А.Д.Нахман

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Монография

Электронный научный журнал
«Инновации в образовании»

Специальный выпуск

Издательская платформа Российской академии естествознания
2025

УДК 372.851

Рекомендовано редакционно-издательским советом ТОГОАУ ДПО «Институт повышения квалификации работников образования»

Рецензент:
доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВО
«Тамбовский государственный технический университет»
Ю.В.Родионов

Нахман А.Д. Представление функций рядами в курсе математики / Инновации в образовании. - Специальный выпуск. № 2. - 2025. - 96 с.

Анализируются содержательные и методические аспекты теории числовых и функциональных рядов и вопросы представимости функций стенными и тригонометрическими рядами. Монография адресована исследователям, занимающимися вопросами образовательных инноваций, педагогам-новаторам, заинтересованным в развитии собственной предметной компетентности, а также студентам вузов, изучающим высшую математику.

Введение

В настоящей монографии рассматривается содержательно-методический аспект темы «Ряды», изучаемой в вузовском курсе математического анализа. Изложение увязано с проблематикой представления функций действительного и комплексного переменных бесконечными степенными и тригонометрическими полиномами. Обоснована важность соответствующей проблематики. Рассмотрены классы функций, для которых такие представления возможны.

Глава 1. Введение в теорию числовых рядов

1.1. Сходимость. Простейшие свойства рядов

1.1.1. Формально составленная *бесконечная сумма*

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots$$

действительных чисел $w_1, w_2, w_3, \ldots, w_n, \ldots$, или, коротко,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \qquad (1.1.1)$$

называется *числовым рядом*; общий член последовательности $\{w_n\}$ называется общим членом ряда (1.1.1).

Конечную сумму первых *n* членов

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + \ldots + w_n \qquad (1.1.2)$$

назовем n- ой частичной суммой ряда (1.1.2); при этом, по определению, $S_1 = w_1$. Если существует предел вида

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

то числовой ряд (1.1.1) называется *сходящимся*, а в противном случае – *расходящимся*.

Число S назовем суммой сходящегося ряда; говорят также, что ряд (1.1.1) сходится к сумме S и применяют запись

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n .$$

Основная задача, которая решается в теории числовых рядов – сходится или расходится данный ряд; вопрос о его сумме можно ставить лишь тогда, когда доказана сходимость. Сумму же сходящегося ряда всегда можно вычислить приближенно, взяв достаточно большое количество n членов в составе его частичной суммы S_n; при этом точность вычисления увеличивается с ростом n.

Пример 1. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

и найти его сумму.

Решение. Воспользуемся определением сходимости ряда и его суммы, для чего вычислим частичную сумму произвольного (n-го) порядка. Преобразуем общий член ряда к виду

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{(2n+1)-(2n-1)}{2(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right),$$

и сложим первые n членов. При этом мы обнаруживаем, что члены, начиная со второго и кончая предпоследним, будут взаимно уничтожаться:

$$2\,S_n = \left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right) + \left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

Теперь

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, ряд оказался сходящимся и его сумма $S = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Можно доказать, что частичные суммы ряда (называемого *гармоническим*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

неограниченно растут с ростом n, так что указанный ряд расходится. В более общем случае так называемого ряда Дирихле

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \; p \in R,$$

можно установить его сходимость при каждом $p > 1$ и расходимость при остальных действительных значениях p.

1.1.2. Непосредственно из определения сходимости вытекают следующие *свойства рядов*. Пусть даны произвольные действительные числа τ, ρ и сходящиеся числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

суммы которых равны U и V соответственно. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tau u_n + \rho v_n)$$

сходится и его сумма равна $\tau U + \rho V$.

В частности, при $\rho = 0$, $\tau \neq 0$, получаем что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau u_n \text{ имеет то же поведение, что и } \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если исходный ряд был сходящимся, то его сумма умножится на τ.

1.1.3. По заданной бесконечной последовательности $\{w_n\}$ построим теперь ряд вида

$$w_{N+1} + w_{N+2} + \ldots,$$

где $N = 1,2,\ldots$ и назовем его N-ым *остатком ряда* (1.1.1); иными словами, N-ый остаток (1.1.1) есть ряд, полученный отбрасыванием первых N членов.

Обозначим при $n > N$ через $S_{N,n}$ n-ю частичную сумму ряда - остатка

$$S_{N,n} = w_{N+1} + \ldots + w_n$$

и, в случае его сходимости, через $R = R_N$ – сумму этого ряда, т.е.

$$R_N = \lim_{n \to \infty} S_{N,n}.$$

Как оказывается *ряд* (1.1.1) *сходится тогда и только тогда, когда сходится каждый его ряд-остаток*. Другими словами, *отбрасывание или добавление конечного числа (первых) членов не влияет на сходимость данного ряда*.

Имеет место также следующее *свойство остатка*: если ряд (1.1.1) является сходящимся, то

$$\lim_{N\to\infty} R_N = 0.$$

1.2. Необходимое условие сходимости ряда.

Бесконечные геометрические прогрессии

1.2.1. ***Теорема*** (*необходимый признак сходимости ряда*). Если ряд (1.1.1) сходится, то существует предел (при $n \to \infty$) его общего члена w_n, причем

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0. \qquad (1.2.1)$$

Обратное утверждение неверно.

Доказательство. Пусть S – сумма сходящегося ряда. Очевидно, что соотношение $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ может быть записано также и в виде $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$. Тогда, вычисляя для $w_n = S_n - S_{n-1}$ предел разности, имеем

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty}\left(S_n - S_{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

так что существование предела общего члена и его равенство нулю доказаны.

Ряд с общим членом $w_n = \dfrac{1}{n}$ является расходящимся гармоническим рядом (пример 2 п.1.1.1), причем для таких w_n выполнено соотношение (1.2.1). Приведенный пример показывает, что, утверждение, обратное сформулированному в теореме, неверно.

Следствие (*достаточный признак расходимости*). Если

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| \neq 0 \qquad (1.2.2)$$

или если предел вида

$$\lim_{n\to\infty} w_n$$

не существует, то ряд (1.1.1) расходится.

Действительно, в противном случае (т.е. если бы ряд сходился) мы имели бы существование и равенство нулю предела вида (1.2.1), но тогда при $n\to\infty$ имело бы место и соотношение $|w_n|\to 0$, что противоречит условию (1.2.2).

1.2.2. *Сумма геометрической прогрессии.* Пусть a и q - ненулевые действительные числа. Рассмотрим *бесконечную геометрическую прогрессию*

$$a,\ aq,\ aq^2,\ldots,aq^n,\ldots$$

ряд, составленный из ее членов

$$a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} aq^n\ , \qquad (1.2.3)$$

и исследуем его сходимость.

Случай 1: $|q|\geq 1$; в этом случае $|aq^n|=|a|\cdot|q|^n\geq|a|$. Могут представиться две возможности: либо предел общего члена ряда (1.2.3) не существует, либо он существует и тогда согласно неравенству $|q|\geq 1$ значение предела

$$\lim_{n\to\infty}|aq^n|$$

не меньше числа $|a|>0$. В обоих случаях, по достаточному признаку расходимости ряда (следствие пункта 1.2.1), получаем, что (1.2.3) расходится.

Случай 2: $|q|<1$; в этом случае n-ая частичная сумма ряда (1.2.3) имеет вид

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

(формула суммы первых членов геометрической прогрессии).

Вычислим предел последовательности частичных сумм:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-q}(1-\lim_{n\to\infty} q^n).$$

Последний предел существует, т.к.

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0 \quad \text{при} \quad |q|<1.$$

Теперь

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q},$$

т.е. ряд оказался сходящимся к сумме

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, мы установили, что *ряд* (1.2.3) *с* $a \neq 0$ *является сходящимся тогда и только тогда, когда* $|q| < 1$ и нашли в этом случае его сумму.

1.3. Теоремы сравнения

1.3.1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.3.1}$$

составленный из положительных чисел, т.е. порожденный последовательностью $\{a_n\}$, $a_n > 0$, $n = 1,2,...$; такой ряд называют *знакоположительным.* Обозначим через S_n его n-ую частичную сумму.

В вопросах исследования знакоположительных рядов потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Если последовательность $\{S_n\}$ ограничена сверху, то ряд (1.3.1) сходится.

Доказательство. С ростом n последовательность $\{S_n\}$ возрастает, т.к. в частичной сумме будут добавляться положительные члены. Кроме того, по условию, эта последовательность ограничена. Но, как известно из математического анализа, всякая возрастающая ограниченная (сверху) последовательность имеет предел; в нашем случае, следовательно, существует (конечный) предел последовательности S_n при $n \to \infty$. Это и означает сходимость ряда (1.3.1).

1.3.2. Одним из способов исследования сходимости знакоположительного ряда является сравнение его общего члена с общим членом некоторого ряда, поведение которого известно ("эталонного ряда"). Таким «эталоном» может, например, служить ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии (см. п. 1.2.2). Другие примеры см. в конце настоящего параграфа.

***Теорема* 1** (*признак сравнения по величине*). Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.3.2}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.3.3}$$

и при всех $n = 1,2,...$ имеет место неравенство

$$a_n \leq b_n. \tag{1.3.4}$$

Тогда: 1) если сходится ряд (1.3.3) (к некоторой сумме B) , то сходится и ряд (1.3.2) (к некоторой сумме A); при этом для их сумм имеет место соотношение $A \leq B$;

2)если ряд (1.3.2) расходится, то расходится и ряд (1.3.3).

Замечание. Согласно свойству п.1.1.3 (отбрасывание или добавление конечного числа членов не влияет на сходимость ряда) утверждение теоремы имеет место, если соотношение (1.3.4) выполняется не при всех n, а лишь начиная с некоторого номера N.

Доказательство. 1) Если ряд (1.3.3) сходится, то последовательность $\{B_n\}$ его частичных сумм (как сходящаяся последовательность) ограничена сверху некоторой постоянной C: $B_n \leq C$. Если также A_n – последовательность частичных сумм ряда (1.3.2), то из неравенства (1.3.4) вытекает, что

$$A_n \leq B_n \leq C \tag{1.3.5}$$

при всех n. Следовательно, последовательность A_n ограничена сверху, а тогда, по лемме п.1.3.1, ряд (1.3.2) сходится. Переходя к пределу в неравенстве (1.3.5), получаем также $A \leq B$. Утверждение 1) установлено.

2)Если ряд (1.3.3) расходится, то (1.3.2) не может быть сходящимся: иначе, согласно утверждению 1), обязан был бы сходиться и ряд (1.3.2). Второе утверждение теоремы доказано.

1.3.3. ***Теорема 2*** (*признак сравнения в предельной форме*). Пусть даны два знакоположительных ряда (1.3.2) и (1.3.3), причем существует (конечный) предел вида

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n},\ L > 0. \tag{1.3.6}$$

Тогда ряды (1.3.2) и (1.3.3) сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство основано на оценках

$$a_n < (L+\varepsilon)b_n, \qquad b_n < \frac{1}{L-\varepsilon}a_n, \tag{1.3.7}$$

которые вытекают из соотношения (13.6) (выбор $\varepsilon < L$ произволен) и теоремы 1.

1.3.4. *Примеры.*

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+1}{(2^n+1)n^2}.$$

Решение. Оценим сверху общий член ряда:

$$a_n < \frac{2n^2+1}{2^n n^2} = (2+\frac{1}{n^2})(\frac{1}{2})^n \le 3(\frac{1}{2})^n.$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}3(\frac{1}{2})^n$$

составлен из членов геометрической прогрессии с первым членом $a = 3$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$, меньшим единицы; следовательно, этот ряд сходится. По теореме 1 сравнения тогда сходится и данный ряд.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+3n-2}.$$

Решение. При больших значениях n поведение общего члена ряда

$$a_n = \frac{n^2}{n^3+3n-2}$$

определяется поведением старших степеней параметра n. Это обстоятельство наводит на мысль рассмотреть последовательность $\{b_n\}$ с общим членом

$$b_n = \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

и сравнить (на основании признака в предельной форме) данный ряд с

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Последний (гармонический) ряд, как отмечено выше (п. 1.1.1) , является расходящимся. Имеем

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^3+3n-2} : \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3(1+3/n^2-2/n^3)} = 1,$$

т.е. $L \neq 0$. Отсюда заключаем, что поведение сравниваемых рядов одинаково, а значит данный ряд расходится.

1.3.5. Использование признаков сравнения знакоположительных рядов предполагает наличие некоторого эталона для сравнения. Было бы полезно дополнить список признаков такими, которые позволяли бы исследовать поведение ряда, исходя лишь из вида его общего члена. Соответствующие признаки предлагаются в следующих параграфах.

1.4. Исследование сходимости по признакам Коши и Даламбера

Рассмотрим знакоположительный ряд (1.3.1).

1.4.1. ***Теорема* 1** (*радикальный признак Коши*). Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\,. \tag{1.4.1}$$

Если $K < 1$, то ряд (1.3.1) сходится; если же $K > 1$, то ряд расходится.

Замечание. В случае $K = 1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда: существуют примеры как сходящихся, так и расходящихся рядов, для которых $K = 1$.

Доказательство. Согласно (1.4.1) и определению предела, для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что неравенство

$$|\sqrt[n]{a_n} - K| < \varepsilon$$

имеет место при всех $n > N$. Из последнего соотношения (при указанных n) вытекает, что

$$K - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < K + \varepsilon. \tag{1.4.2}$$

Случай 1: $K < 1$. Ввиду произвольности выбора ε положим $0 < \varepsilon < 1 - K$ и обозначим $q = K + \varepsilon$, так что $0 < q < 1$. Из (1.4.2) вытекает тогда, что $a_n < (K + \varepsilon)^n$ или $a_n < q^n$ при всех $n > N$. Поскольку сумма членов геометрической прогрессии

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} q^n$$

является сходящимся рядом то по первой теореме сравнения (см. также замечание к ней) сходится и ряд (1.3.1).

Случай 2: $K > 1$. В этом случае выберем ε так, что $0 < \varepsilon < K - 1$ и обозначим $Q = K - \varepsilon$, так что $Q > 1$. Из (1.4.2) вытекает тогда, что $a_n > (K + \varepsilon)^n$ или $a_n > Q^n$ при всех n, начиная с некоторого номера N. Но в этом случае члены ряда (1.3.1) не могут стремиться к нулю и ряд расходится по достаточному признаку расходимости.

Теорема полностью доказана.

1.4.2 ***Теорема*** **2** (*признак Даламбера*). Пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Если $D < 1$, то ряд (1.3.1) сходится; если же $D > 1$, то ряд расходится.

Доказательство мы не приводим, но его идея та же, что и в случае теоремы 1. Отметим только (это потребуется в дальнейшем), что при $D > 1$ расходимость ряда имеет место ввиду достаточного признака расходимости (см. доказательство признака Коши).

Замечание **1.** В случае $D = 1$ (подобно признаку Коши) теорема 2 не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Замечание **2.** Число D будет отличным от единицы, если члены ряда (1.3.1) убывают или растут достаточно быстро (см. примеры ниже).

Пример 1. Исследовать сходимость ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

Решение. Имеем знакоположительный ряд с общим членом

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2},$$

вид которого наводит на мысль использовать признак Коши. Вычисляем

$$K = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = e.$$

Поскольку $K = e = 2{,}71... > 1$, то данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)5^n}{n^2}.$$

Решение. Общий член знакоположительного ряда

$$a_n = \frac{(2n+1)5^n}{n^2}$$

содержит множителем показательную функцию, и, следовательно, растет (с ростом n) достаточно быстро. Следовательно, целесообразным будет применение признака Даламбера. Найдем a_{n+1}, взяв $(n+1)$ вместо n в аналитическом выражении для a_n:

$$a_{n+1} = \frac{(2(n+1)+1)5^{n+1}}{(n+1)^2} = \frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Теперь вычисляем соответствующий предел:

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)5^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{(2n+1)5^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\frac{5^{n+1}}{5^n} =$$

$$= 5\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{2+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2 = 5\cdot\frac{2}{2}\cdot 1 = 5 > 1.$$

Имеем: $D > 1$; согласно признаку Даламбера, ряд расходится.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{n!}.$$

Решение. Наличие $n!$ в знаменателе дроби

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}$$

свидетельствует о ее быстром убывании, в силу чего может быть эффективен признак Даламбера. Имеем $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)!}$ и

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n+1}}\cdot\frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{n!}{n!(n+1)} = 0.$$

Поскольку оказалось $D<1$, то данный ряд сходится.

1.5. Сходимость знакочередующихся рядов.

Приближённое вычисление их сумм

1.5.1 Рассмотрим знакоположительную последовательность

$$\{a_n\},\ a_n \in R,\ a_n > 0, n = 1,2,... \qquad (1.5.1)$$

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - ... + (-1)^{n-1}a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \qquad (1.5.2)$$

называется *знакочередующимся*. Достаточный признак его сходимости содержится в следующей теореме.

***Теорема* 1 (*Лейбница*)**. Если последовательность (1.5.1) является убывающей и

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{1.5.3}$$

то знакочередующийся ряд (1.5.2) сходится. При этом для суммы S ряда (1.5.2) справедлива оценка

$$0 \le S \le a_1. \tag{1.5.4}$$

Доказательство. В последовательности частичных сумм S_n ряда (1.5.1) индекс n пробегает последовательно нечетные и четные значения $n = 2m-1$, $n = 2m$ $(m = 1,2,...)$. Поэтому достаточно доказать существование и совпадение пределов последовательностей частичных сумм нечетного и четного порядка S_{2m-1}, S_{2m} $(m \to \infty)$. Суммы S_{2m-1} и S_{2m} отличаются лишь членом a_{2m-1}, а именно $S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m-1}$. Следовательно, если существует конечный предел

$$S = \lim_{m\to\infty} S_{2m}, \tag{1.5.5}$$

то

$$\lim_{m\to\infty} S_{2m-1} = \lim_{m\to\infty} S_{2m} - \lim_{m\to\infty} a_{2m-1}.$$

При этом

$$\lim_{m\to\infty} a_{2m-1} = 0$$

в силу соотношения (1.5.3), которое возможно применить, поскольку $2m-1 \to \infty$ при $m \to \infty$.

