предпраздничный день 31 декабря исключается из рассмотрения). Какого числа следует продать акции, чтобы получить максимальный доход? Какова вероятность, что в случайно выбранный день месяца стоимость акций находится на подъеме?

Очевидно, что для ответа на первый вопрос следует обратиться к детерминированной модели ситуации. Акции выгоднее всего продавать на максимуме роста, следовательно, производная $y' = (x-8)(10-x)e^{10-x}$ в соответствующей точке должна изменить знак с плюса на минус. Очевидно, что такой точкой будет $x = 10$, то есть акции надо продать 10 декабря.

Второй вопрос предполагает наличие стохастической ситуации, поскольку выбор даты $x \in \{1, 2, ..., 30\}$ случаен. При этом благоприятных исходов, то есть дней роста стоимости акций, всего три: 8, 9, 10 декабря. Искомая вероятность $p = \frac{3}{30}$, или $p = 0{,}1$.

Решение обратных стохастических задач является эффективным технологическим приемом формирования целостности и системности знаний. Обратные задачи – важный компонент технологии укрупненных дидактических единиц (УДЕ), которая представляет собой интеграцию целого ряда конкретных подходов к обучению. Ключевой элемент технологии УДЕ – это упражнение: триада «исходная задача – ее обращение – обобщение».

С точки зрения моделирования стохастических ситуаций обратная задача представляет собою задание по нахождению некоторых входных параметров модели по ее известному выходу. Оператор модели при этом может быть полностью известен («прозрачный, белый ящик»), известен в самом общем виде, но не конкретизирован применительно к данному заданию («серый ящик»), либо полностью неизвестен («черный ящик»). Приведем пример.

Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью p=0,9544 утверждать, что относительная частота выпадения герба отклонилась от 0,5 не более, чем на 0,05?

«Прямая задача» состояла бы в оценке вероятности заданно-малого отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ наступления данного случайного события от его вероятности p при заданном количестве проводимых опытов n с помощью интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$:

$$P(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}});$$

в роли оператора модели выступает эта приближенная расчетная формула. В нашем случае «выход» модели известен (указанная оценка дана), а отысканию подлежит количество опытов n (служившее в прямой задаче входным параметром). Имеем

$$0{,}9544 \approx 2\Phi(0{,}05\sqrt{4n}) \quad \text{или} \quad \Phi(0{,}1\sqrt{n}) \approx 0{,}4772.$$

Если воспользоваться таблицей значений интегральной функции Лапласа, то получим значение аргумента функции $0{,}1\sqrt{n} \approx 2$, откуда $n \approx 400$. Итак, монету надо бросить 400 раз.

Особого обсуждения заслуживают системы тестовых заданий, но этой теме автор надеется посвятить отдельную работу.

Заключение

Инновационные задачные системы вышеуказанных типов могут быть (как это представляется автору) в значительной степени востребованы в образовательной практике. Их решение стимулирует мотивацию к математической деятельности (таким стимулом является практическая ориентированность ряда задач), развивает исследовательские навыки (задачи-клоны), способствует становлению умений комплексного описания ситуаций и процессов (задания-кейсы, обратные стохастические задачи и задания-трансформеры) и, в конечном счете, способствует формированию у обучающихся целостности и системности знаний в области математики и ее приложений.

Литература к главе 3

1.Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс] //URL: https://fgos.ru/ (дата обращения 10.11.22).

2. К.И.Курпаяниди, Ф.М.Нишонов. Конструирование систем задач по математике // International Journal of Humanities and Natural Sciences. 2018. Vol.10-1.С.82-85. DOI: 10.24411/2500-1000-2018-10069.

3.Шмигирилова И. Б. Особенности конструирования учебно-поисковых заданий в компетентностном обучении математике // Наука и школа. 2017. № 3. С. 152-160.

4.Шмигирилова И. Б. Дидактическая ценность задачи и пути ее повышения // Наука и школа. 2018. № 6. С. 130-135.

5.Нахман А.Д. Моделирование инновационной образовательной деятельности в области математики //Вестник Тульского ГУ. 2017. Вып. 16. С.126-130.

6. Слободчиков В.И. Инновации в образовании: основания и смысл [Электронный ресурс] // Интернет-портал «Исследователь.ru». 2009. URL:

http://www.researcher.ru/methodics/nauka/a_1xizkd.html (дата обращения 10.11.22).
7. Нахман А.Д. Концепция стохастического детерминизма в преподавании математики //Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2022. №3(85). С.124-133. DOI: 10.17277/voprosy.2022.03.pp.124-133.
8.Сдам ГИА: Решу ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня [Электронный ресурс] //URL: https: ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 10.11.22).

Глава 4. АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И РЕДУКЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В настоящей главе анализируются положения задачного подхода в области обучения математике. Выделены основные этапы решения математических задач. Предложено ознакомление обучающихся с проблемой алгоритмической разрешимости. В рамках реализации задачного подхода сделан акцент на две следующие ключевые процедуры: алгоритмизацию и редукцию. Уточнены связи указанных процедур с этапами анализа и синтеза. Введено понятие алгоритмической ассоциированности с классами разрешимых задач, и поиск способа решения задачи смоделирован в соответствующих терминах. Понятие эффективного алгоритма адаптировано к процедуре алгоритмизации решения. Основные выводы работы проиллюстрированы примерами.

1.Системно-деятельностный подход

Методологической основой реализации требований Федеральных государственных образовательных стандартов (далее – ФГОС [1]) общего и высшего образования к результатам освоения фундаментальных дисциплин, и, в частности, курса математики, является системно-деятельностный подход [2]. Подход ориентирует обучающихся на самостоятельное осуществление алгоритма действий, направленных на получение знаний и решение поставленных перед ними задач.

Так, одна из компетенций бакалавра (напр., бакалавра в области строительства; компетенция ОПК -1) связанная с его теоретической и фундаментальной подготовкой, предполагает способность «решать задачи профессиональной деятельности … на основе математического аппарата».

Ограничиваясь далее рассмотрением математической подготовки в системе «школа-вуз», приходим к выводу, что *видом деятельности,* обеспечивающим успешную реализацию системно-деятельностного подхода в области такой подготовки, является специально организованное и систематически осуществляемое обучение в виде разрешения разнообразных учебных задач - «задачный подход». Если технологию системно-деятельностного подхода рассматривать как систему, то задачный подход является основной её подсистемой. Сформулируем те положения задачного подхода, которые представляются нам наиболее важными с точки зрения принципов системности и деятельности ([3]):

-введение новых понятий предваряется постановкой некоторой задачи;

-новое знание формируется в процессе решения задачи;

- результатом решения является «выход» в сферу применений нового знания как в самой предметной области «Математика», так и в смежных дисциплинах, а также в практической деятельности;

- решённая задача порождает серию новых задач, что способствует расширению и углублению сформированного знания, формированию способностей к обобщению и систематизации результатов.

Задачный подход является альтернативой традиционному знаниевому подходу, когда необходимый объём знаний передаётся в готовом виде, так что учащемуся остаётся лишь осознать и запомнить полученную порцию информации; здесь «единицей обученности» выступает некоторая единица информации. В то же время результат задачного подхода измеряется в таких единицах обученности, как интеллектуальное умение, способность давать ответы на соответствующие вопросы, применять усвоенные способы деятельности в новых условиях.

Мы выделяем следующие этапы решения математических задач.

1) Осознание условия задачи, выделение его существенных моментов (устранение «шумов», избыточных данных и т.п.), формализация (введение обозначений данных и искомых величин), визуализация (запись с помощью схемы, таблицы т.п.).

2) Анализ задачи: выделение характерных признаков задачи, которые позволяют выбрать соответствующий алгоритм решения, составление плана решения на основе выбранного алгоритма.
3) Редукция - упрощение, сведение задачи к более простой (для которой известен алгоритм решения) или системе таких задач.
4) Синтез: осуществление плана, последовательное решение упрощенных задач.
5) Формирование и фиксация результата (ответа).
6) Интерпретация (какие выводы следуют из наших рассуждений, где и как их можно применить).
7) Рефлексия (анализ собственных действий, догадок и ошибок, самоконтроль, самоутверждение в данном виде математической деятельности).

2.Алгоритмы и алгоритмическая разрешимость

Нам представляется целесообразным – в контексте задачного подхода – ознакомление обучающихся (на том или ином уровне полноты и строгости) с вопросами алгоритмической разрешимости.

Понятие «алгоритм», строго говоря, относится к неопределяемым. Алгоритм «в первом приближении» обозначает процедуру, позволяющую путем выполнения последовательности определенных элементарных шагов получать однозначный результат. Простой анализ любого алгоритма (от алгоритма решения математической задачи до алгоритма приготовления, скажем, борща), позволяет вычленить основные его признаки. Прежде всего, это наличие некоторого набора данных (входные данные), которому ставится в соответствие набор выходных данных. Далее, это система предписаний, по которым должно происходить соответствующее преобразование данных. Поэтому можно говорить об алгоритме как о *конструктивно заданном операторе,* преобразующем множество входных данных в множество соответствующих выходных данных ([4], с.24).

Отличие алгоритма от любой пошаговой инструкции состоит в свойстве его *массовости*: алгоритм должен быть применим для некоторого *класса* K задач, различающихся только исходными данными. В свою очередь, задачи $p, p \in K$ называются алгоритмически разрешимыми, а сам класс K – алгоритмически разрешимым. Требование массовости реализуется в виде дедуктивного пути решения. А именно, общие положения, разработанные для соответствующего класса, применяются к данной, конкретной задаче. Однако, как хорошо известно из теории алгоритмов, существуют классы алгоритмически неразрешимых задач: для каждого такого K нельзя построить алгоритм, который обеспечивал бы общее решение. Один из соответствующих примеров (его могут привести сами обучающиеся): класс алгебраических уравнений, то есть уравнений вида $P_n(x)=0,\ n\geq 5$, где $P_n(x)$ - многочлен n-ой степени.

Вместе с этим, обучающиеся должны понимать, что алгоритмическая неразрешимость в общей постановке не исключает возможности того, что разрешимы какие-то подклассы $K_j,\ j=1,2...$ задач данного класса K. В приведённом примере таким подклассом будет, скажем, множество K_1 уравнений, сводящихся к квадратным путём подходящей замены переменных.

Справедливо и обратное утверждение: возможность решения частной задачи $p,\ p\in K$, еще не дает повода считать класс K алгоритмически разрешимым.

Отметим в качестве примера, что алгоритмически разрешим класс задач дифференцирования элементарных функций, и это студентам представляется вполне естественным. Но уже при первичном ознакомлении с понятием неопределённого интеграла они обычно недоумевают по поводу отсутствия некоторого единого правила (алгоритма) вычисления первообразной всякой элементарной функции и, более того, по поводу существования «неберущихся» интегралов. Ввиду данного обстоятельства обучающиеся приходят к выводу, что разрешимость класса задач K не означает, вообще говоря, разрешимости класса обратных задач.

3.Редукция задач. Моделирование процедур выбора алгоритма и редукции в терминах нечёткой логики

Процесс решения задачи есть последовательность нескольких видов деятельности, преобразующих в итоге «входы» (данные условия задачи) в «выходы» (ответы на вопросы задачи). Используемые при этом виды деятельности (методики) называются процедурами. В рамках реализации задачного подхода мы рассматриваем две следующие основные процедуры:

- *алгоритмизацию* - нахождение алгоритма решения данной задачи;

• *редукцию* - упрощение, сведение задачи к той, для которой известен алгоритм решения, или системе таких задач.

Понятие редукции в общем случае обозначает исследовательский прием, обеспечивающий сведение (преобразование) методов рассуждения и доказательства к более простым и прозрачным. Например, задача *A* редуцируется к задаче *B*, если из решения задачи *B* может быть получено решение *A*.

В математических задачах процедуре редукции предшествует анализ, то есть последовательность рассуждений, обеспечивающих «движение» от искомых фактов к данным задачи. Анализ в данном контексте есть последовательность логических конструкций вида «для того, чтобы найти (доказать) *X*, достаточно знать (найти, доказать) *Y*. Анализ успешно осуществлен, если в последнем звене цепочки *Y* – это компонент условия задачи или известный факт.

В применении к математическим задачам анализ сам по себе решением или доказательством еще не является: он лишь указывает «направление» редукции, то есть помогает свести задачу к цепочке более простых задач. Выполнив анализ, мы устанавливаем:

а) какому классу *K* алгоритмически разрешимых задач принадлежит данная задача или те задачи-компоненты, к которым будет редуцирована данная задача;

б) какой именно алгоритм (алгоритмы) к ней (к ним) применим (применимы).

Обычно вслед за анализом наступает этап синтеза. В общем случае синтез – это метод познания, соединяющий в целое отдельные элементы, стороны, свойства, которые могли быть получены в результате анализа. Синтетический путь решения задачи - это путь рассуждений, идущих от данных задачи к искомым (устанавливаемым) фактам. Речь идёт о последовательности логических конструкциях вида «зная (доказав) *Y*, мы можем определить (доказать) *X*». В этом смысле синтетические конструкции обратны аналитическим.

Анализ и синтез, таким образом, дополняют друг друга, составляя единый аналитико-синтетический метод решения.

Говоря выше о логических приёмах или конструкциях, мы оставались в границах «чёткой» логики. Однако, непосредственное обнаружение класса *K* алгоритмически разрешимых задач, которому принадлежит данная задача *p*, на практике не всегда осуществимо. Данное обстоятельство восходит к общей для нечёткой логики ситуации, называемой недетерминированностью выводов. *Не-*

детерминированность выводов - характерная черта большинства интеллектуальных информационных систем. Суть её в том, что путь решения конкретной задачи в пространстве ее состояний заранее определить невозможно. В силу этой причины методом проб и ошибок выбирается некоторая цепочка логических заключений, согласующихся с имеющимися знаниями. В случае если она не приводит к успеху, организуется перебор с возвратом для поиска другой цепочки и т.д.

В ряде задач повышенной или высокой сложности (например, в задачах с параметрами) мы можем лишь поначалу говорить о нечёткой принадлежности задачи классу *К*. Здесь присутствуют рассуждения типа «задача *p* скорее принадлежит классу *К*, нежели классу *L*». В терминах нечеткой логики это означает, что $\mu_K(p) \geq \mu_L(p)$, где μ_K так называемая функция принадлежности, принимающая любые значения в интервале $[0,1]$. Если исследователь (в нашем случае - учащийся) «выставляет» задаче *p* экспертную оценку $\mu_K(p) > \frac{1}{2}$, то имеет смысл прилагать усилия, чтобы редуцировать задачу *p* к некоторой алгоритмически разрешимой задаче из класса *К*. Будем говорить в подобных случаях, что задача *p* алгоритмически ассоциирована с классом *К*.

