Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»
Специальный выпуск

А.Д.Нахман

ИННОВАЦИОННЫЕ ЗАДАЧНЫЕ СИСТЕМЫ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Монография

Издательская платформа
Российской академии естествознания
2024

Рецензенты:
доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет» Ю.В.Родионов;

первый проректор-проректор по научной работе ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования» Т.В.Мирзаева

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

УДК 372.851

Нахман, А.Д. Инновационые задачные системы в обучении математике: монография / А.Д.Нахман // «Инновации в образовании». Специальный выпуск. – Издательская платформа Российской академии естествознания. – 2024. – 74 с.

Материал монографии сформирован на основе цикла статей автора, посвященных задачному подходу в обучении математике. Концепция инновационных задачных систем иллюстрируется на примерах практико-ориентированных и стохастических задач. Монография адресована исследователям в области образовательных инноваций, а также преподавателям математики и студентам вузов, изучающих математические дисциплины.

Введение

Инновационные процессы, происходящие в Российской системе образования на всех его уровнях и инициированные обновленными Федеральными государственными образовательными стандартами (ФГОС), в значительной степени затрагивают математическое образование. Так, согласно требованиям ФГОС основного общего образования [1], изучение предметной области "Математика и информатика" должно обеспечить развитие у обучающегося логического и математического мышления, овладение математическими рассуждениями, формирование представлений о математических моделях и умений применять математические знания при решении различных задач.

В этой связи сами задачные системы должны быть соответствующим образом модернизированы. Прежде всего, необходимо наличие именно системных свойств; это означает, что задания подобраны в соответствии с поставленной («глобальной» или «локальной») целью, и их взаимосвязь и взаимодействие приводит к намеченному результату (см.[2,3,4] и библиографию в них).

В нашем понимании, конструируемые задачные системы приобретают признаки инновационности [5], если в них имеется соответствующая потребность, а сами они являются в определенной степени новыми, апробированными, могут быть внедрены (или уже внедрены) и «диффундированы» в образовательную практику (см. также [6]).

Так, например, предлагаемые ниже в задачи-трансформеры конструируются с целью способствования интеграции вероятностно-статистического модуля в общую систему математической подготовки (глобальная цель), и, в частности, направлены на реализацию методов математического анализа при моделировании стохастических ситуаций (локальная цель, [7]).

В настоящей работе мы демонстрируем и обсуждаем некоторые задания-представители предлагаемых нами инновационных задачных систем .

ГЛАВА 1. Задачные системы: общие положения

1. Вопросы теории и теоретические упражнения

Теоретические вопросы традиционно ориентированы на репродуктивный уровень освоения материала («сформулируйте определение, теорему» и т.п.), тогда как более высокие уровни требуют осмысления, сопоставления и противопоставления фактов, их геометрических интерпретаций и т.п. Здесь предпочтительнее формулировки типа «верно ли», «приведите пример» и др. Так, в области математического анализа, вопросы могут быть например, следующими.

1.Приведите пример функции,

а)имеющей одну точку разрыва первого рода;

б) имеющей две точки разрыва второго рода.

2.Можно ли привести пример функции,

а)непрерывной в данной точке, но не дифференцируемой в ней;

б) обладающей производной в некоторой точке, но имеющей в этой точке разрыв?

В случае утвердительного ответа приведите соответствующий пример.

3. Может ли касательная пересечь график функции в точке касания? Если ответ утвердительный, то приведите соответствующий пример.

4. Эквивалентны ли понятия максимума (минимума) функции и ее наибольшего (наименьшего) значения на данном отрезке? Если ответ отрицательный, то приведите соответствующий пример.

5.Может ли касательная, проведенная в точке минимума функции, иметь уравнение $y = -0{,}1x$? Обоснуйте ответ.

6. Всегда ли непрерывная на данном открытом интервале функция достигает своего наибольшего значения ? А на отрезке непрерывности?

7.Верно ли утверждение: «Если общий член числового ряда на бесконечности имеет своим пределом число 0, то ряд сходится»? Обоснуйте свой ответ.

8.Может ли быть так, что некоторый степенной ряд сходится на промежутке $[0;+\infty)$ и расходится на $(-\infty;0)$? Ответ обоснуйте.

Освоению теоретических фактов в значительной мере способствуют «мини-теоремы» - теоретические упражнения, а также ключевые задачи, поставленные и решаемые в самом общем виде. Так, в ряде случаев, традиционные доказательства теорем могут быть сведены к решению последовательности теоретических упражнений. Приведем примеры некоторых упражнений в области математического анализа и стохастики.

1. Пользуясь результатом $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, вывести формулу для подсчета количества элементов $n(A \cup B \cup C)$ в объединении трех множеств.

2.Каков наибольший из биномиальных коэффициентов в разложении $(1+x)^{2n}$?

3.Равны ли тождественно суммы

$$\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^k \,?$$

4. На основании аксиом вероятности докажите, что $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, для всякой пары противоположных событий $A, \overline{A}$.

5. Докажите, что выборочная средняя $\bar{x}_B$ принимает значения $\bar{x}_B \in [x_{\min}, x_{\max}]$, где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – соответственно наибольшее и наименьшее значения вариант x_k.

6. Докажите, что производная функции двух переменных, вычисленная в данной точке в направлении градиента, равна модулю градиента.

7. С помощью замены переменных $t=\frac{y+a}{x+b}$ найдите общее решение дифференциального уравнения вида

$$y'-\frac{y+a}{x+b}=(x+b)f'(x)$$

(a,b - любые постоянные величины, f - произвольная дифференцируемая на всей числовой оси функция).

2. Варьирование задач

Метод варьирования задачи состоит в получении задачной системы из некоторой «базовой» задачи путем варьирования её содержания и (или) формы. В результате получается набор заданий - «клонов», решения которых способствует формированию упомянутых выше умений сопоставлять или противопоставлять математические понятия, методы и факты. Примером может служить задание на нахождение области определения функции вида $y=kx\lg(p\lg qx)$, где k,p,q - заданные постоянные (базовое задание). А именно, требуется найти области определения функций

а) $y=x\lg(\lg x)$ б) $y=x\lg(-\lg x)$ в) $y=-x\lg(-\lg(-x))$.

Приведем другие примеры заданий-клонов.

Найдите области определений функций

1. а) $y=\sqrt{-\sqrt{x^2-1}}$ б) $y=\sqrt{-\sqrt[3]{x^2-1}}$ в) $y=\sqrt[3]{-\sqrt{x^2-1}}$
2. а) $y=\arcsin(\operatorname{tg}x)$ б) $y=\operatorname{tg}(\arcsin x)$ в) $y=\operatorname{arctg}(\sin x)$

Среди данных зависимостей переменной y от переменной x укажите зависимости функциональные:

1. а) $2^{|x|}0{,}5^{-y}=0{,}5$ б) $2^{x}0{,}5^{-|y|}=0{,}5$ в) $2^{-|y|}0{,}5^{|x|}=0{,}5$
2. а) $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ б) $\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin^2 t\end{cases}$ в) $\begin{cases}x=\cos^2 t\\ y=\sin^2 t\end{cases}$

Найдите множество всех значений функции:

а) $y = 2^{\frac{x}{2}}$ б) $y = 2^{\frac{2}{x}}$ в) $y = (\frac{2}{x})^2$

Исследуйте данную функцию на непрерывность:

а) $y = 3^{\frac{3}{x-3}}$ б) $y = 3^{\frac{3}{x-3}} \cdot 3^{\frac{3}{3-x}}$

в) $y = \begin{cases} \cos(x - \frac{3\pi}{2}), & x \le \frac{3}{4} \\ -\sin x, & x > \frac{3}{4} \end{cases}$ г) $y = \begin{cases} \cos(x + \frac{3\pi}{2}), & x \le \frac{3}{4} \\ \cos(x - \frac{3\pi}{2}), \ , & x > \frac{3}{4} \end{cases}$

3. Задания-кейсы

Кейсы, представляют собою комплексные компетентностно-ориентированные учебные задания по моделированию различных жизненных ситуаций. Их решение требует оптимального сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся. Так, например, кейс-задания представлены в составе контрольно-измерительных материалов итоговой аттестации по математике (ОГЭ) выпускников основной школы [8]. Нами разрабатываются системы стохастических кейсов (см. [7] и библиографию в ней); приведем один из них.

В городе *N* имеется 10 финансовых компаний, среди которых 4 находятся на грани банкротства. Клиент выбирает для хранения и умножения средств случайным образом 2 компании. Составить ряд распределения числа X выбранных компаний, имеющих высокий риск банкротства. Постройте многоугольник распределения. Найти математическое ожидание и средне-квадратическое отклонение случайной величины X. С какой вероятностью можно утверждать, что хотя бы одна из выбранных компаний окажется на грани банкротства?

Решение данного кейса способствует формированию практико-ориентированных умений комплексного описания поведения случайной величины:

- умения численно прогнозировать степень возможности тех или иных значений случайной величины (вычислять вероятность извлечения выборки с заданной характеристикой объектов);
- строить ряд распределения дискретной случайной величины (ДСВ) и геометрически интерпретировать распределение;
- находить среднее значение случайной величины (математическое ожидание);
- находить числовые характеристики степени рассеяния ДСВ (дисперсию и средне-квадратическое отклонение).

4. Задачи-трансформеры и обратные стохастические задачи

Задачи-трансформеры представляют собою задания на моделирование ситуаций или процессов с целью их изучения одновременно в детерминистском и стохастическом направлении в зависимости от вопроса задачи.

Обсудим например, следующее задание. Биржевыми аналитиками установлено, что стоимость акций компании в последний месяц года должна изменяться по закону $y=(x-8)^2 \mathrm{e}^{15-x}$, где x – календарная дата, $x=1, 2, \ldots, 30$ (предпраздничный день 31 декабря исключается из рассмотрения). Какого числа следует продать акции, чтобы получить максимальный доход? Какова вероятность, что в случайно выбранный день месяца стоимость акций находится на подъеме?

Очевидно, что для ответа на первый вопрос следует обратиться к детерминированной модели ситуации. Акции выгоднее всего продавать на максимуме роста, следовательно, производная $y'=(x-8)(10-x)\mathrm{e}^{10-x}$ в соответствующей точке должна изменить знак с плюса на минус. Очевидно, что такой точкой будет $x = 10$, то есть акции надо продать 10 декабря.

Второй вопрос предполагает наличие стохастической ситуации, поскольку выбор даты $x \in \{1, 2, ..., 30\}$ случаен. При этом благоприятных исходов, то есть дней роста стоимости акций, всего три: 8, 9, 10 декабря. Искомая вероятность $p = \frac{3}{30}$, или $p = 0{,}1$.

Решение обратных стохастических задач является эффективным технологическим приемом формирования целостности и системности знаний. Обратные задачи – важный компонент технологии укрупненных дидактических единиц (УДЕ), которая представляет собой интеграцию целого ряда конкретных подходов к обучению. Ключевой элемент технологии УДЕ – это упражнение: триада «исходная задача – ее обращение – обобщение».

С точки зрения моделирования стохастических ситуаций обратная задача представляет собою задание по нахождению некоторых входных параметров модели по ее известному выходу. Оператор модели при этом может быть полностью известен («прозрачный, белый ящик»), известен в самом общем виде, но не конкретизирован применительно к данному заданию («серый ящик»), либо полностью неизвестен («черный ящик»). Приведем пример.

Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью p=0,9544 утверждать, что относительная частота выпадения герба отклонилась от 0,5 не более, чем на 0,05?

«Прямая задача» состояла бы в оценке вероятности заданно-малого отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ наступления данного случайного события от его вероятности p при заданном количестве проводимых опытов n с помощью интегральной функции Лапласа $\Phi(x)$:

$$P(|\frac{m}{n}-p|<\varepsilon)\approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}});$$

в роли оператора модели выступает эта приближенная расчетная формула. В нашем случае «выход» модели известен (указанная оценка дана), а отысканию подлежит количество опытов n (служившее в прямой задаче входным параметром). Имеем

$$0{,}9544\approx 2\Phi(0{,}05\sqrt{4n})\quad \text{или}\quad \Phi(0{,}1\sqrt{n})\approx 0{,}4772.$$

Если воспользоваться таблицей значений интегральной функции Лапласа, то получим значение аргумента функции $0{,}1\sqrt{n}\approx 2$, откуда $n\approx 400$. Итак, монету надо бросить 400 раз.

Особого обсуждения заслуживают системы тестовых заданий, но этой теме автор надеется посвятить отдельную работу.

Резюмируем сказанное.

Инновационные задачные системы вышеуказанных типов могут быть (как это представляется автору) в значительной степени востребованы в образовательной практике. Их решение стимулирует мотивацию к математической деятельности (таким стимулом является практическая ориентированность ряда задач), развивает исследовательские навыки (задачи-клоны), способствует становлению умений комплексного описания ситуаций и процессов (задания-кейсы, обратные стохастические задачи и задания-трансформеры) и, в конечном счете, способствует формированию у обучающихся целостности и системности знаний в области математики и ее приложений.