Остается доказать существование предела (1.5.5), для чего достаточно установить возрастание и ограниченность (сверху) последовательности S_{2m}.

Для этого, в свою очередь, запишем S_{2m} в виде

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ...(a_{2m-1} - a_{2m}) \tag{1.5.6}$$

и

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}, \tag{1.5.7}$$

использовав два различных способа попарной группировки слагаемых.

С ростом m в сумме (1.5.6) будут добавляться положительные (по причине убывания последовательности (1.5.1)) разности вида $a_{2m-1} - a_{2m}$, в результате чего эта сумма будет возрастать; при этом

$$S_{2m} \geq 0. \tag{1.5.8}$$

С другой стороны, по той же причине убывания последовательности положительных чисел (1.5.1), в (1.5.7) из a_1 вычитаются положительные члены, так что

$$S_{2m} < a_1 \quad \text{при всех} \quad m = 1,2,\ldots \tag{1.5.9}$$

Итак, возрастание и ограниченность (сверху) последовательности S_{2m} установлены, к чему и сводилось доказательство теоремы.

Оценка (1.5.4) может быть получена из (1.5.5), (1.5.8) и (1.5.9) путем предельного перехода при $m \to \infty$. Теорема полностью доказана.

Замечание. Утверждение теоремы можно применить и к знакочередующемуся ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$$

который начинается с отрицательного члена, поскольку умножение всех членов ряда на ненулевое число (в нашем случае на -1) не влияет (см. п. 1.1.2) на его сходимость. В этом случае сумма S ряда окажется отрицательной и оценка (1.5.4) будет справедлива для $|S|$.

Следствие. При выполнении условий теоремы Лейбница сумма остатка

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n \tag{1.5.10}$$

знакочередующегося ряда имеет оценку

$$|R_N| \leq a_{N+1}. \tag{1.5.11}$$

Утверждение следствия может быть переформулировано в виде следующего правила: *при замене суммы знакочередующегося ряда суммой* *первых его нескольких членов абсолютная погрешность не превзойдет модуля первого из отброшенных членов.*

1.5.3. *Примеры.*

Пример 1. Ряд вида

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}... \qquad (1.5.12)$$

является сходящимся, поскольку выполнены оба условия признака Лейбница: последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ является, очевидно, убывающей и имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Пример 2. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$$

с точностью до 0,01.

Решение. Имеем знакочередующийся ряд с $a_n=\frac{n}{2^n}$ и отрицательным первым членом

$$-\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}-\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}-\frac{5}{2^5}+\frac{6}{2^6}-\frac{7}{2^7}+\frac{8}{2^8}-\frac{9}{2^9}+\frac{10}{2^{10}}-...,$$

причем для последовательности $\{a_n\}$ выполнены условия теоремы Лейбница. Последнее утверждение вытекает из того обстоятельства, что показательная функция $y=2^x$ растет (при $x\to\infty$) быстрее линейной y=x.

Согласно вышеприведенному правилу, сумму ряда можно вычислить приближенно, оставив все первые его члены, модули которых еще больше 0,01 и отбросив все члены, начиная с того, который уже меньше 0,01. Таким является член $\frac{10}{2^{10}}$<0,01 , тогда как предшествующий ему $\frac{9}{2^9}$=0, 017…>0,01.

Имеем (с точностью до 0,01)

$$S \approx -\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} - \frac{5}{2^5} + \frac{6}{2^6} - \frac{7}{2^7} + \frac{8}{2^8} - \frac{9}{2^9} \approx 0{,}16.$$

1.6. Характер сходимости знакопеременного ряда

1.6.1. Рассмотрим ряд из действительных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \qquad (1.6.1)$$

среди членов которого имеются как положительные, так и отрицательные числа; такой ряд называется *знакопеременным*. Рассмотрим также ряд, составленный из *абсолютных величин* членов (1.6.1):

$$\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |. \qquad (1.6.2)$$

Будем считать, что количество как положительных, так и отрицательных членов в (1.6.1) является бесконечным, так как в противном случае вопрос о сходимости сводится к случаю знакоположительных рядов. В самом деле, если, например, количество положительных членов в (1.6.1) оказывается конечным, то, начиная с некоторого номера, все члены ряда будут отрицательными. Тогда поведение ряда определяется поведением этого остатка (п. 1.1.4), состоящего только из отрицательных членов. Если же изменить знаки всех членов ряда - остатка на противоположные, т.е. умножить все члены на (-1), то его поведение не изменится (свойство п.1.1.3). Таким образом, вопрос сведен к исследованию сходимости полученного знакоположительного ряда.

Теорема. Если сходится ряд (1.6.2), то сходится и ряд (1.6.1).

Сходимость ряда (1.6.1) в этом случае называется *абсолютной*.

Обратное утверждение неверно: знакопеременный ряд может быть сходящимся, тогда как (1.6.2) – расходящийся. Примером служит (1.5.12), для которого ряд из абсолютных величин (см. п.1.1.2) – гармонический ряд. В таких случаях говорят, что ряд (1.6.1) *сходится условно.*

Подразделение сходимости на абсолютную и условную присуще именно знакопеременным рядам. С точки зрения введенных понятий сходящийся знакоположительный ряд – это всегда абсолютно сходящийся ряд, поскольку ряд из модулей совпадает с ним самим.

Доказательство теоремы. Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \tag{1.6.3}$$

– n-ая частичная сумма ряда (1.6.1), а

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| \tag{1.6.4}$$

– n-ая частичная сумма ряда из абсолютных величин (1.6.2).

Выделим в (1.6.3) сумму всех положительных членов, и обозначим ее через S_n^+, а сумму абсолютных величин всех отрицательных членов (в составе S_n) обозначим через S_n^-. Суммы S_n и S_n, составленные из положительных чисел, возрастают с ростом n. Тогда, очевидно,

$$S_n = S_n^- - S_n^-,\ \sigma_n = S_n^+ + S_n^-.$$

Последовательность (1.6.4) имеет предел (ввиду сходимости ряда (1.6.2)), а значит является ограниченной, т.е. существует постоянная $C > 0$, такая что $\sigma_n \le C$ при всех n. Ясно, что тогда $S_n^+ \le S_n^+ + S_n^- = \sigma_n \le C,$ и, точно так же, $S_n^- \le \sigma_n \le C$. Значит, последовательности S_n и S_n^-, будучи возрастающими и ограниченными, имеют конечные пределы. Тогда имеет предел их разность S_n, что и означает сходимость ряда (1.6.1).

1.6.2. *Примеры.*

Пример 1. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+5}.$$

Решение. Имеем модуль общего члена равным

$$\left| \frac{(-1)^n n}{n+5} \right| = \frac{n}{n+5}$$

и теперь легко заметить, что последнее выражение не стремится к нулю (его предел при $n \to \infty$ равен единице). Согласно достаточному признаку расходимости, данный ряд будет расходящимся.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \sin\frac{\pi}{2^n}.$$

Решение. Имеем общий член ряда в виде

$$w_n = (-1)^n n \sin\frac{\pi}{2^n} \qquad \text{и} \qquad \sin\frac{\pi}{2^n} > 0\,;$$

последнее неравенство имеет место, т.к. при $n = 1,2,...$ значения аргумента $\frac{\pi}{2^n}$ принадлежат первой четверти тригонометрической окружности. Значит,

$$|\, w_n \,| = n \sin\frac{\pi}{2^n},$$

а тогда для ряда из модулей число Даламбера

$$D = \lim_{n\to\infty}\frac{|\, w_{n+1}\,|}{|\, w_n\,|} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\sin\frac{\pi}{2^n}} == \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2};$$

вычисляя последний предел, мы воспользовались эквивалентностью бесконечно малых $\sin t$ и t при $t \to 0$ в случаях, когда значения t выбраны равными $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ и $\frac{\pi}{2^n}$.

Итак, $D < 1$, откуда следует, что сходится ряд из модулей, а тогда данный ряд сходится абсолютно.

Глава 2. Представление функций степенными рядами

2.1. Свойства равномерно сходящихся рядов

2.1.1. Пусть на некотором числовом множестве G задана бесконечная последовательность функций $\{u_n(x)\}$, $n = 1,2,\ldots$ Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \tag{2.1.1}$$

называется *функциональным рядом* на G. При каждом $x = x_0 \in G$ имеем *числовой* ряд из членов $u_n(x_0)$. Если получаемый числовой ряд сходится, то x_0 называется его точкой сходимости, а если расходится – то точкой расходимости. На множестве $G_0 \subset G$ всех точек сходимости ряда (2.1.1) задана тогда функция $S = S(x)$, называемая суммой ряда (2.1.1), где $S(x_0)$ есть обозначение суммы ряда (2.1.1) в точке x_0.

2.1.2. Как оказывается, привычные свойства конечных сумм функций могут не сохраняться при переходе к рядам (непрерывность суммы функций и др.). Такое положение может быть "исправлено" требованием так называемой равномерной сходимости ряда.

Пусть $S(x)$ есть сумма ряда (2.1.1) на некотором отрезке $G = [a,b]$ и при каждом *n* существует наибольшее значение модуля уклонения $S_n(x)$ от $S(x)$

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(x) - S(x)|, \quad n = 1,2,\ldots$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} \rho_n = 0,$$

то ряд (2.4.1) называется *равномерно сходящимся* на G к сумме $S(x)$.

***Теорема* 1** (*достаточный признак* Вейерштрасса *равномерной сходимости*). Если существует числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, такая что для всех $x \in G,\ n = 1,2,\ldots$ имеют место оценки

$$|u_n(x)| \le \alpha_n, \tag{2.1.2}$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \qquad (2.1.3)$$

сходится, то ряд (2.1.1) равномерно сходится на G.

При выполнении условий теоремы говорят, что ряд (2.1.1) *мажорируем* на G, а знакоположительный ряд (2.1.3) называется *мажорантным*. В этих терминах теорема может быть сформулирована так: *мажорируемый на* G *функциональный ряд сходится равномерно на* G.

Отметим также (не приводя здесь соответствующих примеров), что условие мажорируемости является лишь достаточным для равномерной сходимости, но не является необходимым .

Доказательство. Ввиду соотношения (2.1.2), выполненного на G, имеем абсолютную сходимость (на G) ряда (2.1.1) к некоторой сумме $S(x)$; при этом

$$S(x)-S_n(x)=r_n(x), \qquad (2.1.4)$$

где $r_n(x)$ – сумма ряда-остатка. По определению суммы ряда и ввиду свойств пределов (предельный переход под знаком модуля и предельный переход в неравенстве), имеем

$$|r_n(x)|=|\lim_{m\to\infty}(u_{n+1}(x)+\ldots+u_m(x))|=|\lim_{m\to\infty}|u_{n+1}(x)+\ldots+u_m(x)|\le$$

$$\le|\lim_{m\to\infty}(|u_{n+1}(x)|+\ldots+|u_m(x)|)\le|\lim_{m\to\infty}(\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_m).$$

Сумма под знаком последнего написанного предела представляет собою m-ю частичную сумму n-го остатка числового ряда (2.1.3), а значение предела – сумма его n-го остатка, которую мы обозначим через r_n^*:

$$|r_n(x)|\le r_n^*.$$

Ввиду сходимости ряда (2.1.3) имеем (см. п.1.1.4) $r_n^*\to 0$ при $n\to\infty$. Согласно (2.1.4), в определении равномерной сходимости функционального ряда при выполнении условия теоремы тогда имеем

$$\rho_n=\max_{x\in G}|S(x)-S_n(x)|=\max_{x\in G}|S_n(x)-S(x)|=\max_{x\in G}|r_n(x)|\le r_n^*.$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0,$$

что и означает равномерную (на G) сходимость ряда (2.1.1).

2.1.3. ***Теорема 2.*** Если ряд (2.1.1), составленный из функций $u_n(x)$, непрерывных на некотором отрезке $G=[a,b]$, равномерно на G сходится, то его сумма $S(x)$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in G$, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = S(x_0). \tag{2.1.5}$$

Доказательство. Оценим $|S(x)-S(x_0)|$. Имеем в силу (2.14)

$$|S(x)-S(x_0)|=|(S_n(x)+r_n(x))-(S_n(x_0)+r_n(x_0))|\le$$

$$\le (|S_n(x)-S_n(x_0)|+|r_n(x)|+|r_n(x_0)|) \le |S_n(x)-S_n(x_0)|+2\max_{x\in G}|r_n(x)|=$$

$$=|S_n(x)-S_n(x_0)|+2\rho_n, \tag{2.1.6}$$

где, по определению равномерной сходимости ряда, $\rho_n \to 0$ при $n\to\infty$. Поскольку конечная сумма $S_n(x)$ непрерывных (на G) функций является непрерывной, имеем

$$\lim_{x\to x_0} S_n(x) = S_n(x_0) \text{ или } \lim_{x\to x_0}|S_n(x)-S_n(x_0)|=0,$$

а тогда, в силу (2.1.6),

$$\lim_{x\to x_0}|S(x)-S(x_0)| \le \lim_{x\to x_0}|S_n(x)-S_n(x_0)|+2\rho_n = 2\rho_n. \tag{2.1.7}$$

Левая часть (2.1.7) не зависит от n, и, следовательно, сохраняет свой вид при предельном переходе (по n), тогда как правая стремится к нулю. Переходя к пределу при $n\to\infty$ в обеих частях (2.1.7), получаем

$$\lim_{x\to x_0}|S(x)-S(x_0)|=0,$$

откуда и следует (2.1.5).

2.1.4. Отметим (без доказательств) также следующие свойства равномерно сходящихся на отрезке $G=[a,b]$ функциональных рядов.

1) Ряд (2.1.1), составленный из непрерывных на функций можно *почленно интегрировать* по всякому отрезку $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$: если $S(x)$ – сумма ряда (2.1.1), то

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx \ .$$

2) Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ также сходится равномерно на $G=[a,b]$, то функция $S = S(x)$ *дифференцируема* на (a,b), причем в каждой точке этого промежутка

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

2.2. Теорема Абеля. Интервал сходимости

2.2.1. Пусть $\{x^n\}$, $n=1,2,\ldots,$ – последовательность степенных функций, $\{\alpha_n\}$, $n=0,1,\ldots$ – произвольная последовательность действительных чисел.

Ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \qquad (2.2.1)$$

называется *степенным*; для (2.2.1) употребляем также обозначение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \ .$$

Очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке $x_0 = 0$, т.к. все его частичные суммы $S_n(x_0) = a_0$, и, следовательно, предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ существует и равен a_0. Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд (2.2.1) сходится в некоторой точке $x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится на промежутке, определяемом неравенством $|x|<|x_0|$. Если же x' – точка расходимости, то ряд (2.2.1) расходится при всех x таких, что $|x|>|x'|$.

Доказательство. 1) Ряд из модулей для (2.2.1) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |x|^n \ . \qquad (2.2.2)$$

Общий член ряда (2.4.2) можно представить следующим образом:

$$u_n(x) = |a_n| \cdot |x|^n = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n, \qquad (2.2.3)$$

где $x_0 \neq 0$ - точка сходимости ряда (2.2.1). Поскольку в этой точке выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_n x_0^n\right| = 0,$$

то для всех *n* существует постоянная $\mathrm{M} > 0$ такая, что

$$\left|a_n x_0^n\right| \le M.$$

При условии $|x| < |x_0|$ имеем для $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$, что $0 \le q < 1$. Следовательно, в силу (2.2.3), справедлива оценка $0 \le u_n(x) \le M q^n, 0 \le q < 1$, и ряд

$$M + Mq + Mq^2 + \ldots + Mq^n + \ldots$$

является сходящимся (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). По теореме сравнения знакоположительных рядов тогда сходится и ряд (2.2.2). Значит, в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$ ряд (2.2.1) сходится абсолютно, что и утверждалось.

2) В случае $|x| > |x'|$ ряд (2.2.1) не может сходится в точке *x*. Действительно, в силу $|x'| < |x|$, сходимость (2.2.1) в точке *x* означала бы (по первой части теоремы Абеля), что ряд сходится и в точке x'. Но это противоречит условию. Итак, вторая часть теоремы также доказана.

2.2.2. Из теоремы Абеля вытекает, что всякая точка сходимости x_0 степенного ряда ближе к началу координат, чем любая точка расходимости (если такая имеется). Следовательно, должно существовать некоторое "пограничное" расстояние *R*, такое что при $|x| < R$, т.е в интервале (–*R*, *R*), имеет место сходимость (абсолютная), а при $|x| > R$ (вне интервала) - расходимость ряда (2.2.1). Число *R* называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а (–*R*, *R*) – его интервалом сходимости.

2.2.3. При всяком $0 < \rho < R$ ряд (2.2.1) будет сходится и равномерно на отрезке $[-\rho, \rho]$. Действительно, взяв точку x^*, такую, что $|x^*| = \rho$, имеем абсолютную сходимость в точке x^*, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \rho^n .$$

В то же время, для членов (2.2.2) имеем оценку

$$\left|a_n x^n\right| \le |a_n| \cdot |x|^n < |a_n| \rho^n .$$

Согласно признаку Вейерштрасса, получаем равномерную сходимость при $|x| \le \rho$. В частности (т.к. непрерывны все степенные функции $u_n(x) = x^n$), непрерывной в интервале сходимости будут и сумма ряда (2.2.1).

2.2.4. *Радиус сходимости* R можно найти по одной из формул

$$R = \frac{1}{D} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{K}, \tag{2.2.4}$$

если существует соответствующее "число Даламбера"

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{2.2.5}$$

или "число Коши"

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} . \tag{2.2.6}$$

Формулы (2.2.5) – (2.2.6) остаются справедливыми, если $D = 0$ или $(K = 0)$: тогда $R = \infty$, т.е. областью сходимости ряда является вся числовая ось. Если же $D = +\infty$ $(K = +\infty)$, то $R = 0$, т.е. "областью" сходимости является единственная точка $x_0 = 0$. Примеры такого рода см. ниже.

Докажем, (2.2.4) например, в случае (2.2.6). Согласно признаку Коши, ряд (2.2.2) сходится если

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x|^n} < 1, \quad \text{т.е.} \quad |x| \cdot K < 1, \tag{2.2.7}$$

откуда получаем при $|z| < \frac{1}{K}$ сходимость ряда (2.2.2), а значит и абсолютную сходимость ряда (2.2.1). В то же время при $|x| > \frac{1}{K}$ из доказательства признака Коши следует не только расходимость ряд из модулей (2.2.2), но и (см. пп. 1.4.1, 1.4.2) расходимость (2.2.1).