В результате анализа некоторой задачи *p* мы получаем, вообще говоря, последовательность $p_1, p_2, ..., p_n$ задач, к которым может быть редуцирована данная *p*. Возможна ситуация, когда каждая p_j алгоритмически ассоциирована с некоторым классом K_j , $j = 1,...,n$. В этом случае мы получаем декартово произведение классов $K = K_1 \times ... \times K_n$, и данная задача *p* будет алгоритмически ассоциирована с классом *К*.

Если удаётся обнаружить алгоритмы для каждого из таких классов K_j, то дальнейшее решение осуществляется посредством синтеза. Таким образом, процесс решения задачи может быть формализован в виде следующей схемы.

Схема алгоритмизации и редуцирования решения задачи

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">Условие задачи $\rightarrow$ анализ $\rightarrow$ выявление
принадлежности определенному классу задач</td></tr>
<tr><td align="center">$\downarrow$
выявление чёткой принадлежности</td><td align="center">$\downarrow$
выявление нечёткой принадлежно-</td></tr>
</table>

	сти
↓ переход к алгоритму	↓ обращение к ассоциированным алгоритмам, выстраивание их комбинации
↓ синтез: реализация алгоритма, редукция	↓ синтез: последовательная реализация алгоритмов, редукции
фиксация результата (ответ, интерпретации решения)	

Смоделируем процесс поиска алгоритма решения и редукции на примере следующих трех задач с параметрами.

1) При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2 + x - 1 = 0$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

2) При каких значениях параметра a парабола

$$y = x^2 + ax + 1$$

имеет единственную общую точку с осью абсцисс? Найти абсциссу этой точки.

3) При каких значениях параметра a прямая $y = ax - 1$ является касательной к параболе $y = x^2 - 3ax + a$? Найти координаты точки касания.

Введем следующие классы алгоритмически разрешимых задач:

$$K_1 = \{\text{исследование квадратного трехчлена}\},$$

$$K_2 = \{\text{линейная функция }\},$$

$$K_2 = \{\text{касательная к графику функции}\}.$$

Обратимся к первой задаче $p = p_1$. Поскольку возможны случаи $a \neq 0$ (дан квадратный трехчлен) и $a = 0$ (линейная функция), то речь может идти об алгоритмической ассоциированности задачи с классами K_1 и K_2 соответственно. Очевидно, что в первом случае $\mu_{K_1}(p_1) = 1$, а во втором $\mu_{K_2}(p) = 1$ («чёткая» принадлежность), так что имеем в обоих случаях ситуацию детерминированных выводов.

Случай 1. Анализ: чтобы квадратное уравнение имело единственное решение (точнее, двукратный действительный корень), необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был равен нулю. Следовательно, имеем редукцию к следующей задаче: решить уравнение $D=0$, где D - дискриминант уравнения. Соответственно, выстраивается следующий алгоритм:

- выписать коэффициенты квадратного уравнения;

- сформировать дискриминант D;

- решить уравнение $D=0$;

- записать найденное (найденные) значение (значения) параметра a;

-подставить a в данное уравнение;

- решить полученное квадратное уравнение (уравнения);

- выписать в ответе найденные значения параметра a и соответствующие значения x.

Теперь осуществляем синтез решения. Ключевым моментом служит рассмотрение уравнения

$$1+4a=0\text{, откуда } a=-0{,}25.$$

При найденном a получим

$$-0{,}25x^2+x-1=0 \text{ и, следовательно, } x=2.$$

Случай 2: $a=0$. Сразу же получаем линейное уравнение

$$x-1=0\text{, откуда } x=1.$$

Во второй задаче ($p=p_2$) коэффициент перед x^2 отличен от нуля, поэтому сразу же высказываем гипотезу о её принадлежности классу K_1. В то же время речь идет об оси абсцисс (прямой) и касании, так что не исключено использование алгоритмов, соответствующих классам классов K_2 и K_3. В результате анализа экспертная оценка «склоняется» в пользу класса K_1: $\mu_{K_1}(p_2)>\frac{1}{2}$; парабола имеет одну общую точку с осью абсцисс тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $x^2+ax+1=0$ имеет единственное решение.

Таким образом, выстраивается алгоритм, подобный использованному в случае 1) решения задачи p_1. Синтез состоит в нахождении дискриминанта $D=a^2-4$ и решении уравнения

$$a^2-4=0\text{, откуда } a=\pm 2.$$

При каждом из найденных значений a находим абсциссу общей точки параболы и оси OX:

$$a = 2,\ \text{тогда}\ \ x = -1, \quad \text{и} \quad a = -2,\ \text{тогда}\ \ x = 1.$$

Обратимся к задаче $p = p_3$. Предположительно (судя по условию), p_3 - задача на тему «касательная к графику». В то же время, анализируя задачу, приходим к заключению, что касание прямой (с уравнением вида $y = kx + b$) и параболы означает, в частности, наличие ровно одной их общей точки, так что система соответствующих уравнений имеет ровно одно решение. Поэтому «первичная экспертная оценка» может выглядеть следующим образом:

$$\mu_{K_1}(p_3) = \mu_{K_3}(p_3) = \frac{1}{2} \ .$$

Обратимся теперь к алгоритмам, соответствующим классам K_3 и K_1. В первом случае предстоит реализовать следующее условие касания:

$$\begin{cases} a = (x^2 - 3ax + a)' \\ ax - 1 = x^2 - 3ax + a \end{cases};$$

во втором – потребовать, чтобы уравнение

$$ax - 1 = x^2 - 3ax + a$$

имело единственное решение. Второй случай представляется более «экономным», так что происходит переоценка: $\mu_{K_1}(p_3) > \frac{1}{2}$.

На этапе синтеза решения, соответствующего алгоритмам класса K_1, приходим к условию $D = 0$, где D - дискриминант уравнения $x^2 - 4ax + a + 1 = 0$. Имеем $D = (2a)^2 - (a+1)$, то есть $4a^2 - a - 1 = 0$, откуда $a = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8}$.

Решение задачи p_3 даёт повод для обсуждения эффективных и неэффективных алгоритмов.

4.Эффективные алгоритмы

Алгоритм (способ) решения задачи назовём *эффективным*, если

-он позволят получить решение задачи за *наименьшее* (в сравнении с другими способами) *количество шагов* (операций);

или (и)

- посредством этого алгоритма (этим способом) достигается в наиболее *простой форме* результат, дающий ответ непосредственно на вопрос задачи.

Введённое понятие согласуется с понятием трудоёмкости (меры сложности) алгоритма, которым обозначается число простейших операций, выполняемых алгоритмом при решении задачи ([5], с.107). В зависимости от влияния исходных данных на трудоемкость алгоритма используется следующая классификация:

1) Количественно-зависимые по трудоемкости алгоритмы - алгоритмы, трудоемкость которых зависит только от размерности конкретного входа (в нашем случае – количества данных в условии) и не зависит от конкретных значений, принимаемых входными параметрами;

2) Параметрически-зависимые по трудоемкости алгоритмы - трудоемкость которых определяется не размерностью входа (как правило, для этой группы размерность входа обычно фиксирована), а конкретными значениями входных параметров.

Примером количественно-зависимого по трудоёмкости алгоритма служит алгоритм умножения матриц фиксированных размерностей.

Примером алгоритмов с параметрически-зависимой трудоемкостью являются алгоритмы вычисления значений функций с заданной точностью путем разложения в степенные ряды: количество выполняемых операций зависит от заданной точности.

Заметим, что в большинстве практических случаев трудоемкость зависит как от количества данных на входе, так и от значений входных данных (количественно-параметрические по трудоемкости алгоритмы).

При выборе одного из нескольких возможных алгоритмов следует обращаться к тому, который имеет наименьшую трудоёмкость, что при получении результата в наиболее простой форме и обеспечивает эффективное решение. Довольно часто алгоритм решения задач широкого класса приводит к неэффективному решению, тогда как частный алгоритм (алгоритм, «обслуживающий» более узкий класс задач) или специальный приём обеспечивает эффективное решение.

Проиллюстрируем введённое понятие на следующем примере. Найти общее решения уравнения $y'' + y = 0$.

Данное уравнение относится к двум следующим классам алгоритмически разрешимых задач: K_1 - класс дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка и K_2 - класс линейных однородных дифференциальных уравнений (ЛОУ) второго порядка с постоянными коэффициентами.

Если следовать алгоритму решений для K_1, то надо выполнить такие шаги:

1)ввести замену переменных $y' = p(y)$, тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$;

2)записать полученное уравнение первого порядка относительно функции $p(y)$ и определить, какому классу алгоритмически разрешимых уравнений первого порядка оно принадлежит (легко понять, что получается уравнение с разделяющимися переменными).

3)разделить переменные;

4)выполнить интегрирование;

5)выразить из полученного соотношения $p = p(y, C_1)$ и подставить $p = y'$;

6)повторить шаги 2)-3) в отношении полученного уравнения относительно функции $y(x)$;

7)записать общее решение $y = y(x; C_1, C_2)$.

Если использовать алгоритм решений для K_2, то следует выполнить такие шаги:

1)зафиксировать структуру общего решения ЛОУ

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - фундаментальная система решений (ФСР);

2)записать характеристическое уравнения для данного ЛОУ

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

и найти его корни $\lambda = \pm i$;

3)в соответствии с найденными комплексно-сопряжёнными корнями записать ФСР $y_1(x) = \cos x;\ y_2(x) = \sin x$;

4) получить общее решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Мы видим, что алгоритм, соответствующий классу K_2 является эффективным: четыре шага в сравнении с семи шагами алгоритма для K_1; кроме того, здесь отсутствует операция интегрирования, дважды присутствующая в случае K_1.

Таким образом, на этапе анализа задачи, в том случае, когда возможно выполнение нескольких алгоритмов, следует обращаться именно к эффективному.

Пример другого характера – алгоритм вычисления площади треугольника по формуле Герона. Так, треугольник со сторонами $a = 1, b = \sqrt{3},\ c = \sqrt{4-\sqrt{3}}$ имеет полупериметр, равный

$$p = \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{4-\sqrt{3}}}{2}$$

и, если следовать соответствующему алгоритму (формуле), то его площадь

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

будет равной

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(1+\sqrt{3}+\sqrt{4-\sqrt{3}})(\sqrt{3}-1+\sqrt{4-\sqrt{3}})(1-\sqrt{3}+\sqrt{4-\sqrt{3}})(1+\sqrt{3}-\sqrt{4-\sqrt{3}})}\ ,$$

то есть получаем ответ в «непрозрачном» (неупрощённом) виде.

В то же время на основании теоремы косинусов

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$, где φ - угол между a и b.

Поэтому

$4-\sqrt{3} = 1+3-2\sqrt{3}\cos\varphi$, так что $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, откуда $\varphi = 60^o$.

Теперь

$S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi$, то есть $S = \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin 60^o$ или $S = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Таким образом, предложенный способ (в отличие от универсального алгоритма Герона) является эффективным.

Выводы

1. Основным видом деятельности, обеспечивающим успешную реализацию системно-деятельностного подхода в области математической подготовки, является специально организованное и систематически осуществляемое обучение в виде разрешения разнообразных учебных задач -«задачный подход». В его составе мы рассматриваем две следующие основные процедуры: алгоритмизацию и редукцию.

2. Обучающихся следует ознакомить с примерами некоторых классов алгоритмически неразрешимых задач; в случае задачи такого класса K следует, вообще говоря, искать решение в его подклассах $K_j,\ j = 1,2...$

3. При анализе задачи может возникнуть ситуация нечёткой (предположительной) принадлежности задачи некоторому классу *К* – алгоритмическая ассоциированность с классом *К*; в случае ассоциированности с несколькими клас-

сами осуществляют выбор класса с наибольшим значением функции принадлежности..

4. При выборе одного из нескольких возможных алгоритмов следует обращаться к тому, который имеет наименьшую трудоёмкость, что при получении результата в наиболее простой форме обеспечивает эффективное решение.

5. В процессе синтеза осуществляется редукция задачи, что приводит к решению (последовательному решению) задачи (задач) на основе известного алгоритма (известных алгоритмов). В работе приведены модели поиска алгоритма решения и редукции в ряде конкретных задач.

Литература к главе 4

1. Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс]. – Режим доступа: минобрнауки.рф/документы/336.
2. Асмолов, А.Г. Системно-деятельностный подход к разработке стандартов нового поколения/ А.Г.Осмолов // Педагогика. – 2009. – № 4. – С. 18–22.
3. Нахман, А.Д. Задачный подход как технологическая основа процесса обучения математике /А.Д.Нахман // Международный журнал экспериментального образования. – 2018. – № 2. – С. 34-39; URL: http://expeducation.ru/ru/article/view?id=11793.
4. Успенский, В.А. Машина Поста /В.А.Успенский .– М.: Наука, 1999 . – 96 с.
5. Вирт, Н. Алгоритмы и структуры данных /Н.Вирт. – СПб.: Невский диалект, 2001. – 352 с.

Глава 5. СУПЕРПОЗИЦИИ ФУНКЦИЙ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ: ЗАДАЧНЫЙ ПОДХОД

В настоящей главе в контексте задачного подхода изучается понятие суперпозиции функций. Предмет исследования рассматривается в трёх аспектах: педагогическом, математическом и методическом. Прослеживаются развитие понятия суперпозиции и его связи с другими дефинициями и фактами от начального уровня математического образования до уровней старшей школы и вуза. Выстроена задачная система, компонентами которой являются теоретические упражнения, задания стандартного и конструктивного характера, основанные на свойствах и применении суперпозиций. Предложено соответствующее методическое сопровождение процесса решений.