Литература ко введению и главе 1.

1.Федеральные государственные образовательные стандарты [Электронный ресурс] //URL: https://fgos.ru/ (дата обращения 10.11.24).

2. К.И.Курпаяниди, Ф.М.Нишонов. Конструирование систем задач по математике // International Journal of Humanities and Natural Sciences. 2018. Vol.10-1.С.82-85. DOI: 10.24411/2500-1000-2018-10069.
3.Шмигирилова И. Б. Особенности конструирования учебно-поисковых заданий в компетентностном обучении математике // Наука и школа. 2017. № 3. С. 152-160.
4.Шмигирилова И. Б. Дидактическая ценность задачи и пути ее повышения // Наука и школа. 2018. № 6. С. 130-135.
5.Нахман А.Д. Моделирование инновационной образовательной деятельности в области математики //Вестник Тульского ГУ. 2017. Вып. 16. С.126-130.
6. Слободчиков В.И. Инновации в образовании: основания и смысл [Электронный ресурс] // Интернет-портал «Исследователь.ru». 2009. URL: http://www.researcher.ru/methodics/nauka/a_1xizkd.html (дата обращения 10.11.24).
7. Нахман А.Д. Концепция стохастического детерминизма в преподавании математики
//Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И. Вернадского. 2022. №3(85). С.124-133. DOI: 10.17277/voprosy.2022.03.pp.124-133.
8.Сдам ГИА: Решу ОГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика профильного уровня [Электронный ресурс] //URL: https: ege.sdamgia.ru/ (дата обращения 10.11.24).

Глава 2. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Реализация практико-ориентированного обучения в рамках предметной области «Математика» - актуальная задача, решение которой может быть осуществлено средствами интеграции процессов формирования теоретических знаний и развития практических умений. Основной целью практико-ориентированного обучения является обеспечение готовности обучающихся к применению знаний и умений (в том числе, и в области математики) в практической деятельности. Вместе с тем, мы твердо придерживаемся той точки зрения, что курс математики (как в школе, так и в вузе) не должен превращаться в набор рецептов по решению практических задач. Курс математики должен оставаться теоретическим, сохранять определенный уровень абстрагирования, а задачи практико-ориентированного характера призваны стимулировать введение тех или иных новых понятий, иллюстрировать вновь получаемые факты, использоваться в процессах математического моделирования.

Нам представляется, что следует разделять имеющиеся в литературе понятия: задачи практического содержания, задачи прикладного содержания, задачи практико-ориентированные, задачи профессионально-ориентированные, задачи квазипрофессиональные [1].

Задачами *практического содержания* мы называем задачи, возникающие в повседневной практике и не претендующие на статус математического задания. Однако для их решения необходимо применить математический аппарат, по большей части – простейший. Задачи такого сорта широко представлены в контрольно -измерительных материалах ОГЭ и ЕГЭ. Вот одна из них.

«После вычета 13% -го налога Иван Петрович получил 26100 рублей. Какова зарплата Ивана Петровича?»

Имеем весьма жизненную ситуацию, не связанную с математикой. Однако, понятие процентов, используемое в условии – это математическое понятие. Из 100% денег Иван Петрович получил 100%-13%=87 % от некой суммы x, так что $0{,}87x = 26100$, откуда $x = 30000$ руб.

К задачам *прикладного содержания* мы относим задачи из смежных с математикой предметных областей, решение которых, однако, производится путём использования математических понятий, фактов и методов. Такие задачи всегда конкретны и формулируются в терминах соответствующей содержательной модели. Разработка математической модели – лишь необходимый инструмент; роль этого инструмента заканчивается на этапе интерпретации результатов моделирования. Приведём пример из биологии.

Экспериментальным путём установлено, что скорость роста некоторой популяции $v(t)=15t\sqrt{t}$, где t - время (количество суток), прошедшее с начала наблюдения поведения популяции. Каков будет прирост численности популяции через четверо суток?

При анализе математической модели очевидным образом выстраивается стандартная схема определённого интеграла. А именно, за малый промежуток времени $[t,t+\Delta t]$ популяция увеличилась на $v(t)\cdot\Delta t$ единиц. Разбивая временной интервал $[T_1,T_2]$ на такие малые промежутки, получаем общий прирост в виде приближенного значения суммы $\sum v(t)\cdot\Delta t$, которая при дальнейшем «измельчении» отрезка $[T_1,T_2]$ перейдёт в интегральную и, в конечном счёте , в интеграл вида

$$\Delta f=\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt\,.$$

Так, например, при скорости роста $v(t)=15t\sqrt{t}$ за время наблюдения $t=4$ суток прирост численности составит

$$\Delta f=\int_0^4 15t\sqrt{t}dt=15\int_0^4 t^{3/2}dt=15\frac{t^{5/2}}{5/2}\Big|_0^4=6\cdot 4^{5/2}=192\,(\text{ед}).$$

С нашей точки зрения, *понятие практико-ориентированной задачи* – понятие достаточно общее, не предполагающее конкретной практической или прикладной ситуации, а относящееся к целому классу таких ситуаций. Ключевым здесь является термин «*ориентированное*» (методы ориентированы на определённую группу типовых задач); предполагается разработка общих способов решения, связанных с каким либо математическим понятием или фактом; эти способы в каждом конкретном случае практической либо прикладной задачи, подлежат уточнению, детализации, использованию дополнительных условий и т.п. Такими являются , например, задачи нахождения площадей криволинейных трапеций в заданной системе координат. Здесь в общем случае трапеции, проектирующейся в отрезок $[a,b]$ оси абсцисс и ограниченной кривыми $y = f(x)$ сверху и $y = g(x)$ снизу, площадь вычисляется в виде $S = \int_a^b f(x)dx$.

Перед нами – класс задач, а «общий подход», в случае конкретной ситуации нуждается в уточнении (например, составной частью задачи может быть поиск границ интегрирования a и b). Практико-ориентированная задача станет практической, если сформулировать её, например, в следующем виде.

Сколько граммов позолоты потребуется для покрытия плоской крышки ларца, если крышка имеет границей две пересекающиеся стандартные параболы с противоположным направлением ветвей, расстояние между вершинами которых равно 8 см. (параболы симметричны относительно линии их пересечения). Расход позолоты: 0,3 г. на 1 кв. см.

Имеем вполне конкретную ситуацию: в выбранной системе координат на плоскости расположены две параболы с уравнениями $y = x^2 - c$ и $y = c - x^2$, где параметр c выбран из условия $2c = 8$, т.е. $c = 4$. Поскольку позолота распределяется равномерно по поверхности крышки, то её масса $m = 0{,}3 \cdot S$, где S - площадь крышки (в кв. см.). Таким образом, мы находимся в рамках частного случая практико-ориентированной задачи по вычислению площади в заданной системе координат. В свою очередь, потребуются пределы интегрирования в интеграле

$$S=\int_a^b((4-x^2)-(x^2-4))dx=2\int_a^b(4-x^2)dx.$$

Они могут быть найдены из условия пересечения парабол $x^2-4=4-x^2$, так что $a=x_1=-2,\ b=x_2=2$. Значит

$$S=2\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx=2(4x-\frac{1}{3}x^3)\,|_{-2}^{2}=\frac{64}{3}\text{ (кв. см.)}$$

Итак, требующаяся масса позолоты $m=0{,}3\cdot S=6{,}4$ (г.)

Другой пример практико-ориентированного задания – нахождение работы переменной силы $\overline{F}=P\,(x,y)\,\bar{i}+Q\,(x,y)\,\bar{j}$ по перемещению материальной точки M из начала дуги – точки A, в конец – точку B. Ход соответствующих рассуждений приводит к рассмотрению, так называемого криволинейного интеграла по координатам

$$\int_{\cup AB}P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

Он строится как предел интегральной суммы скалярных произведений $\Delta A=\overline{F}\,\Delta\bar{l}$ вектора силы $\overline{F}$ с вектором "элементарного" (малого) перемещения $\Delta\bar{l}$. Если дуга AB расположена в области D, в которой P и Q – непрерывные функции, и линия L имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},$$

причем положение точки A соответствует значению $t=\alpha$, положение B –

$t = \beta$, то

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[P\big(x(t), y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t), y(t)\big)y'(t)\right]dt .$$

Если же уравнение линии L имеет вид $y = \varphi(x)$, причем $x = a$ и $x = b$ – абсциссы соответственно точек A и B, то

$$\int\limits_{\cup AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} \left[P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\varphi'(x)\right]dx .$$

Таким образом, представлен общий приём решения целого класса задач по нахождению работы переменной силы. Для каждой конкретной пары функций P и Q и известного уравнения линии L получаем задачу практического содержания.

Близким по смыслу к понятию практико-ориентированной задачи является понятие профессионально-ориентированной задачи. В таких задачах отражены достаточно общие ситуации, связанные с тем или иным видом профессиональной деятельности. Примеры профессионально-ориентированных задач приведены, напр., в [2].

Наконец, квазипрофессиональные задачи – это задачи с профессиональным контекстом, для решения которых нужно выполнять элементы будущей профессиональной деятельности в условиях моделируемых профессиональных ситуаций. Здесь уже находят отражения типично профессиональные проблемы, решение которых осуществляется средствами математического моделирования. Окончательное овладение навыками теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности с использованием математических знаний и умений должно быть сформировано в процессе изучения специальных дисциплин.

Литература к главе 2

1.Нахман, А.Д. Формирование практико-ориентированных умений средствами математики: монография /А.Д.Нахман.- Saarbrucken: Lambert Academic Publishing. - 2016. - 130 с.

2. Никанорkина, Н.В. Профессионально-ориентированные задачи как средство формирования профессиональной математической компетентности студентов экономических вузов / Н.В.Никанорkина, Г.И.Мальцева, Д.В.Мельник //Молодой учёный.-2017.-№43(177). - С.111-113. URL: https://moluch.ru/archive/177/46119/ (дата обращения: 19.10.2024)

Глава 3. ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ В КОНТЕКСТЕ КОМПЕТЕНТНОСТНОЙ ПАРАДИГМЫ

Переход от когнитивно-знаниевой к компетентностной образовательной парадигме характеризуется усилением практико-ориентированной и прикладной направленности профессионального образования, его адекватности современным требованиям теории, практики, экономики, культуры, общественной и политической жизни. Изучение фундаментальных дисциплин, и, в частности, математики, теперь предполагает не только освоение обучающимся определённой системы знаний, но и приобретением инструментов для решения проблем, возникающих как в повседневной жизни, так и в профессиональной сфере. Индикаторы достижения соответствующих результатов «знать» и «уметь» дополняются индикатором «владеть». Речь идёт об овладении, в частности, навыками исследования объектов профессиональной деятельности средствами математики. В основе любой логической цепочке рассуждений, связанных с таким исследованием, лежат основные понятия и факты математической логики. Определение взаимного расположение объектов в системе координат, их визуализация достигаются средствами векторной алгебры и аналитической геометрии. Многопараметрические линейные зависимости порождают необходимость овладения методами линейной алгебры. Исследования различных процессов во времени, нахождение тенденций процессов, скоростей их протекания приводят к понятиям и фактам дифференциального исчисления, моделирование динамических систем - к дифференциальным уравнениям. Таким образом, важным компонентом «компетентностного портрета» современного специалиста (бакалавра, магистра), должен быть математический инструментарий решения задач, приходящих извне.

1.Задачный подход. Концепция практико-ориентированных задач

В основе процесса формирования компетенций средствами предметной области «Математика» лежит задачный подход [1]. Суть его состоит в том, что задачи выполняют функцию цели и средства обучения.

Условимся, в этой связи, в следующей терминологии. Задачами *практического (прикладного) содержания* будем называть задачи, возникающие в повседневной практике (в смежных предметных областях), не являющиеся собственно математическими, но использующие в своём решении математический аппарат.

В работе [2] предлагается *понятие практико-ориентированной задачи* как понятие достаточно общее, не предполагающее конкретной практической или прикладной ситуации, а относящееся к целому классу таких ситуаций. Ключевым здесь является термин «*ориентированное*» (методы ориентированы на определённую группу типовых задач); предполагается разработка общих способов решения, связанных с каким либо математическим понятием или фактом; эти способы в каждом конкретном случае практической либо прикладной задачи, подлежат уточнению, детализации, использованию дополнительных условий и т.п. Коротко, речь идёт об общности метода и множественности его реализаций.

Примером может служить задача максимизации (минимизации) линейной функции в многоугольной области. Общий метод её решения (симплекс-метод) применяется ко многим практическим задачам в области экономики.

Профессионально-ориентированными назовём задачи, в которых отражены также достаточно *общие* ситуации, но уже связанные с тем или иным видом профессиональной деятельности. Примеры профессионально-ориентированных задач приведены, напр., в [3].

Квазипрофессиональные задачи – это задачи с профессиональным контекстом, моделирующие *конкретные* профессиональные ситуации, воспроизводящие условия, содержание, технологии и пространственно-временную динамику реальных производственных процессов [4], с. 229.