Итак, именно число $R = \frac{1}{K}$ оказалось радиусом сходимости согласно определению *R*.

Отметим также, что при $K = 0$ условие (2.2.7) выполнено при всех *x* (т.е. $R = \infty$), а при $K = \infty$ условие (2.4.6) не выполнено при любом $x \neq 0$; точка же $x_0 = 0$, как упоминалось, служит точкой сходимости любого степенного ряда ($R = 0$). Утверждение п. 2.2.4 полностью доказано.

2.2.5. Из результатов п.2.2.3 вытекает, что степенной ряд (2.2.1) мажорируем на всяком отрезке вида $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$, а значит, равномерно сходится на этом отрезке. Отсюда вытекает возможность почленного интегрирования ряда по всякому отрезку, расположенному внутри интервала сходимости (см. п.2.1.4).

Возможность же почленного дифференцирования будет обеспечена равномерной сходимостью ряда составленного из производных; см. утверждение п. 2.1.4 . Достаточно поэтому установить мажорируемость ряда

$$(a_0)' + (a_1 x)' + (a_2 x^2)' + \ldots + (a_n x^n)' + \ldots,$$

т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{2.2.8}$$

на любом отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$. Доказательство мажорируемости проведем в предположении, что существует предел, обозначенный через D в (2.2.5); следовательно $R = \frac{1}{D}$.

Определим радиус сходимости $\widetilde{R}$ ряда (2.2.8). Соответствующее число

Даламбера имеет вид

$$\widetilde{D} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,|\,a_{n+1}\,|}{n\,|\,a_n\,|} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|\,a_{n+1}\,|}{|\,a_n\,|} = 1 \cdot D,$$

следовательно, $\widetilde{R} = \dfrac{1}{D}$. Таким образом, $\widetilde{R} = R$, и интервалы сходимости рядов (2.2.8), (2.2.1) совпадают. Окончательно, имеем мажорируемость ряда (2.2.8) на всяком отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$, а значит и возможность почленного дифференцирования исходного степенного ряда (2.2.1).

2.2.6. Если рассуждения п. 2.2.5 применить к ряду из производных (2.2.8), то получаем возможность и его почленного дифференцирования в интервале $(-R, R)$. Повторяя и далее указанные рассуждения, приходим к следующему важному выводу: *степенной ряд, обладающий суммой* $S(x)$ *в некотором интервале сходимости, можно почленно дифференцировать сколь угодно много раз в этом интервале; при этом сумма ряда из* n*-ых производных совпадает с* $S^{(n)}(x)$.

2.2.7. *Примеры.*

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{-nx}\ ,\ \ a > 1.$$

Решение. Имеем функциональный ряд, который становится степенным после замены переменной $y = a^{-x}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n .$$

Получена сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем y. Ряд сходится тогда и только тогда, когда $|\,y\,| < 1$. Значит, область сходимости определяется неравенством $a^{-x} < 1$, откуда при $a > 1$ должно выполняться неравенство $-x < 0$, так что $x > 0$. Окончательно, получили, что область сходимости ряда есть полупрямая $x > 0$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{nx^n}.$$

Решение. Если положить $X=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, то получим степенной ряд действительной переменной X

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n}X^n$$

с коэффициентами вида $a_n=\frac{5^n}{n}$. Число Даламбера находим в виде

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n5^{n+1}}{(n+1)5^n}=5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})}=5,$$

откуда $R=\frac{1}{5}$, и интервал абсолютной сходимости ряда определяется соотношением

$$-\frac{1}{5}<X<\frac{1}{5};$$

вне этого интервала степенной ряд расходится. Исследуем концы интервала.

а) $X=\frac{1}{5}$. В этой точке значение общего члена ряда

$$f_n(X)=\frac{5^n}{n}X^n \text{ есть величина } f_n(\frac{1}{5})=\frac{5^n}{n}(\frac{1}{5})^n=\frac{1}{n},$$

так что приходим к числовому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

(гармонический ряд), который расходится.

б) $X=-\frac{1}{5}$. Имеем

$$f_n(-\frac{1}{5})=\frac{5^n}{n}\frac{(-1)^n}{5^n}=\frac{(-1)^n}{n};$$

полученный знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

является условно сходящимся.

Итак, область сходимости степенного ряда определяется соотношением $-\frac{1}{5}\le X<\frac{1}{5}$. Поскольку $X=\frac{1}{x}$, то остается решить двойное неравенство $-\frac{1}{5}\le\frac{1}{x}<\frac{1}{5}$. Можно записать, что $\frac{1}{|x|}<\frac{1}{5}$ либо $\frac{1}{x}=-\frac{1}{5}$. В первом случае имеем $|x|>5$, что равносильно совокупности двух неравенств: $x>5$, $x<-5$, во втором – $x=-5$. Окончательно имеем область сходимости в виде

$$x\in(-\infty,-5]\bigcup(5,+\infty).$$

2.3. Представление функций бесконечными многочленами

2.3.1. Одной из задач, рассмотренных выше, была *задача о представлении данной функции* действительного переменного $y=f(x)$ *суммой соответствующего степенного ряда, т.е. бесконечным многочленом.* Такой ряд имеет вид

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots;\quad n=0,1,\ldots \qquad (2.3.1)$$

Как отмечалось выше, в интервале сходимости $(-R,R)$ записанный ряд можно почленно дифференцировать сколь угодно много раз. Поскольку $f(x)$ – его сумма, то она необходимо должна быть дифференцируема сколь угодно много раз. Докажем, что в этом случае разложение (2.3.1) принимает вид

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2.3.2)$$

Действительно,

а) полагая $x=0$ в (2.3.1), получаем $a_0=f(0)$;

б) почленно дифференцируя (2.3.1) и снова полагая $x=0$, имеем $a_1=f'(0)$;

в) в результате второго почленного диффренцирования (2.3.1) при $x=0$

получаем $f''(0) = 2!a_2$, откуда $a_2 = \frac{f''(0)}{2!}$;

…г) на (n+1)-ом шаге ($n = 0,1,2,...$) приходим к равенству

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Учитывая вид полученных коэффициентов a_n, мы и получаем (2.3.2); говорят также, что функция $f(x)$ разложена в ряд по степеням x, или, коротко, в ряд Маклорена.

2.3.2. Имеет место следующее достаточное условие разложимости функций действительного переменного в ряд Маклорена: *если для всех значений* $n = 1,2,...$ *существует постоянная* $C > 0$*, такая что в некоторой окрестности точки* $x_0 = 0$ *выполняется неравенство*

$$|f(x)| + |f^{(n)}(x)| \le C,$$

то функция $f(x)$ в этой окрестности есть сумма соответствующего ряда Маклорена (2.3.2).

2.3.3. Нетрудно поверить, что это утверждение применимо к функциям $f(x) = e^x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ во всякой окрестности точки $x_0 = 0$. Если вычислить коэффициенты ряда Маклорена для каждой из них, то получим, что при всех значениях действительного аргумента имеют место разложения:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \tag{2.3.3}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \tag{2.3.4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + ... \tag{2.3.5}$$

Остановимся на обосновании, например, соотношения (2.3.3). Имеем

$$f'(x) = f''(x) = ... = f^{(n)}(x) = ... = e^x, \ n = 1,2,...,$$

а тогда

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = ... = 1.$$

Подставляя полученные значения в (2.3.2), мы приходим к (2.3.3). Для доказательства сходимости ряда (2.3.3) при каждом x к сумме $f(x)=e^x$ заметим, что в любом интервале вида $(-R_0, R_0)$ имеет место соотношение

$$|f(x)|+|f^{(n)}(x)|\le C_0,\ n=1,2,...,$$

где постоянная $C_0=e^{R_0}$. На основании сформулированного выше достаточного условия разложимости функции в ряд Маклорена тогда *во всяком* фиксированном интервале ряд (2.3.3) имеет своей суммой именно $f(x)=e^x$. Ввиду произвольности выбранного интервала разложение (2.3.3) имеет место при всех действительных x, что и утверждалось.

2.3.4. Имеют место также следующие разложения (при указанных значениях аргумента x):

1) «биномиальное» разложение (разложение произвольной степени двучлена)

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha} &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+...\\ &+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...;\ x\in(-1;1)\ ;\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

в частности (при $\alpha=-1$),

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...+(-1)^n x^n+...;\ x\in(-1;1); \tag{2.3.7}$$

2)разложение логарифмической функции

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{n+1}+...;\ x\in(-1;1]. \tag{2.3.8}$$

Установим представления (2.3.7) и (2.3.8). Правая часть (2.3.7) есть сумма бесконечной геометрической прогрессии (см. п. (1.2)) с первым членом, равным 1, и знаменателем $q=-x$. Её сумма есть

$$S=\frac{1}{1-(-x)}=\frac{1}{1+x},\ \ -1<-x<1,\ \text{т.е. } x\in(-1;1),$$

чем и доказано (2.3.7).

Теперь почленно проинтегрируем степенной ряд (2.3.7); имеем для каждого

$x \in (-1; 1)$:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{x+1}\,dx = \int_0^x (1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots)dx =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots;$$

Таким образом, мы пришли к соотношению (2.3.8) при $x \in (-1; 1)$. Можно также доказать, что (2.3.8) остается справедливым и при $x = 1$.

2.3.4. Указанные разложения имеют весьма широкий спектр применений. С их помощью можно:

а)получать разложения других элементарных функций;

б)получать приближенные значения трансцендентных функций;

в)вычислять (записывать в форме ряда) «неберущиеся» интегралы и др.

Пример 1. Записать в виде суммы степенного ряда

$$Y(x) = \int_0^x e^{-x^2}\,dx.$$

Решение. Как известно из математического анализа, первообразные функции $y = e^{-x^2}$ (и, в частности, интеграл с переменным верхним пределом $Y(x)$) не выражаются через элементарные функции. Поэтому указанная постановка задачи – получить выражение первообразной хотя бы в виде суммы степенного ряда – является вполне уместной. Начнем с разложения (2.3.3), которое имеет место *при всех значениях аргумента* x, и в частности, когда в роли аргумента выступает $(-x^2)$. Имеем тогда

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \ldots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \ldots,$$

или

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, +\infty).$$

В результате почленного интегрирования (от 0 до x) получаем

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x \frac{x^4}{2!}dx - \ldots + (-1)^n \int_0^x \frac{x^{2n}}{n!}dx + \ldots$$

или

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5\cdot 2!}x^5 - \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!}x^{2n+1} + \ldots, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Итак, данная функция $Y(x)$ представлена в виде суммы степенного ряда при всех действительных значениях x.

Пример 2. Разложить функцию в ряд Маклорена

$$y = \frac{x}{2} - \ln(1 - \frac{x}{2}).$$

Решение. За основу, очевидно, следует взять разложение (2.3.8). Заменяя в нем x на $-\frac{x}{2}$, и при этом требуя, чтобы аргумент содержался в интервале (-1, 1], то есть

$$-1 < -\frac{x}{2} \le 1, \text{ или } -2 \le x < 2,$$

получаем:

$$\ln(1-\frac{x}{2}) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 - \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\left(-\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \ldots .$$

Чтобы получить разложение функции $y = \frac{x}{2} - \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$, последовательно рассмотрим $\left(-\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)\right)$ и $y = -\ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}$. Умножим обе части последнего разложения на (-1) и прибавим к обеим частям выражение $\frac{x}{2}$:

$$\frac{x}{2} - \ln(1-\frac{x}{2}) = x + \frac{x^2}{2\cdot 2^2} + \frac{x^3}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} + \ldots .$$

Это соотношение справедливо при $-2 \le x < 2$.

Пример 3. Представить интеграл в виде суммы числового ряда, почленно проинтегрировав степенной ряд подинтегральной функции. Найти приближенное значение интеграла, ограничившись суммой первых трех членов полученного ряда (члены вычислять с точностью до 0,001)

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2 - x^2}{x^6}dx.$$

Решение. Задачу можно решить по следующей схеме:

а) воспользоваться разложением $y = \sin x,$ заменив в нем x на x^2;

б) прибавить ($-x^2$) к обеим частям полученного разложения;

в) умножить обе части разложения на $\frac{1}{x^6}$ (см. замечание ниже);

г) почленно проинтегрировать полученный ряд по отрезку [0; 1];

д) произвести приближенные вычисления.

Последовательно имеем:

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{\left(x^2\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots; x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x^2 - x^2 = -\frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} + \ldots;$$

$$\frac{\sin x^2 - x^2}{x^6} = -\frac{1}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{4n-4}}{(2n+1)!} + \ldots;$$

$$\tau = \int_0^1 \frac{\sin x^2 - x^2}{x^6} dx = -\int_0^1 \frac{1}{3!} dx + \int_0^1 \frac{x^4}{5!} dx - \int_0^1 \frac{x^8}{7!} dx + \ldots + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{4n-4}}{(2n+1)!} dx + \ldots.$$

Осталось вычислить интегралы:

$$\tau = -\frac{1}{3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{9 \cdot 7!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(4n-3)(2n+1)!} + \ldots;$$

$$\tau \approx -0{,}167 + 0{,}002 - 0{,}000 = -0{,}165.$$

Замечание. В точке $x = 0$ значение функции $y = \frac{\sin x^2 - x^2}{x^6}$ доопределена суммой соответствующего степенного ряда, то есть значением $\left(-\frac{1}{6}\right)$.

Пример 4. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 1 + e^{-y} + xy \\ y(0) = 0. \end{cases}.$$

Решение. Разложение в степенной ряд всякой (дифференцируемой сколь угодно много раз) функции (если это разложение возможно), должно иметь вид

(8). Поэтому достаточно найти лишь его коэффициенты

$$a_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!},$$

то есть определить числа $y(0), y'(0), y''(0), y'''(0), y''''(0)$ и т.д. Значение $y(0) = 0$ - дано; зависимость y' от x и y известна:

$$y' = 1 + e^{-y} + xy\,.$$

В точке $x = 0$ имеем:

$$y'(0) = 1 + e^{-y(0)} + 0 \cdot y(0) = 1 + e^0 = 2.$$

Далее,

$$y'' = \left(1 + e^{-y} + xy\right)' = 0 + e^{-y}(-y)' + x'y + xy' = -e^{-y}y' + y + xy'$$

(использована формула дифференцирования сложной функции, поскольку y является функцией от x). Подставляя $x = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ получаем:

$$y''(0) = -e^0 \cdot 2 + 0 + 0 = -2\,.$$

Осталось найти еще один ненулевой коэффициент. Имеем:

$$\begin{aligned} y''' = \left(-e^{-y}y' + y + xy'\right) = -\left(e^{-y}(-y)'y' + e^{-y}(-y')'\right) + y' + x'y' + x(y')' = \\ = e^{-y}(y')^2 - e^{-y}y'' + 2y' + xy'', \end{aligned}$$

и

$$y'''(0) = e^0 \cdot 2^2 - e^0(-2) + 2 \cdot 2 + 0 = 10.$$

Подставляя найденные значения в разложение (2.3.2), получаем

$$y(x) = 2x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \ldots\,.$$

2.4. Комплексные числа.

Функции комплексного переменного

В настоящем параграфе мы рассматриваем ряды комплексных членов. Напомним поэтому читателю основные понятия теории комплексных чисел.

2.4.1. В выбранной прямоугольной системе координат точка (1,0) соответствует числу 1 на числовой оси абсцисс (оси действительных чисел), а точка (0,1) – числу 1 на оси ординат. Чтобы отличать по написанию эти две единицы, последнюю обозначим буквой i и назовем мнимой единицей. Итак, точка (0,1) отождествляется с мнимой единицей; всякое же другое число оси ординат, отвечающее точке $(0,y)$, теперь естественно записать в виде yi и назвать чисто мнимым числом; сама ось OY будет далее называться мнимой осью (тогда как OX– действительная ось).

Произвольную упорядоченную пару (x,y) действительных чисел («комплекс» из двух действительных чисел), соответствующую точке (x,y) координатной плоскости, назовем комплексным числом.

Перейдем к так называемой алгебраической записи (форме) комплексного числа, употребив, по аналогии с разложением радиус-вектора $\bar{z} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$ по базису $\{\bar{e}_1\ \bar{e}_2\}$ (где $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ – единичные направляющие вектора координатных осей) для *точки* z с координатами (x,y) запись $z = x + y \cdot i$.

Итак, между точками координатной плоскости и комплексными числами вида установлено взаимно однозначное соответствие. Сама же плоскость (со введенной в ней прямоугольной системой координат) теперь будет называться *комплексной* плоскостью. В частности, для действительного числа x естественна запись $x = x + 0 \cdot i$, что соответствует точке $(x,0)$; и теперь мы не делаем различия между действительными числами x и комплексными числами вида $x + 0 \cdot i$. Для чисто мнимого yi, соответствующего точке $(0,y)$, употребима запись $y \cdot i = 0 + y \cdot i$, т.е. любое $y \cdot i \in \mathbf{C}$. Таким образом, множество **C** всех комплексных чисел содержит своим подмножеством R (т.е. множество всех действительных чисел).

Числа вида $z = x + y \cdot i$ и $\bar{z} = x - y \cdot i$ называются *комплексно-сопряженными*; они изображаются точками, симметричными относительно оси OX. Модулем комплексного числа называется длина (модуль) радиус - вектора точки (x,y), т.е.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

В частности, модуль действительного числа $x = x + 0 \cdot i$ есть $\sqrt{x^2}$, т.е. он равен абсолютной величине числа x; аналогично, $|yi| = \sqrt{y^2} = |y|$.

Действительной частью числа $z = x + yi$ называется x, а мнимой частью – число y; применяем обозначения $x = \mathrm{Re}z$, $y = \mathrm{Im}z$.

Комплексные числа $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ называются равными, если совпадают их действительные и мнимые части. Геометрически, соотношение $z_1 = z_2$ означает совпадение соответствующих точек комплексной плоскости.

Комплексные числа не сравниваются, т.е. во множестве **C** не вводятся отношения "больше" и "меньше".