Центральной содержательно-методической линией курса математики в системе «Школа-вуз» является функциональная линия. Её можно охарактеризовать как систему понятий, фактов и методов, связанных с концептом «функция». Истоки линии находятся в начальной школе, где рассматриваются прямопропорциональная и обратно-пропорциональная зависимости, решаются линейные уравнения (по сути, отыскиваются нули линейных функций), строятся таблицы соответствия одних числовых значений – другим и проч. В основной школе учащиеся знакомятся с линейными, дробно-линейными и квадратическими функциями, отыскивают значения функций по заданным графикам, работают с иррациональностями, тригонометрическими функциями «углового» аргумента, рассматривают зависимости статистического характера, изучаются прогрессии и др. В итоге формируется (в самом общем виде) понятие числовой функции как однозначного отображения одного числового множества в другое.

В старших классах полной средней школы происходит обращение к трансцендентным основным элементарным функциям: общим степенным, показательным, логарифмическим, тригонометрическим, обратным тригонометрическим. Конструируются понятия элементарной функции, производной как скорости изменения функции, приобретаются начальные умения комплексного исследования функциональных зависимостей.

Стандарты высшего профессионального образования (в частности, ФГОС 3+ и 3++) формулируются в терминах компетентностного подхода и предусматривают, в частности, формирование компетенций на основе блока математических дисциплин. Так, например ФГОС бакалаврского направления 23.00.00 Техника и технологии наземного транспорта [1] предписывает формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-1 «Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности».

Следует заметить, что процессы математического моделирования и методы математического анализа в том или ином виде реализуется в терминах функций. Индикаторы достижения соответствующей компетенции, должны, по нашему мнению, содержать следующие позиции.

Знать: основные функциональные понятия, понятия предела, непрерывности, производной, дифференциала, первообразной, вероятности как числовой функции на алгебре событий.

Уметь: вычислять пределы функций дискретного аргумента (последовательностей) и непрерывного аргумента, исследовать функцию на непрерывность и классифицировать разрывы, вычислять производные и исследовать зависимости средствами математического анализа.

Владеть: навыками дифференциального и интегрального исчисления, восстановления функций, являющихся решениями дифференциальных уравнений, разложения функций в степенные и тригонометрические ряды.

1.Задачный подход

Как известно, наиболее эффективный путь освоения учащимися новых знаний, умений и навыков пролегает через решение специально разработанных систем учебно-познавательных задач; такой путь именуется задачным подходом [2], с. 28. Соответствующие задачные системы должны быть ориентированы на активизацию деятельности учащихся, повышение эффективности учебного процесса. и, прежде всего, обеспечивать (см. [3]):

- содержательную основу учебно-познавательной деятельности (представление учебного материала с необходимой полнотой, глубиной и детализацией);
- деятельностную основу процесса познания (формирования и совершенствования предметных и обобщенных способов деятельности);
- личностно-развивающий компонент обучения (формирование гибкости, глубины мышления, развитие познавательной мотивации, интереса к предмету познания и к самой познавательной деятельности, воспитание нравственно-волевых качеств);
- рефлексивный компонент обучения, то есть осознание собственной мыслительной деятельности («что узнали нового ?», «как пришли к полученному результату ?», «какие полезные методы и факты обнаружились в процессе решения и могут ли они быть применены в дальнейшем?»)

Практическая реализация задачного подхода в математике достигается следующими средствами:

–постановка некоторой задачи как способ введения нового понятия;

– «извлечение» нового знания в процессе решения задачи;

–«выход» результата решения в сферу применений в самой предметной области «Математика», в смежных дисциплинах, а также в практической деятельности.

Решённая задача порождает серию новых задач («цепная реакция»), что способствует расширению и углублению сформированного знания, усилению мотивации математической деятельности, развитию способностей к обобщению и систематизации результатов [4].

В контексте функциональной линии задачная система может состоять из теоретических упражнений, стандартных заданий (преимущественно, в форме тестов) и задач повышенной либо высокой сложности (заданий творческого уровня).

Теоретические упражнения связаны с рассмотрением некоторых общих для функциональной линии фактов (формул, «мини-теорем» и т.п.), которые устанавливают сами учащиеся. Соответствующая деятельность учащегося состоит в накоплении и анализе фактов, выдвижении гипотез, их подтверждении путём проведения соответствующего доказательства либо опровержении путём построения контрпримеров, решении стандартных задач в общем виде и др. Система стандартных задач ориентирована на переход от репродуктивной к частично-конструктивной деятельности, что отражено в заданиях на прямое применение формул и правил и последующем переносе известных методов в новые ситуации. Наконец, задачи конструктивного уровня предполагают сочетание нескольких приёмов либо поиск нестандартных приёмов решения.

В настоящей работе предпринята попытка выстраивания задачной системы, связанной с важнейшим для функциональной линии понятием суперпозиции функций, свойствами и применением суперпозиций.

2.Развитие понятия суперпозиции функции

Функциональная линия в курсе математики реализуется с помощью ряда опорных понятий, одним из которых является следующее понятие суперпозиции.

Пусть функция $u = u(x)$ задана на множестве X и $U = E(u)$ множество её значений. Пусть, в свою очередь, на множестве U задана $\varphi = \varphi(u)$. Функция f, сопоставляющая каждому $x \in X$ значение $f(x) = \varphi(u(x))$ называется суперпозицией (композицией) функций u и φ или сложной функцией, определённой на X.

В следующей таблице представлены связи понятия суперпозиции с другими понятиями, фактами, методами. Наличие таких связей и их реализация в процессе решения задач может быть кратко выражено тезисом: *суперпозиция функций есть системообразующее понятие в курсе математики*.

Уровень образования	***Суперпозиция: смежные понятия и факты***	***Типы решаемых задач***
Начальная школа (пропедевтический уровень)	Линейные и дробные выражения	Вычисление значений линейных и дробно-линейных функций
Основная школа	Характер четности функций, преобразование графиков, замена переменных, последовательности и прогрессии	Графики функций линейного аргумента, биквадратные уравнения, нахождение членов последовательности с заданными номерами
Старшие классы средней школы	Анализ и синтез суперпозиций, производная сложной функции, множества значений функций, метод математической индукции и др.	Нахождение значений сложных функций, техника дифференцирования, замены переменных в уравнениях и неравенствах, монотонность суперпозиций, задачи с параметрами и др.
Вузы (бакалавриат)	Преобразования параллельного переноса	Приведение к каноническому виду

	и поворота системы координат, непрерывность сложной функции, элементарные функции, инвариантность формы дифференциала, методы нтегрирования и др.	уравнений кривых второго порядка, дифференцирование многоступенчатых суперпозиций, замена переменных в интеграле и др.

Таблица 1. Суперпозиции и смежные понятия/факты

В начальной школе понятие функции формируется на интуитивном уровне как зависимость между величинами; понятие суперпозиции функций здесь ещё отсутствует. Отрабатывается операция *подстановки значений*: «подставьте вместо x в данное выражение следующие числа…», «составьте таблицу значений…», «отметьте точки на координатной плоскости» и т.п.

В основной школе уже возможен анализ и синтез суперпозиций. В последнем случае операция подстановки выполняется на уровне *подстановки выражений*. Более точно, действует следующее правило: чтобы получить (по заданным u и φ) суперпозицию $\varphi(u(x))$, следует *в аналитическом выражении внешней функции* φ *везде на месте независимой переменной записать аналитическое выражение внутренней функции* $u(x)$.

Приведём соответствующие примеры.

Пример 1 (стандартный уровень). Дана последовательность $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$. Найдите выражение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

Заметим, что данная последовательность является суперпозицией: $a_n = \varphi(u(n)),$ где $u(n) = 2n-1,\ \varphi(u) = u!\ , n \in N.$ Решение основано на только что сформулированном правиле, применённом к последовательности: при нахождении a_{n+1} следует в выражении $a_n = \dfrac{1}{(2n-1)!}$ на месте n записать $n+1$, то есть $a_{n+1} = \dfrac{1}{(2(n+1)-1)!}$ или $a_{n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)!}$. Теперь

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!(2n)(2n+1)}=\frac{1}{2n(2n+1)}.$$

Пример 2 (стандартный уровень). Найдите $f(2x)-f(16x)$ если $f(x)=\log_2 x,\ x>0.$

Решение основано на подстановке в логарифм $2x$ и $16x$ вместо x:

$$f(2x)-f(16x)=\log_2 2x-\log_2 16x=-3.$$

Пример 3 (стандартный уровень). С помощью выделения полного квадрата постройте график квадратичной функции $y=x^2+6x+2$.

В результате выделения полного квадрата $y=(x+3)^2-7$, так что приходим к суперпозиции $y=X^2-7$ (стандартная парабола) , где $X=x+3$ (параллельный перенос параболы вдоль оси абсцисс на три единицы влево).

Пример 4 (стандартный уровень). Решите уравнение $x^4-8x^2-9=0$.

Здесь, по сути, отыскиваются нули суперпозиции $y=X^2-8X-9$, где $X=x^2$.

В курсе старшей школы операция замены переменных получает дальнейшее развитие. Речь идёт об уравнениях и неравенствах, решаемых средством замены переменных (то есть средством перехода от «внутреннего» компонента суперпозиции к «внешнему»). Довольно часто у обучающихся возникает здесь путаница с нахождением области определения. Проблема решается с помощью следующего простого правила: на первом шаге записывают область определения «заменяемой» функции $t=u(x)$, а на втором шаге работают с областью определения задания, записанного в терминах новой переменной t. Область определения $u(x)$ следует принимать во внимание на заключительном шаге - при возвращении к исходной переменной x.

Пример (повышенный уровень, [5], № 517447). Решите неравенство

$$\frac{\log_4 64x}{\log_4 x-3}+\frac{\log_4 x-3}{\log_4 64x}\ge\frac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}.$$

Применим замену переменных $t=\log_4 x$; здесь $x>0$, при этом t пробегает все действительные значения. Неравенство приводится к виду $f(t)\ge 0$, где $f(t)=\dfrac{2t^2-4t+2}{(t-3)(t+3)}$. Применяем метод интервалов. Областью определения $f(t)$ служит множество $R\setminus\{-3;3\}$. Находя нули, а затем знаки $f(t)$, и возвращаясь к переменной x, будем иметь

$$\left[\begin{array}{l}\log_4 x < -3.\\ \log_4 x = 1,\\ \log_4 x > 3.\end{array}\right.$$

С учётом области определения $t = \log_4 x$ получаем ответ $(0,\frac{1}{64})\cup\{4\}\cup(64,+\infty)$.

Отдельного внимания заслуживают задачи, в которых после замены переменной рассмотрение сводится лишь к внешней функции (на области значений внутренней функции). Такие задания представляют интерес с точки зрения пропедевтики свойств инвариантности (об инвариантности см. ниже).

Пример (высокий уровень сложности). Найти множество значений функции $y = 2\sin x + \cos x$ на отрезке $[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$.

На данном отрезке значения синуса положительны, поэтому задание может быть преобразовано к виду $y = 2\sqrt{1-t^2} + t$, где $t = \cos x$. При этом значения косинуса на $[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$ убывают от $\cos\frac{\pi}{4}$ к $\cos\frac{3\pi}{4}$, так что $t \in [-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Полученная функция непрерывна, поэтому множество её значений будет находиться между наибольшим и наименьшим значениями, которые, в свою очередь находим с помощью производной. Имеем

$$y' = 1 - \frac{2t}{\sqrt{1-t^2}};$$

стационарная точка определится из условия $\sqrt{1-t^2} = 2t,\ t \ge 0$; корнем уравнения служит $t = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и это – точка максимума.

Таким образом, функция $y = 2\sqrt{1-t^2} + t$ возрастает от $y(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ до $y(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{5}$ и затем убывает к $y(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{3}{\sqrt{2}}$. Значит, множеством её значений служит промежуток $[\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{5}]$.

Заметим, что возврата к прежней переменой x здесь не потребовалось, т.е. имеет место упомянутая выше инвариантность относительно $t = \cos x$.

Заметим также, что другие подходы к нахождению множеств значений функций представлены в [6].

3.Введение в математический анализ: входное тестирование

В вузовском курсе математики понятие суперпозиции возникает во введении в анализ. Степень готовности студентов к работе с суперпозициями может быть выявлена путём проведения тестирования. Приведём одну из возможных подборок тестовых заданий.

1) Выберете выражение, равносильное $\log_2^2 x$:

а) $(\log_2 x)^2$

б) $\log_4 x^2$

в) $2\log_2 x$

г) $\log_4 x$

2) Какие из следующих тождеств справедливы при всех действительных значениях переменной x:

а) $\sqrt{x^2} = x$

б) $\sqrt[3]{x^3} = x$

в) $\log_2 2^x = x$

г) $2^{\log_2 2} = x$

3) Число $\arccos(\cos 6{,}28)$ равно

а) 6, 28

б) $2\pi - 6{,}28$

в) $6{,}28 - 2\pi$

г) 2π

4) Какие из следующих выражений не существуют:

а) $\ln\ln\ln e$

б) $\sqrt{-\log_{0,15} 15}$

в) $\lg(-\lg\frac{10}{11})$

г) $\sin(\arcsin\frac{\pi}{3})$

5) Производная функции $\cos^2 x$ равна

а) $\sin^2 x$

б) $2\cos x$

в) $-2\sin x$

г) $-\sin 2x$

Комментарии. Запись $f^n(x)$ есть обозначение суперпозиции $(f(x))^n$. Непонимание этого факта приводит к выбору студентами дистракторов б), в), г) в задании 1 и одного из дистракторов а), б), в) в задании 5. Кроме того, неверный выбор ответа в задании 5 может быть обусловлен неумением находить производные сложных функций. Дистракторы в задании 2 отражают часто встречающуюся ошибку формального использования тождеств без учёта области их определения. Неверный выбор ответа в задании 3 может означать , что студент не владеет определениями и свойствами обратных тригонометрических функций. Дистракторы б) и в) в задании 4 отражают неумение определять знаки логарифмов.

Выбор обучающимся перечисленных дистракторов в качестве ответов – сигнал о необходимости корректирующих мероприятий (дополнительные занятия, консультации, возможно - чтение адаптивного курса).

4. Теоретические упражнения

Приведём перечень возможных теоретические упражнений, направленных на осмысление понятия и свойств суперпозиций.

1) Может ли функция, обладающая свойством $f(x) = f(\frac{1}{x}),\ x \neq 0$, быть монотонной:

а) на $(0;+\infty)$; б) на $(-\infty;0)$?

2) Если функция u четна, а φ -нечётна, то каков характер чётности функций $f(x) = \varphi(u(x))$ и $g(x) = u(\varphi(x))$?