Нам представляется, что рассмотренные типы задач и компетенции, формируемые в системе профессионального образования, связаны следующим образом.

Компетенции	***Типы решаемых математических задач***
Универсальные (УК)	Простейшие практико-ориентированные задачи
Общепрофессиональные (ОПК)	Практико-ориентированные и простейшие профессионально-ориентированные задачи
Профессиональные	Профессионально-ориентированные и квазипрофессиональные задачи

Таблица 1. Компетенции и типы задач.

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением практико-ориентированных задач, решение которых связано с моделированием ситуаций средствами дифференциальных уравнений. Такие задачи направлены на формирование, в первую очередь, общепрофессиональных компетенций.

2. Классическая и прикладная математика: балансовые механизмы

В современной «педагогике математики» существуют два противоположных взгляда на проблему преподавания математики в высшей школе. Первый состоит в том, что математика – это, прежде всего, фундаментальная дисциплина, «царица наук», и, вследствие этого изложение всех понятий и фактов должно вестись на уровне достаточной полноты, строгости, общности, доказательности. Второй взгляд предполагает лишь поверхностное изложение, набор «рецептов» для решения тех или иных прикладных задач, почти полный отказ от техники необходимых преобразований и вычислений, перелагая последнюю «на плечи» стандартных компьютерных программ. Нам близок подход, изложенный в известной статье А. Д.Мышкиса [5]. Суть его в следующем:

- введение новых понятий и фактов предваряется задачами практического или прикладного характера, которые не могут решены путём привлечения уже известных студенту математических средств;
- изучаются новые теоретические модули дисциплины; при этом подключается доказательства базовых утверждений (акцент - на основные идеи доказательств);
- на построенной теоретической базе разрабатываются алгоритмы решения практико-ориентированных задач, демонстрируются необходимые технические приёмы;
- сконструированные алгоритмы реализуются при решении конкретных прикладных и практических задачах; в технической части решений возможно обращение к соответствующим компьютерным программам.

Коротко, суть указанного подхода может быть выражена тезисом: основным связующим звеном теоретической математики и её приложений, необходимым балансовым механизмом, является система практико-ориентированных задач.

Рассмотрим, в частности, как реализуется данный механизм в части моделирования процессов средствами дифференциальных уравнений (ограничимся обыкновенными дифференциальными уравнениями). Пошаговая реализация выстраивается

1.Шаги по восходящей линии:

1.1.Описание практической/прикладной задачи (процесса)в терминах исходной предметной области (реальный объект);

1.2.Выявление основных закономерностей и факторов, связанных с моделируемым процессом; пренебрежение второстепенными факторами (содержательная модель);

1.3.Формализация проблемы (постановка математической задачи);

1.4.Выбор подходящего математического инструментария;

1.5.Формулировка подходящей практико-ориентированной задачи.

1.6.Получение (средствами математики) её решения

2.Шаги по нисходящей линии:

2.1.Получение решения практической (прикладной задачи) как следствия решённой практико-ориентированной задачи;

2.2.Интерпретация в терминах исходной предметной области;

2.3.Цифровая обработка результата: «доведение решения задачи до практически приемлемого результата — числа, графика, точного качественного вывода и т.п. с применением для этого адекватных вычислительных средств» [5].

3. Моделирование процессов экспоненциального роста и выравнивания

В качестве практико-ориентированной рассмотрим задачу $\frac{dy}{dt} = ky$ моделирования процессов показательного роста ($k > 0$) и выравнивания ($k < 0$). Её общее решение $y = Ce^{kt}$ (C - произвольная постоянная) может быть использовано в случаях описания движений в среде с сопротивлением, моделировании рынка с постоянными ценами и др. Какая-либо из этих задач используется в качестве мотива введения новых понятий и рассмотрения новых фактов, связанных с дифференциальными уравнениями.

Теоретическим базисом, необходимым для решения данной практико-ориентированной задачи является алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными. Приведём пример использования сформулированной практико-ориентированной задачи в анализе следующей практической ситуации.

Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0.44 мг. Через сколько лет распадется 50 % имеющегося радия?

Описание объекта исследования приведено в формулировке задачи.

Содержательная модель использует закон радиоактивного распада – количество радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, пропорционально количеству этого вещества, имеющемуся в рассматриваемый момент. Формализация процесса достигается введением функции y(t), где t - время, а y(t) – масса радиоактивного вещества, и записью закона в виде $y' = -ky$, где $k > 0$ – некоторая постоянная. При этом $y(0) = 1$ (г), $y(1) = 1 - 0.00044 = 0.99956$ (г). Получена практико-ориентированная задача выравнивания, с дополнительными (краевыми) условиями. Используя результат её решения, возвращаемся к заданной ситуации: остается в соотношении $y = Ce^{-kt}$ определить константы C и k из условий:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y(1) = 0.99956 \end{cases}.$$

Получаем

$$\begin{cases} C = 1 \\ k = -\ln 0.99956 \end{cases}.$$

По условию задачи $y(T) = 0.5$, где Т –искомая величина. Переходим к цифровому результату:

$$e^{\ln(0.99956)\cdot T} = 0.5, \text{ откуда } \quad T = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.99956)}; \quad T \approx 1575.$$

Интерпретация модели: через 1575 лет распадется 50% имеющегося радия.

Литература к главе 3

1. Шмигирилова И. Б. Особенности конструирования учебно-поисковых заданий в компетентностном обучении математике. - Наука и школа. 2017. -№ 3.- С. 152-160.

2. Нахман А.Д. Практико-ориентированные математические задачи. - Вопросы педагогики. -2020.- № 11-1. –С. 178-181.

3. Никаноркина Н.В., Мальцева Г.И., Мельник Д.В. Профессионально-ориентированные задачи как средство формирования профессиональной математической компетентности студентов экономических вузов.- Молодой учёный. -2017.-№43(177).-С.111-113.

4. Вербицкий А.А., Ильязова М.Л. Инварианты профессионализма:проблемы формирования. М.:Логос, 2011. – 288 с..

5. Мышкис А. Д. О преподавании математики прикладникам.- Математика в высшем образовании. – Нижний Новгород, 2003. – № 1. – С. 37–52.

Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: ЗАДАЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается непосредственно установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т.е. найти уравнения, в которых неизвестные функции содержатся под знаком производной. Такие уравнения называются дифференциальными; они служат важным средством моделирования различных процессов.

1. Общие понятия и определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой переменной и ее производные (или дифференциалы).

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящей в него производной (или дифференциала).

Дифференциальным уравнением первого порядка называется соотношение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

где x - независимая переменная, $y = y(x)$ - искомая функция, $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ - ее производная.

Если уравнение (1.1) можно записать в виде

$$y' = f(x, y), \tag{1.2}$$

то говорят, что оно разрешимо относительно производной.

Часто встречается дифференциальная форма записи уравнения первого порядка

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

которая удобна тем, что в качестве искомой функции может быть как $x = x(y)$, так и $y = y(x)$.

Решением (интегралом) дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = y(x)$, превращающая это уравнение в тождество.

График функции $y = y(x)$ называется интегральной кривой.

Процесс решения дифференциального уравнения называется его интегрированием.

На самом деле в процессе интегрирования определится целый класс решений:

$$y = y(x, C), \tag{1.3}$$

где C - произвольная постоянная.

Класс (1.3) называется общим решением дифференциального уравнения; ниже мы уточним, что будем понимать под общим решением дифференциального уравнения первого порядка.

В некоторых случаях общее решение дифференциального уравнения определяется в неявном виде: $\Phi(x, y, C) = 0$.

Геометрически общее решение представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости xOy.

При каждом конкретном значении $C = C_0$ получают частное решение $y = y(x, C_0)$.

Задача о нахождении решения дифференциального уравнения (1.2), удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, называется задачей Коши.

Геометрически, такая задача предполагает поиск интегральной кривой, которая проходит через заданную точку с координатами (x_0, y_0).

Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной (включая «предельные» случаи $C = \pm\infty$), называется его особым решением.

При интегрировании дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с общим решением были найдены также и особые решения.

Среди всех дифференциальных уравнений особый интерес представляют некоторые классы уравнений, для которых существуют стандартные способы аналитического решения. Ниже будут рассмотрены важнейшие из них.

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{1.4}$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

Разделим переменные, учитывая, что $y'(x) = \frac{dy}{dx}$.

При этом уравнение (1.4) преобразуется к виду $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$.

Интегрируя, получим общее решение: $\int \frac{dy}{g(y)} - \int f(x)dx = C$.

Замечания

1. Характерный признак дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными - это наличие произведений (или частных) "блоков", зависящих только от "x" или только от "y".

2. Если обе части уравнения делим на переменную величину, то необходимо отдельно рассмотреть также случай, когда она обращается в ноль. Так, постоянные $y = y_0$, для которых $g(y_0) = 0$, являются, очевидно, решениями уравнения (1.4).

3. Произвольная постоянная, возникающая при интегрировании, может быть записана в виде kC или $k \ln C$, где k –любой постоянный (ненулевой) множитель. В некоторых случаях такая запись удобна для упрощения ответа.

3 Однородные уравнения

Если уравнения $y' = f(x, y)$ или $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ не изменяются при одновременной замене "x" на "kx" и "y" на "ky", то они называются однородными.

Однородное уравнение может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.5}$$

Однородное дифференциальное уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$t = \frac{y}{x} \quad \text{(откуда} \quad y' = t + t'x\text{)},$$

где $t = t(x)$ - новая неизвестная функция.

После того как новое уравнение будет проинтегрировано, следует сделать обратную замену переменных - вместо t подставить $\frac{y}{x}$.

4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1.6}$$

где $p(x), q(x)$ - непрерывные (на данном интервале) функции.

Характерный признак таких уравнений –функция y и ее производная y' содержатся в уравнении в первой степени.

Уравнение Бернулли имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \neq 0, n \neq 1. \tag{1.7}$$

Существует несколько методов решения уравнений данных видов: метод вариации произвольных постоянных, метод интегрирующего множителя, метод Бернулли.

Рассмотрим здесь метод Бернулли; решение каждого из уравнений (1.6), (1.7) ищется в виде

$$y = u \cdot v,$$

где $u = u(x), v = v(x)$ - неизвестные функции.

По правилу дифференцирования произведения получим $y' = u'v + uv'$ (аргумент x в дальнейшем опускаем).

В этом случае линейное уравнение, например, (1.6) записывается следующим образом

$$u'v + u(v' + pv) = q.$$

Множитель $v = v(x)$ можно выбрать как некоторое решение уравнения $v' + pv = 0$.

Тогда исходное уравнение оказывается эквивалентным уравнению с разделяющимися переменными $u'v = q$, общее решение которого есть некоторая $u = u(x,C)$.

Окончательно общий интеграл линейного дифференциального уравнения примет вид

$$y = v(x) \cdot u(x,C).$$

Таким образом, в процессе решения приходится дважды решать уравнения с разделяющимися переменными.

По той же схеме решается и уравнение Бернулли.

2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Уравнение вида

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{1.8}$$

связывающее между собой независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные $y'(x)$, $y''(x)$, называется дифференциальным уравнением второго порядка (разрешенным относительно второй производной).

Общим решением уравнения (1.8) называется функция $y = y(x, C_1, C_2)$, зависящая от двух произвольных постоянных C_1 и C_2, которая при любых значениях C_1, C_2 является решением (1.8).

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка состоит в следующем: найти решение уравнения (1.8), удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Геометрически, имеем задачу нахождения интегральной кривой $y = y(x)$, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) и имеющей данный угловой коэффициент $y'_0 = tg\,\alpha$ касательной в этой точке.

Краевая задача. Задача интегрирования уравнения (1.8) называется краевой, если значения искомой функции $y(x)$ и, возможно, ее производных задаются не при одном и том же значении независимой переменной, а на концах некоторого фиксированного интервала. В некоторых случаях значения искомой функции или ее производных могут задаваться более чем в двух точках.

Задача Коши иногда называется одноточечной, краевые задачи – двухточечными (иногда, многоточечными).

Краевая задача не всегда имеет решение, а если она его и имеет, то во многих случаях оно не является единственным. Ниже мы подробнее познакомимся с указанным понятием на примерах.

В некоторых случаях путем надлежащей замены переменных удается понизить порядок дифференциального уравнения, т.е. уравнение второго порядка решается последовательным рассмотрением двух уравнений первого порядка.

Рассмотрим три типа таких уравнений.

1) **Уравнения вида $y'' = f(x)$, содержащие только производную и независимую переменную** решаются путем последовательного интегрирования:

$$y' = \int f(x)\, dx + C_1,$$

$$y = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2.$$

2) **Уравнения вида $F(x, y', y'') = 0$, не содержащие искомой функции y** допускают понижение порядка с помощью подстановки $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. При этом получаем два последовательно решаемых дифференциальных уравнения первого порядка:

$$F(x, y', y'') = 0 \iff \begin{cases} y' = z, \\ F(x, z, z') = 0. \end{cases}$$

3) **Уравнения вида $F(y, y', y'') = 0$, явно не содержащие переменную x,** допускают понижение порядка путем подстановки $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot \dfrac{dp}{dy} = p \cdot p'$.