Выше мы отожествили любое комплексное число $z = x + yi$ с радиус - вектором точки (x, y). В связи с этим операция сложения и вычитания комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ вводятся по аналогии с такой же операцией над векторами, которая, в свою очередь, выполняется *покоординатно*. Так, по определению

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

Другими словами, сложение и вычитание комплексных чисел производят по тем же правилам, по которым эти действия производят над многочленами.

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$ определим в виде

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i$$

Имеем, в частности, $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$; следовательно, $i^2 = 0 - 1 + 0i$, $i^2 = -1$.

В связи с таким свойством числа i его удобно *обозначать* в виде $i = \sqrt{-1}$; ясно, что $i \notin \mathbf{R}$; теперь становится понятно, почему число i названо *мнимой* единицей. Заметим, что умножение комплексных чисел выполняется по правилу умножения многочленов с заменой i^2 на –1.

Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Именно, $z = \dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = z \cdot z_2$, где $z_2 \neq 0$.

Решая конкретные примеры, можно пользоваться способом одновременного умножения числителя и знаменателя дроби на число, сопряженное знаменателю.

2.4.2. Пусть G - некоторое множество комплексных чисел. Говорят, что на множестве G (области определения G) задана *функция* вида $w = f(z)$, если каждому $z \in G$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел w. В последнем случае мы говорим, что функция f *многозначна.*

Если, в частности, все значения w - действительные числа, то говорим о *действительнозначной функции комплексного переменного.* Если G – множество на "действительной оси" (оси абсцисс), то $w = f(x)$ - *комплекснозначная* функция действительного переменного.

Поскольку $w = f(z) = f(x + yi)$ определяется парами значений (x,y), то можно говорить об f как функции двух действительных переменных, заданной на некотором множестве G. В то же время $w = u + vi$, тогда $u = \mathrm{Re} f(x + yi) = u(x,y)$, $v = \mathrm{Im} f(x + yi) = v(x,y)$ – две действительнозначные функции действительных переменных x и y. Таким образом,

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \qquad (2.4.1)$$

т.е. задание $f(z)$ есть задание пары функций $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$, и этим облегчаются многие формулировки и доказательства в теории функций комплексного переменного.

Комплекснозначная функция вида $w = f(n)$, $n \in N$ называется последовательностью комплексных чисел. Множество ее значений имеет вид $\{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$. Часто термин «последовательность» употребляется и для обозначения множества $\{z_n\}$ всех получаемых значений функции.

Согласно (2.4.1)

$$w = f(n) = w_n = u_n + iv_n, \quad n = 1,2,\ldots,$$

т.е. одновременно с $f(n)$ задаются две последовательности действительных чисел $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$.

Ниже нам потребуется степенная функция комплексного переменного, т.е. однозначная функция вида $w = z^n$, $n \in Z$.

2.4.3. Определение предела последовательности комплексных чисел вводится так же, как в случае последовательности действительных чисел: число (комплексное) A называется пределом последовательности $\{z_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $|z_n - A| < \varepsilon$ для всех номеров $n > N$; применяют обозначение

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

Описанное «предельное поведение» последовательности $\{z_n\}$ равносильно, очевидно, выполнению соотношения

$$\lim_{n\to\infty} |z_N - A| = 0. \qquad (2.4.2)$$

В свою очередь, если $z_n = u_n + iv_n$ (т.е. u_n и v_n – соответственно, действительная мнимая части z_n) и $A = a + ib$, то (2.4.2) равносильно одновременному выполнению соотношений

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = b.$$

Это утверждение очевидным образом вытекает из оценки (см. (2.4.2))

$$\max\{|u_n - a|, |v_n - b|\} \le \sqrt{(u_n - a)^2 + (v_n - b)^2} = |z_n - A|.$$

Говорят, также, что последовательность w_n имеет бесконечный предел, и записывают

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \infty,$$

если

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| = +\infty.$$

2.4.4. Пусть функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0 (т.е. в некотором круге с центром в z_0). Говорят, что число w_0 есть предел функции в этой точке, если

$$\lim_{|z-z_0|\to 0} |f(z) - w_0| = 0. \qquad (2.4.3)$$

Предельный переход вида (2.4.3) равносилен тому, что одновременно

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y)=u_0,\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)=v_0.$$

Другими словами, предельный переход совершается по отдельности в действительной и мнимой части функции $w=f(z)$. Отсюда вытекает, что простейшие свойства пределов (вынесение постоянного множителя за знак предела, предельный переход в сумме, произведении и т.п.) переносятся и на случай функций комплексного переменного.

В теории функций комплексного переменного вводятся также определения предела функции на бесконечности и определение бесконечного предела, на которых мы здесь не останавливаемся.

2.4.5. Определение производной формально не отличается от случая функций действительного переменного. Однако, на самом деле, условие дифференцируемости функций комплексного переменного является более ограничительным в сравнении с упомянутым случаем, что будет ясно из дальнейшего.

Пусть однозначная функция $w=f(z)$ определена в точке $z=x+yi$ и некоторой ее окрестности. Пусть x и y получают, соответственно, приращения Δx и Δy. Тогда $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ - соответствующее приращение переменной z. При переходе от точки z к точке $z+\Delta z$ (значения Δx, Δy предполагаем столь малыми, что точка $z+\Delta z$ расположена в той же окрестности) значение $w=f(z)$ получает некоторое приращение $\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$.

Определение. Пусть существует предел вида

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Он называется производной функции $f(z)$ в точке z и обозначается $f'(z)$ либо $w', \frac{dw}{dz}, \frac{df}{dz}$. Функция же $f(z)$ называется дифференцируемой в точке z.

Заметим, что в случае функции действительного переменного $\varphi(x)$ существование производной есть существование предела $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$, когда Δx приближается к нулю вдоль оси абсцисс. В случае же комплексной переменной Δz приближается к нулю в комплексной плоскости по *любому* пути. Это и является причиной появления некоторых новых дополнительных свойств дифференцируемых функций в сравнении со случаем функций действительного переменного.

Как и в случае функций действительного переменного, легко доказать, что дифференцируемость в точке z влечет за собою *непрерывность* $f(z)$ в той же точке.

2.4.6. Пусть $z = x + iy$, и $w = f(z)$ определена в точке z и в некоторой ее окрестности. Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Необходимое условие дифференцируемости f в точке z содержится в следующем утверждении.

Теорема. Пусть $f(z)$ дифференцируема в точке z. Тогда существуют частные производные функций u и v то обеим переменным в точке (x,y), причем в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{2.4.4}$$

Соотношения (2.4.4) называются условиями Коши-Римана.

Можно доказать, что для дифференцируемой в точке z функции f не только существуют указанные в (2.4.4) частные производные, но функции двух переменных u и v *дифференцируемы* в точке (x, y).

Утверждение, обратное теореме 1, будет следующим: если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) и выполнены условия Коши–Римана (2.4.4), то $f'(z)$ существует в точке $z = x + iy$.

Замечание. В процессе доказательства теоремы 1 устанавливается, что производную $f'(z)$ можно вычислить в виде

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}, \text{ либо } f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Определение. Функция $w=f(z)$, дифференцируемая в точке z_0 и некоторой ее окрестности, называется *аналитической* (*или голоморфной*) *в точке* z_0.

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области *G*, называется *аналитической* (*голоморфной*) *в этой области.*

Точки z комплексной плоскости, в которых однозначная $f(z)$ является аналитической, называются *правильными* точками этой функции, а все остальные точки (в частности, те, где $f(z)$ не определена) – *особыми* для $f(z)$.

Как указано выше, критерием аналитичности $f(z)$ в данной точке z (в данной области *G*) является дифференцируемость u, v и выполнимость условий Коши–Римана (2.4.4) в этой точке и некоторой ее окрестности (в области *G*).

Примеры. 1) Докажем, что $w=z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости. Действительно,

$$w=(x+yi)^2=x^2-y^2+2xyi, \text{ т.е. } u(x,y)=x^2-y^2, \ v(x,y)=2xy.$$

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x; \ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y; \ \frac{\partial v}{\partial x}=2y; \ \frac{\partial v}{\partial y}=2x.$$

Условия (2.4.4) выполнены, очевидно, при всех x и y, т.е. во всей плоскости. Следовательно, $w=z^2$ аналитична во всей комплексной плоскости.

2) Рассмотрим $w=\bar{z}^2$. Имеем:

$$w=(x-yi)^2=x^2-y^2-2xyi, \text{ т.е. } u=x^2-y^2, \ v=-2xy.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x; \ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y; \ \frac{\partial v}{\partial x}=-2y; \ \frac{\partial v}{\partial y}=-2x.$$

Проверяем условия Коши–Римана (2.4.4):

$$\begin{cases} 2x = -2x; \\ -2y = 2y, \end{cases} \quad \text{отсюда получаем } x = y = 0.$$

Итак, в единственной точке $z = 0$ условия Коши–Римана выполнены, и, следовательно, в этой точке $w = \bar{z}^2$ имеет производную. Однако, функция ни в одной точке не аналитична (точка дифференцируемости – единственная, и не существует ее окрестности, где дифференцируемость сохраняется).

2.5. Степенные ряды комплексного переменного

2.5.1. Общие положения теории числовых рядов в случае комплексных членов аналогичны соответствующим понятиям и фактам рядов действительных чисел. Пусть дана бесконечная последовательность комплексных чисел $w_1, w_2, w_3, ..., w_n, ...$. Формально составленная бесконечная сумма вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n + ...$$

или, коротко,

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n \qquad (2.5.1)$$

называется числовым рядом комплексных членов; общий член последовательности $\{w_n\}$ называется общим членом ряда (2.5.1).

Обозначим через

$$S_n = w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n$$

n - ую частичную сумму ряда (2.5.1); при этом, по определению, $S_1 = w_1$.

Если существует предел вида

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

то числовой ряд (2.5.1) называется сходящимся, а в противном случае – расходящимся.

Число S назовем суммой сходящегося ряда; говорят также, что ряд (2.5.1) сходится к сумме S и применяют запись

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} w_n .$$

2.5.2. Установим некоторые свойства сходящихся рядов. Так, на случай рядов комплексных чисел легко переносятся свойства п. 1.1.2 – 1.1.3.

Пусть теперь $w_n = u_n + iv_n$, $n = 1,2,...$, так что u_n - действительная а v_n – мнимая части w_n . Ряд (2.5.1) тогда можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + iv_n).$$

Используя только что отмеченные свойства, получаем следующее утверждение.

Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \ \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \qquad (2.5.2)$$

составленные из действительных и мнимых частей последовательности w_n, то сходится и ряд (2.5.1).

Верно и обратное: если сходится ряд (2.5.1), то имеет место сходимость обоих рядов (2.5.2).

2.5.3. Для ряда (2.5.1) сохраняется необходимый признак сходимости ряда: если ряд сходится, то существует предел (при $n \to \infty$) его общего члена w_n, причем

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0. \qquad (2.5.3)$$

Обратное утверждение неверно. Действительно, ряд с общим членом $w_n = \frac{1}{n} + i \cdot 0$ является расходящимся гармоническим рядом, причем для таких w_n выполнено соотношение (2.5.3). Значит, утверждение, обратное сформулированному в теореме, неверно.

Сохраняется, очевидно, и достаточный признак расходимости: если

$$\lim_{n\to\infty} |w_n| \neq 0$$

(или если этот предел не существует), то ряд расходится.

Наряду с (2.5.1) рассмотрим ряд из модулей его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} | w_n | . \tag{2.5.4}$$

Имеет место следующий аналог теоремы п. 1.7: *если сходится ряд* (2.5.4)*, то сходится и ряд* (2.5.1).

Как и в случае рядов с действительными членами, ряд (2.5.1) называется в этом случае абсолютно сходящимся. Заметим, что утверждение, обратное сформулированному, неверно.

Выше показано (на примере ряда из действительных чисел), что числовой ряд может сходиться, тогда как ряд из модулей расходится. В этом случае сходимость ряда (2.5.1) называют условной.

Теорема. Ряд (2.5.1) абсолютно сходится тогда и только тогда, когда абсолютно сходятся оба ряда (2.5.2).

Доказательство. Во первых, из сходимости (2.5.4) вытекает абсолютная сходимость обоих рядов (2.5.2), поскольку $| u_n | \le | w_n |, | v_n | \le | w_n |$. Остается установить обратное утверждение. Заметим, что при каждом n наибольшее из двух чисел $| u_n |$ и $| v_n |$ не превосходит их суммы $| u_n | + | v_n |$, а тогда

$$| w_n | = \sqrt{u_n^2 + v_n^2} \le \sqrt{(max\{| u_n |,| v_n |\})^2 + (max\{| u_n |,| v_n |\})^2} =$$

$$= (max\{| u_n |,| v_n |\})\sqrt{2} \le (| u_n | + | v_n |)\sqrt{2}.$$

Если теперь абсолютно сходятся оба ряда (2.5.2), то будет сходящимся и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (| u_n | + | v_n |)\sqrt{2} .$$

Согласно теореме 1 сравнения будем иметь тогда сходимость (2.5.4), чем и завершается доказательство теоремы.

Как следует из результата теоремы , достаточные условия сходимости ряда из модулей (2.5.4) являются одновременно и достаточными условиями сходимости ряда комплексных чисел (2.5.1). Поэтому признаки сходимости знакоположительных рядов, которым мы выше уделили столь значительное внимание, выступают здесь признаками сходимости (абсолютной) рядов с комплексными членами. Уточним последнюю мысль.

Пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{| w_n |}$$

(будем называть его числом Коши). Если $K<1$, то ряд (2.5.1) сходится абсолютно. Если же $K>1$, то ряд (2.5.1) расходится.

Стоит отметить, что при $K>1$ ряд из модулей (2.5.4) расходится ввиду того, что не выполнен необходимый признак сходимости, но тогда не могут стремиться к нулю и члены w_n; таким образом и ряд (2.5.1) оказывается расходящимся.

Аналогично обстоит дело и с "числом Даламбера"

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{| w_{n+1} |}{| w_n |}:$$

если $D<1$, то ряд (2.5.1) сходится абсолютно; если же $D>1$, то (2.5.1) расходится.

2.5.4. Пусть $\{z^n\}$, $n = 1,2,\ldots,$ - последовательность степенных функций, $\{\alpha_n\}$, $n = 0,1,\ldots$ - последовательность комплексных чисел.

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots \tag{2.5.5}$$

называется *степенным*; для (2.5.5) употребляем также обозначение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке $z_0 = 0$, т.к. все его частичные суммы $S_n(z_0) = a_0$, и, следовательно, предел последовательности $\{S_n(z_0)\}$ существует и равен a_0. Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (2.5.5) сходится в некоторой точке $z_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится в круге $U(0; |z_0|) = \{z\colon |z| < |z_0|\}$. Если же z_0' – точка расходимости, то ряд (2.5.5) расходится при всех z таких, что $|z| > |z_0'|$.

Доказательство аналогично случаю степенных рядов действительного переменного.

2.5.5. Из теоремы Абеля вытекает, что всякая точка сходимости z_0 степенного ряда ближе к началу координат, чем любая точка расходимости (если такая имеется). Следовательно, должно существовать некоторое "пограничное" расстояние R, такое что при $|z| < R$ (т.е. в каждом таком круге) имеет место абсолютная сходимость, а при $|z| > R$ (вне круга) – расходимость ряда (2.5.5).

Число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, область $U(0,R)$ – его кругом сходимости, см. рис. 2.5.1.

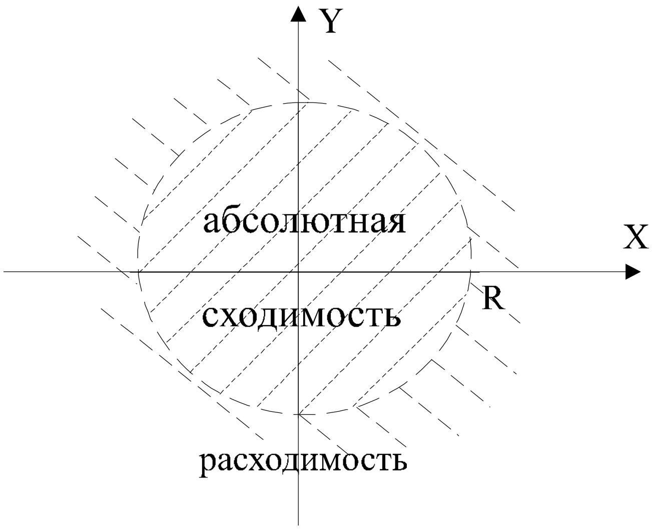

Рис. 2.5.1

При всяком $0 < \rho < R$ ряд (2.5.5) будет сходится и равномерно в круге $|z| \le \rho$ (определение равномерной сходимости дословно переносится на случай степенных рядов комплексного переменного).

Заметим, что если функция $\varphi(z)$ равномерно по модулю ограничена, в круге $|z| \le \rho$ т.е. если существует $M = const$, такая, что $|\varphi(z)| \le M$ в этом круге, то ряд

$$C_0\varphi(z) + C_1\varphi(z)z + \ldots + C_n\varphi(z)z^n + \ldots \tag{2.5.6}$$

остается мажорируемым в том же круге. Действительно, мажорантным для (2.5.6) является ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot a_n ,$$

если ряд с общим членом a_n будет мажорантным для (2.5.1).

Радиус сходимости R степенного ряда (2.5.1) можно найти по одной из формул

$$R = \frac{1}{D} \quad \text{или} \quad R = \frac{1}{K}, \qquad (2.5.7)$$

если существует соответствующее "число Даламбера"

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

или "число Коши"

$$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} .$$

Формулы (2.5.7) остаются справедливыми, если $D = 0$ или $(K = 0)$ – тогда $R = \infty$, т.е. областью сходимости ряда является вся комплексная плоскость. Если же $D = +\infty$ $(K = +\infty)$, то $R = 0$, т.е. "областью" сходимости является единственная точка $z_0 = 0$.