3) Если функция u периодична, а φ -непериодична, то что можно сказать о периодичности функций $f(x) = \varphi(u(x))$ и $g(x) = u(\varphi(x))$?

4) Сконструируйте функцию, обладающую свойством

$$f(f(x)) = f^2(x).$$

5) Пусть область определения X функции $u(x)$ и множество U её значений – некоторые промежутки (конечные или бесконечные). Пусть также функции u и φ обладают свойством монотонности на своих областях определения. Каков характер монотонности функции $f(x) = \varphi(u(x))$? Рассмотрите все возможные случаи. Приведите доказательства полученных утверждений.

Комментарии к теоретическим упражнениям.

1) Простейшим является пример следующей функции: $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Для монотонности на $(0;+\infty)$ необходим строгий знак неравенства между, например, $f(2)$ и $f(\frac{1}{2})$. Однако, в нашем случае $f(2)=f(\frac{1}{2})$. Аналогично, монотонность отсутствует и на $(-\infty;0)$.

2) – 3) Характер чётности и наличие/отсутствие периодичности суперпозиции устанавливается на основании соответствующего определения; например, в задании 2) следует сравнить $\varphi(u(-x))$ и $\varphi(u(x))$.

4) Речь идёт о функции $f(x)=x^2$.

5)Рассмотрим, например, случай убывания функции u и возрастания функции φ. Пусть $x_1, x_2 \in X$ и $x_2 > x_1$. Тогда $u(x_2) < u(x_1)$ и $\varphi(u(x_2)) < \varphi(u(x_1))$. Таким образом, $f(x_2) < f(x_1)$, то есть $f(x)$ убывает.

В этом же случае для дифференцируемых (на соответствующих промежутках) функций u и φ доказательство убывания $f(x)$ может быть проведено также с помощью правила дифференцирования сложной функции: $f'(x)=\varphi'(u)\cdot u'(x)$. Здесь $u'(x)$ отрицательна, а $\varphi'(u)$ положительна, так что $f'(x)<0$ при всех $x \in X$, что и подтверждает убывание $f(x)$.

Свойства монотонности суперпозиций, представленные выше, могут быть эффективно использованы в приложениях суперпозиций. Приведём пример.

Задание 1(высокий уровень сложности). Решите уравнение

$2\cdot 2^{\frac{1}{x}}-9\sqrt{4x-1}+1=0$.

Решение. Функция $y=2\cdot 2^{\frac{1}{x}}$ положительна, так что ее график расположен в первой и второй четвертях координатной плоскости. График функции $y=9\sqrt{4x-1}-1$ расположен в первой и четвёртой четвертях, так что общие точки графиков возможны только в первой четверти. Согласно результату упражнения 5) функция $y=2\cdot 2^{\frac{1}{x}}$ при $x>0$ убывает, а $y=9\sqrt{4x-1}-1$ при $x>\frac{1}{4}$ возрастает; следовательно, общая точка, если она существует, – одна. Разность $2\cdot 2^{\frac{1}{x}}-(9\sqrt{4x-1}-1)$ при $x=\frac{1}{4}$ положительна, а при $x=1$ отрицательна. Следовательно, корень уравнения расположен между $\frac{1}{4}$ и 1. Подбором находим $x=\frac{1}{2}$.

Близким по характеру рассуждений, основанных на свойстве монотонности, является следующее

Задание 2 (высокий уровень сложности, [7], с.413, задача 6). Решите уравнение

$$(2x+1)(2+\sqrt{(2x+1)^2+3})+3x(2+\sqrt{9x^2+3})=0$$

Решение. Легко заметить, что левая часть уравнения может быть записана с помощью функции $f(t)=t(2+\sqrt{t^2+3})$ в виде $f(u)-f(v)=0$, где $u=2x+1,\ v=-3x$; тогда $f(2x+1)=f(-3x)$. Функция $f(t)$ возрастает при всех t, в чём можно убедиться, вычислив производную

$$f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\frac{2t^2}{\sqrt{t^2+3}},$$

которая, очевидно, положительна на всей числовой оси. Следовательно, значения аргументов этой функции должны совпадать: $2x+1=-3x$. Значит $x=-0{,}2$.

5.Суперпозиции в математическом анализе

Выше отмечено, что понятие суперпозиции и основные её свойства «сопровождают» сплошь всю функциональную линию. Так, во введении в анализ устанавливается непрерывность суперпозиции при условии непрерывности её внешнего и внутреннего компонентов. В частности, обосновывается непрерывность любой элементарной функции на области её определения.

Важнейшим является изучаемое затем правило дифференцирования сложной функции. В свою очередь, это правило может быть использовано для обоснования следующих свойств инвариантности дифференциала и интеграла (эти задания могут быть предложены студентам в качестве теоретических упражнений).

1)Докажите свойство инвариантности формы первого дифференциала: равенство $d\varphi(u)=\varphi'(u)du$ имеет место независимо от того, является ли переменная u «свободной» или же представляет собою некоторую функцию $u=u(x)$.

2) Обладают ли свойством инвариантности формы второй дифференциал и вообще дифференциалы высших порядков?

3) Докажите свойство инвариантности формы неопределённого интеграла: равенство

$$\int\varphi(u)du=\Phi(u)+C$$

(где Φ - некоторая первообразная функции φ а C –произвольная постоянная), имеет место независимо от того, является ли переменная u «свободной» или же представляет собою некоторую функцию $u = u(x)$.

Приложениями свойств 1), 3) могут служить формулы замены переменных в неопределённом и определённом интегралах. В этой связи приведём ещё одно упражнение, связанное с решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с разделёнными переменными.

Найдите общее решение уравнения

$$\varphi(y)y' = g(x).$$

Рассуждения сводятся к интегрированию обеих частей уравнения, записанного в терминах дифференциалов

$$\varphi(y)dy = g(x)dx. \tag{1}$$

Однако, формальная постановка знаков интеграла была бы некорректной, поскольку левая и правая части уравнения зависят от разных переменных. Требуется уточнение следующего характера. Пусть $y = y(x)$ - какое-либо решение (1). Тогда

$$\varphi(y(x))dy(x) = g(x)dx.$$

Выполняем интегрирование по переменной x:

$$\int \varphi(y(x))dy(x) = \int g(x)dx.$$

Теперь, пользуясь инвариантностью формы первого дифференциала, получаем искомое общее решение

$$\int \varphi(y)dy = \int g(x)dx.$$

6. Суперпозиции в теории рядов

Суперпозиции последовательностей возникают и в теории числовых и функциональных рядов: признаки Даламбера, Лейбница, преобразование Абеля, формулы радиуса сходимости степенного ряда. Здесь речь идёт о простейшем переходе от члена a_n к a_{n+1}. Так, например, может быть установлена сходимость знакоположительного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}.$$

Имеем (см. пример 1 параграфа 2)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0,$$

и, так как полученный предел меньше единицы, то в силу признака Даламбера, ряд сходится.

Синтез суперпозиции может быть также использован для разложения в степенные ряды элементарных функций на основе стандартных разложений. Например, получим представление функции $\exp(-x^2)$ в виде суммы степенного ряда (что, в свою очередь, даёт возможность приближённо вычислять «неберущиеся» определённые интегралы данной функции). Как известно,

$$\exp u=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{n!}. \tag{2}$$

Поскольку представление (2) справедливо на всей числовой оси, то можно выбрать $u=-x^2$. Теперь приходим к следующему разложению суперпозиции:

$$\exp(-x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

Заключение

Функциональная линия как система понятий, фактов и методов, связанных с понятием функции, «пронизывает» весь курс школьной и вузовской математики. В терминах функций реализуются, в частности, методы математического моделирования. В контексте компетентностного подхода индикаторы достижения компетенций, связанных с математическим моделированием, формулируются как триада «знать», «уметь», «владеть», относящаяся к функциональным понятиям и фактам. Среди последних особое место занимает понятие суперпозиции. Развитие данного концепта прослеживается на всём протяжении курса от начальной школы до старших классов средней школы и вузовского бакалавриата. В отношении предмета исследования (суперпозиция как системоообразующее понятие математики) осуществляется трёхаспектное рассмотрение: педагогический аспект (реализация содержательного, деятельностного, личностно-развивающего и рефлексивного компонентов обучения в контексте задачного подхода) математический аспект (например, инвариантные формы и их применения), методический аспект (пути поиска решения заданий, методическое сопровождение процесса решений и др.). Предложена соответствующая задачная система: теоретические упражнения, задания стандартного уровня (в тестовой форме), повышенного и высокого уровня. Приложения суперпозиций могут быть представлены, в частности, методом интегрирования дифференциальных уравнений с разделёнными переменными и степенными разложениями элементарных функций, полученными на основании стандартных разложений.

Литература к главе 5

1. Федеральные государственные образовательные стандарты. – Текст : электронный // Национальная ассоциация развития образования и науки. – URL : https://fgos.ru/ (дата обращения: 29.06.2021).

2 . Балл, Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект/ Г.А.Балл. - М.: Педагогика, 1990. - 184 с.

3. Шмигирилова, И. Б. Особенности конструирования учебно-поисковых заданий в компетентностном обучении математике/ И. Б.Шмигирилова // Наука и школа. - 2017.- № 3.- С. 152-160.

4. Нахман, А.Д. Задачный подход как технологическая основа процесса обучения математике /А.Д.Нахман // Международный журнал экспериментального образования. – 2018. – № 2. – С. 34-39; URL: http://www.expeducation.ru/ru/article/view?id=11793 (дата обращения: 29.06.2021).

5. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня [Электронный ресурс] // URL: https: ege.sdamgia.ru/(дата обращения 29.06.2021).

6.Сильвестров, В.В. Как найти множество значений функции /В.В. Сильвестров// Математика в школе. - 2008. -№ 9. - С. 30-34.

7.Ткачук, В.В. Математика абитуриенту /В.В.Ткачук. - М.: МЦНМО, 2018. - 944 с.

Глава 6. ЗАДАЧНЫЙ ПОДХОД К ФОРМИРОВАНИЮ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

В настоящее время стохастические знания, вероятностное мышление, умение строить научно обоснованные прогнозы, становятся как нельзя востребованными. Деятельность в условиях неопределённости, умения анализировать степень объективной возможности наступления тех или иных событий, предполагают наличие соответствующей вероятностно-статистической подготовки. В соответствии с требованиями обновлённых стандартов общего и высшего образования (см. [1], [2], [3]) выпускник школы должен обладать определённым уровнем так называемой стохастической грамотности ([4], [5]), а выпускник вуза инженерного или экономического профиля – в достаточной степени сформированной стохастической компетенцией [6].

Вместе с тем средства формирования стохастической грамотности и стохастической компетенции нуждаются в дальнейшем изучении. В нашем понимании стохастическая компетенция есть способность к моделированию стохастических ситуаций.

Характерной чертой утверждающейся в системе образования компетентностной парадигмы является освоение учащимися новых понятий, методов и фактов в процессе активной познавательной деятельности. Такой деятельности способствует задачный подход. В настоящей работе обсуждаются инновационные задачные системы в качестве инструментов формирования практико-ориентированных стохастических знаний и умений, восходящих к способности стохастического моделирования.

1. Понятие стохастической компетенции

Выстраивая стохастическую содержательно-методическую линию применительно к системе «Школа-вуз», можно выделить три основных этапа этого процесса.

Этап первый: ознакомление с простейшими комбинаторными, вероятностными и статистическими понятиями и формулами, и их применение к игровым и прочим простейшим же жизненным ситуациям.

Этап второй. Становление стохастической грамотности как разновидности грамотности математической. Здесь формируются система представлений о случайных явлениях в окружающей жизни, а также соответствующие умения как в действиях со стохастическими понятиями и фактами, так и в приложениях этих действий к решению практических задач. Стохастическую грамотность, таким образом, можно понимать как своего рода «предкомпетенцию».

Этап третий. Формирование стохастической компетенции. Здесь, прежде всего, необходимо сформулировать наше понимание компетенции (компетентности) в общем случае. Проанализировав имеющиеся в литературе определения (см., [7], [8] и др.), мы приходим к следующим формулировкам.

Компетенция (в широком смысле) –это способность (потенциал) личности на основе освоенных знаний и умений выполнять определённый вид деятельности. Компетентность – это «компетенция в действии», т.е. готовность на основе накопленного потенциала получать конечный результат в данном виде деятельности.

Компетенция и компетентность – системные качества личности. Так, говоря о стохастической компетенции, мы выделяем когнитивный компонент (знания и умения в области комбинаторики, теории вероятностей и статистики, теории случайных процессов), мотивационно-ценностный (аксиологический) компонент (мотивацию к решению стохастических задач), конативный (навыки, опыт соответствующей математической деятельности, предрасположенность к ней), личностный (саморегуляция, рефлексия и др. личностные качества, приобретаемые в процессе освоения и применения стохастики).

Употребляя в настоящем контексте термин «деятельность», мы имеем в виду деятельность по анализу так называемых стохастических ситуаций. Эти ситуации (процессы, явления и т.п.) характеризуются непредсказуемостью (исход ситуации невозможно заранее предсказать с абсолютной точностью), воспроизводимостью (ситуация может быть воспроизведена как угодно много раз в остающихся неизменными условиях), наличием свойства устойчивости частот рассматриваемых случайных событий (в этой связи ниже вводится понятие стохастического детерминизма).

Стохастическая компетенция предполагает способность к деятельности на основе именно стохастических знаний и умений. Речь, по сути, идёт о математической формализации стохастической ситуации, решении получаемой при этом математической задачи и последующей интерпретации результата, то есть выявлении требуемых характеристик анализируемой ситуации. Указанный трёхшаговый процесс именуется, как известно, математическим моделированием.

Таким образом, в узком, деятельностном контексте, *стохастическую компетенцию* будем рассматривать как *способность моделировать стохастические ситуации*.

2. Стохастические модели

Математические модели можно подразделить на детерминированные и стохастические. В первом случае модели описывают поведение объекта или явления с позиций «незыблемости» управляющих им законов, полной определенности в настоящем и будущем; так, для данной совокупности входных характеристик ситуации на выходе модели наблюдается единственный результат.

В отличие от детерминированной, стохастическая (вероятностная) модель даёт возможность спрогнозировать *множество всех возможных состояний* стохастической ситуации, охарактеризовать эту ситуацию в терминах вероятностей случайных событий и распределений случайных величин [9], [10, с.6-7].