Формальное отсутствие аргумента x позволяет рассматривать функцию p как функцию аргумента y. При этом получаем два следующих последовательно решаемых уравнения первого порядка:

$$F(y, y', y'') = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} y' = p(y), \\ F(y;\ p;\ p') = 0. \end{cases}$$

3. Задачи для активного обучения

1) Убедиться, что функция $y = Cx + \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}}$ при каждом действительном C является решением уравнения

$$y - xy' = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Решение. Производная данной функции $y' = C$. Подставляя в данное уравнение вместо y и y' их значения, имеем: $Cx + \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}} - x \cdot C = \dfrac{C}{\sqrt{1+C^2}}$, т. е. получаем тождество. Следовательно, данная функция y при каждом действительном C является решением указанного уравнения.

2) Составить дифференциальное уравнение по заданному семейству интегральных кривых $y = Cx^3$.

Решение. Продифференцируем по x равенство $y = Cx^3$, получим $y' = 3Cx^2$. Кроме того, очевидно, $C = \dfrac{y}{x^3}$. Поэтому искомое дифференциальное уравнение принимает вид: $xy' = 3y$.

3) Зная, что $y = C\ln x$ является общим решение уравнения $xy' \ln x = y$, найти интегральную кривую, проходящую через точку $M(e, 1)$.

Решение. В данном случае необходимо найти решение задачи Коши с начальным условием $y(e) = 1$: $y(e) = C\ln e = 1$, откуда $C = 1$. Искомая интегральная кривая задается теперь уравнением $y = \ln x$.

4) Найти общее решение уравнения $xy' = (4 + y^2)\ln x$.

Решение. Имеем уравнение с разделяющимися переменными:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = \left(4 + y^2\right) \ln x .$$

Умножим обе части уравнения на dx:

$$x \cdot dy = \left(4 + y^2\right) \ln x \cdot dx .$$

Далее обе части уравнения поделим на выражение $x\left(4 + y^2\right)$, которое, очевидно, в данном уравнении не может обратиться в ноль:

$$\frac{dy}{4 + y^2} = \frac{\ln x}{x} dx .$$

Таким образом, мы разделили переменные.

Интегрируем теперь обе части уравнения:

$$\int \frac{dy}{4 + y^2} = \int \frac{\ln x}{x} dx , \qquad \int \frac{dy}{2^2 + y^2} = \int \ln x \, d(\ln x) ,$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{2} = \frac{\ln^2 x}{2} + \frac{1}{2} C .$$

Итак, получено общее решение уравнения в неявном виде: $\operatorname{arctg} \frac{y}{2} = \ln^2 x + C$.

5) Решить задачу Коши: $\begin{cases} (2xy + x)dx - \left(x^2 + 1\right)dy = 0 \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Решение. Перепишем уравнение в виде $x(2y + 1)dx = \left(x^2 + 1\right)dy$ и разделим переменные. Поделив обе части уравнения на $(2y + 1) \cdot \left(x^2 + 1\right)$, получим:

$$\frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{dy}{2y + 1} .$$

Интегрируем:

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{dy}{2y + 1} ; \qquad \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2 + 1\right)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2y + 1)}{2y + 1} ,$$

откуда $\ln\left(x^2 + 1\right) = \ln(2y + 1) + \ln C$. Упростим теперь решение, используя свойства логарифмов: $\ln\left(x^2 + 1\right) = \ln C(2y + 1)$. Итак, общее решение уравнения принимает вид

$$x^2 + 1 = C \cdot (2y + 1).$$

Теперь найдем значение постоянной C, при котором будет выполнено указанное начальное условие. Подставляя $x=0,\ y=\frac{1}{2}$ в общее решение, получим:

$$0+1=C\left(2\cdot\frac{1}{2}+1\right),\ \text{отсюда}\ C=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, имеем решение задачи Коши:

$$x^2+1=y+\frac{1}{2}\ \text{ или, в явном виде,}\quad y=x^2+\frac{1}{2}.$$

6) Найти общее решение уравнения $x\,y'-y+x\cos^2\frac{y}{x}=0$.

Решение. Непосредственное разделение переменных в данном случае невозможно, но выражение $\cos^2\frac{y}{x}$ наводит на мысль об однородном уравнении вида (1.5). Действительно, поделив обе части на x, получим

$$y'-\frac{y}{x}+\cos^2\frac{y}{x}=0.$$

Далее сделаем подстановку

$$t=\frac{y}{x},\quad y'=t+t'x:\quad t+x\cdot t'-t+\cos^2 t=0\ \text{ или }\ x\cdot t'+\cos^2 t=0.$$

Теперь решаем полученное уравнение с разделяющимися переменными

$$x\frac{dt}{dx}=-\cos^2 t;\quad -\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем: $-\operatorname{tg}t=\ln x+\ln C$ или $\ln Cx+\operatorname{tg}t=0$. В результате обратной подстановки приходим к общему решению в неявном виде

$$\ln Cx+\operatorname{tg}\frac{y}{x}=0.$$

7) Решить задачу Коши $\left(y'-\frac{y}{x}\right)\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=1,\quad y(1)=0$.

Решение. Имеем однородное дифференциальное уравнение. Делаем подстановку $t=\frac{y}{x}$, тогда $y'=t+t'x$; после преобразований получим уравнение $t'\,x\operatorname{arctg}t=1$.

Решаем его путем разделения переменных:

$$\frac{dt}{dx}\cdot x\,\mathrm{arctg}\,t=1;\quad \mathrm{arctg}\,t\;dt=\frac{dx}{x};\quad \int \mathrm{arctg}\,t\,dt=\int\frac{dx}{x}.$$

Интеграл в левой части равенства вычисляем «по частям»:

$$\int \mathrm{arctg}\,t\,dt=\left|\begin{matrix}\mathrm{arctg}\,t=u, & dt=dv\\ \dfrac{dt}{t^2+1}=du, & t=v\end{matrix}\right|=t\cdot \mathrm{arctg}\,t-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+const.$$

Итак,

$$t\cdot \mathrm{arctg}\,t-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)=\ln x+\ln C,\quad \frac{y}{x}\cdot \mathrm{arctg}\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)=\ln Cx.$$

Общее решение исходного уравнения окончательно примет вид:

$$\frac{y}{x}\cdot \mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}.$$

Используя начальные условия, найдем частное решение (решение задачи Коши):

$0\cdot \mathrm{arctg}\,0=\ln C\quad\Rightarrow\quad C=1$, так что

$$\frac{y}{x}\cdot \mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

8) Решить уравнение $y'-\dfrac{y}{2\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}}$.

Решение. Данное уравнение является линейным (см. соответствующие характерные признаки). Сделав подстановку Бернулли $y=u\cdot v$, $y'=u'v+uv'$, получим:

$$u'v+uv'-\frac{uv}{2\sqrt{x}}=2e^{\sqrt{x}};\qquad u'v+u\left(v'-\frac{v}{2\sqrt{x}}\right)=2e^{\sqrt{x}}.$$

Полагаем

$$v'-\frac{v}{2\sqrt{x}}=0,\ \text{тогда}\quad u'v=2e^{\sqrt{x}}.$$

Решение исходного уравнения сводится к последовательному решению двух уравнений с разделяющимися переменными.

<table>
<tr>
<td>

1) Функцию $v = v(x)$ найдем из

первого уравнения $v' - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0$:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{2\sqrt{x}} = 0, \qquad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

$$\int \frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx, \qquad \ln v = x^{\frac{1}{2}},$$

$$v = e^{\sqrt{x}}$$

(выбрана одна из первообразных $v = v(x)$).

</td>
<td>

2) Подставим $v = e^{\sqrt{x}}$ во второе

уравнение $u'v = 2e^{\sqrt{x}}$.

Решив его, найдем общее

решение $u = u(x, C)$:

$$\frac{du}{dx}e^{\sqrt{x}} = 2e^{\sqrt{x}}, du = 2\,dx,$$

$$\int du = 2\int dx,$$

$$u = 2x + C$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Поскольку $y = u \cdot v$, то общее решение линейного уравнения в виде

$$y = (2x + C)e^{\sqrt{x}}.$$

</td>
</tr>
</table>

9) Найти решение задачи Коши $\begin{cases} y' = \frac{y}{x} - y^2, \\ y(1) = -1. \end{cases}$

Решение. Данное уравнение является уравнением Бернулли с $n = 2$:

$y' - \frac{1}{x} \cdot y = -y^2$.

Полагаем $y = u \cdot v$, тогда

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -u^2v^2.$$

Группируем слагаемые:

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = -u^2v^2$$

и решаем последовательно два уравнения.

1) Из уравнения $v' - \frac{v}{x} = 0$, находим функцию $v(x)$: $\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln v = \ln x$, $v = x$.	*2)* Подставляем $v = x$ во второе уравнение $u'v = -u^2 v^2$. Решая его, находим функцию $u = u(x, C)$: $\frac{du}{dx} \cdot x = -x^2 u^2$, $u^{-2} du = -x\, dx$, $\int u^{-2} du = -\int x\, dx$, $-\frac{1}{u} = -\frac{x^2}{2} + C$, $u = \frac{2}{x^2 - 2C}$.

Так как $y = u \cdot v$, то общее решение уравнения Бернулли: $y = \frac{2x}{x^2 - 2C}$.

Используем начальные условия $x = 1,\ y = -1$, для нахождения соответствующего значения константы C:

$$-1 = \frac{2}{1 - 2C}, \text{ отсюда } C = \frac{3}{2}.$$

Итак, решение задачи Коши имеет вид: $y = \frac{2x}{x^2 - 3}$.

10) Решить уравнение $y\,dx - \left(x + y^2 \sin y\right) dy = 0$.

Решение. Данное уравнение линейно относительно функции $x = x(y)$, где y - аргумент. Действительно: $y \cdot \frac{dx}{dy} - x - y^2 \sin y = 0$, $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y} x = y \sin y$, $x' - \frac{1}{y} x = y \sin y$.

Делаем подстановку Бернулли: $x = uv,\ \ x' = u'v + uv'$.

Тогда получим уравнение: $u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = y \sin y$.

Далее решаем два уравнения с разделяющимися переменными.

1) $v' - \frac{v}{y} = 0$, $\frac{dv}{dy} = \frac{v}{y}$, $\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$, $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln v = \ln y$, $v = y$.	*2)* $u'v = y \sin y$. Выбрав $v = y$, получим $\frac{du}{dy} \cdot y = y \sin y$, $du = \sin y\, dy$, $\int du = \int \sin y\, dy$, $u = -\cos y + C$.
Общее решение уравнения: $y = Cy - y\cos y$.	

11) Найти общее решение уравнения $\sin\frac{x}{3} - y'' = 6 - 2x$.

Решение. Имеем уравнение второго порядка, которое содержит только вторую производную искомой функции и ее аргумент. Выразим явно вторую производную:

$$y'' = \sin\frac{x}{3} + 2x - 6.$$

Интегрируя, находим

$$y' = \int\left(\sin\frac{x}{3} + 2x - 6\right)dx; \quad y' = -3\cos\frac{x}{3} + x^2 - 6x + C_1.$$

Для того чтобы найти функцию $y(x)$, проинтегрируем еще раз:

$$y = \int\left(-3\cos\frac{x}{3} + x^2 - 6x + C_1\right)dx; \quad y = -9\sin\frac{x}{3} + \frac{x^3}{3} - 3x^2 + C_1x + C_2.$$

12) Найти общее решение уравнения второго порядка $x\,y'' = y'\ln\frac{y'}{x}$.

Решение. Данное уравнение не содержит явно функции y, поэтому сделаем подстановку $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$. Получим уравнение первого порядка:

$$x\,z' = z\ln\frac{z}{x} \quad \text{или} \quad z' = \frac{z}{x}\cdot\ln\frac{z}{x}.$$

Получили однородное уравнение первого порядка, которое решается с помощью замены $\frac{z}{x} = t$, $z' = t'x + t$. Последовательно имеем:

$$t'x + t = t\cdot\ln t; \quad t'x = t(\ln t - 1);$$

$$\frac{dt}{t(\ln t-1)}=\frac{dx}{x};\quad \int\frac{dt}{t(\ln t-1)}=\int\frac{dx}{x};\quad \int\frac{d(\ln t-1)}{\ln t-1}=\int\frac{dx}{x};$$

$$\ln(\ln t-1)=\ln x+\ln C_1;\quad \ln(\ln t-1)=\ln C_1x;$$

$$\ln t-1=C_1x;\quad \ln t=C_1x+1,\ \text{откуда}\quad t=e^{xC_1+1}.$$

Теперь

$$\frac{z}{x}=e^{xC_1+1};\quad z=xe^{xC_1+1}.$$

Итак, получено еще одно уравнение первого порядка (в данном случае с разделяющимися переменными) $y'=xe^{xC_1+1}$. Ясно, что

$$y=\int xe^{xC_1+1}dx.$$

Интегрируем «по частям»:

$$\int xe^{xC_1+1}dx=\begin{vmatrix} x=u, & e^{xC_1+1}dx=dv \\ dx=du, & \frac{1}{C_1}e^{xC_1+1}=v\end{vmatrix}=\frac{x}{C_1}e^{xC_1+1}-\frac{1}{(C_1)^2}e^{xC_1+1}+const.$$

Общее решение уравнения принимает вид:

$$y=\frac{C_1x-1}{C_1^2}\cdot e^{xC_1+1}+C_2.$$

13) Решить задачу Коши:

$$y\,y''+\frac{9}{y^2}=0;\quad y(0)=\frac{1}{3},\quad y'(0)=9.$$

Решение. Имеем уравнение, которое явно не содержит переменную x.