2.5.6. Рассмотрим теперь ряд по степеням разности $(z - z_0)$, где z_0 – данное комплексное число:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1 (z - z_0) + \ldots + C_n (z - z_0)^n + \ldots \qquad (2.5.8)$$

Если произвести в (2.5.8) замену переменных $s = z - z_0$, то из результатов п. 2.5.5 будет вытекать, что *областью сходимости* (2.5.8) *является некоторый круг* $|z - z_0| < R$; имеют место также формулы (2.5.7) для радиуса сходимости.

2.6. Ряд Тейлора

2.6.1. Пусть $w = f(z)$ однозначна и аналитична в круге G с центром в некоторой точке z_0.

Поставим задачу: разложить $f(z)$ в ряд по степеням разности $(z - z_0)$. Подобная задача для функций действительной переменной при некоторых условиях на функцию (помимо дифференцируемости сколь угодно много раз) решалась в виде *ряда Тейлора*. При сформулированных выше условиях в каждой точке круга G *имеет место разложение*

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots \qquad (2.6.1)$$

2.6.2. При $z_0 = 0$ (2.6.1) называется рядом Маклорена:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \ldots \ .$$

2.7. Экспонента и тригонометрические функции

2.7.1. За основу их определений возьмем известные разложения функций действительного переменного e^x, $\sin x$, $\cos x$ в степенные ряды. Формально заменив в них x на z, положим по определению:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots; \qquad (2.7.1)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots; \qquad (2.7.2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots . \qquad (2.7.3)$$

Каждый из указанных рядов абсолютно сходится во всей комплексной плоскости, так как "число Даламбера" всякий раз равно нулю, и, следовательно, радиус сходимости $R = \infty$. Убедимся в этом, например, в случае (2.7.3): здесь $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$, а поэтому

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2(n+1))!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}=0,$$

что и утверждалось.

Итак, при всех z суммы рядов (2.7.1) – (2.7.3) определены. В частности, для $z=x+i\cdot 0$ (на действительной оси) имеем знакомые нам трасцендентные функции действительного переменного.

Определим также логарифмическую функцию в виде

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^n\,\frac{z^{n+1}}{n+1}+\ldots,\quad |\,z\,|<1.$$

2.7.2. Имеет место следующая *формула Эйлера*

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z, \tag{2.7.4}$$

устанавливающая неожиданную связь между показательной и тригонометрическими функциями. Для доказательства (2.7.4) достаточно установить, что совпадают члены соответствующих рядов. Подставим iz вместо z в общий член (2.7.1); имеем:

$$e^{iz}=1+\frac{iz}{1!}-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\ldots+\frac{i^n z^n}{n!}+\ldots. \tag{2.7.5}$$

Если теперь все члены ряда (2.7.5) умножить на i и сложить затем соответствующие члены рядов полученного и (2.7.3), то будем иметь ряд, сходящийся во всей комплексной плоскости:

$$\cos z+i\sin z=1+iz-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\ldots+\left((-1)^m\,\frac{z^{2m}}{(2m)!}+(-1)^m\,i\,\frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)+\ldots. \tag{2.7.6}$$

В силу очевидного равенства $(\,i\,)^{2m}=\left(i^2\right)^m=(-1)^m$ имеем общий член ряда (2.7.6) в виде

$$\frac{(iz)^{2m}}{(2m)!}+\frac{(iz)^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

что и представляет собою сумму двух членов вида $\frac{i^n z^n}{n!}$, когда n пробегает последовательно четные $(n=2m)$ и нечетные $(n=2m+1)$ значения. Формула Эйлера доказана, так как члены, а значит и суммы рядов (2.7.5) и (2.7.6) совпали.

2.7.3. Поскольку формула (2.7.4) справедлива при всех z, то подставив в нее $(-z)$ вместо z, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i\sin z, \tag{2.7.7}$$

при этом четность косинуса $(\cos(-z)=\cos z)$ и нечетность синуса $(\sin(-z)=-\sin z)$ вытекают из определений (2.7.2) и (2.7.3).

Складывая и вычитая равенства (2.7.4) и (2.7.7), мы получаем:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\ \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}. \tag{2.7.8}$$

2.7.4. Свойство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}, \tag{2.7.9}$$

справедливое в случае действительных чисел z_1 и z_2, сохраняется и в общем случае. Доказательство (2.7.9) основано на перемножении степенных рядов для e^{z_1} и e^{z_2} по некоторому естественному правилу, которое мы здесь не рассматриваем.

2.7.5. Сохраняются также *привычные формулы* для тригонометрических функций:

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2; \tag{2.7.10}$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2; \tag{2.7.11}$$

их доказательство основано на соотношениях (2.7.8) и (2.7.9) и может быть предоставлено читателю.

Из (2.7.10) и (2.7.11) вытекают формулы приведения:

$$\cos(z+\pi) = -\cos z;\quad \sin(z+\pi) = -\sin z;$$

$$\cos\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin z;\ \sin\left(z+\frac{\pi}{2}\right) = \cos z,$$

а также 2π-периодичность функций $\sin z$ и $\cos z$; в силу (2.7.4) этим же периодом обладает и e^{iz}.

Сохраняется основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(для доказательства достаточно взять $z_1 = z,\ z_2 = -z$ в (2.7.10)) и все другие известные из тригонометрии формулы для синуса и косинуса. Однако, при переходе к комплексному аргументу может нарушаться привычная ограниченность единицей модулей значений $\sin z$ и $\cos z$. Например, согласно (2.7.8)

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$$

– действительное число, большее единицы.

2.7.6. По определению полагаем

$$\mathrm{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \mathrm{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

во всех точках z, где знаменатель соответствующей дроби не обращается в ноль.

Гиперболические синус и косинус определяются в виде

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Нетрудно проверить соотношения:

$$\mathrm{ch} z = \cos iz; \quad \mathrm{sh} z = -i \sin iz; \quad \mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1.$$

Таким образом, определив основные элементарные функции комплексного переменного путем перехода от степенных рядов действительной переменной к степенным рядам комплексной переменной, мы получили мощный инструмент исследования свойств этих функций.

Глава 3. Ряды Фурье

Разложения в степенные ряды, как выяснено выше, возможны лишь для "очень хороших" функций $f(x)$. Какие же последовательности элементарных функций пригодны для разложения, например разрывных функций (сигналы в электротехнике и т.п.)? Оказывается, система тригонометрических функций

$$\{\cos nx;\ \sin nx\}, \qquad n = 0,1,...$$

служит простым и практически всеобъемлющим средством подобных разложений. Эти и другие соображения приводят к рассмотрению тригонометрических рядов, изучаемых в настоящей главе.

3.1. Постановка задачи о разложении периодической функции в тригонометрический ряд

3.1.1 Математической моделью простейшего периодического процесса (простейшее гармоническое колебание) служит соотношение

$$y = A\sin(\omega t + \gamma), \qquad (3.1.1)$$

где y - величина отклонения точки от положения равновесия, A - амплитуда колебания, ω - круговая частота, γ - начальная фаза. Легко проверить, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период функции (3.1.1), т.е. период колебаний:

$$y(t+T) = A\sin\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \gamma\right) = A\sin(\omega t + \gamma + 2\pi) =$$
$$= A\sin(\omega t + \gamma) = y(t).$$

Функцию (3.1.1) в дальнейшем называем простейшей гармоникой, ее график изображен на рис. 3.1.1.

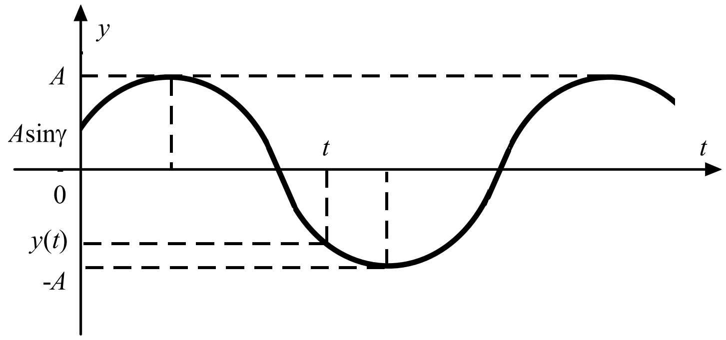

Рис. 3.1.1

3.1.2. Рассмотрим более сложный процесс - результат наложения нескольких простейших гармоник. Например, в случае наложения двух колебаний, имеем движение, осуществляемое по закону

$$y = A_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2). \tag{3.1.2}$$

Оно будет периодическим в том и только в том случае, если существует $T > 0$, для которого

$$T = n_1 \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{и} \quad T = n_2 \frac{2\pi}{\omega_2},$$

где n_1 и n_2 - натуральные числа, откуда

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}, \text{ т.е. } \omega_2 = n_2\omega \ \text{ и } \ \omega_1 = n_1\omega$$

с некоторыми $\omega > 0$. Следовательно, периодическое движение (3.1.2) происходит по закону

$$y = A_1 \sin(n_1 \omega t + \gamma_1) + A_2 \sin(n_2 \omega t + \gamma_2);$$

его период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

В частности, наложением двух простейших гармоник вызвано периодическое движение $(n_1 = 1, \ \ n_2 = 2)$

$$y = A_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + A_2 \sin(2\omega t + \gamma_2).$$

Складывая, подобным образом, m простейших гармоник вида

$$y_k = A_k \sin(k\omega t + \gamma_k),$$

получаем закон движения

$$y = \sum_{k=1}^{m} A_k \sin(k\omega t + \gamma_k)$$

с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

3.1.3. Возникает обратный вопрос: дано периодическое движение; можно ли его представить в виде суммы простейших гармоник (т.е. как сложное гармоническое колебание). Оказывается, практически всегда это возможно, если привлечь к рассмотрению бесконечные суммы, т.е. ряды из простейших гармоник. Более точно, если $f(t)$- заданная периодическая (с периодом T) функция, то речь идет о представлении вида

$$f(t) = \sum_{n} A_n \sin(n\omega t + \gamma_n),$$

где $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ и сумма, вообще говоря - бесконечная.

3.1.4. Сформулируем задачу в несколько ином виде. Для этого обозначим через ℓ полупериод $\ell = \dfrac{T}{2}$, тогда каждая гармоника имеет вид

$$A_n \sin\left(n\frac{\pi}{\ell}t + \gamma_n\right) = A_n \sin\gamma_n \cos\frac{\pi}{\ell}nt + A_n \cos\gamma_n \sin\frac{\pi}{\ell}nt =$$

$$= a_n \cos\frac{\pi}{\ell}nt + b_n \sin\frac{\pi}{\ell}nt,$$

где обозначены $a_n = A_n \sin\gamma_n, b_n = A_n \cos\gamma_n; n = 1,2,...$

Если дополнить сумму постоянным слагаемым, обозначив его через $\dfrac{a_0}{2}$, то речь идет о представлении 2ℓ- периодической функции в виде суммы ряда

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi}{\ell}nt + b_n \sin\frac{\pi}{\ell}nt. \qquad (3.1.3)$$

Точнее, возникает две задачи: а) каковы коэффициенты a_n, b_n ряда (3.1.3); б) при каких условиях (на функцию f) ряд (3.1.3) сходится при всех t и его сумма совпадает с $f(t)$.

Начнем с рассмотрения первой задачи.

3.2. Коэффициенты Фурье

3.2.1. Пусть функция f имеет период 2π (более общий случай изучим ниже) и существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx.$$

Соотношение (3.1.3) принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \qquad (3.2.1)$$

Идея нахождения коэффициентов a_n и b_n состоит в почленном интегрировании (3.2.1) после его умножения на любую из функций вида $\cos mx\,(m = 0,1,\ldots)$ и $\sin mx\ (m = 1,2,\ldots)$. Для самой возможности такого интегрирования предполагаем равномерную (на $[-\pi,\pi]$) сходимость соответствующих рядов; пусть, например, получающиеся a_n и b_n удовлетворяют условию сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|),$$

так что ряд (3.2.1) оказывается мажорируемым. Получив формулы для a_n и b_n при сделанных предположениях, сопоставим затем любой рассматриваемой функции ряд (3.2.1) с найденными коэффициентами.

Итак, приступаем к реализации нашего плана действий.

3.2.2. Потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. При любых целых неотрицательных n и m имеют место равенства:

а) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0$ и $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0$, если $n \neq 0$;

б) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0$;

в) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$;

г) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}.$

Доказательство состоит в непосредственном вычислении интегралов. Например, установим п. в), пользуясь формулой

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)).$$

Имеем:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)dx =$$

$$= \frac{1}{2(m-n)}\sin(m-n)x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2(m+n)}\sin(m+n)x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \qquad m \neq n,$$

так как $\sin k\pi = 0$ для любого целого k.

В частности, при $m = 0, n \neq 0$ получаем второе утверждение п. а). Если же $m = n,$ то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1 + \cos 2nx)dx = \frac{1}{2}x\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \pi,$$

чем и завершаем доказательство п. в). Остальные утверждения доказываются аналогично.

3.2.3. Почленно проинтегрируем равенство (3.2.1):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + b_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx.$$

Согласно утверждению а) леммы получаем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\cdot 2\pi + 0,$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx. \qquad (3.2.2)$$

3.2.4. Найдем коэффициенты a_n при $n = 1,2,\ldots$ Умножим обе части соотношения (3.2.1) на $\cos mx$, где m – произвольное натуральное число. Затем почленно проинтегрируем по отрезку $[-\pi, \pi]$. Получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\, dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \cos mx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx \cos mx\, dx. \tag{3.2.3}$$

Воспользуемся результатами п. а), б), в) леммы п.2. В правой части равенства (1.3.3) ненулевым будет только интеграл от произведения косинусов при $n = m$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx = a_m \pi;$$

переобозначая m через n, получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n = 1,2,... \tag{3.2.4}$$

3.2.5. Аналогично п.3.2.4, умножая обе части (3.2.1) на $\sin mx$ $(m = 1,2,\ldots)$, почленно интегрируя и пользуясь результатами п.п. а), б), г) леммы, получаем:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n = 1,2,\ldots \tag{3.2.5}$$

3.2.6. Итак, в предложениях п. 3.2.1, если разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд (3.2.1) возможно, то его коэффициенты имеют вид (3.2.2), (3.2.4), (3.2.5). Теперь каждой интегрируемой (с модулем) на $[-\pi,\pi]$ и 2π - периодической функции $f(x)$ сопоставим ряд вида (3.2.1), с коэффициентами (3.2.2), (3.2.4), (3.2.5). В этом случае (3.2.1) называется рядом Фурье, а (3.2.2), (3.2.4), (3.2.5) - коэффициентами Фурье.

Заметим, что формула для a_0 получается из (3.2.4) при $n = 0$. Именно по этой причине “нулевой” член был обозначен через $\frac{a_0}{2}$ (а не через a_0): теперь формулы для всех a_n, $n = 0,1,\ldots$ имеют один и тот же вид (3.2.4). Затем также, что интегралы (3.2.4), (3.2.5) существуют, т.к. $f(x)$ интегрируема с модулем, а

$$|f(x)\cos nx| \le |f(x)|,$$
$$|f(x)\sin nx| \le |f(x)|.$$

3.3. Ряд Фурье функции с периодом 2ℓ

3.3.1. Рассмотрим случай функции $f(x)$, интегрируемой с модулем на произвольном отрезке вида $[-\ell,\ell]$и 2ℓ- периодической. Сопоставим ей тригонометрический ряд вида:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi}{\ell}nx + b_n \sin\frac{\pi}{\ell}nx. \qquad (3.3.1)$$

3.3.2. Получение формул для коэффициентов Фурье основано на уже изученном случае $\ell = \pi$. Положим в (3.3.1)

$$z = \frac{\pi}{\ell}x, \text{ тогда } x = \frac{\ell}{\pi}z; \ z \in [-\pi,\pi], \text{ если } x \in [-\ell,\ell] \qquad (3.3.2)$$

и

$$f\left(\frac{\ell}{\pi}z\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nz + b_n \sin nz. \qquad (3.3.3)$$

Теперь a_n и b_n - коэффициенты (Фурье) ряда вида (3.3.3), сопоставленного f как функции от z (стоит заметить, что f как функция от z имеет период 2π); например,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi}z\right)\cos nz dz.$$

Возвращаясь к переменной x (см.(3.3.2)) в этом интеграле и замечая, что $dz = \frac{\pi}{\ell}dx,$ получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos n\frac{\pi}{\ell}x\frac{\pi}{\ell}dx,$$

т.е.

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx; \qquad (3.3.4)$$

в частности,

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx.$$

3.3.3. Аналогичным образом, получаем

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx. \qquad (3.3.5)$$

3.3.4. Итак, если разложение (3.4.1) возможно, то его коэффициенты Фурье $a_n(n=0,1,\ldots)$ и $b_n(n=1,2,\ldots)$вычисляются по формулам (3.3.4), (3.3.5).

3.4. Ряды Фурье четных и нечетных функций

Формулы для вычисления коэффициентов Фурье и сама запись ряда упрощаются, в случае, когда $f(x)$четна или нечетна. Естественно ожидать (и это мы установим), что четная $f(x)$раскладывается в ряд по четным же функциям, т.е. только по косинусам; нечетная - только по синусам.

3.4.1. Пусть $g(x), x\in[-\ell,\ell]$ интегрируема (с модулем) на этом отрезке. Установим следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. 1) если $g(x)$- четна, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = 2\int_{0}^{\ell} g(x)dx.$$

2) если $g(x)$- нечетна, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = 0\,.$$

Доказательство. Воспользуемся очевидным равенством

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = \int_{-\ell}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{\ell} g(x)dx. \qquad (3.4.1)$$

Сделаем замену переменных $X=-x$ в первом интеграле; при этом $dx=-dX$ и X изменяется от ℓ до 0.

Если $g(x)$- четна, то $g(x)=g(-X)=g(X)$. В этом случае

$$\int_{-\ell}^{0} g(x)dx = \int_{\ell}^{0} g(X)(-dX) = \int_{0}^{\ell} g(X)dX$$

и правая часть (3.4.1) тогда равна

$$2\int_0^{\ell} g(x)dx,$$

чем и доказано первое утверждение леммы.

В случае нечетной $g(x)$при той же замене переменных

$$g(x) = g(-X) = -g(X)$$

и

$$\int_{-\ell}^{0} g(x)dx = \int_{\ell}^{0} (-g(X))(-dX) = -\int_{0}^{\ell} g(X)dX,$$

а тогда правая часть (3.4.1) имеет вид

$$-\int_0^{\ell} g(x)dx + \int_0^{\ell} g(x)dx = 0;$$

утверждение 2) доказано.