Выделяя укрупнённые блоки стохастической модели, её структуру можно схематически представить следующим образом.

ВХОД – формализованные (математически описанные) данные о стохастической ситуации

↓

ОПЕРАТОР МОДЕЛИ – законы стохастики

↓

ВЫХОД – прогноз, оценка, принятие /непринятие гипотезы и др. интерпретации стохастической ситуации

Традиционные задачи теории вероятностей и математической статистики могут рассматриваться как простейшие задачи стохастического моделирования, поскольку предполагают анализ (средствами математики) процессов и явлений, носящих случайный характер.

Обсуждая концепцию стохастического моделирования, следует упомянуть о понятии стохастического детерминизма, которое отражает объективно существующую тенденцию проявления закономерностей в совокупности массовых случайных явлений [11]. Математическая форма стохастического детерминизма выражается в терминах сходимости по вероятности. А именно, случайные параметры математической модели (частоты, средние значения и др.) практически гарантированно становятся заданно близкими к некоторым неслучайным значениям , если имеет место свойство массовости однотипных стохастических ситуаций:

$$\text{стохастическая модель} \dashrightarrow \text{детерминированная модель};$$

«прерывистая» стрелка употребляется по аналогии с обозначением сходимости по вероятности.

3. Динамика формирования стохастической компетенции

В условиях перехода от знаниевой к компетентностной парадигме обучения на центральное место выходит системно-деятельностный подход к организации учебного процесса. Ведущая роль теперь отводится активной, разносторонней и максимально самостоятельной познавательной деятельность обучающегося. В свою очередь, в рамках системно-деятельностного подхода мы рассматриваем задачный подход как инструмент формирования знаний и умений (в том числе, умений прикладных) средствами решения систем учебных задач. Наконец, для достижения сформулированной цели мы предлагаем контекстный задачный материал, включающий в себя задачи-кейсы, задачи-трансформеры (термин - наш), обратные стохастические задачи. Сюжеты заданий носят практико ориентированный или профессионально-ориентированный характер. Соответствующий задачный материал можно считать–инновационным в соответствии с концепцией [12], согласно которой инновации характеризуется определённой степенью новизны и нацеленностью на востребованный результат.

Динамика формирования стохастической компетенции/компетентности средствами задачного подхода может быть представлена следующей схемой.

Простейшие сюжетные вероятностно-статистические задачи $\rightarrow$ стохастические знания и умения

$\downarrow$

Задачи практико-ориентированного содержания $\rightarrow$ стохастическая грамотность

$\downarrow$

Профессионально-ориентированные задания $\rightarrow$ стохастическая компетенция

$\downarrow$

Квазипрофессиональные и профессиональные задания $\rightarrow$ стохастическая компетентность

Решение сюжетных задач стохастического содержания возможно уже в рамках начальной школы. При этом отрабатываются понятия случайных событий, элементарных исходов опыта, классической вероятности события и др. Например, может быть предложен вероятностный анализ следующей простой житейской ситуации. В копилке 7 монет по 2 рубля, 10 монет по 5 рублей и 3 - по 10 рублей. Если хорошо потрясти копилку, то через щель выскочит монетка. Какова вероятность, что это будет десятирублёвая монета?

Решение заданий практико-ориентированного содержания предполагает наличие у обучающегося хотя бы минимального опыта по анализу типичных практических ситуаций в сочетании с простейшими инструментами стохастики. Здесь востребованы стандартные вероятностные схемы, распределения случайных величин, статистические распределения выборок и др. Например, в задаче речь может идти об анализе коммунальных платежей (выборка квитанций за календарный год, группировка данных о ежемесячных расходах электроэнергии, её средне-месячное потребление и т.п.).

Простейшие задания с профессионально-ориентированным содержанием могут быть рассмотрены в рамках курса математических дисциплин (см., напр., [9]), задания более сложные и квазипрофессиональные служат предметом рассмотрения соответствующих специализированных кафедр.

4. Кейсы, трансформеры, обратные задачи

Роли и значению кейс-заданий в формировании и развитии стохастической компетенции была посвящена работа [13], поэтому ограничимся кратким рассмотрением. Стохастические кейсы, согласно [13], представляют собою комплексные компетентностно-ориентированные учебные задания по моделированию стохастических ситуаций. Их решение требует оптимального сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся. Проанализируем, для примера, следующее кейс-задание.

На пути автомобиля по улице Зелёной 4 светофора, каждый из которых может остановить автомобиль с вероятностью $p = \frac{1}{3}$. Какова вероятность хотя бы одной остановки автомобиля при движении по этой улице? Какова вероятность ровно 2-х остановок? Не менее 2-х остановок?

Постройте ряд распределения числа остановок на светофорах. Каково среднее число остановок при постоянной езде по ул. Зелёной?

Можно выбрать равный по расстоянию маршрут по улице Весенней, на которой 6 светофоров. Среднее число остановок при постоянной езде по ул. Весенней равно 1. Что вероятней: проехать без остановок по улице Зелёной или по улице Весенней? Какой из этих двух маршрутов предпочтительнее с точки зрения экономии времени?

Для решения данного задания необходимо освоение теоретического материала в рамках темы «Вероятностная схема Бернулли» . А именно, требуется знание формулы Бернулли и числовых характеристик биномиального распределения. Востребованы также умения строить и анализировать ряды распределения дискретных случайных величин, навыки работы с формулами вероятностей суммы событий, вероятностью наступления хотя бы одного события и др. Поиск ответа на последний вопрос основан на простом житейском опыте: надо найти наиболее вероятное число μ остановок на светофорах на каждой из улиц и сравнить результаты.

Задачи-трансформеры представляют собою задания на моделирование ситуаций или процессов с целью их изучения одновременно в детерминистском и стохастическом направлении в зависимости от вопроса задачи.

Обсудим например, следующее задание. Биржевыми аналитиками установлено, что стоимость акций компании в последний месяц года должна изменяться по закону $y=(x-8)^2 e^{15-x}$, где x - календарная дата, $x=1,2,...,30$ (предпраздничный день 31 декабря исключается из рассмотрения). Какого числа следует продать акции, чтобы получить максимальный доход? Какова вероятность, что в случайно выбранный день месяца стоимость акций находится на подъёме?

Очевидно, что для ответа на первый вопрос следует обратиться к детерминированной модели ситуации. Акции выгоднее всего продавать на максимуме роста, следовательно, производная $y'=(x-8)(10-x)e^{10-x}$ в соответствующей точке должна изменить знак с плюса на минус. Очевидно, что такой точкой будет $x=10$, то есть акции надо продать 10 декабря.

Второй вопрос предполагает наличие стохастической ситуации, поскольку выбор даты $x \in \{1,2,...,30\}$ случаен. При этом благоприятных исходов, то есть дней роста стоимости акций, всего три: 8,9,10 декабря. Искомая вероятность $p=\frac{3}{30}$, или $p=0{,}1$.

Решение обратных стохастических задач является эффективным технологическим приёмом для формирования целостности и системности знаний . Обратные задачи – важный компонент технологии УДЕ (укрупнённых дидактических единиц), которая представляет собой интеграцию целого ряда конкретных подходов к обучению. Ключевой элемент технологии УДЕ – это упражнение - триада (исходная задача, ее обращение, обобщение).

С точки зрения моделирования стохастических ситуаций обратная задача представляет собою задание по нахождению некоторых входных параметров модели по её известному выходу. Оператор модели при этом может быть полностью известен («прозрачный, белый ящик»), известен в самом общем виде, но не конкретизирован применительно к данному заданию («серый ящик»), либо полностью неизвестен («чёрный ящик»).

Обсудим в указанном контексте выстраивание упомянутой выше триады применительно к случаю биномиального распределения. Имеем стохастическую ситуацию повторения опытов, в каждом из которых данное событие A имеет одну и ту же вероятность p. В стандартном случае прямой задачи известно число n проводимых опытов и, как правило, отыскиваются вероятности наступления события заданное количество раз. Оператором модели служит формула Бернулли и числовые характеристики распределения. В обратных задачах задействованы следствия, не всегда известные обучающемуся, так что может возникнуть ситуация «серого ящика».

Рассмотрим простейший пример обратной задачи.

При проведении n=100 одинаковых опытов среднее число наступлений данного события a=25. Какова вероятность p наступления этого события в каждом из опытов?

Решение. Имеем вектор входных параметров (n,p), где параметр p подлежит отысканию. Оператор модели (в данном случае - формула математического ожидания) полностью известен: $a=np$. На выходе a=25. Следовательно, искомое значение параметра p=0,25.

В случае «серого ящика» математической модели рассмотрение следует начинать с прямой задачи. Так, например, для некоторого производства закупаются сигнализаторы в количестве n штук, каждый из которых при возникновении аварийной ситуации срабатывает с заданной вероятностью p. Какова вероятность, что при угрозе аварии сработает не менее k_0 сигнализаторов?

Для решения следует, очевидно, получить (а затем – использовать) в качестве оператора модели такое следствие формулы Бернулли:

$$P(k_0 \le k \le n) = \sum_{k=k_0}^{n} P_n(k)\ , \tag{1}$$

где

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}\ . \tag{2}$$

Теперь можно перейти к следующей обратной стохастической задаче.

При возникновении на производстве аварийной ситуации каждый из сигнализаторов срабатывает с вероятностью $p = \frac{2}{3}$. Какое наименьшее количество таких сигнализаторов надо закупить, чтобы как минимум два из них сработало с вероятностью не менее $\rho = \frac{8}{9}$.

Мы находимся в рамках всё той же схемы Бернулли с числом опытов n, вероятностью события в каждом опыте p и числом наступления события $k \ge 2$. На входе модели имеем вектор (n,p,k), где $p = \frac{2}{3}$, $k \ge 2$, а параметр n следует отыскать. Поскольку в равенстве (1) значение n неизвестно, то оператор модели (а именно, соотношение (1)) подлежит дальнейшему уточнению. Так, возможен переход к противоположному событию:

$$P_n(k \ge 2) = 1 - (P_n(0) + P_n(1)) .$$

По условию

$$1 - P_n(0) - P_n(1) \ge \rho \text{ или } \quad P_n(0) + P_n(1) \le 1 - \rho \; .$$

Имеем, согласно (1) и (2),

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)^n + \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^{n-1} \le 1 - \frac{8}{9}, \text{ откуда } \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 + 2n) \le \frac{1}{9} \; ,$$

так что простым перебором $n = 1,2,...$ получаем наименьшее значение $n = 4$.

В качестве обобщения приведённых рассуждений учащийся легко приходит к следующему простому результату. Если требуется (в рамках схемы Бернулли) найти вероятность $P_n(k \ge k_0)$, где $k_0 \le \frac{n}{2}$ (или n неизвестно), то, на основании формул вероятности суммы попарно несовместных событий и перехода к противоположному событию, целесообразно использовать соотношение

$$P_n(k \ge k_0) = 1 - \sum_{k=0}^{k_0 - 1} P_n(k), \; k_0 = 1,2,...,n-1; \; n = 2,3,... .$$

Выводы

Формирование стохастической компетенции обучающихся в системе «Школа-вуз» – длительный процесс, затрагивающий все ступени общего образования и продолжающийся на этапе высшего образования. С деятельностной точки зрения происходит становление способности к моделированию стохастических ситуаций, которая и представляет собою «ядро» стохастической компетенции. К таким ситуациям относятся сюжеты вероятностных задач, подлежащие математической обработке данные статистических выборок и другие контекстные задания, в конечном счёте – профессионально-ориентированные. Задания традиционной формы, с точки зрения автора, должны быть дополнены заданиями инновационного характера (кейсы, трансформеры, обратные задачи). Их решение способствует комплексному, всестороннему анализу стохастических ситуаций, формированию у обучающихся целостности и системности знаний в области математики и её приложений.

Литература к главе 6

1. Федеральные государственные образовательные стандарты основного общего образования. - Текст : электронный // URL:

http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (дата обращения: 20.06.22).
2. Федеральные государственные образовательные стандарты среднего общего образования. - Текст: электронный //URL: https://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 20.06.22).
3. Федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования (3++) по направлениям бакалавриата, ФГОС ВО (3++) по направлениям специалитета. -Текст: электронный //URL: https://fgosvo.ru/fgosvo/index/24 (дата обращения: 20.06.22).
4. Гомзякова, Л.Ф. О стохастической грамотности школьников / Л.Ф.Гомзякова, О.И.Чикунова // Успехи современного естествознания. -2012.- №5.- С.84-85 .
5. Рослова, Л. О. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности / Л.О.Рослова, К.А. Краснянская, Е.С. Квитко // Отечественная и зарубежная педагогика. - 2019. -Т.1, №4 . -С. 58–79 .
6. Китаева, И.В. Проблемы формирования стохастической компетентности учащихся /И.В.Китаева // Актуальные проблемы естественно-математического образования: материалы межрегиональной научно-практической конференции. - Липецк: ЛИРО, 2012. - С. 39-41.
7. Зимняя, И. А. Компетентностный подход. Каково его место в системе современных подходов к проблемам образования? / И.А.Зимняя // Высшее образование сегодня. - 2006. - №8. -С.20-26.
8. Ильязова, М. Д. Компетентностный подход к формированию модели выпускника вуза /М.Д. Ильязова // Вестник Университета Российской Академии Образования. - 2007. - № 3. - с. 52-53.
9. Нахман, А.Д. Математика как средство профессионального самоопределения обучающихся. /А.Д.Нахман // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И.Вернадского.-2020.-№4.-С.145-157.
10. Нахман, А. Д. Введение в стохастическое моделирование : учебное пособие Текст : электронный /А.Д.Нахман, Ю.В.Родионов. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. - 89 с. - URL: //www.iprbookshop.ru/70761.html (дата обращения: 20.06.2022).
11. Нахман, А.Д. Стохастические задачи: детерминистский аспект // А.Д.Нахман .- *V* Международный научно-технический форум СТНО-2022. Сборник трудов.- Рязань: 2022.- Том 10.- С.143-146.

12. Ващенко, В.П. О сущности инновационной деятельности и ее нормативно-правовой базе / В.П.Ващенко //Наука и промышленность России. - № 2-3. - 2002. - С.29-36.
13. Nakhman, A.D. Case tasks as a means of formation of stochastic competence / A.D. Nakhman, I.Yu.Ivanova, T.V.Selyanskaya // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И.Вернадского.-2015.- №3.- С.123-130.