Полагаем $y'=p(y)$, $y''=p\cdot\frac{dp}{dy}$. Следовательно, уравнение первого порядка запишется в виде:

$$yp\cdot\frac{dp}{dy}+\frac{9}{y^2}=0.$$

Разделяем переменные:

$$p\,dp=-\frac{9}{y^3}dy;$$

интегрируем :

$$\int p\,dp=-9\int y^{-3}\,dy,\quad \frac{p^2}{2}=\frac{9}{2y^2}+\frac{C_1}{2}.$$

Получаем дифференциальное уравнение первого порядка

$$(y')^2 = \frac{9}{y^2} + C_1.$$

Постоянную C_1 можно найти уже на этом этапе, если использовать начальные условия:

$$y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = 9 \quad \Rightarrow \quad 9^2 = 81 + C_1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Следовательно, остается решить уравнение

$$(y')^2 = \frac{9}{y^2} \quad \text{или} \quad y' = \frac{3}{y}$$

(при извлечении корня взят знак плюс, так как в точке $x = 0$, а значит и в некоторой ее окрестности, значения y и y' имеют одинаковый знак).

Разделяя переменные, имеем:

$$y\,dy = 3\,dx\,, \quad \int y dy = 3\int dx\,, \quad y^2 = 6x + C_2\,.$$

Значение C_2 находим из условия $y(0) = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{9} = 0 + C_2\,, \quad C_2 = \frac{1}{9}\,.$$

Следовательно,

$$y^2 = 6x + \frac{1}{9} \quad \text{или} \quad y = \frac{\sqrt{54x+1}}{3}.$$

14) Решить задачу Коши $\quad y'' = 2(y')^2; \quad y(0) = y'(0) = 0{,}5\,.$

Решение. Данное уравнение второго порядка явным образом не зависит ни от x, ни от y, поэтому можно воспользоваться любой из подстановок второго или третьего типа. Положим, например, $y' = z(x)$, тогда

$$\frac{dz}{dx} = 2z^2\,, \qquad \int \frac{dz}{z^2} = 2\int dx\,,$$

откуда

$$C_1 - \frac{1}{z} = 2x\,, \qquad z = \frac{1}{C_1 - 2x}\,, \qquad y' = \frac{1}{C_1 - 2x}\,.$$

Условие $y'(0) = 0{,}5$ дает возможность определить соответствующее значение C_1:

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{C_1-0} \quad \Rightarrow \; C_1=2\,.$$

Теперь $y'=\dfrac{1}{2(1-x)}$. Следовательно,

$$y=-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{C_2}{2} \qquad \text{или} \qquad 2y=C_2-\ln(1-x).$$

Согласно условию $y(0)=0{,}5$, получаем: $1=C_2-\ln 1$, $C_2=1$.

Итак, решение задачи Коши имеет вид

$$2y=1-\ln(1-x).$$

4. Блок контрольных заданий

Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

$(y+1)dx-(1-x)dy=0$;

$e^y\left(1+x^2\right)y'=2x\left(1+e^y\right)$;

$y'=2^{x+y}$;

$x^2\,y^2y'+4=y$;

$xy'+y=y^2$;

$\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0,\ y(0)=1$;

$y'\sin x=y\cos x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$;

$\left(x^2-1\right)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1$;

$x\cdot dy+\ln y^y\cdot dx=0,\ y(1)=1$;

$x+xy^2+\left(x^2y-y\right)\cdot y'=0,\ y(0)=1$.

Решить однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

$\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$

$xy'-y=xe^{\frac{y}{x}}$

$y'=\dfrac{x+y}{x-y}$

$y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

$y + \sqrt{xy} = xy'$

$x^2 y' + xy - x^2 - y^2 = 0,\ y(1) = 0$

$xy' = y(\ln y - \ln x),\ \ y(1) = e$

$y - xy' = 2(x + y\,y'),\ \ y(1) = 0$

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y - x}{x},\ \ y(1) = 0$

$\left(y' - \dfrac{y}{x}\right) \cdot \mathrm{ctg}\dfrac{y}{x} = 1,\ \ y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

Решить линейные уравнения или уравнения Бернулли:

$y' + 2y = 3e^x$;

$y' + y\cos x = \sin 2x$;

$y' + 2xy = 2xy^3$;

$y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = 2$;

$y' - \dfrac{2y}{x + 1} = y^2 (x + 1)^4$;

$y' - \dfrac{y}{x} + y^2 = 0,\ y(1) = 1$;

$y' + y = \dfrac{x + 3}{2},\ y(1) = \dfrac{1}{2}$;

$y' + y = x^2 e^{-x},\ y(0) = 3$;

$dy = \left(\dfrac{xy^2}{2} - y\right) dx,\ \ y(0) = 2$;

$y^2\,dx + (xy - 1)dy = 0$ (указание: рассмотреть данное уравнение как линейное относительно $x(y)$).

Решить следующие дифференциальные уравнения, понижая их порядок:

$y'' = xe^{x^2} + 3^{-x} + \sqrt{x + 2}$;

$$y'' = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 2\cos x - x\sin x;$$

$$y'' = \frac{1+y'}{x};$$

$$y'' x \ln x = y';$$

$$y^3 y'' + 1 = 0;$$

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{y}};$$

$$y'' = \left(e^{2x} + \sin 3x\right)\cdot x,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 1;$$

$$\left(1 + x^2\right) y'' - 2xy' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3;$$

$$y'' \operatorname{tg} y = 2\left(y'\right)^2,\ y(1) = \frac{\pi}{4},\ y'(1) = -2;$$

$$y''' = x^2 + 3x - 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3.$$

Литература к главе 4

1.Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов/ П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2006. – 416 с.: ил.

2.Каплан И.А., Пустынников В.И. Практикум по высшей математике: в 2 т. Т. 2: учебное пособие / И.А. Каплан, В.И. Пустынников : под общей ред. проф. В.И. Пустынникова. -6-е изд., испр. и доп. – М.: Эксмо, 2008. -512 с. – (Образовательный стандарт XXI).

3.Мышкис А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. – 3-е изд., доп., - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2007. -688 с.

4.Нахман, А.Д. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и их приложениям: учеб. пособие / А.Д. Нахман, С.В. Плотникова. Тамбов: Изд-во Тамб. гос.техн.ун-та, 2005. 96 с.

5.Нахман А.Д. Дифференциальные уравнения: методическое пособие. Тамбов.: ТОИПКРО, 2007. - 64 с.

6.Сборник задач по высшей математике. 2 курс/ [К.Н. Лунгу и др.]; под ред. С.Н. Федина. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – 592 с.: ил. – (Высшее образование).
7.Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие. -2-е изд., перераб. – М.: Высш.шк., 1989. – 383 с.: ил.

Глава 5. ЗАДАЧНЫЙ ПОДХОД К ФОРМИРОВАНИЮ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ

В настоящее время стохастические знания, вероятностное мышление, умение строить научно обоснованные прогнозы, становятся как нельзя востребованными. Деятельность в условиях неопределённости, умения анализировать степень объективной возможности наступления тех или иных событий, предполагают наличие соответствующей вероятностно-статистической подготовки. В соответствии с требованиями обновлённых стандартов общего и высшего образования (см. [1], [2], [3]) выпускник школы должен обладать определённым уровнем так называемой стохастической грамотности ([4], [5]), а выпускник вуза инженерного или экономического профиля – в достаточной степени сформированной стохастической компетенцией [6].

Вместе с тем средства формирования стохастической грамотности и стохастической компетенции нуждаются в дальнейшем изучении. В нашем понимании стохастическая компетенция есть способность к моделированию стохастических ситуаций.

Характерной чертой утверждающейся в системе образования компетентностной парадигмы является освоение учащимися новых понятий, методов и фактов в процессе активной познавательной деятельности. Такой деятельности способствует задачный подход. В настоящей работе обсуждаются инновационные задачные системы в качестве инструментов формирования практико-ориентированных стохастических знаний и умений, восходящих к способности стохастического моделирования.

1.Понятие стохастической компетенции

Выстраивая стохастическую содержательно-методическую линию применительно к системе «Школа-вуз», можно выделить три основных этапа этого процесса.

Этап первый: ознакомление с простейшими комбинаторными, вероятностными и статистическими понятиями и формулами, и их применение к игровым и прочим простейшим же жизненным ситуациям.

Этап второй. Становление стохастической грамотности как разновидности грамотности математической. Здесь формируются система представлений о случайных явлениях в окружающей жизни, а также соответствующие умения как в действиях со стохастическими понятиями и фактами, так и в приложениях этих действий к решению практических задач. Стохастическую грамотность, таким образом, можно понимать как своего рода «предкомпетенцию».

Этап третий. Формирование стохастической компетенции. Здесь, прежде всего, необходимо сформулировать наше понимание компетенции (компетентности) в общем случае. Проанализировав имеющиеся в литературе определения (см., [7], [8] и др.), мы приходим к следующим формулировкам.

Компетенция (в широком смысле) –это способность (потенциал) личности на основе освоенных знаний и умений выполнять определённый вид деятельности. Компетентность – это «компетенция в действии», т.е. готовность на основе накопленного потенциала получать конечный результат в данном виде деятельности.

Компетенция и компетентность – системные качества личности. Так, говоря о стохастической компетенции, мы выделяем когнитивный компонент (знания и умения в области комбинаторики, теории вероятностей и статистики, теории случайных процессов), мотивационно-ценностный (аксиологический) компонент (мотивацию к решению стохастических задач), конативный (навыки, опыт соответствующей математической деятельности, предрасположенность к ней), личностный (саморегуляция, рефлексия и др. личностные качества, приобретаемые в процессе освоения и применения стохастики).

Употребляя в настоящем контексте термин «деятельность», мы имеем в виду деятельность по анализу так называемых стохастических ситуаций. Эти ситуации (процессы, явления и т.п.) характеризуются непредсказуемостью (исход ситуации невозможно заранее предсказать с абсолютной точностью), воспроизводимостью (ситуация может быть воспроизведена как угодно много раз в остающихся неизменными условиях), наличием свойства устойчивости частот рассматриваемых случайных событий (в этой связи ниже вводится понятие стохастического детерминизма).

Стохастическая компетенция предполагает способность к деятельности на основе именно стохастических знаний и умений. Речь, по сути, идёт о математической формализации стохастической ситуации, решении получаемой при этом математической задачи и последующей интерпретации результата, то есть выявлении требуемых характеристик анализируемой ситуации. Указанный трёхшаговый процесс именуется, как известно, математическим моделированием.

Таким образом, в узком, деятельностном контексте, *стохастическую компетенцию* будем рассматривать как *способность моделировать стохастические ситуации*.

2.Стохастические модели

Математические модели можно подразделить на детерминированные и стохастические. В первом случае модели описывают поведение объекта или явления с позиций «незыблемости» управляющих им законов, полной определенности в настоящем и будущем; так, для данной совокупности входных характеристик ситуации на выходе модели наблюдается единственный результат.

В отличие от детерминированной, стохастическая (вероятностная) модель даёт возможность спрогнозировать *множество всех возможных состояний* стохастической ситуации, охарактеризовать эту ситуацию в терминах вероятностей случайных событий и распределений случайных величин [9], [10, с.6-7].

Выделяя укрупнённые блоки стохастической модели, её структуру можно схематически представить следующим образом.

ВХОД – формализованные (математически описанные) данные о стохастической ситуации

↓

ОПЕРАТОР МОДЕЛИ – законы стохастики

↓

ВЫХОД – прогноз, оценка, принятие /непринятие гипотезы и др. интерпретации стохастической ситуации

Традиционные задачи теории вероятностей и математической статистики могут рассматриваться как простейшие задачи стохастического моделирования, поскольку предполагают анализ (средствами математики) процессов и явлений, носящих случайный характер.