Смысл леммы легко иллюстрируется геометрически.

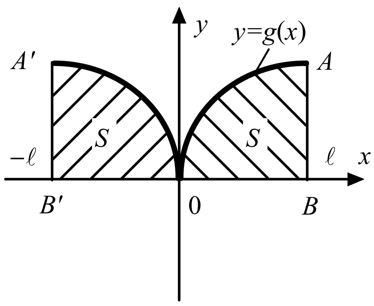

Рис. 3.4.1.

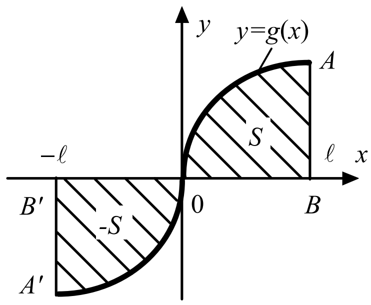

Рис. 3.4.2.

Если $g(x)$ четна, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = S + S = 2\int_0^{\ell} g(x)dx,$$

где S - площадь криволинейной трапеции *OAB* (рис. 3.4.1); если же $g(x)$-нечетна, то интеграл равен $(-S)+S=0,$ см. рис. 3.4.2.

2. Установим, что для четной 2ℓ- периодической функции $f(x)$

$$b_n = 0 (n = 1,2,\ldots); \tag{3.4.2}$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)dx; \; a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx. \tag{3.4.3}$$

Заметим, что произведение

$g(x) = f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nx$ – четная функция;

$q(x) = f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nx$ – нечетная функция.

Действительно, например

$$q(-x) = f(-x)\sin\frac{\pi}{\ell}n(-x) = f(x)\left(-\sin\frac{\pi}{\ell}nx\right) = -q(x),$$

т.е. $q(x)$- нечетна; аналогично проверяется четность $g(x)$.

На основании первого утверждения леммы получаем тогда, что

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx = \frac{1}{\ell}\cdot 2\int_{0}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx;\ n = 0,1,\ldots,$$

т.е. соотношения (3.4.3) доказаны; далее, в силу второго утверждения леммы

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx = 0,$$

т.е. равенство (3.4.2) установлено.

Итак, если $f(x)$- четна, то ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi}{\ell}nx,$$

(ряд по косинусам), где a_0 и a_n могут быть вычислены по формулам (3.4.3).

В частности, при $\ell = \pi$ (случай 2π - периодической функции)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx;\ a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx.$$

3.4.3. Аналогично доказывается, что для 2ℓ- периодической нечетной функции коэффициенты Фурье $a_0 = 0;\ a_n = 0\ \ (n = 1,2,\ldots)$,

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx,$$

т.е. ряд Фурье содержит одни только синусы:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi}{\ell} nx.$$

В частности, нечетная 2π - периодическая функция имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;\ b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

3.5. Условия сходимости ряда Фурье

3.5.1. Рассмотрим вопрос о сходимости ряда Фурье. Именно, нас интересуют те условия на $f(x)$, которые бы обеспечивали сходимость ряда (1.4.1) на отрезке $[-\ell, \ell]$ и, при этом, чтобы сумма ряда во всех точках $x \in [-\ell, \ell]$совпадала с $f(x)$.

Как оказывается, выяснение таких условий является довольно сложным делом, поэтому ограничимся только схемой рассуждений.

3.5.2. Для простоты записей считаем, что $f(x)$ 2π- периодична. Частичные суммы N-го порядка ряда Фурье

$$S_N(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx,\ N = 1,2,\ldots$$

после подстановки выражений для коэффициентов Фурье приобретают вид

$$S_N(f,x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\right) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt\right)\cos nx + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt\right)\sin nx;$$

при этом в формуле для a_n и b_n переменную интегрирования нам удобно обозначить через t. Записывая сумму интегралов в виде одного интеграла, мы получим

$$S_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N}\cos n(t-x)\right)dt, \qquad (3.5.1)$$

если использовать формулу косинуса суммы. После тригонометрических преобразований элементарного характера (их мы опускаем) сумма, содержащаяся в скобках, принимает следующий компактный вид (называемый ядром Дирихле):

$$\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}.$$

В интеграле (3.5.1) теперь делаем замену переменных $\tau = t - x$. Интеграл по новому отрезку $[-\pi - x, \pi - x]$оказывается равным интегралу по $[-\pi, \pi]$(этот факт мы установим ниже в более общей ситуации). Следовательно,

$$S_N(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\tau + x)}{\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau. \qquad (3.5.2)$$

Мы получили очень важную интегральную форму частных сумм ряда Фурье (интеграл Дирихле).

3.5.3. Вспомним определение сходимости ряда в точке x: сходимость к значению $f(x)$означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(S_N(f,x) - f(x)\right) = 0.$$

Чтобы получить в интегральном виде записанную в скобках разность, заметим, что

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{1}{2}\tau}d\tau,$$

поскольку интеграл от ядра Дирихле (по промежутку $[-\pi, \pi]$) равен числу π; последний факт легко проверяется на основании леммы параграфа 3.2.

Следовательно,

$$S_N(f,x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(\tau + x) - f(x)}{2\sin\frac{1}{2}\tau}\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau. \qquad (3.5.3)$$

3.5.4. Коэффициенты Фурье a_N и b_N всякой 2π- периодической интегрируемой (с модулем) функции $f(x)$ при $N \to \infty$ стремятся к нулю. Не доказывая этот факт, отметим, что его можно было ожидать ввиду необходимого признака сходимости ряда.

Обозначим

$$\varphi_x(\tau)=\frac{f(\tau+x)-f(x)}{2\sin\frac{1}{2}\tau}.$$

При больших N интеграл (3.6.3) “почти не отличается” от синус коэффициента Фурье функции $\varphi_x(\tau)$. Следовательно, если при выбранном нами $x\in[-\pi,\pi]$ функция $|\varphi_x(t)|$ интегрируема на $[-\pi,\pi]$, то разность $S_N(f,x)-f(x)$ вместе с синус - коэффициентом для $\varphi_x(\tau)$ стремится к нулю при $N\to\infty$.

Сформулируем результат в виде теоремы (признак Дини).

Теорема. Если при данном x существует интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(\tau+x)-f(x)}{\sin\frac{1}{2}\tau}\right|d\tau, \tag{3.5.4}$$

то в точке x ряд Фурье

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx \tag{3.5.5}$$

сходится и имеет сумму, равную $f(x)$.

Заметим, что (3.5.4) - несобственный интеграл, существование которого определяется поведением $\varphi_x(\tau)$ в окрестности точки $\tau=0$.

3.5.5. Поскольку выражение $\varphi_x(\tau)$ при малых τ ведет себя также, как разностное отношение в определении производной, то существование интеграла (3.5.4) обеспечено условием дифференцируемости в точке x функции f.

Итак, ряд Фурье сходится и имеет своей суммой $f(x)$в каждой точке $x\in[-\pi,\pi]$, в которой $f(x)$- дифференцируема.

Интересно отметить, что условие только лишь непрерывности $f(x)$в точке x не гарантирует сходимости ряда Фурье.

3.5.6. Широкий класс функций, которые можно “разложить” в ряд Фурье, определяется следующими условиями (Дирихле)

а) $f(x)$предполагается 2ℓ- периодической и интегрируемой с модулем на$[-\ell,\ell]$;

б) $f(x)$непрерывна на$[-\ell,\ell]$, а если имеет разрывы, то лишь первого рода и точек разрыва (на $[-\ell,\ell]$) - конечное количество;

в) $f(x)$ либо не имеет экстремумов на $[-\ell,\ell]$, либо имеет конечное их количество.

Обозначим односторонние пределы $f(x)$в точке $x_0 \in (-\ell,\ell)$следующим образом:

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x);\ f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

имеет место следующая

Теорема Дирихле. Если $f(x)$удовлетворяет условием Дирихле, то ее ряд Фурье (3.3.1) сходится в каждой точке. При этом сумма ряда совпадает с $f(x)$ во всех точках *x*, где $f(x)$ непрерывна. Во всякой же точке x_0 разрыва первого рода сумма ряда Фурье равна числу

$$S_0=\frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$$

(среднему арифметическому односторонних пределов функции в точке x_0).

3.5.7. Полезно отметить, что при выполнении условий Дирихле сумму ряда Фурье можно указать и в тех точках (рис. 3.5.1), где сама $f(x)$не определена. Заметим также, что признаки Дини и Дирихле сходимости ряда Фурье не вытекают один из другого, но вместе охватывают практически все встречающиеся на практике функции.

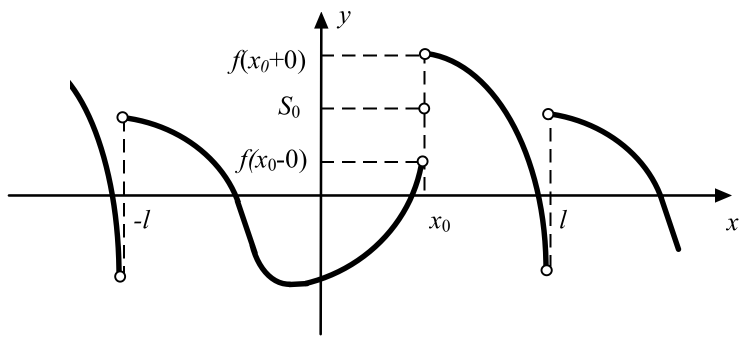

Рис. 3.5.1.

3.6. Примеры разложений функций в ряды Фурье

3.6.1. Пример 1. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases} a, -\pi < x < 0 \\ b,\ 0 < x < \pi \end{cases};a,b = const; a \neq b.$$

Решение. 1) Доопределим (графически) $f(x)$ на всю числовую ось, “сдвигая” на $2\pi\kappa\left(\kappa = \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$основной график (т.е. график, соответствующий $x \in \left(-\pi, \pi\right)$), см. рис. 3.6.1.

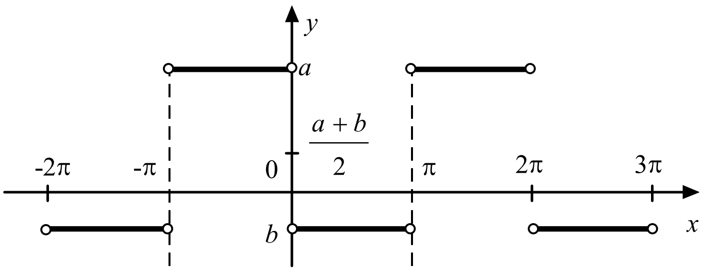

Рис. 3.6.1.

2) Вычислим коэффициенты Фурье. Имеем:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} a dx + \int_{0}^{\pi} b dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(a\pi + b\pi\right) = a + b;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} a\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} b\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{n}\sin nx\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{b}{n}\sin nx\Bigg|_{0}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{n}\cdot 0 + \frac{b}{n}\cdot 0\right) = 0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0} a\sin nx dx+\int\limits_{0}^{\pi} b\sin nx dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{a}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{b}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi n}\left(a(1-\cos(-n\pi))+b(\cos n\pi-1)\right)=$$

$$=\frac{b-a}{\pi n}(1-\cos n\pi)=\frac{b-a}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right);$$

$n=1,2,\ldots$

Здесь и в дальнейшем использованы значения тригонометрических функций:

$$\sin 0=0;\ \cos 0=1;$$

$$\sin n\pi=0;\cos n\pi=(-1)^n;n=1,2,\ldots$$

3) Запишем ряд Фурье (см. (3.3.1))

$$f(x)\sim\frac{a+b}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b-a}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)\sin nx.$$

Далее, при четных $(n=2k)$ и нечетных $(n=2k-1)$значениях n получаем соответственно:

$$1-(-1)^n=\begin{cases}0;n=2k\\2;n=2k-1\end{cases},\ k=1,2,\ldots$$

Следовательно,

$$f(x)\sim\frac{a+b}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(b-a)}{\pi(2k-1)}\sin(2k-1)x$$

или

$$f(x)\sim\frac{a+b}{2}+\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

4). Исследуем вопрос о сходимости полученного ряда Фурье при $x\in(-\pi,\pi)$, т.е. на интервале, где была первоначально определена $f(x)$. Обратимся к условиям Дирихле. На отрезке $[-\pi,\pi]$ функция $f(x)$имеет три точки разрыва первого рода: концевые точки $x=\pm\pi$ и $x=0$. Экстремумов у данной функции нет. Следовательно, на основании теоремы параграфа 3.5, полученный ряд сходится на $(-\pi,\pi)$. Его сумма всюду, кроме точки $x=0$, совпадает с $f(x)$; при $x=0$ имеем сумму

$$S=S(0)=\frac{a+b}{2},$$

поскольку $f(0-0)=a; f(0+0)=b$. Иначе говоря, сумма $S(x)$ ряда имеет вид

$$S(x)=\begin{cases} a, & -\pi<x<0 \\ \dfrac{a+b}{2}, & x=0 \\ b, & 0<x<\pi \end{cases}.$$

3.6.2. Пример 2. Разложить в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x)=\sin x,\ x\in(0,\pi)$.

Решение. 1) Нам известно, что в ряд Фурье по косинусам раскладываются четные функции; следовательно, доопределяем $f(x)$ четным образом (симметрия графика относительно оси OY) в смежном интервале $(-\pi,0)$; далее доопределяем (графическим способом) $f(x)$ так, чтобы она стала 2π - периодической; см. рис. 3.6.2.

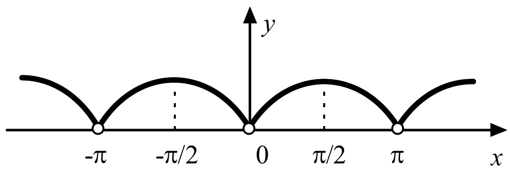

Рис. 3.6.2.

2) Вычислим коэффициенты a_n по формулам (3.4.3):

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(\sin(x+nx)+\sin(x-nx))dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\Bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n+1)\pi}{n+1}-\frac{1-\cos(n-1)\pi}{n-1}\right)=\frac{1-(-1)^{n-1}}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=$$

$$=\frac{2\left((-1)^{n-1}-1\right)}{(n+1)(n-1)}. \tag{3.6.1}$$

При вычислении использованы формулы

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos(n+1)\pi=(-1)^{n+1}=(-1)^{n-1}\cdot(-1)^2=(-1)^{n-1}=\cos(n-1)\pi.$$

Результат (3.6.1) имеет место при $n=0,2,3,\ldots$; в частности нет необходимости отдельно вычислять a_0; при $n=0$ получаем из (3.6.1)

$$a_0=\frac{2(-1-1)}{-1}=4.$$

Однако, при $n=1$ выражение в правой части (3.6.1) не существует; следовательно, приходится вычислять a_1:

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos x dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\Bigg|_0^{\pi}\right)=0.$$

Теперь при $x\in(0,\pi)$

$$\sin x\sim\frac{4}{2}+0+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\left((-1)^{n-1}-1\right)}{n^2-1}\cos nx;$$

ненулевыми будут члены при нечетных $n-1$, т.е. $n=2k, k=1,2,\ldots$; следовательно

$$\sin x\sim 2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-2)}{(2k)^2-1}\cos 2kx$$

или

$$\sin x = 2 - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1},\ x\in(0,\pi).$$

3) Знак равенства в последней записи означает, что $\sin x$ есть сумма полученного ряда Фурье на $(-\pi,\pi)$. Это заключение мы сделали на основании теоремы Дирихле, условие которой на $[-\pi,\pi]$ выполнены (три точки разрыва (устранимого) первого рода: $x=0$ и $x=\pm\pi$; две точки экстремума: $x=\pm\frac{\pi}{2}$).

3.6.3. Пример 3. Функцию $f(x)=2+x$ разложить в ряд Фурье на интервале $(-2;2)$.

Решение. 1) Имеем случай (3.3.1) при $\ell=2$. Доопределяем функцию так, чтобы она стала периодической (период $T=2\ell=4$), рис.3.6.3.

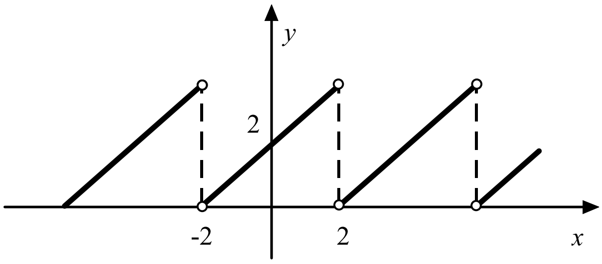

Рис. 3.6.3.

2) Вычисляем коэффициенты Фурье, используя интегрирование по частям:

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nx\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2+x)\cos\frac{\pi}{2}nx\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}(2+x)\sin\frac{\pi}{2}nx\Bigg|_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi}{2}nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(0+\frac{4}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi}{2}nx\Bigg|_{-2}^{2}\right)=0;\ \ n=1,2,\ldots;$$

при $n=0$ этот результат “не проходит” (ноль в знаменателе), поэтому вычисляем отдельно a_0:

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2+x)dx=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_{-2}^{2}=4;$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi}{\ell}nxdx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2+x)\sin\frac{\pi}{2}nxdx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}(2+x)\cos\frac{\pi}{2}nx\Big|_{-2}^{2} + \int_{-2}^{2}\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi}{2}nxdx \right) =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot 4\cos\pi n + \frac{2}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi}{2}nx\Big|_{-2}^{2} = \frac{4(-1)^{n+1}}{\pi n},\ n = 1,2,\ldots$$

Линейная функция $f(x) = 2 + x$ непрерывна на интервале $(-2,2)$ и не имеет на нем экстремумов; разрывы (первого рода) присутствуют в концевых точках $x = \pm 2.$ Следовательно, по теореме Дирихле, $f(x)$ есть сумма своего ряда Фурье:

$$2 + x = 2 + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{\pi}{2}nx,\ x \in (-2,2).$$

3.7. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на произвольном интервале (*a, b*)

3.7.1. Пусть интервал (a,b) не симметричен относительно начала координат и модуль $|f(x)|$ интегрируем на этом интервале. В этом случае также можно ставить задачу о разложении функции в тригонометрический ряд. Для этого, прежде всего, следует доопределить функцию периодическим образом на всю числовую ось. В качестве полупериода выбираем $\ell = \frac{b-a}{2}$; теперь мы находимся в стандартной ситуации ряда Фурье функции с периодом 2ℓ. Однако, коэффициенты Фурье вычисляются как интегралы по $(-\ell,\ell)$, тогда как нам удобнее интегрировать по (a,b), т.е. по интервалу, где первоначально была задана (например, аналитически) данная функция. Этого удается достичь благодаря следующему вспомогательному утверждению.