Глава 7. КЕЙС-ЗАДАНИЯ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ

Понятие стохастической компетенции является сравнительно новым**.** Его возникновение связано с двумя факторами;

1)утверждением в отечественной системе образования компетентностного подхода;

2) наличием все более возрастающего общественного интереса к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики.

Стохастической компетенцией мы будем называть *способность* к математической и практической деятельности, связанной с овладением основными комбинаторики, понятиями и фактами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Стохастическая компетентность, в нашем понимании, есть *готовность* к такой деятельности, умение мобилизовать знания в области стохастики на использование их в новых условиях, в решении практических, производственных и др. задач.

С нашей точки зрения, невозможно провести четкую грань между стохастическими компетенцией и компетентностью; другими словами, эти два понятия, интегрирующие в себе (как отмечено далее) многочисленные компоненты, могут рассматриваться как обозначения некоторых *нечетких* множеств.

Общими для формирования соответствующей компетенции/компетентности являются следующие условия [1]:

- знание концептуальных основ стохастики;

- владение разнообразными методами вероятностно-статистического анализа окружающих явлений, вероятностного моделирования статистических закономерностей реальной действительности;
- использование методологии современной науки, осмысление глубокого внутреннего единства эмпирического и теоретического уровней познания мира случайного.

В структуре стохастической компетенции/компетентности мы выделяем следующие основные компоненты.

1.Мотивационно-ценностный: мотивация, заинтересованное отношение к математической деятельности.

2. Когнитивный: знания, умения, в области теории вероятностей и математической статистики.

3. Операциональный: опыт практического применения математических знаний, закрепление умений на уровне навыков.

4. Рефлексивный: включение в математическую деятельность, рефлексия математической деятельности (в частности, самоконтроль, самоанализ и самооценка).

1. Стохастическая линия в федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС)

В соответствии с Концепцией развития математического образования в Российской федерации и введением новых ФГОС общего и профессионального образования стохастическим знаниям отводится роль неотъемлемого компонента инновационного содержания образования – как общего, так и профессионального ([2] - [3]). Изучение вероятностно-статистического материала необходимо уже в школьном курсе в рамках самостоятельной содержательно-методической линии. Согласно ФГОС основного общего образования изучение предметной области «Математика и информатика» должно «обеспечить осознание значения математики … как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления». Изучение математики должно способствовать развитию логического мышления, формированию первичных навыков математического моделирования, применению математических знаний при решении различных задач и оцениванию полученных результатов, развитию математической интуиции.

В следующей таблице 1 отражена *динамика развития компонент* «знать-уметь» в структуре стохастической компетенции в контексте требований ФГОС к уровню подготовки выпускников основной и старшей школ.

	Знать/понимать	***Уметь***
Основная школа	• вероятностный характер многих закономерностей окружающего мира; • примеры статистических закономерностей и выводов;	• извлекать информацию, представленную в стандартных формах (таблицы, диаграммы, графики) и строить соответствующие формы; • решать комбинаторные задачи путем систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правила умножения; • вычислять средние значения результатов измерений; • находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные; • находить вероятности случайных событий в простейших случаях; • использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков, таблиц; решения учебных и практических задач, требующих систематического перебора вариантов; сравнения шансов наступления

		случайных событий, оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставления модели с реальной ситуацией; понимания статистических утверждений.
Старшая школа	• значение математической науки, в том числе, методов стохастики, для решения задач, возникающих в теории и практике; значение практики для развития самой математической науки; • детерминированный и вероятностный характеры различных процессов и закономерностей окружающего мира, значение статистических данных для прогнозирования явлений и процессов .	• решать простейшие комбинаторные задачи с использованием известных формул; • вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов и свойств вероятности (простейшие случаи); • анализировать массив данных, в том числе применять простейшие методы интерполяции и экстраполяции; • использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: анализа информации статистического характера, прогнозирования наступления событий на основе вероятностно-статистических методов; применения полученных умений в решении задач из смежных дисциплин.

Таблица 1. Динамика развития компонент стохастической компетенции

В ФГОС высшего профессионального образования структуры формируемых компетенций дополнены компонентом «владеть». С нашей точки зрения, *данный компонент соответствует приобретению первичного опыта соответствующей деятельности и, следовательно, переходу в «нечетко-пограничную зо-*

ну» между компетенцией и компетентностью (компетенция «в действии»). Приведем в качестве примера (таблица 2), требования к структуре результата обучения, способствующего формированию профессиональной компетенции (ПК-1) «использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов… моделирования, теоретического и экспериментального исследования» (ФГОС направления подготовки бакалавров 270800.62 «Строительство»). Здесь стохастическая компетенция/компетентность выступает в качестве одной из подсистем, интегрированных в указанную компетенцию ПК-1.

Структура результата обучения		
Обучающийся знает:	***Обучающийся умеет:***	***Обучающийся владеет:***
- фундаментальные основы теории вероятностей математической статистики: • понятия вероятности и относительной частоты события и основные формулы для их вычисления; • методы точечного и интервального оценивания параметров распределения; • понятия и виды случайных процессов; • регрессионные методы моделирования экспериментальных зависимостей.	*самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в специальной литературе, расширять свои математические познания:* • решать прикладные задачи (в том числе, связанные с профессиональной деятельностью) с помощью стохастических методов; • использовать алгоритмы проверки статистических гипотез; • строить вероятностно-статистические модели реальных ситуаций.	*- первичными навыками и основными методами решения математических (стохастических) задач из общеинженерных и специальных дисциплин профилизации и методами вероятностного моделирования:* • численно прогнозирует степень объективной возможности того или иного явления, характера протекания того или иного процесса; • интерпретирует статистические данные в терминах вариационных рядов и оценок параметров распределения; • разрабатывает регресси-

		онные модели статистических зависимостей

Таблица 2. Требования к структуре результата обучения

Ввиду практической ориентированности стохастической компетенции/компетентности ее компоненты «знать», «уметь» и, в особенности, «владеть», наилучшим, с нашей точки, образом формируется в процессе использования так называемых кейс-заданий.

2. Концепция кейс-заданий как технологического приема формирования стохастической компетенции

Наличие той или иной компетенции предполагает способность к одновременной мобилизации знаний, умений и способов поведения в условиях конкретной деятельности; в результате формирования компетенции учащийся приобретает возможность «переносить знания», решать новые для себя задачи, осваивать новые предметные области, новые виды деятельности и т.п.

Приемы формирования компетенции мы называем технологическими, если они обладают такими признаками образовательных технологий, как целенаправленность, научная обоснованность, планируемость и проектируемость, воспроизводимость и гарантированность результата. К числу подобных приемов мы относим кейс-метод (метод кейсов), как метод ситуационного анализа. В процессе его применения обучающиеся должны разобраться в сути проблем, предложить возможные решения и выбрать оптимальное ([4]). Кейсы основываются на реальном фактическом материале или же приближены к таковому. В результате происходит творческое овладение практическими, профессиональными знаниями и умениями, развитие мыслительных способностей. Кейс-метод требует умения оперировать понятиями и фактами, выстраивать логические схемы решения проблемы, аргументировать свое мнение. Кейс-метод интегрирует в себе другие методы познания: анализ, синтез, описание, моделирование, проблемный метод, эксперимент, классификации и др., способствует оптимальному сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся.

Стохастические кейс-задания нами понимаются как комплексные компетентностно-ориентированные задания по моделированию простейших недетерминированных систем. Ввиду практической направленности, они способствуют повышению мотивации к соответствующей математической деятельности. Так, например, к выявлению причинно-следственных связей, и в частности, закономерностей стохастического характера, учащийся основной школы (и даже начальной школы) приходит, прежде всего, в пределах его небольшого личного опыта, а само знание приобретается им не ради установлений связей и отношений между предметами и явлениями, а ввиду интереса к соответствующим объектам окружающей действительности.

В кейс-заданиях могут быть одновременно актуализированы знания и умения в области комбинаторики, действий над событиями, вычисления вероятностей как непосредственно по определению, так и с помощью соответствующих теорем, а также анализа статистических данных с последующим прогнозированием зависимостей и др. Решение кейс-заданий, использует, с одной стороны, опыт математической деятельности, уже накопленный учащимся, а с другой стороны способствует его расширению и углублению.

Наконец, решение кейс-заданий влечет за собою рефлексию соответствующей математической деятельности, проявляющуюся, в частности, в анализе собственной работы, развитии самостоятельности, выработке навыков самоконтроля, умении находить причину затруднения и пути его преодоления и др.

Таким образом, в соответствии с описанной выше структурой стохастической компетенции/компетентности мы можем рассматривать кейс-задания как действенный технологический прием ее формирования, способствующий реализации (на уровне учебных задач) методологического принципа системности исследований.

В следующих пунктах приведены авторские примеры стохастических кейс-заданий.

3. Кейс-задания при изучении модуля «стохастика» в курсе математики основной школы (частично приведены в [5]).

Задание 1 (*графики, интерполяция и экстраполяция*). Запишите температуру воздуха за окном квартиры в 9 часов вечера и в 7 часов утра. Считая, что температура изменяется (в зависимости от времени, прошедшего с начала на-

блюдения) по линейному закону (т.е. зависимость изображается на координатной плоскости в виде прямой), определить приближенно температуру, которая
а)была в 2 часа ночи;
б)была 11 часов, 1 час, 3 часа ночи и 5 час утра.

Какой может в этом случае быть температура воздуха в 9 час. утра?

Задание 2 (*таблица распределения частот, мода, размах выборки, выборочная средняя*). Возьмите у родителей квитанции о квартплате за истекший календарный период. Запишите (по месяцам) стоимость израсходованной электроэнергии. Затем расположите стоимости в порядке их возрастания, определите частоту каждой из них и составьте соответствующую таблицу (вариационный ряд). Определите (если таковая имеется) стоимость с наибольшей частотой. В каком месяце уплачена наибольшая, а в каком – наименьшая сумма? Как вы думаете, почему именно в эти месяцы вы заплатили больше всего и меньше всего соответственно? Определите размах варьирования стоимости электроэнергии. Какова средняя ежемесячная стоимость потребленной электроэнергии? В каком месяце стоимость наиболее отличалась от средней?

Задание 3 (*относительная частота, статистическая вероятность события*). Понаблюдайте на улице с не слишком интенсивным движением транспорта в течение 2 – 5 минут транспортный поток и запишите, сколько проехало мимо автомобилей, сколько среди них иномарок, сколько всего легковых автомобилей, сколько – такси . Найти относительную частоту
а)числа легковых автомобилей в транспортном потоке;
б)такси в транспортном потоке;
в)такси – среди легковых автомобилей;
г)иномарок – в транспортном потоке.

С какой вероятностью вы можете прогнозировать, что в ближайшее время первой среди проезжающих мимо машин окажется такси ?

На основе результатов наблюдения и свойства устойчивости относительной частоты определите, каким приблизительно может оказаться процент иномарок в составе городского транспорта.

Задание 4 (*построения ряда распределения, числовые характеристики*)

Скоро предстоит сдавать экзамены Государственной итоговой аттестации (ГИА). С какой вероятностью ты прогнозируешь, что успешно (на 4 или на 5) сдашь экзамен по русскому языку? По математике? По иностранному языку? Составь ряд распределения числа экзаменов, которые ты прогнозируешь сдать успешно. Построй многоугольник распределения. Какое количество успешно сданных экзаменов наиболее вероятно? Каково математическое ожидание числа успешно сданных экзаменов?

4. Кейс-задания при изучении модуля «Стохастика» в курсе математики старшей школы

Задание 1 (*биномиальное распределение, ряд распределения, мода распределения, математическое ожидание*). Шерлок Холмс расследует дело об ограблении банка. Служительница банка миссис Смит утверждает, что грабителей было трое, мисс Джонсон – что двое, а мистер Пит говорит, что у дам от страха двоилось или троилось в глазах, и что грабитель был один. Шерлок Холмс подозревает, что грабителями могли быть K,L,N (имена в целях тайны следствия он не разглашает, но уверен, что других грабителей быть не могло), каждый из которых прежде участвовал, в среднем, в каждом третьем ограблении.
Свой дедуктивный метод Холмс хочет подтвердить математическими выкладками. Каковы вероятности, что грабил только K; только L; только N; K и L; K и N; L и N; все трое? Каково наиболее вероятное число грабителей? Какова вероятность, что банк вообще ограблен не был, а Смит, Джонсон и Пит присвоили деньги?

Если последует серия подобных ограблений, то каким будет среднее число грабителей?

Задание 2 (*построение вариационного ряда, числовые характеристики выборки*). В течение двадцати дней пронаблюдайте и запишите рублевый курс доллара. Расположите варианты в порядке их возрастания и составьте соответствующий вариационный ряд. Постройте многоугольник распределения. Определите размах варьирования курса доллара, моду и медиану вариационного ряда. Найдите средне-месячный курс доллара. Определить его выборочное средне-квадратическое отклонение.

5. Кейс-задания при изучении модуля «стохастика» в курсе математики инженерных направлений подготовки бакалавров

Соответствующие задания могут быть использованы при интегрированном описании поведения дискретных и непрерывных случайных величин, для определения точечных и интервальных оценок параметров теоретического распределения по эмпирически полученным данным, нахождении регрессионных зависимостей и др.([6]). Ограничимся следующими двумя примерами.

Задание 1 (*специальные распределения, плотность и функция распределения, вероятность попадания значений в заданный интервал, числовые характеристики*). Транспорт ходит регулярно с интервалом τ минут. Определить плотность и функцию распределения случайной величины t - времени ожидания транспорта пассажира, в случайный момент времени приходящего на остановку. Какова вероятность, что время ожидания составит не более $0,25\tau$ минут? Какова вероятность, что все пять дней рабочей недели пассажир будет ожидать транспорт не более $0,25\tau$ минут? Каково среднее время ежедневного ожидания данного транспорта?

Задание 2 (*линейная и нелинейная регрессии, прогнозирование значений*). Зафиксированы показатели потребления электроэнергии (в киловаттах) y_j в зависимости от времени (в часах) x_j непрерывной работы прибора. Исследовать возможную зависимость величины y_j от x_j, использовав для этого выборочные уравнения а)линейной б)параболической в)логарифмической регрессии по следующим данным измерений:

y_j	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2	10,0
x_j	1	2	3	4	5	6

Определить наиболее предпочтительную модель зависимости, использовав вычисление остаточной дисперсии для каждой модели. По выбранной модели спрогнозировать величину потребленной электроэнергии через 15 и 20 часов непрерывной работы прибора.