Обсуждая концепцию стохастического моделирования, следует упомянуть о понятии стохастического детерминизма, которое отражает объективно существующую тенденцию проявления закономерностей в совокупности массовых случайных явлений [11]. Математическая форма стохастического детерминизма выражается в терминах сходимости по вероятности. А именно, случайные параметры математической модели (частоты, средние значения и др.) практически гарантированно становятся заданно близкими к некоторым неслучайным значениям , если имеет место свойство массовости однотипных стохастических ситуаций:

$$\text{стохастическая модель} \dashrightarrow \text{детерминированная модель};$$

«прерывистая» стрелка употребляется по аналогии с обозначением сходимости по вероятности.

3. Задачный подход. Динамика формирования стохастической компетенции

В условиях перехода от знаниевой к компетентностной парадигме обучения на центральное место выходит системно-деятельностный подход к организации учебного процесса. Ведущая роль теперь отводится активной, разносторонней и максимально самостоятельной познавательной деятельность обучающегося. В свою очередь, в рамках системно-деятельностного подхода мы рассматриваем задачный подход как инструмент формирования знаний и умений (в том числе, умений прикладных) средствами решения систем учебных задач. Наконец, для достижения сформулированной цели мы предлагаем контекстный задачный материал, включающий в себя задачи-кейсы, задачи-трансформеры (термин - наш), обратные стохастические задачи. Сюжеты заданий носят практико ориентированный или профессионально-ориентированный характер. Соответствующий задачный материал можно считать—инновационным в соответствии с концепцией [12], согласно которой инновации характеризуется определённой степенью новизны и нацеленностью на востребованный результат.

Динамика формирования стохастической компетенции/компетентности средствами задачного подхода может быть представлена следующей схемой.

Простейшие сюжетные вероятностно-статистические задачи $\rightarrow$ стохастические знания и умения

$\downarrow$

Задачи практико-ориентированного содержания $\rightarrow$ стохастическая грамотность

$\downarrow$

Профессионально-ориентированные задания $\rightarrow$ стохастическая компетенция

$\downarrow$

Квазипрофессиональные и профессиональные задания $\rightarrow$ стохастическая компетентность

Решение сюжетных задач стохастического содержания возможно уже в рамках начальной школы. При этом отрабатываются понятия случайных событий, элементарных исходов опыта, классической вероятности события и др. Например, может быть предложен вероятностный анализ следующей простой житейской ситуации. В копилке 7 монет по 2 рубля, 10 монет по 5 рублей и 3 - по 10 рублей. Если хорошо потрясти копилку, то через щель выскочит монетка. Какова вероятность, что это будет десятирублёвая монета?

Решение заданий практико-ориентированного содержания предполагает наличие у обучающегося хотя бы минимального опыта по анализу типичных практических ситуаций в сочетании с простейшими инструментами стохастики. Здесь востребованы стандартные вероятностные схемы, распределения случайных величин, статистические распределения выборок и др. Например, в задаче речь может идти об анализе коммунальных платежей (выборка квитанций за календарный год, группировка данных о ежемесячных расходах электроэнергии, её средне-месячное потребление и т.п.).

Простейшие задания с профессионально-ориентированным содержанием могут быть рассмотрены в рамках курса математических дисциплин (см., напр.,

[9]), задания более сложные и квазипрофессиональные служат предметом рассмотрения соответствующих специализированных кафедр.

4. Кейсы, трансформеры, обратные задачи

Роли и значению кейс-заданий в формировании и развитии стохастической компетенции была посвящена работа [13], поэтому ограничимся кратким рассмотрением. Стохастические кейсы, согласно [13], представляют собою комплексные компетентностно-ориентированные учебные задания по моделированию стохастических ситуаций. Их решение требует оптимального сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся. Проанализируем, для примера, следующее кейс-задание.

На пути автомобиля по улице Зелёной 4 светофора, каждый из которых может остановить автомобиль с вероятностью $p = \frac{1}{3}$. Какова вероятность хотя бы одной остановки автомобиля при движении по этой улице? Какова вероятность ровно 2-х остановок? Не менее 2-х остановок?

Постройте ряд распределения числа остановок на светофорах. Каково среднее число остановок при постоянной езде по ул. Зелёной?

Можно выбрать равный по расстоянию маршрут по улице Весенней, на которой 6 светофоров. Среднее число остановок при постоянной езде по ул. Весенней равно 1. Что вероятней: проехать без остановок по улице Зелёной или по улице Весенней? Какой из этих двух маршрутов предпочтительнее с точки зрения экономии времени?

Для решения данного задания необходимо освоение теоретического материала в рамках темы «Вероятностная схема Бернулли» . А именно, требуется знание формулы Бернулли и числовых характеристик биномиального распределения. Востребованы также умения строить и анализировать ряды распределения дискретных случайных величин, навыки работы с формулами вероятностей суммы событий, вероятностью наступления хотя бы одного события и др. Поиск ответа на последний вопрос основан на простом житейском опыте: надо найти наиболее вероятное число μ остановок на светофорах на каждой из улиц и сравнить результаты.

Задачи-трансформеры представляют собою задания на моделирование ситуаций или процессов с целью их изучения одновременно в детерминистском и стохастическом направлении в зависимости от вопроса задачи.

Обсудим например, следующее задание. Биржевыми аналитиками установлено, что стоимость акций компании в последний месяц года должна изменяться по закону $y=(x-8)^2 e^{15-x}$, где x - календарная дата, $x=1,2,...,30$ (предпраздничный день 31 декабря исключается из рассмотрения). Какого числа следует продать акции, чтобы получить максимальный доход? Какова вероятность, что в случайно выбранный день месяца стоимость акций находится на подъёме?

Очевидно, что для ответа на первый вопрос следует обратиться к детерминированной модели ситуации. Акции выгоднее всего продавать на максимуме роста, следовательно, производная $y'=(x-8)(10-x)e^{10-x}$ в соответствующей точке должна изменить знак с плюса на минус. Очевидно, что такой точкой будет $x=10$, то есть акции надо продать 10 декабря.

Второй вопрос предполагает наличие стохастической ситуации, поскольку выбор даты $x \in \{1,2,...,30\}$ случаен. При этом благоприятных исходов, то есть дней роста стоимости акций, всего три: 8,9,10 декабря. Искомая вероятность $p=\frac{3}{30}$, или $p=0,1$.

Решение обратных стохастических задач является эффективным технологическим приёмом для формирования целостности и системности знаний . Обратные задачи – важный компонент технологии УДЕ (укрупнённых дидактических единиц), которая представляет собой интеграцию целого ряда конкретных подходов к обучению. Ключевой элемент технологии УДЕ – это упражнение - триада (исходная задача, ее обращение, обобщение).

С точки зрения моделирования стохастических ситуаций обратная задача представляет собою задание по нахождению некоторых входных параметров модели по её известному выходу. Оператор модели при этом может быть полностью известен («прозрачный, белый ящик»), известен в самом общем виде, но не конкретизирован применительно к данному заданию («серый ящик»), либо полностью неизвестен («чёрный ящик»).

Обсудим в указанном контексте выстраивание упомянутой выше триады применительно к случаю биномиального распределения. Имеем стохастическую ситуацию повторения опытов, в каждом из которых данное событие A имеет одну и ту же вероятность p. В стандартном случае прямой задачи известно число n проводимых опытов и, как правило, отыскиваются вероятности наступления события заданное количество раз. Оператором модели служит формула Бернулли и числовые характеристики распределения. В обратных задачах задействованы следствия, не всегда известные обучающемуся, так что может возникнуть ситуация «серого ящика».

Рассмотрим простейший пример обратной задачи.

При проведении n=100 одинаковых опытов среднее число наступлений данного события a=25. Какова вероятность p наступления этого события в каждом из опытов?

Решение. Имеем вектор входных параметров (n,p), где параметр p подлежит отысканию. Оператор модели (в данном случае - формула математического ожидания) полностью известен: $a=np$. На выходе a=25. Следовательно, искомое значение параметра p=0,25.

В случае «серого ящика» математической модели рассмотрение следует начинать с прямой задачи. Так, например, для некоторого производства закупаются сигнализаторы в количестве n штук, каждый из которых при возникновении аварийной ситуации срабатывает с заданной вероятностью p. Какова вероятность, что при угрозе аварии сработает не менее k_0 сигнализаторов?

Для решения следует, очевидно, получить (а затем – использовать) в качестве оператора модели такое следствие формулы Бернулли:

$$P(k_0 \le k \le n) = \sum_{k=k_0}^{n} P_n(k) \ , \qquad (1)$$

где

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \ . \qquad (2)$$

Теперь можно перейти к следующей обратной стохастической задаче.

При возникновении на производстве аварийной ситуации каждый из сигнализаторов срабатывает с вероятностью $p = \frac{2}{3}$. Какое наименьшее количество таких сигнализаторов надо закупить, чтобы как минимум два из них сработало с вероятностью не менее $\rho = \frac{8}{9}$.

Мы находимся в рамках всё той же схемы Бернулли с числом опытов n, вероятностью события в каждом опыте p и числом наступления события $k \ge 2$. На входе модели имеем вектор (n,p,k), где $p = \frac{2}{3}$, $k \ge 2$, а параметр n следует отыскать. Поскольку в равенстве (1) значение n неизвестно, то оператор модели (а именно, соотношение (1)) подлежит дальнейшему уточнению. Так, возможен переход к противоположному событию:

$$P_n(k \ge 2) = 1 - (P_n(0) + P_n(1)) \ .$$

По условию

$$1 - P_n(0) - P_n(1) \ge \rho \ \text{ или } \ P_n(0) + P_n(1) \le 1 - \rho \ .$$

Имеем, согласно (1) и (2),

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \le 1 - \frac{8}{9}, \text{ откуда } \left(\frac{1}{3}\right)^n (1+2n) \le \frac{1}{9} \ ,$$

так что простым перебором $n = 1,2,...$ получаем наименьшее значение $n = 4$.

В качестве обобщения приведённых рассуждений учащийся легко приходит к следующему простому результату. Если требуется (в рамках схемы Бернулли) найти вероятность $P_n(k \ge k_0)$, где $k_0 \le \frac{n}{2}$ (или n неизвестно), то, на основании формул вероятности суммы попарно несовместных событий и перехода к противоположному событию, целесообразно использовать соотношение

$$P_n(k \geq k_0) = 1 - \sum_{k=0}^{k_0-1} P_n(k),\ k_0 = 1,2,\ldots,n-1;\ n = 2,3,\ldots .$$

Резюмируем сказанное. Формирование стохастической компетенции обучающихся в системе «Школа-вуз» – длительный процесс, затрагивающий все ступени общего образования и продолжающийся на этапе высшего образования. С деятельностной точки зрения происходит становление способности к моделированию стохастических ситуаций, которая и представляет собою «ядро» стохастической компетенции. К таким ситуациям относятся сюжеты вероятностных задач, подлежащие математической обработке данные статистических выборок и другие контекстные задания, в конечном счёте – профессионально-ориентированные. Задания традиционной формы, с точки зрения автора, должны быть дополнены заданиями инновационного характера (кейсы, трансформеры, обратные задачи). Их решение способствует комплексному, всестороннему анализу стохастических ситуаций, формированию у обучающихся целостности и системности знаний в области математики и её приложений.

Литература к главе 5

1. Федеральные государственные образовательные стандарты основного общего образования. - Текст : электронный // URL: http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202107050027 (дата обращения: 20.06.24).

2. Федеральные государственные образовательные стандарты среднего общего образования. - Текст: электронный //URL: https://docs.cntd.ru/document/902350579 (дата обращения: 20.06.24).

3. Федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования (3++) по направлениям бакалавриата, ФГОС ВО (3++) по направлениям специалитета. -Текст: электронный //URL: https://fgosvo.ru/fgosvo/index/24 (дата обращения: 20.06.24).
4. Гомзякова, Л.Ф. О стохастической грамотности школьников / Л.Ф.Гомзякова, О.И.Чикунова // Успехи современного естествознания. -2012.- №5.- С.84-85 .
5. Рослова, Л. О. Концептуальные основы формирования и оценки математической грамотности / Л.О.Рослова, К.А. Краснянская, Е.С. Квитко // Отечественная и зарубежная педагогика. - 2019. -Т.1, №4 . -С. 58–79 .
6. Китаева, И.В. Проблемы формирования стохастической компетентности учащихся /И.В.Китаева // Актуальные проблемы естественно-математического образования: материалы межрегиональной научно-практической конференции. - Липецк: ЛИРО, 2012. - С. 39-41.
7. Зимняя, И. А. Компетентностный подход. Каково его место в системе современных подходов к проблемам образования? / И.А.Зимняя // Высшее образование сегодня. - 2006. - №8. -С.20-26.
8. Ильязова, М. Д. Компетентностный подход к формированию модели выпускника вуза /М.Д. Ильязова // Вестник Университета Российской Академии Образования. - 2007. - № 3. - с. 52-53.
9. Нахман, А.Д. Математика как средство профессионального самоопределения обучающихся. /А.Д.Нахман // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И.Вернадского.-2020.-№4.-С.145-157.
10. Нахман, А. Д. Введение в стохастическое моделирование : учебное пособие Текст : электронный /А.Д.Нахман, Ю.В.Родионов. - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2018. - 89 с. - URL: //www.iprbookshop.ru/70761.html (дата обращения: 20.06.2024).
11. Нахман, А.Д. Стохастические задачи: детерминистский аспект // А.Д.Нахман .- *V* Международный научно-технический форум СТНО-2022. Сборник трудов.- Рязань: 2022.- Том 10.- С.143-146.