3.7.2. ***Лемма***. Если $g(x)$ имеет период $T = b - a$ и $\ell = \frac{b-a}{2}$, то

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = \int_{a}^{b} g(x)dx.$$

Доказательство. Пользуясь известным свойством "аддитивности" определенного интеграла, запишем равенство

$$\int_{-\ell}^{\ell} g(x)dx = \int_{-\ell}^{a} g(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx + \int_{b}^{\ell} g(x)dx. \qquad (3.7.1)$$

В первом интеграле сделаем замену переменных $t = x + 2\ell$, тогда $g(x) = g(t - 2\ell) = g(t)$ в силу 2ℓ- периодичности функции g; пределы интегрирования преобразуются к виду

$$t_1 = -\ell + 2\ell = \ell;\ t_2 = a + 2\ell = a + (b - a) = b.$$

Итак,

$$\int_{-\ell}^{0} g(x)dx = \int_{\ell}^{b} g(t)dt = -\int_{b}^{\ell} g(t)dt.$$

Подставляя результат в равенство (3.7.1), видим, что первый и последний интеграл "взаимно уничтожается", после чего и имеем утверждение леммы.

3.7.3. В формулах (3.3.4), (3.3.5) подинтегральные функции 2ℓ-периодичны, следовательно, интегрирование в них (на основании леммы) можно производить по интервалу (a,b).

Например, для

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi}{\ell}nxdx$$

в силу равенства $\ell = \dfrac{b-a}{2}$ получаем:

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{2\pi}{b-a}nxdx; \qquad (3.7.2)$$

в частности,

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)dx;$$

аналогично,

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{2\pi}{b-a}nxdx. \qquad (3.7.3)$$

Итак, функция $f(x)$, заданная на (a,b), имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{b-a}nx + b_n \sin\frac{2\pi}{b-a}nx,$$

где коэффициенты ряда вычисляются по формулам (3.7.2), (3.7.3).

3.8. Ряд Фурье в комплексной форме

3.8.1. Ряд Фурье (3.3.1) может быть записан в более компактной форме, и коэффициенты могут быть вычислены по одной формуле (вместо трех формул для $a_0, a_n, b_n, n = 1,2,\ldots$), если привлечь к рассмотрению функции комплексного переменного. Основным “инструментом” здесь служит формула Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Из нее, в свою очередь, вытекает, что

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}; \ \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \tag{3.8.1}$$

$n = 1,2,\ldots$

3.8.2. Рассмотрим ряд Фурье 2π-периодической функции $f(x)$. Общий член ряда, согласно (3.8.1), принимает вид

$$\begin{gathered} a_n \cos nx + b_n \sin nx = \\ = \frac{1}{2}\left(e^{inx}\left(a_n + \frac{1}{i}b_n\right) + e^{-inx}\left(a_n - \frac{1}{i}b_n\right)\right) = \\ = \frac{1}{2}\left(e^{inx}(a_n - ib_n) + e^{-inx}(a_n + ib_n)\right), \end{gathered} \tag{3.8.2}$$

т.к. $\frac{1}{i} = -i.$ При этом (см.(3.2.4), (3.2.5))

$$a_n - ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx;$$

$$a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx.$$

Обозначим

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx. \tag{3.8.3}$$

Теперь

$$\frac{1}{2}(a_n - ib_n) = c_n;\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_{-n}, \tag{3.8.4}$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-i\cdot 0\cdot x}dx = c_0. \tag{3.8.5}$$

3.8.3. Запишем ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

в комплексной форме. Согласно (3.8.2), (3.8.4), (3.8.5) имеем:

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right).$$

Частичные суммы этого ряда

$$S_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right)$$

после группировки слагаемых с положительными и отрицательными индексами принимают вид

$$S_N(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} c_n e^{inx} + \sum_{n=-N}^{-1} c_n e^{inx} = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx};$$

при этом во второй сумме переобозначено $(-n)$ на *n, а* затем слагаемые объединены в одну сумму.

Следовательно, ряд Фурье имеет следующую комплексную форму:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формуле (3.8.3) при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3.8.4. Для функции $f(x)$, имеющей период 2ℓ, ряд Фурье (3.3.1) в комплексной форме будет следующим:

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{\ell}nx},$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\frac{\pi}{\ell}nx}\,dx.$$

Этот результат получается рассуждениями, подобными приведенным в пп. 3.8.2, 3.8.3.

Глава 4. Интеграл Фурье. Ряды Фурье по ортогональным системам

4.1. Преобразование Фурье. Интеграл Фурье

4.1.1. Если функция $f(x)$ интегрируема с модулем на отрезке $[-\ell,\ell]$, то, как показано выше, ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x}, \tag{4.1.1}$$

где коэффициенты Фурье c_n вычисляются по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\omega_n x}\,dx, \qquad \omega_n = \frac{\pi}{\ell}n. \tag{4.1.2}$$

Числа $\omega_n = \frac{\pi}{\ell}n$ представляют собою частоты простейших гармоник, а их полный набор называется спектром. Указанное множество дискретно (см. рис. 4.1.1), т.е состоит из изолированных точек.

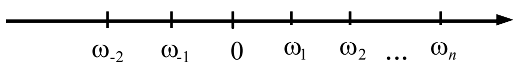

Рис. 4.1.1.

4.1.2. Запишем коэффициенты Фурье (4.1.2) в виде

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-i\omega_n x}\,\frac{\pi}{\ell}dx,$$

где

$$\frac{\pi}{\ell} = \frac{\pi}{\ell}n - \frac{\pi}{\ell}(n-1) = \omega_n - \omega_{n-1} = \Delta\omega_n$$

– так называемые “конечные разности” чисел ω_n. Следовательно,

$$c_n = \hat{f}(\omega_n)\Delta\omega_n, \tag{4.1.3}$$

где введено обозначение

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)e^{-i\omega x}dx.$$

4.1.3. Если $f(x)$ равен нулю вне отрезка $[-\ell,\ell]$, то

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx\,. \tag{4.1.4}$$

Соответствие, сопоставляющее всякой функции $f(x)$ (для которой $|f(x)|$ интегрируем на $[-\ell,\ell]$), интеграл вида (4.1.4), $\omega \in (-\infty,+\infty)$, называется преобразованием Фурье функции $f(x)$.

При этом интеграл (4.1.4) существует не только для функций, нулевых вне $[-\ell,\ell]$, но и для всякой $f(x)$, такой что

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty. \tag{4.1.5}$$

4.1.4. Вернемся к рассмотрению ряда Фурье (4.1.1). С помощью формулы (4.1.3) запишем его в виде

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega_n)e^{i\omega_n x}\Delta\omega_n; -\ell \le x \le \ell. \tag{4.1.6}$$

Устремим теперь ℓ к $+\infty$. В силу условия (4.1.5) преобразование Фурье будет существовать; при $\ell \to \infty$ спектр (см. рис. 4.1.1) становится все более “густым”, переходя в “непрерывный спектр”, заполняющий всю числовую ось. Сумма (4.1.6) по своей структуре является теперь интегральной для функции

$$\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}, -\infty < \omega < \infty$$

и “в пределе” переходит в интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega. \tag{4.1.7}$$

4.1.5. Рассуждения п. 4.1.4 носят “наводящий” характер и приводят к естественной мысли сопоставить любой $f(x)$, определенной на всей числовой оси, аналог ряда Фурье, имеющий вид (4.1.7). Указанное соответствие записываем в виде

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

Итак, пусть $f(x)$ удовлетворяет условию (4.1.5). Интеграл (4.1.7) называется ее интегралом Фурье.

Разумеется, сам вопрос сходимости этого несобственного интеграла и, тем более, совпадения его значений (при рассматриваемых x) со значениями $f(x)$, нуждается в дополнительном исследовании.

4.1.6. Можно доказать, что если функция $f(x)$ не только удовлетворяет условию (4.1.5), но также ограничена на всей числовой оси и удовлетворяет условиям Дирихле на каждом конечном отрезке $[-\ell, \ell]$, то интеграл Фурье (4.1.7) является сходящимся при всех x. Его значения совпадают с $f(x)$ во всех точках x, где $f(x)$ непрерывна. В точке разрыва x_0 первого рода значение интеграла Фурье совпадает со значением среднего арифметического односторонних пределов:

$$\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Итак, при сформулированных условиях имеем формулы “взаимного обращения” преобразования Фурье и интеграла Фурье (в точках, где $f(x)$ непрерывна):

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx;$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

4.2.2. Тригонометрическая форма интеграла Фурье

4.2.1. Интеграл Фурье четной функции.

Рассмотрим преобразование Фурье четной функции:

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos\omega x-i\sin\omega x)dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx-\frac{1}{2\pi}i;\tag{4.2.1}$$

использовано свойство, что интеграл четной функции ($f(x)\cos\omega x$ – четна) по симметричному промежутку равен удвоенному интегралу по полупромежутку; интеграл же нечетной функции ($f(x)\sin\omega x$ – нечетна) по симметричному промежутку равен нулю. Далее, $\hat{f}$ как функция от ω четна (см. (4.2.1)), следовательно, интеграл Фурье (на основании тех же самых свойств) принимает вид

$$f(x)\sim\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\cos\omega x\,d\omega+i\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)\sin\omega x\,dx=2\int_{0}^{\infty} f(\omega)\cos\omega x\,d\omega.$$

Итак, для четной $f(x)$, удовлетворяющей условию (4.1.5) имеем

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos\omega x\,dx,\tag{4.2.2}$$

$$f(x)\sim 2\int_{0}^{\infty} f(\omega)\cos\omega x\,d\omega.\tag{4.2.3}$$

4.2.2. Интеграл Фурье нечетной функции.

Преобразование Фурье нечетной функции (см. рассуждения п.4.2.1) имеет вид

$$\hat{f}(\omega)=-\frac{i}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

и является нечетной функцией от ω. Следовательно, упрощается и запись интеграла Фурье:

$$f(x)\sim 2i\int_{0}^{\infty}\hat{f}(x)\sin\omega x dx.$$

4.2.3. Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}1, -1<x<1\\ 0,\ x\notin(-1,1)\end{cases};$$

представить $f(x)$в виде интеграла Фурье.

Решение. $f(x)$ – четна, следовательно, по формулам (4.2.2) и (4.2.3)

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^1 1\cdot\cos\omega x dx+\int_1^\infty 0\cdot\cos\omega x dx\right)=\frac{\sin\omega}{\pi\omega};$$

$$f(x)\sim 2\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\pi\omega}\cos\omega x d\omega,$$

при этой $f(x)$, интегрируемая (с модулем) на $(-\infty;\infty)$ ограничена и удовлетворяет условиям Дирихле на каждом отрезке вида $[-\ell,\ell]$. Будучи непрерывной на $(-1,1)$, в каждой точке этого интервала она совпадает со своим интегралом Фурье:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cos\omega x d\omega.$$

В частности при $x=0$, т.к. $f(0)=1$, имеем

$$f(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}\cdot 1\, d\omega$$

или

$$\int_0^\infty \frac{\sin\omega}{\omega}d\omega=\frac{\pi}{2}. \tag{4.2.4}$$

Мы получили (в качестве одного из приложений интеграла Фурье) значение возникающего в разных разделах математики несобственного “неберущегося” интеграла.

4.2.4. Запишем теперь (в общем случае) интеграл Фурье (4.1.7) в тригонометрической форме, аналогичной ряду Фурье. Для этого вспомним, что (4.1.7) понимается как предельное значение для

$$\begin{aligned}\int_{-\ell}^{\ell}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\ell}^{\ell}\left(\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt\right)e^{i\omega x}d\omega=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)dt\int_{-\ell}^{\ell}e^{i\omega(x-t)}d\omega;\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

здесь мы воспользовались определением (4.1.4) преобразования Фурье и изменением порядка интегрирования (которое – отметим это без доказательства – возможно в силу условия (4.1.5)). Согласно формуле Эйлера имеем в (4.2.5)

$$\int_{-\ell}^{\ell} e^{i\omega(x-t)}d\omega = \int_{-\ell}^{\ell} \cos\omega(x-t)\,d\omega + i\int_{-\ell}^{\ell} \sin\omega(x-t)\,d\omega = \\ = 2\int_{0}^{\ell} \cos\omega(x-t)\,d\omega + 0 = 2\int_{0}^{\ell} (\cos\omega x\cos\omega t + \sin\omega x\sin\omega t)\,d\omega \quad . \qquad (4.2.6)$$

Возвращаясь к равенству (4.2.5), получаем

$$\int_{-\ell}^{\ell} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega = \\ = \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\ell}\left(\cos\omega x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\right) + \sin\omega x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\right)d\omega.$$

При $\ell \to \infty$ интеграл Фурье принимает, таким образом, вид

$$f(x) \sim \int_{0}^{\infty} (A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)\,d\omega, \qquad (4.2.7)$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\ , \qquad (4.2.8)$$

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\ , \qquad (4.2.9)$$

соответственно косинус и синус - преобразования Фурье.

4.3. Линейные нормированные и эвклидовы пространства

Для того, чтобы ввести важные обобщения понятия ряда Фурье, напомним читателю понятия линейного пространства, нормы и др.

4.3.1. Пусть L - непустое множество элементов X, Y, ... Оно называется линейным (или векторным) пространством, если в нем каким-либо способом введены операции сложения элементов и умножения на число (линейные операции), удовлетворяющие условиям:

а) Для любых $X, Y \in L$ элемент $U = X + Y$ определен однозначно и

1) $X + Y = Y + X$ (переместительность сложения);

2) $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$ (сочетательность сложения);

3) В L существует элемент 0 (ноль) такой что

$$X + 0 = X$$

для любого $X \in \mathsf{L}$;

4) Для каждого $X \in \mathsf{L}$ существует элемент $-X$ (противоположный элемент), такой что

$$X + (-X) = 0;$$

б) для любого $X \in \mathsf{L}$ и любого α (вообще говоря, комплексного) элемент $\alpha X \in \mathsf{L}$ определен однозначно и

1) $\alpha(\beta X) = (\alpha\beta)X$ (сочетательный закон умножения на число);

2) $1 \cdot X = X$;

в) выполняются распределительные законы вида

1) $(\alpha + \beta)X = \alpha X + \beta X$;

2) $\alpha(X + Y) = \alpha X + \alpha Y$.

Если рассматриваемые в пп. б), в) числа $\alpha, \beta, \ldots$ - комплексные, то и L называется комплексным линейным пространством, а если действительные – то действительным линейным пространством.

4.3.2. Примерами линейных пространств могут служить:

а) пространство R^3 всех геометрических векторов с линейными операциями, изученными в курсе аналитической геометрии;

б) пространство R^n всех матриц-строк ("векторов") вида $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_j (j = 1, \ldots, n)$ - произвольные действительные числа; линейные операции здесь выполняются "покоординатно" (обычным для матриц способом).

Случай а) является частным случаем для б), если каждый вектор отождествить с тройкой его координат; пространство R^n предполагаем действительным.

Как известно, в R^3 максимально возможное количество линейно-независимых векторов равно трем. Это означает, во-первых, что ни один из выбранных трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ не выражается линейным образом (как результат линейной операции) через остальные два, а во-вторых, любой четвертый вектор $\vec{d}$ может быть представлен в виде

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$$

с некоторыми действительными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Подобным образом обстоит дело и в произвольном R^n. А именно, в R^n существует n линейно-независимых векторов $J_1, J_2, \ldots, J_n$, т.е. векторов, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 J_1 + \lambda_2 J_2 + \ldots + \lambda_n J_n = 0$$

тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$; например, это совокупность $J_1(1,0,\ldots,0),\ J_2(0,1,\ldots,0), \ldots,\ J_n(0,0,\ldots,0,1)$. Указанное условие означает (как нетрудно доказать), что никакой из J_j не выражается линейным образом через остальные. В то же время присоединение ко множеству $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ любого вектора $X \in R^n$ делает новую совокупность линейно зависимой, т.е.

$$X = \mu_1 J_1 + \mu_2 J_2 + \ldots + \mu_n J_n$$

с некоторыми коэффициентами $\mu_j (j = 1, \ldots, n)$. Число n называют размерностью пространства R^n, а множество $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ - базисом в R^n.

В общем случае произвольного линейного пространства L число n называется его размерностью, если существует и равно именно n максимально возможное количество линейно независимых векторов в L; множество же самих этих векторов называется базисом в L.

Не всякое линейное пространство имеет конечную размерность. Так, очевидно, что класс $C_{[a,b]}$ всех непрерывных на отрезке $[a,\ b]$ функций (с действительными значениями) образует линейное пространство с обычными операциями сложения функций и умножения их на действительные числа. Можно доказать, что ни одна из функций $1, x, x^2, \ldots, x^m$ не выражается линейным образом через остальные, однако при любом m к этому множеству можно добавить степенную функцию x^{m+1} и полученная совокупность будет сохранять свойство линейной независимости.

В подобной ситуации, когда в L можно указать как угодно большое количество линейно независимых векторов, говорят, что L бесконечномерно.

4.3.3. Пусть теперь каждому элементу X линейного пространства L поставлено в соответствие некоторое единственное действительное число $\|X\|$, удовлетворяющее условиям (аксиомам):

1) $\|X\| \geq 0$ причем $\|X\| = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$;

2) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ для любых $X, Y \in \mathsf{L}$;

3) $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$ для любого числа λ.

Тогда число $\|X\|$ называется нормой элемента X, а само L - линейным нормированным пространством.

В приведенных выше примерах норма вводится следующим образом: в R^n полагаем

$$\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_n^2} \ ;$$

в частности, для R^3 норма $\|X\|$ - это модуль (длина) вектора X; в $C_{[a,b]}$ полагаем

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Аксиомы нормы в обоих случаях легко проверяются.