Литература к главе 7

1.Селютин В.Д. Научные основы методической готовности учителя обучению школьников стохастике. Монография. – Орел: ОГУ, 2002.– 200 с./

2.Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html .

3. Аверина, И.В. Уровневая модель системы мероприятий по реализации концепции развития российского математического образования [Электронный ресурс] / И. В. Аверина, А. Д. Нахман //Актуальные инновационные исследования: наука и практика. –2014. – № 1. – Режим доступа: http://www.actualresearch.ru .pdf .
4. Гумметова, А.Ю. Кейс-метод как современная технология личностно-ориентированного обучения [Электронный ресурс] /А.Ю. Гумметова, Е.В. Ступина.– Режим доступа: http://www.uchportal.ru/publ/15-1-0-507__(дата обращения 12.04.2015).
5. Зайцев, В.Л. Элементы математической логики и стохастики: учебно-метод. пособие /, В.Л.Зайцев, С.А.Каратеева, А.Д. Нахман. – Тамбов: ТОПКРИО, 2008. – 46 с.
6. Куликов, Г.М. Элементы прикладной математики: учебное пособие / Г.М. Куликов, А.Д. Нахман, С.В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 160 с.

Глава 8. РЕАЛИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СОДЕРЖАТЕЛЬНОЙ ЛИНИИ В КОНТЕКСТЕ НОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ СТАНДАРТОВ

Федеральные государственные стандарты общего образования ([1] с изменениями и дополнениями, датированными 2022 годом) предписывают изучение элементов стохастики в рамках предметной области «Математика». Несмотря на необходимость стохастической подготовки, обозначенной и в более ранних нормативных документах, наличие соответствующего материала в учебниках (в том числе, школьных) разных авторов (напр., [2,3]) и имеющиеся многочисленные научно-педагогические исследования по соответствующей тематике (см. , напр., [4-9]), до настоящего времени остаются актуальными проблема отбора содержания вероятностно-статистической подготовки в системе «Школа-вуз» и смежные с ней проблемы, как то:

-«проведение границы» между «школьной» и «вузовской» стохастикой;

-распределение материала между уровнями общего образования;

- вопросы аргументации стохастических фактов (какие именно из них подлежат строгому доказательству, а какие – принимаются без доказательства или предлагается лишь идея обоснования);

- вопросы конструирования контрольно-измерительных материалов для проверки уровня освоенных знаний и умений;

-вопросы интеграции стохастического компонента в общую систему математической подготовки;

-дальнейшая разработка методического сопровождения процесса школьной стохастической подготовки.

Дополнительным «актуализирующим» данные проблемы фактором является включение в состав контрольно-измерительных материалов (КИМов) ЕГЭ профильного уровня (см. [10]) задачи на одну из следующих тем: нахождение вероятности «комбинированного» события, использование вероятностных схем гипотез и независимых испытаний, нахождение математического ожидания дискретно распределенной случайной величины. Эти задачи требуют от учителей математики достаточно глубокого погружения в соответствующую область содержания.

Анализируя указанные проблемы в их совокупности, имеет смысл рассматривать в системе «Школа-вуз» в качестве «ассоциированного» компонента подсистему повышения квалификации учителей математики. На практике это означает необходимость разработки всего комплекса организационной, содержательной, методической подготовки педагогов-математиков в области стохастики.

В настоящей работе предлагаются некоторые подходы, которые могут поспособствовать решению (безусловно, частичному!) перечисленных проблем.

1.Стохастика во ФГОС общего образования

Стохастика, изучаемая в рамках ФГОС [1], представляет собою объединение следующих дисциплин: элементов комбинаторики (как средства подсчета количества возможных исходов опыта, обладающих заданными характеристиками), теории вероятностей и математической статистики. При этом факты и методы комбинаторики не ограничены рамками вероятностных задач – они представляют самостоятельный интерес и могут служить темой отдельного учебного (например, элективного) курса.

Стохастический материал представлен на всех трех этапах общего образования: на начальном (во ФГОС соответствующий этап подготовки явно не прописан, но, по факту, он присутствует как пропедевтический), основном и на этапе среднего образования (старшая школа: уровни базовый и углубленный). Вопросы содержания стохастической подготовки и требования стандарта к ее предметным результатам можно резюмировать в следующем виде.

Этап общего образования	Владение основными понятиями	Знания и умения
Начальный	Опыт, случайные исходы, достоверные и невозможные события; упорядоченные и неупорядоченные наборы, перестановки	Умение извлекать и использовать информацию, представленную в текстовой, графической форме; устанавливать логику перебора вариантов для решения простейших комбинаторных задач, вычислять количество перестановок; находить проценты, вычислять относительные частоты событий
Основной (базовый уровень)	Случайный эксперимент, элементарный исход, случайное событие, вероятность события. Случайная выборка; среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах числового набора	Умение находить вероятности случайных событий в опытах с равновозможными элементарными событиями; умение решать задачи методом организованного перебора и с использованием правила умножения; умение оценивать вероятности реальных событий и явлений. Знакомство с законом больших чисел и его ролью в массовых явлениях. Умение находить числовые характеристики случайной

		выборки.
Основной (углубленный уровень)	*В дополнение к базовому уровню:* Комбинаторные понятия: перестановки, размещения, сочетания. Относительная частота и вероятность случайного события, условная вероятность, независимые события, дерево случайного эксперимента. Противоположные события, сумма и произведение событий. Понятие случайной величины. Статистические понятия: статистические данные, среднее значение, медиана, наибольшее и наименьшее значение, рассеивание, размах, дисперсия и стандартное отклонение: статистическая устойчивость	*В дополнение к базовому уровню*: Умение свободно оперировать с факториалами; умение применять правило комбинаторного умножения и комбинаторные формулы для решения задач. Умение различать зависимые и независимые события; вычислять вероятности комбинированных событий, в том числе с применением формул и графических схем Умение находить числовые характеристики дискретных случайных величин. Знание роли закона больших чисел в природе и в социальных явлениях. Умения группировать статистические данные, анализировать и сравнивать статистические характеристики числовых наборов, в том числе при решении задач из других учебных предметов
Старшая школа (базовый уровень)	*В дополнение к основному этапу:* Основные вероятностные схемы: классическая, статистическая, геометрическая.	*В дополнение к основному этапу:* Умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умноже-

	Дискретные и непрерывные случайные величины, ряд распределения дискретной величины	ния вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий. Умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях
Старшая школа (углубленный уровень)	*В дополнение к базовому уровню:* Бином Ньютона, треугольник Паскаля. Вероятностные схемы гипотез и Бернулли. Функция распределения случайной величины; плотность непрерывного распределения. Специальные распределения случайных величин: равномерное, биномиальное, показательное. Знакомство с методами выборочных исследований.	*В дополнение к базовому уровню:* Умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач. Умения применять формулу полной вероятности, формулу Бернулли. Умение оперировать понятиями функции и плотности распределений; использовать свойства изученных распределений для решения задач. Умение исследовать статистические данные; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии.

Таблица 1. Требования к предметным результатам стохастической подготовки

Заметим, что в приведенной таблице автором разграничены основные понятия и связанные с ними умения; кроме того, некоторые позиции, исходя из логики стандартов и положений примерных образовательных программ, дополнены автором.

2. Общие подходы к конструированию содержания стохастической подготовки

Стохастика в дополнительном образовании учителей математики

Основные принципы построения содержания стохастической линии мы видим следующими:

-принцип приоритетного внимания к действиям над событиями на основе свойств булевых алгебр;

-принцип «узнаваемости» основных вероятностных схем и алгоритмизации действий в рамках каждой такой схемы;

-принцип стохастического детерминизма;

-принцип интеграции стохастики в общее содержание математической подготовки.

В основе вероятностно-статистического модуля содержания лежат два следующих подхода:

-эмпирический; подход основан на анализе результатов проведенного опыта (серии опытов) здесь оперируют с относительными частотами событий, эмпирическими распределениями количественного признака генеральной совокупности и т.п.;

- теоретический, умозрительный; здесь анализируют возможные результаты мысленного эксперимента, предпринимают построение, исследование, интерпретацию соответствующей математической модели без создания модели натуральной. Связь между обоими подходами содержится в концепции стохастического детерминизма [6], «пунктирно» представленной ниже.

Педагог (а вслед за ним, и обучающийся) должен осознавать, что стохастика не является какой-то особой, «околоматематической» дисциплиной. Стохастика поставляет средства именно математического моделирования неопределенных ситуаций, исходы которых невозможно предсказать с исчерпывающей точностью. В отличие от детерминированных моделей, на выходе которых указывается вполне определенный результат (искомая площадь поверхности, максимальная скорость протекания данного процесса и т.п.), на выходе стохастической модели получаем, например, лишь шанс (шанс, но не гарантию!) того или иного исхода.

По нашему мнению, в результате освоения курса дополнительной подготовки в области стохастики слушатель (учитель математики) должен:
-знать понятие и свойства алгебры событий и иметь представление об аксиоматическом подходе к понятию вероятности;
-уметь применять комбинаторные методы к подсчету числа исходов умозрительного эксперимента, вычислять относительные частоты и геометрические вероятности;
-знать отличительные признаки вероятностных схем гипотез, Бернулли и др.; уметь решать типовые задачи в рамках соответствующих схем;
-владеть приближенными (асимптотическими) соотношениями в схеме Бернулли: локальной и интегральной формулами Лапласа, формулой Пуассона и знать условия их применимости;
- владеть основными понятиями и средствами исследования распределений дискретных и непрерывных случайных величин;
- знать стандартные теоретические распределения: равномерное (дискретное и непрерывное), геометрическое, биномиальное, пуассоновское, нормальное и др., а также соответствующие числовые характеристики;
-уметь решать стандартные типы задач на тему «Эмпирические распределения случайных величин»;
- иметь представление о концепции стохастического детерминизма и математических инструментах ее реализации – законе больших чисел и центральной предельной теореме (ЦПТ);
-получить представление о возможностях стохастики как средства упрочения внутриматематических связей.

3. Особенности пропедевтического этапа стохастической подготовки

На начальном этапе общего образования может быть сформирована база для дальнейшего рассмотрения понятий, фактов и методов стохастики. Так, в начальной школе обучающийся осваивает некоторые методы сбора и группировки данных (включая числовые данные) по заранее заданным характеристикам. Здесь же происходит знакомство со средствами визуализации данных: таблицами, диаграммами, графиками.

Введению комбинаторных понятий предшествуют задания на перебор вариантов. Например,

1)сколькими различными способами можно расставить на полке три учебника?;

2)сколько существует способов сформировать различные хоккейные команды из 5 игроков (не считая вратаря), если на участие в команде претендуют 6 хоккеистов?

Уже в начальной школе возможно введение такого понятия, как перестановки (без повторений), факториал натурального числа, и на конкретных примерах может быть рассмотрена формула числа перестановок $P_n = n!$

Знакомство с понятиями части от числа и процентов непосредственно предшествует введению определения относительной частоты наступления события. Здесь нам представляются полезными упражнения следующего типа:

а) В 4-а классе среди 25 учащихся 20% отличников. Сколько отличников в этом классе?

б)В 4-б классе 6 отличников, что составляет 25% от числа всех учащихся. Сколько учащихся в 4-б классе?

в) В 4-в классе 20 учеников, среди которых 5 отличников. Какую часть коллектива составляют отличники? Каков их процент?

Приведя еще несколько примеров подобного типа, становится возможным определение относительной частоты наступления события. Далее было бы полезным все пункты приведенного выше упражнения переформулировать в терминах относительной частоты. Например ,

а) В 4-а классе 25 учащихся; при этом относительная частота события «данный учащийся-отличник» равна 1/5. Сколько отличников в этом классе?

Приведем другой типовой пример вычисления относительной частоты. В шахматном турнире Аркадий сыграл 5 партий вничью, 4 выиграл и 1 проиграл. Какова относительная частота его выигрышей в турнире?

Для начального же этапа характерно формирование интуитивного представления о характере событий (достоверное, невозможное, случайное) и вероятности события. В 3-4 классах, когда словарный запас обучающихся уже достаточно велик, считаем полезным оперирование с такими категориями (относящимися к наступлению некоторого события), как «невероятно…», «маловероятно…», «вероятно», «вполне вероятно…» , «достоверно…»; см. таблицу 2. Соответствующими синонимами, поясняющими вводимые термины, служат, соответственно, речевые обороты «невозможно…», «едва ли…, сомнительно…», «возможно…, может быть…»«скорее всего…, очень может быть…», «наверняка…, без сомнения…».

Характер события	Вербальная вероятностная характеристика
Невозможное	«невероятно…»
Случайное	«вероятно…», «маловероятно…», «вполне вероятно…»
Достоверное	«наверняка…»

Таблица 2. Вероятностные характеристики событий

В качестве примера приведем такое упражнение. Охарактеризуйте следующие события, вставив вместо многоточия соответствующие слова:
а) …, что Аркадий, имея в кошельке две десятирублевые и одну пятидесятирублевую купюру, сумеет расплатиться без сдачи за порцию мороженного стоимостью 40 руб. (ответ: «невероятно»);
б)…, что в сосновом лесу можно собрать землянику («маловероятно»);
в) …, что будет дождь, если на небе грозовые тучи («вполне вероятно»);
г)…, что трехзначное число, оканчивающееся цифрой 6, поделится нацело на 2 («достоверно»).

Как представляется автору, приведенные в настоящем параграфе методические рекомендации и упражнения создают предпосылки для дальнейшего рассмотрения (понимания, освоения) комбинаторных формул и методов, свойств относительной частоты, понятия и свойств классической вероятности.

4. Иерархия понятий «событие» и «вероятность»

Понятия события, вероятности, случайной величины относятся к основным (неопределяемым). Вероятность в общем случае следует рассматривать как некоторую нормированную счетно-аддитивную меру на борелевской алгебре случайных событий [3, с.47-54], реализуемую (в зависимости от характера анализируемой ситуации) в классической, статистической или геометрической вероятностных схемах.