12. Ващенко, В.П. О сущности инновационной деятельности и ее нормативно-правовой базе / В.П.Ващенко //Наука и промышленность России. - № 2-3. - 2002. - С.29-36.
13. Nakhman, A.D. Case tasks as a means of formation of stochastic competence / A.D. Nakhman, I.Yu.Ivanova, T.V.Selyanskaya // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И.Вернадского.-2015.- №3.- С.123-130.

Глава 6. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ: ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ АСПЕКТ

Содержание классического курса высшей математики в технических вузах традиционно включает в себя аналитическую геометрию, элементы линейной алгебры, математический анализ и дифференциальные уравнения. Во второй половине прошлого века к указанным дисциплинам добавились элементы теории вероятностей и математической статистики. На фоне устоявшегося в курсе математики детерминистского подхода новый вероятностно-статистический материал выглядел поначалу не вполне серьёзным, чужеродным, отделённым и отдалённым от «магистральных» математических направлений. В немалой степени этому способствовал задачный материал, по большей части основанный на игровых сюжетах. Сложившаяся ситуация вызывала в значительной части педагогического сообщества реакцию отторжения этого нового направления.

Ситуация усугубилась с приходом стохастической линии в школьный курс математики. Достаточно напомнить, что при обсуждении Концепции развития математического образования в Российской федерации [1] в проекте, подготовленном группой математиков МГУ им. М.В.Ломоносова, прямо указывалось: «Необходимо сдвинуть на более позднее время, а еще лучше, вообще убрать из базового математического образования весь материал, связанный с теорий вероятностей и математической статистикой, комбинаторикой, теорией множеств и логикой…» [2].

Таким образом, возникло и в значительной степени сохраняется противоречие между формируемым в классическом курсе математики детерминистским подходом к анализируемым моделям и современными научными представлениями, базирующимися на вероятностно - статистических законах, проявляющих себя различных сферах деятельности человека и требующих соответствующей математической интерпретации. Проблема разрешения данного противоречия составляет предмет многих исследований (см., напр., статью [3] и библиографию в ней). Отметим при этом новый чисто прагматический аспект проблемы, состоящий во включении в состав контрольно-измерительных материалов профильного ЕГЭ по математике дополнительной задачи на использование теорем о вероятностях. Данное обстоятельство, с одной стороны, требует актуализации вероятностно-статистических знаний и умений, но с другой - вызывает некоторую тревогу в среде учащихся и их родителей.

Утверждающийся в школьном и вузовском курсе математики компетентностный подход диктует необходимость расстановки акцентов в пользу практико-ориентированных заданий. Реализацию компетентностного подхода мы усматриваем, прежде всего, в трёхэтапном процессе моделирования ситуаций, описываемых в сюжетных задачах. А именно, речь идёт о переводе содержательной модели на математический язык (формализации данных и вопроса задачи), решении полученной математической задачи и интерпретации полученного результата в терминах исходной содержательной модели. При этом данный трехэтапный процесс распространяется как на детерминированные, так и на стохастические модели. Эта общая модельная основа решения сюжетных задач служит целям сближения стохастической и «классической» математики и первым (на наш взгляд) шагом к преодолению вышеупомянутой «чужеродности» вероятностно-статистического направления.

Следующим, собственно - математическим шагом на пути сближения детерминистского и стохастического подходов является аксиоматическая основа самого понятия вероятности. А именно, вероятность есть, по сути, нормированная счётно-аддитивная мера на борелевской алгебре событий. Если провести условную границу между школьным и вузовским курсами математики, то преподавание теории вероятностей в вузе, по нашему мнению, следует начинать именно с аксиоматического построения понятия вероятности, проверяя затем выполнимость аксиом на классической и геометрической моделях.

Впрочем, постулаты вероятности, как нам представляется, следует вводить еще в школьном курсе. Соответствующие изложение постулатов может быть предложено следующим.

Постановка задачи: научиться «измерять» степень объективной возможности наступления случайных событий. Для её решения сопоставим каждому из них значение некоторой числовой функции p, заданной на множестве событий. В качестве шкалы ее значений примем отрезок $[0;1]$. При этом значение $p = p(U) = 1$ мы приписываем любому достоверному событию U, а значение $p = p(O) = 0$ – любому невозможному событию O. Естественно считать теперь, что всякое случайное событие имеет вероятность, изменяющуюся от 0 до 1 (включая, возможно, указанные крайние значения). Далее, для классической, например, вероятности, проверяем названные постулаты. Пусть, как обычно, n есть число элементарных исходов испытания, а m-число благоприятных для данного события A исходов. Классическая вероятность события A определяется в виде $p(A) = \frac{m}{n}$. Имеем тогда

$$p(U) = \frac{n}{n} = 1,\ \ p(O) = \frac{0}{n} = 0.$$

Если же A – событие случайное, то $0 < m < n$ и, следовательно, $0 < P(A) < 1$.

В качестве третьего шага по частичному преодолению вышеозначенного противоречия мы предлагаем выявление общих (или, по меньшей мере - аналогичных) инструментов исследования детерминированных и стохастических моделей. Так, классическая вероятность есть доля благоприятных для некоторого события исходов в конечном наборе всех элементарных исходов опыта. Понятие доли (процента) известно обучающимся еще из начальной школы. Если отстраниться от собственно случайного аспекта эксперимента (равновозможность исходов, их попарная несовместность , полнота группы), то, формально, имеем задачу на вычисление процентов. Указанное обстоятельство помогает на начальном этапе изучения теории вероятностей обойти стороной и понятие полной группы событий. Так, например, если шахматист имеет вероятность $p = 0{,}5$ выигрыша партии у соперника и $p = 0{,}2$ вероятность проигрыша, то вероятность ничьей определяется следующим соображением: из общего числа 100 % исходов на ничью приходится $100 - 50 - 20 = 30$ процентов исходов, т.е. искомая вероятность будет равна 0,3. Здесь мы разделяем точку зрения известного методиста, автора учебников А.Г. Мордковича, считающего, что строгое определение математического понятия следует вводить, когда у обучающегося накоплен достаточный опыт оперирования с понятием на интуитивном уровне, и на данном этапе изучения математики возникла необходимость в уже точной формулировке понятия. В нашем случае речь идёт о постепенном погружении в собственно стохастические аспекты (пространство элементарных исходов, произведения и суммы событий, зависимость событий и условные вероятности, схема гипотез и др.).

Наконец, ещё один шаг на пути выработки у учащихся представлений о внутренних глубоких связях математических теорий мы видим в рассмотрении комплексных заданий на трансформацию моделей. А именно, речь идет о моделировании системы или процесса, изучение которых происходит одновременно в детерминистском и стохастическом направлении в зависимости от вопроса задачи. Так, при построении ряда геометрического распределения случайной величины модель соответствующего процесса (например, стрельбы до первого попадания) анализируется стохастическими инструментами (вероятности противоположных событий, произведения и сумма случайных событий). Если же, далее, поставить вопрос о среднем значении случайной величины, то приходим к нахождению суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p,$$

и инструмент исследования становится детерминистским: суммирование степенного ряда средствами почленного дифференцирования.

Приведём пример ещё одного задания, связанного с трансформацией модели.

На складе имеются изделия 2-х поставщиков. Первый из них поставил 40% изделий высшего качества, второй -20%. Всего изделий высшего качества на складе оказалось 35%. Во сколько раз изделий от первого поставщика больше, чем от второго? Какова вероятность того, что изделие, случайным образом выбранное на складе, окажется от первого поставщика?

При ответе на первый вопрос задания мы имеем дело с детерминированной моделью некоторой ситуации (стандартная задача на тему «Смеси»). А именно, если изделий от первого поставщика было m_1, а от второго m_2, то

$$0{,}4m_1 + 0{,}2m_2 = 0{,}35(m_1 + m_2), \text{ откуда } m_1 = 3m_2.$$

Значит, изделий от первого поставщика было втрое больше.

Отвечая на второй вопрос, мы моделируем случайный выбор, то есть модель трансформируется в стохастическую. Требуется найти общее число n элементарных исходов случайного выбора и число m исходов, благоприятствующих взятию изделия от первого поставщика. Имеем $n = m_1 + m_2 = 4m_2$ и $m = m_1 = 3m_2$. Теперь искомая вероятность

$$p = \frac{m}{n} = \frac{3m_2}{4m_2} = 0{,}75.$$

Подобные задания, несмотря на их простоту, демонстрируют следующий любопытный факт: при различных постановках задачи модель одного и того же процесса или явления может рассматриваться и как детерминированная, и как стохастическая.

Изложенные детерминисткие подходы к решению стохастических задач, призваны (как надеется автор) способствовать преодолению известной обособленности вероятностно-статистического модуля в составе курса математики и формированию у обучающихся представления об универсальности и прикладном характере математического инструментария в исследовании различных процессов и систем.

Литература к главе 6

1.Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс]. Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения: 21.09.2024).

2. Концепция математического образования в Российской федерации. Проект МГУ. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://math.ru/conc/1906/MGU.pdf (дата обращения; 21.09.2024).

3. Нахман, А.Д. Особенности модуля «вероятность и статистика» в составе курса высшей математики /А.Д.Нахман// Вопросы современной науки и практики. Университет им. В.И.Вернадского. -2021-№1.- С.147-158.

Глава 7. КЕЙС-ЗАДАНИЯ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ

Понятие стохастической компетенции является сравнительно новым**.** Его возникновение связано с двумя факторами;

1)утверждением в отечественной системе образования компетентностного подхода;

2) наличием все более возрастающего общественного интереса к теории вероятностей, математической статистике, теории случайных процессов и к применению вероятностно-статистических методов в самых разнообразных областях науки, техники, производства и экономики.

Стохастической компетенцией мы будем называть *способность* к математической и практической деятельности, связанной с овладением основными комбинаторики, понятиями и фактами теории вероятностей, математической статистики и теории случайных процессов. Стохастическая компетентность, в нашем понимании, есть *готовность* к такой деятельности, умение мобилизовать знания в области стохастики на использование их в новых условиях, в решении практических, производственных и др. задач.

С нашей точки зрения, невозможно провести четкую грань между стохастическими компетенцией и компетентностью; другими словами, эти два понятия, интегрирующие в себе (как отмечено далее) многочисленные компоненты, могут рассматриваться как обозначения некоторых *нечетких* множеств.

Общими для формирования соответствующей компетенции/компетентности являются следующие условия [1]:

- знание концептуальных основ стохастики;
- владение разнообразными методами вероятностно-статистического анализа окружающих явлений, вероятностного моделирования статистических закономерностей реальной действительности;
- использование методологии современной науки, осмысление глубокого внутреннего единства эмпирического и теоретического уровней познания мира случайного.

В структуре стохастической компетенции/компетентности мы выделяем следующие основные компоненты.

1. Мотивационно-ценностный: мотивация, заинтересованное отношение к математической деятельности.

2. Когнитивный: знания, умения, в области теории вероятностей и математической статистики.

3. Операциональный: опыт практического применения математических знаний, закрепление умений на уровне навыков.

4. Рефлексивный: включение в математическую деятельность, рефлексия математической деятельности (в частности, самоконтроль, самоанализ и самооценка).

1. Стохастическая линия в федеральных государственных образовательных стандартах (ФГОС)

В соответствии с Концепцией развития математического образования в Российской федерации и введением новых ФГОС общего и профессионального образования стохастическим знаниям отводится роль неотъемлемого компонента инновационного содержания образования – как общего, так и профессионального ([2] - [3]). Изучение вероятностно-статистического материала необходимо уже в школьном курсе в рамках самостоятельной содержательно-методической линии. Согласно ФГОС основного общего образования изучение предметной области «Математика и информатика» должно «обеспечить осознание значения математики … как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления». Изучение математики должно способствовать развитию логического мышления, формированию первичных навыков математического моделирования, применению математических знаний при решении различных задач и оцениванию полученных результатов, развитию математической интуиции.

В следующей таблице 1 отражена *динамика развития компонент* «знать-уметь» в структуре стохастической компетенции в контексте требований ФГОС к уровню подготовки выпускников основной и старшей школ.