4.3.4. Пусть в действительном линейном пространстве L каким-либо способом введено скалярное произведение, т.е. каждой паре элементов $X, Y \in \mathsf{L}$ поставлено в соответствие действительное число (X, Y), удовлетворяющее условиям (аксиомам):

а) $(X, Y) = (Y, X)$;

б) $(X, Y_1 + Y_2) = (X, Y_1) + (X, Y_2)$;

в) $(\lambda X, Y) = \lambda (X, Y)$;

г) $(X, X) \geq 0$, причем $(X, X) = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$.

В этом случае линейное пространство L называется эвклидовым. Так, пространство R^n становится эвклидовым, если в нем ввести скалярное произведение в виде

$$\left(X,Y\right)=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k .$$

4.3.5. В эвклидовом пространстве можно ввести норму с помощью равенства

$$\|X\|=\sqrt{\left(X,X\right)}. \tag{4.3.1}$$

Аксиома 1) нормы очевидна; аксиома 3) легко проверяется:

$$\|\lambda X\|=\sqrt{\left(\lambda X,\lambda X\right)}=\sqrt{\lambda\left(X,\lambda X\right)}=\sqrt{\lambda\left(\lambda X,X\right)}=\sqrt{\lambda^2\left(X,X\right)}=|\lambda|\cdot\|X\|.$$

Для проверки аксиомы 2) нормы потребуется следующее неравенство Коши-Буняковского

$$\left|\left(X,Y\right)\right|\le\|X\|\cdot\|Y\|, \tag{4.3.2}$$

которое мы сейчас и докажем. Очевидно, что для любого действительного числа λ, в силу аксиом а) – г) скалярного произведения

$$0\le\left(\lambda X+Y,\lambda X+Y\right)=\lambda^2(X,X)+2\lambda(X,Y)+(Y,Y)=$$

$$=\|X\|^2\lambda^2+2(X,Y)\lambda+\|Y\|^2.$$

Итак, полученный квадратный (относительно λ) трехчлен неотрицателен при всех λ. Это возможно тогда и только тогда, когда его дискриминант

$$D=\left(X,Y\right)^2-\|X\|^2\cdot\|Y\|^2\le 0 .$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей полученного неравенства

$$\left(X,Y\right)^2\le\|X\|^2\cdot\|Y\|^2,$$

приходим к утверждению (4.3.2).

Из (4.3.2) вытекает, в частности, что

$$\|X+Y\|=\sqrt{\left(X+Y,X+Y\right)}=\sqrt{\left(X,X\right)+2\left(X,Y\right)+\left(Y,Y\right)}\le$$

$$\le\sqrt{\|X\|^2+2\|X\|\cdot\|Y\|+\|Y\|^2}=\sqrt{\left(\|X\|+\|Y\|\right)^2}=\|X\|+\|Y\|.$$

Этим установлена аксиома 2) нормы (4.3.1).

4.3.6. Возникает вопрос: если L – линейное нормированное пространство, при каких условиях на введенную в нём норму, пространство L является также и эвклидовым ? На этот вопрос отвечает следующая

Теорема. Линейное нормированное пространство L является эвклидовым тогда и только тогда, когда для любых $X,Y \in L$ выполняется равенство

$$\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2=2\left(\|X\|^2+\|Y\|^2\right). \qquad (4.3.3)$$

Геометрический смысл (4.3.3) в R^3 хорошо известен: сумма квадратов сторон параллелограмма (построенного на векторах X и Y как на сторонах) равна сумме квадратов его диагоналей (которыми станут длины $X+Y$ и $X-Y$ соответственно).

Необходимость условия (4.3.3) легко проверяется. Действительно, если L - эвклидово пространство, то $\|X\|^2=(X,X)$, а значит, пользуясь аксиомами скалярного произведения, получаем

$$\|X+Y\|^2+\|X-Y\|^2=(X+Y,X+Y)+(X-Y,X-Y)=$$

$$=(X,X)+2(X,Y)+(Y,Y)+(X,X)-2(X,Y)+(Y,Y)=2\left(\|X\|^2+\|Y\|^2\right),$$

что и требовалось.

Обратное утверждение может быть установлено, если скалярное произведение в L ввести следующим образом:

$$(X,Y)=\frac{1}{4}\left(\|X+Y\|^2-\|X-Y\|^2\right). \qquad (4.3.4)$$

Теперь следует проверить, что для (4.3.4) выполнены аксиомы скалярного произведения, если имеет место соотношение (4.3.3). Мы установим только а) и г), не приводя громоздкой проверки двух других аксиом (их проверку читатель может найти в рекомендуемой литературе). Во-первых, заметим, что

$$(X,X)=\frac{1}{4}\|2X\|^2=\|X\|^2,$$

откуда сразу вытекает г). Легко проверяется и аксиома а):

$$(Y,X)=\frac{1}{4}\left(\|Y+X\|^2-\|Y-X\|^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\|X+Y\|^2-|-1|^2\cdot\|X-Y\|^2\right)=(X,Y).$$

4.3.7. Угол φ между ненулевыми векторами X,Y эвклидового пространства L определим с помощью соотношения

$$\cos\varphi=\frac{(X,Y)}{\|X\|\cdot\|Y\|}.$$

В силу неравенства Коши-Буняковского (4.3.2) имеем, что $|\cos\varphi|\le 1$, т.е. введенное определение корректно.

Векторы X и Y называются ортогональными в L, если $(X,Y)=0$, или, что то же самое, для угла φ между ними $\cos\varphi=0$.

4.3.8. Если L - комплексное линейное пространство, то эвклидовым оно становится в случае введения в нем комплекснозначного скалярного произведения, удовлетворяющего аксиомам:

а') $(X,Y)=\left(\overline{Y,X}\right)$;

б') $(X_1+X_2,Y)=(X_1,Y)+(X_2,Y)$;

в') $(\lambda X,Y)=\lambda(X,Y)$;

г') $(X,X)\ge 0$, причем $(X,X)>0$, тогда и только тогда, когда $X\ne 0$.

Здесь использован стандартный символ комплексного сопряжения: если $z=a+bi$, то $\bar{z}=a-bi$.

Примером эвклидового комплексного пространства может служить класс C^n последовательностей вида

$$X=(x_1,\ldots,x_n),$$

где все x_k $(k=1,\ldots,n)$ – комплексные числа, а линейные операции (как и в R^n) определяются (выполняются) покоординатным образом. Скалярное произведение задается в виде

$$\left(X,Y\right)=\sum_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k\ ,$$

при этом аксиомы а') - г') проверяются без труда.

Более детально введенные в настоящем параграфе понятия и факты будут изучены ниже на примере класса Ф.

4.4. Ортогональные системы функций

4.4.1. Выше были получены формулы для коэффициентов тригонометрического Фурье. В основе результата лежало следующее свойство системы тригонометрических функций

$$\{1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ldots,\cos nx,\ \sin nx,\ldots\}:$$

интеграл (по отрезку $[-\pi,\pi]$) от произведения двух различных функций равен нулю, а интеграл от квадрата любой из них – ненулевой. Указанное свойство ассоциируется с понятием ортогональности в эвклидовом пространстве. В связи с этим введём в рассмотрение класс Ф функций f, интегрируемых с квадратом на некотором отрезке $[a, b]$:

$$\Phi=\left\{f:\int_a^b f^2(x)dx<\infty\right\}.$$

4.4.2. Докажем, что Ф - линейное пространство с обычными операциями сложения функций и умножения на число. Для этого следует проверить два следующих свойства.

а) Вместе с $f\in\Phi$ любая $\lambda f\in\Phi$ (λ - произвольное постоянное число).

Действительно,

$$\int_a^b\left(\lambda f(x)\right)^2dx=\lambda^2\int_a^b f^2(x)dx<\infty.$$

б) Вместе с любыми $f_1\in\Phi$ и $f_2\in\Phi$ их сумма $\left(f_1+f_2\right)\in\Phi$.

Действительно,

$$\left(f_1+f_2\right)^2=f_1^2+2f_1f_2+f_2^2,$$

при этом $2|f_1 f_2| \le f_1^2 + f_2^2$ (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим), откуда (попутно) вытекает интегрируемость модуля произведения.

Значит,

$$(f_1 + f_2)^2 \le f_1^2 + 2|f_1 f_2| + f_2^2 \le 2\left(f_1^2 + f_2^2\right),$$

откуда следует интегрируемость с квадратом суммы $f_1 + f_2$.

Аксиомы п. 4.3.1 легко проверяются.

4.4.3. Скалярное произведение в действительном Ф введем следующим образом:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx;$$

интегрируемость модуля произведения установлена в п. 4.4.2, аксиомы скалярного произведения легко проверяются. Норма любой $f \in \Phi$ есть число

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Неравенство Коши-Буняковского принимает вид

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

В комплексном Ф (f и g с– комплекснозначны) по определению полагаем

$$(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

4.4.4. В действительном Ф система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ называется ортогональной на $[a,b]$, если ортогональна любая их пара, т.е.

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, m \ne n, \quad \text{но} \quad \int_a^b \varphi_n^2(x)dx \ne 0, \quad n, m = 1, 2, \ldots$$

В комплексном Ф определение ортогональной системы функций выглядит следующим образом:

$$\int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}dx = 0, m \ne n; \quad \int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(x)}dx \ne 0.$$

Нумерация системы функций может начинаться и с $n=0$ или может быть принята иная система нумерации.

Пример 1. Система функций (рассматриваемая в Ф)

$$\left\{\ldots,e^{-inx},\ldots,e^{-x},1,e^{x},\ldots,e^{inx},\ldots\right\}$$

ортогональна на $[-\pi,\pi]$. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}dx=\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx=0,\ n\neq m; \qquad (4.4.1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{inx}}dx=\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-inx}dx=2\pi.$$

Соотношение (4.4.1) можно проверить непосредственно, если учесть, что

$$\overline{e^{inx}}=\cos nx-i\sin nx=\cos(-nx)+i\sin(-nx)=e^{-inx}.$$

Замечание. Для читателей, знакомых с интегралом Лебега, отметим, что изучаемый здесь (при условии интегрируемости функций по Риману) класс Ф является подпространством лебеговского пространства L^2.

4.5. Ряды по ортогональным функциям

4.5.1. Выше была установлена аналогия между перпендикулярностью векторов и ортогональностью функций. В аналитической геометрии важной является задача разложения произвольного вектора по ортогональным векторам базиса. Подобным же образом возникает задача о разложении произвольной функции $f\in\Phi$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$, ортогональной в Ф, т.е. о представлении вида

$$f(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\ldots+c_n\varphi_n(x)+\ldots\ . \qquad (4.5.1)$$

В случае тригонометрической системы имеем круг вопросов, связанных с тригонометрическими рядами Фурье. В общем же случае предстоит выяснить:

а) какими должны быть коэффициенты c_n в разложении (4.5.1), если оно возможно на некотором отрезке $[a,b]$;

б) каковы достаточные условия сходимости ряда (4.5.1) в данной точке x, на отрезке $[a,b]$ и т.п., и в каких случаях сумма ряда совпадает с $f(x)$.

В предположениях сходимости (во всех точках $x \in [a,b]$) ряда (4.5.1) и возможности его почленного интегрирования определим вид коэффициентов c_n. Для этого умножим обе части (4.5.1) на $\varphi_m(x)$ и почленно проинтегрируем полученное соотношение

$$f(x)\varphi_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)\varphi_m(x).$$

Имеем:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Ненулевым будет только слагаемое при $n = m$ (в силу ортогональности системы $\{\varphi_n\}$):

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = c_m \int_a^b \varphi_m^2(x)dx,$$

откуда при

$$\alpha_m = \int_a^b \varphi_m^2(x)dx \neq 0$$

получаем

$$c_m = \frac{1}{\alpha_m}\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx, \tag{4.5.2}$$

при этом интеграл в правой части (4.5.2) конечен в силу неравенства Коши-Буняковского.

Итак, разложение (4.5.1) возможно с коэффициентами (4.5.2).

4.5.2. Наиболее простой вид коэффициенты (4.5.2) имеют при $\alpha_m \equiv 1$.

Определение. Ортогональная система $\{h_n(x)\}$ называется ортонормированной (на $[a,b]$), если

$$\int_b^a h_n^2(x)dx = 1; \quad n = 1,2,\ldots$$

Переход от системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ к ортонормированной происходит, очевидно, если рассмотреть систему

$$h_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}\varphi_n(x); \quad n=1,2,\ldots$$

Ортогональность $h_n(x)$ в пространстве Ф и нормированность очевидны:

$$\int_a^b h_n(x)h_m(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha_n\alpha_m}}\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx=0 \ \ (n\neq m);$$

$$\int_a^b h_n^2(x)dx=\frac{1}{\alpha_n}\int_a^b \varphi_n^2(x)dx=\frac{1}{\alpha_n}\alpha_n=1.$$

Итак, разложение

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n h_n(x) \tag{4.5.3}$$

по ортонормированной системе $\{h_n(x)\}$ возможно с коэффициентами

$$c_n=\int_a^b f(x)h_n(x)dx. \tag{4.5.4}$$

4.5.3. Пример. Система $\left\{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x\right\}$, $n=1,2,\ldots;$ $\ell=const>0$, ортогональна на отрезке $[0,\ell]$. Действительно, при $n\neq m$ имеем

$$\int_0^\ell \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\ell\left(\cos(n-m)\frac{\pi}{\ell}x-\cos(n+m-1)\frac{\pi}{\ell}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\ell\sin(n-m)\frac{\pi}{\ell}x}{\pi(n-m)}-\frac{\ell\sin(n+m-1)\frac{\pi}{\ell}x}{\pi(n+m-1)}\right)\Bigg|_0^\ell=0.$$

Кроме того,

$$\begin{gathered}\alpha_n=\int_0^\ell \sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}xdx=\\ =\frac{1}{2}\int_0^\ell\left(1-\cos(2n-1)\frac{\pi}{\ell}x\right)dx=\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{2\pi(2n-1)}\sin(2n-1)\frac{\pi}{\ell}x\Bigg|_0^\ell=\frac{\ell}{2}.\end{gathered} \tag{4.5.5}$$

4.5.4. Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$, для которой модуль $|f(x)|$ интегрируем на $[0,\ell]$ (при этом уже не требуем интегрируемости квадрата функции на $[0,\ell]$). Сопоставим каждой такой функции $f(x)$ разложение вида

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x \tag{4.5.6}$$

в ряд по указанной ортогональной системе. В силу (4.5.4), (4.5.5) коэффициенты имеют вид

$$c_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x\,dx,$$

при этом они существуют, так как справедливо неравенство

$$\left| f(x)\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\ell}x \right| \le |f(x)|.$$

Отметим, что достаточные условия сходимости ряда (4.5.6) к значениям $f(x)$ будут такими же, как для рядов Фурье по классической тригонометрической системе.

4.5.5. Обсудим круг вопросов, связанных со сходимостью (4.5.3). Очевидно, что возможность представления $f(x)$ в виде суммы ряда (4.5.3) должна быть связана со свойствами ортонормированной системы $\{h_n(x)\}$ и функции $f(x)$. Кроме того, само понятие сходимости ряда к $f(x)$ можно сформулировать в различных смыслах. Например, это сходимость: а) в данной точке x; б) во всех точках отрезка $[a,b]$; в) равномерная сходимость на $[a,b]$; г) сходимость в смысле нормы пространства Ф и др. Остановимся на последнем виде сходимости: речь идет о соотношении

$$\lim_{n\to\infty}\left\| S_n(x) - f(x) \right\| = 0, \tag{4.5.7}$$

где $S_n(x) = c_1h_1(x) + c_2h_2(x) + \ldots + c_nh_n(x)$ – n-ая частичная сумма по ортонормированной системе $\{h_n(x)\}$; норма в Ф введена выше.

Если имеет место равенство (4.5.7), то говорят что ряд (4.5.3) сходится к $f(x)$ в среднем. Так, в случае, если $S_n(x)$ значительно отличается (при больших n) от $f(x)$ на “маленьком” множестве (например, в нескольких точках), то равномерная сходимость уже не имеет место, тогда как (4.5.7) сохраняется. Следовательно, сходимость в среднем в ряде случаев предпочтительнее. Кроме того, погрешность от замены значений $f(x)$ значениями $S_n(x)$, вычисляемая в виде

$$\left\| S_n(x) - f(x) \right\|$$

связана с известным способом наименьших квадратов, широко применяемым в вычислительной практике.

Ортогональная система $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной в классе Ф, если для любой $f \in \Phi$ ряд Фурье (4.5.3) сходится в среднем к функции f. Отметим без доказательства, что тригонометрическая система

$$\{1; \sin x, \cos x; \ldots; \sin nx, \cos nx; \ldots\}$$

полна в пространстве Ф (интегрирование производится по отрезку $[-\pi, \pi]$).

Библиографический список

1. Зигмунд, А. Тригонометрические ряды. Т.1 /А.Зигмунд. – М.: Мир, 1965. – 615 с.

2. Nakhman, A.D. Weigted norm inequalities for the convolution operators/ A.D. Nakhman //Transactions TSTU. –2009. –V.15, № 3. – P. 653-660.

3. Никольский, С.М. О линейных методах суммирования рядов Фурье / С.М.Никольский//Известия АН СССР, сер. матем. – 1948. – №12. – С.259 –278.

4. Sz. Nagy B. Methodes de summation des series de Fourier. I. Fc. Sz., 12 (1950), 204-210

5. Кук, Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Р. Кук. - М.: ГИФМЛ, 1960. - 471 с.

6. Бари, Н.К. Тригонометрические ряды. /Н.К.Бари. – М.: Физматлит, 1961. - 936 с.

7. Куликов, Г.М. Метод Фурье в уравнениях математической физики: учебное пособие/ Г.М.Куликов, А.Д. Нахман. – М: «Машиностроение». – 2000. – 155 с.

8. Нахман, А.Д. Введение в теорию и практику числовых и функциональных рядов: учебное пособие / А.Д.Нахман. – Palmarium Academic Publishing, Saarbrucken – 2015. – 93 с.

Оглавление