Однако (и - к сожалению), многие педагоги понимают вероятность (и транслируют это понимание своим ученикам) лишь как процент благоприятных исходов опыта в общем количестве исходов, действуя по известным, но не осознанным до конца шаблонам.

В этой связи в основу построения содержания стохастической подготовки в системе «Школа-вуз» нами положен принцип: «события первичны, вероятности - вторичны». Такой подход предостерегает от весьма часто встречающихся решений, неверных по причине отсутствия должного анализа соответствующих исходных и комбинируемых событий. Указанный анализ может сопровождаться вопросами: «Какие события надо ввести в рассмотрение? Какие действия следует произвести над введенными событиями, чтобы получить «искомое» комбинированное событие? Каковы взаимоотношения вводимых событий важны в контексте заданного условия задачи: совместные/попарно несовместные, зависимые/независимые?» и т.п.

Другими словами, необходим сперва качественный, а затем и количественный анализ рассматриваемой стохастической ситуации.

Качественный анализ основан на определении и свойствах алгебры событий. Элементы алгебры- события достоверные (обозначение E), невозможные (обозначение $\varnothing$), случайные $A,B,C,\ldots$(могут как наступить, так и не наступить). Изложим наши методические подходы, ограничиваясь (для определенности и из соображений краткости изложения) уровнем углубленной подготовки на этапе старших классов школы. Соответствующее содержательное наполнение представляется следующим.

Вводятся действия сложения и умножения событий. Формулируются свойства операций – обычные для булевых алгебр.

С помощью введенных операций можно определить теперь понятие несовместности и полноты группы событий, а затем – понятие противоположных событий. Так, события A и $\overline{A}$ называются противоположными, если они несовместны и образуют полную группу:

$$A\cdot\overline{A}=\varnothing, \quad A+\overline{A}=E.$$

Приведем некоторые упражнения на тему «Действия над событиями».

Даны события A,B,C. Выразите через операции над ними следующие события:

1)Не наступит ни одно из данных событий.

2)Наступит хотя бы одно из событий, противоположных данным.

3)Наступит событие, противоположное наступлению хотя бы одного из данных событий.

4)Наступит событие, противоположное ненаступлению всех данных событий.

5)Наступит только одно из данных событий.

6)Наступят ровно два из указанных событий.

7)Наступят хотя бы два из указанных событий.

Следующий шаг в излагаемом методическом подходе -количественный анализ стохастических ситуаций путем введения численной меры степени возможности события; эта численная мера и есть вероятность. За единицу измерения принимают вероятность достоверного события. Невозможному событию приписывают нулевую вероятность. Естественно тогда считать вероятность случайного события числом из промежутка [0;1]. Таким образом, получаем «шкалу измерения» – отрезок [0;1].

В качестве возможных моделей абстрактного понятия вероятности рассматриваются классическое и геометрическое определения, сопровождаемые проверкой выполнимости указанного шкалирования. Здесь же вводится статистический аналог вероятности – относительная частота события и в «первом приближении» (со ссылкой на результаты многочисленных экспериментов) формулируется свойство устойчивости относительной частоты.

Далее возможен переход к формулам вероятности произведения и суммы событий (проверяя их на классической модели) и решению типовых задач. Обсудим, для примера, одну из них.

В утренний час-пик пробка на дороге возможна с вероятностью 0,4, в вечерний – с вероятностью 0,2. С какой вероятностью хотя бы в один из утреннего или вечернего часов-пик возможен проезд без стояния в пробке?

Следуя принципу приоритетного внимания к действиям над событиями, решение начинаем с введения событий A_1 и A_2, означающих утреннюю и вечернюю пробки соответственно. Требуется найти вероятность события (событие A), противоположное которому будет событие A_1A_2-«и утром и вечером предстоит стояние в пробке». Согласно условию, A_1 и A_2 - независимые события. Теперь переходим к вероятностям: $p(A)=1-p(A_1A_2)$; далее, применима формула умножения $p(A_1A_2)=p(A_1)p(A_2)=0{,}08$, и $p(A)=0{,}92$.

В рамках данного параграфа обсудим также «пограничную черту» между содержанием стохастического компонента в углубленном курсе математики средней школы и в вузовском курсе.

В развитие понятий и стохастических фактов вузовский курс, по нашему мнению, должен строиться на достаточно абстрактном уровне. Так, в качестве простейшей случайной величины в рассмотрение вводится индикатор события $\eta(A)$, определяемый следующим образом:

$\eta(A)=1,$ если событие A наступило, и $\eta(A)=0$, если оно не наступило.

Индикатор события вполне аналогичен функции истинности, определенной на булевой алгебре высказываний. Такая аналогия позволяет формализовать доказательства свойств операций сложения и умножения, привлекая таблицы истинности основных логических операций (см.[4]). В самом деле, высказывание «наступит хотя бы одно из событий A_1 или A_2» («наступят оба события A_1 и A_2») истинно тогда и только тогда когда истинна дизъюнкция (конъюнкция) высказываний «наступит A_1», «наступит A_2». Следовательно, имеет место взаимно-однозначное соответствие между операциями сложения (умножения) событий и дизъюнкцией (конъюнкцией) соответствующих высказываний, следует лишь «нули» и «единицы» в таблицах понимать как значения индикатора (см. таблицы 3 и 4):

$\eta(A_1)$	$\eta(A_2)$	$\eta(A_1+A_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 3. Сумма событий

$\eta(A_1)$	$\eta(A_2)$	$\eta(A_1A_2)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Таблица 4. Произведение событий

Далее уточняется понятие вероятности: согласно аксиоматике А.Н.Колмогорова [3, с.53-54] вероятность есть неотрицательная счетно-аддитивная нормированная функция (мера), заданная на борелевской алгебре событий. Непосредственно из аксиом выводятся простейшие свойства вероятности. Выполнимость аксиом (например, аксиомы сложения) проверяется на ранее знакомых моделях вероятности - классической и геометрической. Дальнейшее изучение стохастического материала в вузовском курсе математики строится по достаточно стандартной схеме в объеме, определяемым количеством зачетных единиц, отводимых на математические дисциплины по данному направлению (данной специальности) профессиональной подготовки.

5.Стохастический детерминизм

Мы считаем необходимым обсудить с педагогами-математиками пути разрешения противоречия между привычными детерминистскими подходами в математике (которые проявляют себя в задачах на математическое моделирование детерминированных же ситуаций) и новыми (для обучающихся) задачами стохастического моделирования. Связующим звеном здесь является существование объективной закономерности, проявляющей себя в процессе накопления информации о *массовых* случайных явлениях; элемент случайности проявляется в каждом отдельном случае, но имеет место устойчивый в совокупности результат. В узком, математическом смысле, речь идёт об устойчивости относительных частот, средних значений и др.

Свойство стохастического детерминизма напрямую проявляет себя в так называемом законе больших чисел и центральной предельной теореме, общий смысл которых состоит в том, что совместное действие большого числа одинаковых и независимых случайных факторов приводит к результату, в пределе не зависящему от случая. Закон больших чисел (в виде нескольких утверждений: теорем Чебышева, Бернулли, Маркова) формулируется в терминах сходимости по вероятности. Суть этого понятия состоит следующем: последовательность параметров θ_n сходится по вероятности к параметру θ (обозначение: $\theta_n \dashrightarrow \theta$) в том случае, когда с уверенностью, сколь угодно близкой к 100%, можно утверждать, что отклонение $|\theta_n - \theta|$ будет заданно малым, если только значение n достаточно велико. Приведем точную математическую формулировку понятия сходимости по вероятности: $\theta_n \dashrightarrow \theta$, если для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} P \ (|\theta_n - \theta| < \varepsilon) = 1 .$$

В этой связи заметим следующее: педагог (а вместе с ним и обучающийся-школьник) должен понимать, что сходимость по вероятности принципиально отличается от «обычной» сходимости последовательности θ_n к θ : здесь отдельные значения θ_n могут и при больших n значительно отклоняться от параметра θ , однако вероятность таких отклонений весьма мала.

Вернемся к методической стороне рассмотрения закона больших чисел на примере свойства устойчивости относительной частоты случайного события (закон Бернулли). Если на вводном этапе изучения теории вероятностей оно формулируется без математического обоснования (даётся, как указывалось выше, лишь ссылка на результаты массовых экспериментов), то на более высоком уровне рассмотрения это свойство находит подтверждение в форме закона (теоремы) Бернулли. А именно, если $w_n(A) = \frac{m_A}{n}$ – относительная частота события A в n опытах и $p(A)$ – его вероятность, то имеет место сходимость по вероятности $w_n(A) \dashrightarrow p(A)$. Доказательство (его мы рекомендуем проводить в следующей упрощенной форме) может быть получено на основании интегральной теоремы Лапласа ([3], с.72-73). А именно, в качестве следствия этой теоремы устанавливается соотношение

$$P(| w_n(A) - p(A) | < \varepsilon) \sim 2\Phi(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(A)(1-p(A))}}),$$

в котором значения интегральной функции Лапласа [3, сс.69, 72] $\Phi(x)$ будут стремиться к 1/2 при $n \to \infty$. Этим и завершается обоснование устойчивости относительной частоты.

Мы считаем полезным также краткое рассмотрение другого (более общего) проявления закона больших чисел. Оно состоит в тенденции к устойчивости средних арифметических наблюдаемых значений (выборочной средней) количественного признака некоторой генеральной совокупности в условиях роста числа наблюдений (факт, устанавливаемый эмпирически). Так, подобная тенденция может обнаруживаться при неоднократных измерениях (одним и тем же прибором) какой-либо величины (например, при пятикратном, затем десятикратном и т.д. циклах измерений). Соответствующее математическое обоснование содержится в законе (теореме) Чебышева: среднее арифметическое n попарно независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные дисперсии, сходится по вероятности (при $n \to \infty$) к их общему математическому ожиданию.

Изложим наши подходы к изложению утверждений центральной предельной теоремы (ЦПТ). Прежде всего, следует отметить «эмпирический аспект» соответствующей проблематики: нормальные распределения случайных величин на практике встречаются весьма часто; например, ошибки различных измерений обычно бывают распределены нормальным образом. Рассмотрение следует начать с примера центрированной и нормированной суммы индикаторов, для которой последовательность функций распределения (согласно интегральной теореме Лапласа) сходится к функции стандартного нормального распределения. Слушателям вполне доступна соответствующая точная формулировка. А именно, пусть $\{\eta_k\}$ -последовательность индикаторов события A (k-номер опыта) в серии из n независимых испытаний (схема Бернулли), $p = P(A)$ - вероятность наступления события A в каждом опыте $(0 < p < 1)$. Тогда при $n \to \infty$ имеет место следующая равномерная (по $x \in (-\infty; +\infty)$) сходимость:

$$P\left(\frac{\eta_1 + \ldots + \eta_k + \ldots + \eta_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt .$$

Далее отмечается справедливость обобщающего утверждения (ЦПТ), справедливого для широкого класса независимых случайных величин, суть которого состоит в следующем: суммарное поведение большого количества таких величин (с малым влиянием каждой на всю сумму) практически не отличается от поведения стандартной нормально распределенной случайной величины. Рекомендуется точная формулировка теоремы в частном случае произвольной последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_k\}$ с конечными математическим ожиданием $a = M(X_k)$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = \sigma(X_k), k = 1,2,\ldots$ А именно, при $n \to \infty$ имеет место следующая равномерная (по $x \in (-\infty; +\infty)$) сходимость:

$$P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_k + \ldots + X_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt .$$

Выводы

Предпринята попытка проанализировать динамику развития стохастической линии (в рамках системы «Школа-вуз») в стандартах общего образования от начального этапа до этапа старших классов с сохранением преемственности стохастической подготовки при переходе к вузовскому курсу математики. Выделены ключевые концепции предлагаемых подходов: особенности стохастической пропедевтики, иерархия в паре «событие-вероятность», постулаты вероятности, некоторые вероятностные схемы, стохастический детерминизм в двух его проявлениях: законе больших чисел как законе устойчивости эмпирических характеристик и центральной предельной теореме как законе «группового тяготения» к нормальному распределению.

Предложенные вопросы содержания курса стохастики, методические рекомендации и задачный материал, как надеется автор, послужат более глубокому осознанию стохастических понятий и фактов, вводимых в школьный курс математики, актуализации умений и навыков решения соответствующих задач и, в конечном счете – развитию математической компетенции обучающихся.

Литература к главе 8

1. Федеральные государственные образовательные стандарты. [Электронный ресурс]. URL: https://fgos.ru/ (дата обращения: 10.06.23)

2. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г.Мордкович, П.В.Семенов.-М.: Мнемозина, 2007.-287 с.

3. Гутер, Р.С. Основа теории вероятностей /Р.С.Гутер, Б.В.Овчинский. - М.: Просвещение, 1967. - 162 с.

4. Алмазова, Т.А. Методические аспекты подготовки будущих учителей математики на примере вероятностно-статистической линии [Электронный ресурс] / Т.А.Алмазова, Н.О.Громова // Современные проблемы науки и образования. - 2020. - № 6. URL: https://science-education.ru/ru/article/view?id=30375 (дата обращения: 08.06.2023)

5. Нахман, А.Д. Задачи на вычисление вероятности события /А.Д.Нахман // Математика в школе- 2011. -№ 1. - С.34-41

6. Нахман, А.Д. Концепция стохастического детерминизма в преподавании математики /А.Д.Нахман // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. - 2022. -№ 3 (85). - С. 124–133
7. Слободчиков, В.И. Инновации в образовании: основания и смысл [Электронный ресурс] / В.И.Слободчиков // Интернет-портал «Исследователь.ru». -2009. URL: http://www.researcher.ru/methodics/nauka/a_1xizkd.html (дата обращения: 10.06.23)
8. Marie Evens, Jan Elen, Charlotte Larmuseau, Fien Depaere. Promoting the development of teacher professional knowledge: Integrating content and pedagogy in teacher education //Teaching and Teacher Education.- 2018.- Vol.75- Pp. 244-258
9. Viv Ellis, Ann Childs. Innovation in teacher education: Collective creativity in the development of a teacher education internship // Teaching and Teacher Education.- January 2019. - Volume 77.- Pp. 277-286
10. Сдам ГИА: Решу ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня [Электронный ресурс] // URL: https: ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 23.06.2023)

ОГЛАВЛЕНИЕ