	Знать/понимать	*Уметь*
Основная школа	• вероятностный характер многих закономерностей окружающего мира; • примеры статистических закономерностей и выводов;	• извлекать информацию, представленную в стандартных формах (таблицы, диаграммы, графики) и строить соответствующие формы; • решать комбинаторные задачи путем систематического перебора возможных вариантов, а также с использованием правила умножения; • вычислять средние значения результатов измерений; • находить частоту события, используя собственные наблюдения и готовые статистические данные; • находить вероятности случайных событий в простейших случаях; • использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков, таблиц; решения учебных и практических задач, требующих

		систематического перебора вариантов; сравнения шансов наступления случайных событий, оценки вероятности случайного события в практических ситуациях, сопоставления модели с реальной ситуацией; понимания статистических утверждений.
Старшая школа	• значение математической науки, в том числе, методов стохастики, для решения задач, возникающих в теории и практике; значение практики для развития самой математической науки; • детерминированный и вероятностный характеры различных процессов и закономерностей окружающего мира, значение статистических данных для прогнозирования явлений и процессов .	• решать простейшие комбинаторные задачи с использованием известных формул; • вычислять вероятности событий на основе подсчета числа исходов и свойств вероятности (простейшие случаи); • анализировать массив данных, в том числе применять простейшие методы интерполяции и экстраполяции; • использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для: анализа информации статистического характера, прогнозирования наступления событий на основе

		вероятностно-статистических методов; применения полученных умений в решении задач из смежных дисциплин.

Таблица 1. Динамика развития компонент стохастической компетенции

В ФГОС высшего профессионального образования структуры формируемых компетенций дополнены компонентом «владеть». С нашей точки зрения, *данный компонент соответствует приобретению первичного опыта соответствующей деятельности и, следовательно, переходу в «нечетко-пограничную зону» между компетенцией и компетентностью* (компетенция «в действии»). Приведем в качестве примера (таблица 2), требования к структуре результата обучения, способствующего формированию профессиональной компетенции (ПК-1) «использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов… моделирования, теоретического и экспериментального исследования» (ФГОС направления подготовки бакалавров 270800.62 «Строительство»). Здесь стохастическая компетенция/компетентность выступает в качестве одной из подсистем, интегрированных в указанную компетенцию ПК-1.

Структура результата обучения		
Обучающийся знает:	***Обучающийся умеет:***	***Обучающийся владеет:***
- фундаментальные основы теории вероятностей математической статистики: • понятия вероятности и относительной частоты события и основные	*самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в специальной литературе, расширять свои математические познания:*	*- первичными навыками и основными методами решения математических (стохастических) задач из общеинженерных и специальных дисциплин*

формулы для их вычисления; • методы точечного и интервального оценивания параметров распределения; • понятия и виды случайных процессов; • регрессионные методы моделирования экспериментальных зависимостей.	• решать прикладные задачи (в том числе, связанные с профессиональной деятельностью) с помощью стохастических методов; • использовать алгоритмы проверки статистических гипотез; • строить вероятностно-статистические модели реальных ситуаций.	*профилизации и методами вероятностного моделирования:* • численно прогнозирует степень объективной возможности того или иного явления, характера протекания того или иного процесса; • интерпретирует статистические данные в терминах вариационных рядов и оценок параметров распределения; • разрабатывает регрессионные модели статистических зависимостей

Таблица 2. Требования к структуре результата обучения

Ввиду практической ориентированности стохастической компетенции/компетентности ее компоненты «знать», «уметь» и, в особенности, «владеть», наилучшим, с нашей точки, образом формируется в процессе использования так называемых кейс-заданий.

2. Концепция кейс-заданий как технологического приема формирования стохастической компетенции

Наличие той или иной компетенции предполагает способность к одновременной мобилизации знаний, умений и способов поведения в условиях конкретной деятельности; в результате формирования компетенции учащийся приобретает возможность «переносить знания», решать новые для себя задачи, осваивать новые предметные области, новые виды деятельности и т.п.

Приемы формирования компетенции мы называем технологическими, если они обладают такими признаками образовательных технологий, как целенаправленность, научная обоснованность, планируемость и проектируемость, воспроизводимость и гарантированность результата. К числу подобных приемов мы относим кейс-метод (метод кейсов), как метод ситуационного анализа. В процессе его применения обучающиеся должны разобраться в сути проблем, предложить возможные решения и выбрать оптимальное ([4]). Кейсы основываются на реальном фактическом материале или же приближены к таковому. В результате происходит творческое овладение практическими, профессиональными знаниями и умениями, развитие мыслительных способностей. Кейс-метод требует умения оперировать понятиями и фактами, выстраивать логические схемы решения проблемы, аргументировать свое мнение. Кейс-метод интегрирует в себе другие методы познания: анализ, синтез, описание, моделирование, проблемный метод, эксперимент, классификации и др., способствует оптимальному сочетания теории и практического знания, а также умений, опирающихся на предыдущий опыт практической деятельности обучающихся.

Стохастические кейс-задания нами понимаются как комплексные компетентностно-ориентированные задания по моделированию простейших недетерминированных систем. Ввиду практической направленности, они способствуют повышению мотивации к соответствующей математической деятельности. Так, например, к выявлению причинно-следственных связей, и в частности, закономерностей стохастического характера, учащийся основной школы (и даже начальной школы) приходит, прежде всего, в пределах его небольшого личного опыта, а само знание приобретается им не ради установлений связей и отношений между предметами и явлениями, а ввиду интереса к соответствующим объектам окружающей действительности.

В кейс-заданиях могут быть одновременно актуализированы знания и умения в области комбинаторики, действий над событиями, вычисления вероятностей как непосредственно по определению, так и с помощью соответствующих теорем, а также анализа статистических данных с последующим прогнозированием зависимостей и др. Решение кейс-заданий, использует, с одной стороны, опыт математической деятельности, уже накопленный учащимся, а с другой стороны способствует его расширению и углублению.

Наконец, решение кейс-заданий влечет за собою рефлексию соответствующей математической деятельности, проявляющуюся, в частности, в анализе собственной работы, развитии самостоятельности, выработке навыков самоконтроля, умении находить причину затруднения и пути его преодоления и др.

Таким образом, в соответствии с описанной выше структурой стохастической компетенции/компетентности мы можем рассматривать кейс-задания как действенный технологический прием ее формирования, способствующий реализации (на уровне учебных задач) методологического принципа системности исследований.

В следующих пунктах приведены авторские примеры стохастических кейс-заданий.

3. Кейс-задания при изучении модуля «стохастика» в курсе математики основной школы (частично приведены в [5])**.**

Задание 1 (*графики, интерполяция и экстраполяция*). Запишите температуру воздуха за окном квартиры в 9 часов вечера и в 7 часов утра. Считая, что температура изменяется (в зависимости от времени, прошедшего с начала наблюдения) по линейному закону (т.е. зависимость изображается на координатной плоскости в виде прямой), определить приближенно температуру, которая

а)была в 2 часа ночи;

б)была 11 часов, 1 час, 3 часа ночи и 5 час утра.

Какой может в этом случае быть температура воздуха в 9 час. утра?

Задание 2 (*таблица распределения частот, мода, размах выборки, выборочная средняя*). Возьмите у родителей квитанции о квартплате за истекший календарный период. Запишите (по месяцам) стоимость израсходованной электроэнергии. Затем расположите стоимости в порядке их возрастания, определите частоту каждой из них и составьте соответствующую таблицу (вариационный ряд). Определите (если таковая имеется) стоимость с наибольшей частотой. В каком месяце уплачена наибольшая, а в каком – наименьшая сумма? Как вы думаете, почему именно в эти месяцы вы заплатили больше всего и меньше всего соответственно? Определите размах варьирования стоимости электроэнергии. Какова средняя ежемесячная стоимость потребленной электроэнергии? В каком месяце стоимость наиболее отличалась от средней?

Задание 3 (*относительная частота, статистическая вероятность события*). Понаблюдайте на улице с не слишком интенсивным движением транспорта в течение 2 – 5 минут транспортный поток и запишите, сколько проехало мимо автомобилей, сколько среди них иномарок, сколько всего легковых автомобилей, сколько – такси . Найти относительную частоту

а)числа легковых автомобилей в транспортном потоке;

б)такси в транспортном потоке;

в)такси – среди легковых автомобилей;

г)иномарок – в транспортном потоке.

С какой вероятностью вы можете прогнозировать, что в ближайшее время первой среди проезжающих мимо машин окажется такси ?

На основе результатов наблюдения и свойства устойчивости относительной частоты определите, каким приблизительно может оказаться процент иномарок в составе городского транспорта.

Задание 4 (*построения ряда распределения, числовые характеристики*)

Скоро предстоит сдавать экзамены Государственной итоговой аттестации (ГИА). С какой вероятностью ты прогнозируешь, что успешно (на 4 или на 5) сдашь экзамен по русскому языку? По математике? По иностранному языку? Составь ряд распределения числа экзаменов, которые ты прогнозируешь сдать успешно. Построй многоугольник распределения. Какое количество успешно сданных экзаменов наиболее вероятно? Каково математическое ожидание числа успешно сданных экзаменов?

4. Кейс-задания при изучении модуля «стохастика» в курсе математики старшей школы

Задание 1 (*биномиальное распределение, ряд распределения, мода распределения, математическое ожидание*). Шерлок Холмс расследует дело об ограблении банка. Служительница банка миссис Смит утверждает, что грабителей было трое, мисс Джонсон – что двое, а мистер Пит говорит, что у дам от страха двоилось или троилось в глазах, и что грабитель был один. Шерлок Холмс подозревает, что грабителями могли быть K,L,N (имена в целях тайны следствия он не разглашает, но уверен, что других грабителей быть не могло), каждый из которых прежде участвовал, в среднем, в каждом третьем ограблении.

Свой дедуктивный метод Холмс хочет подтвердить математическими выкладками. Каковы вероятности, что грабил только K; только L; только N; K и L; K и N; L и N; все трое? Каково наиболее вероятное число грабителей? Какова вероятность, что банк вообще ограблен не был, а Смит, Джонсон и Пит присвоили деньги?

Если последует серия подобных ограблений, то каким будет среднее число грабителей?

Задание 2 (*построение вариационного ряда, числовые характеристики выборки*). В течение двадцати дней пронаблюдайте и запишите рублевый курс доллара. Расположите варианты в порядке их возрастания и составьте соответствующий вариационный ряд. Постройте многоугольник распределения. Определите размах варьирования курса доллара, моду и медиану вариационного ряда. Найдите средне-месячный курс доллара. Определить его выборочное средне-квадратическое отклонение.

5. Кейс-задания при изучении модуля «стохастика» в курсе математики инженерных направлений подготовки бакалавров

Соответствующие задания могут быть использованы при интегрированном описании поведения дискретных и непрерывных случайных величин, для определения точечных и интервальных оценок параметров теоретического распределения по эмпирически полученным данным, нахождении регрессионных зависимостей и др.([6]). Ограничимся следующими двумя примерами.

Задание 1 (*специальные распределения, плотность и функция распределения, вероятность попадания значений в заданный интервал, числовые характеристики*). Транспорт ходит регулярно с интервалом τ минут. Определить плотность и функцию распределения случайной величины t - времени ожидания транспорта пассажира, в случайный момент времени приходящего на остановку. Какова вероятность, что время ожидания составит не более $0{,}25\tau$ минут? Какова вероятность, что все пять дней рабочей недели пассажир будет ожидать транспорт не более $0{,}25\tau$ минут? Каково среднее время ежедневного ожидания данного транспорта?

Задание 2 (*линейная и нелинейная регрессии, прогнозирование значений*). Зафиксированы показатели потребления электроэнергии (в киловаттах) y_j в зависимости от времени (в часах) x_j непрерывной работы прибора. Исследовать возможную зависимость величины y_j от x_j, использовав для этого выборочные уравнения а)линейной б)параболической в)логарифмической регрессии по следующим данным измерений:

y_j	5,2	6,3	7,1	8,5	9,2	10,0
x_j	1	2	3	4	5	6

Определить наиболее предпочтительную модель зависимости, использовав вычисление остаточной дисперсии для каждой модели. По выбранной модели спрогнозировать величину потребленной электроэнергии через 15 и 20 часов непрерывной работы прибора.

Литература к главе 7

1.Селютин В.Д. Научные основы методической готовности учителя обучению школьников стохастике. Монография. – Орел: ОГУ, 2002.– 200 с./

2.Концепция развития российского математического образования [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.math.ru/conc/vers/conc-3003.html (дата обращения 21.06.2024).

3. Аверина, И.В. Уровневая модель системы мероприятий по реализации концепции развития российского математического образования [Электронный ресурс] / И. В. Аверина, А. Д. Нахман //Актуальные инновационные исследования: наука и практика. –2014. – № 1. – Режим доступа: http://www.actualresearch.ru .pdf (дата обращения 12.04.2025).

4. Гумметова, А.Ю. Кейс-метод как современная технология личностно-ориентированного обучения [Электронный ресурс] /А.Ю. Гумметова, Е.В. Ступина.– Режим доступа: http://www.uchportal.ru/publ/15-1-0-507 (дата обращения 12.04.2024).

5. Зайцев, В.Л. Элементы математической логики и стохастики: учебно-метод. пособие /, В.Л.Зайцев, С.А.Каратеева, А.Д. Нахман. – Тамбов: ТОПКРИО, 2008. – 46 с.

6. Куликов, Г.М. Элементы прикладной математики: учебное пособие / Г.М. Куликов, А.Д. Нахман, С.В. Плотникова. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2008. – 160 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