С.Ю. Култышев, Л.М. Култышева, Н.С. Ребишунг

Пермский государственный технический университет

ПРИБЛИЖЕННАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГИБРИДНЫХ ЭПСИЛОН-МОДЕЛЕЙ

Рассматривается задача нахождения параметров гибридной ε-модели по результатам прямых и косвенных измерений входа и выхода моделируемого объекта. Получены теоремы, дающие приближенное решение этой задачи для некоторых классов указанных моделей.

Пусть R^n - пространство n-мерных векторов, компонентами которых являются действительные числа (n-мерное евклидово пространство) с нормой $\|r\| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \right\}^{0.5}$, $B_1^m[\theta,T], B_2^n[\theta,T]$ - нормированные пространства m и n-мерных вектор-функций определенных на отрезке $[\theta,T] \subset R^1$, W - нормированное пространство, $\|x\|$ - норма элемента x в том пространстве, которому он принадлежит.

Пусть далее имеется реальный объект, который мы будем рассматривать на отрезке времени $[\theta,T]$. Через $\bar{v}(t)$ обозначим вектор параметров, характеризующих внешние воздействия на объект в момент времени $t \in [\theta,T], \bar{v}(t) \in R^m$, а через $\bar{x}(t)$ - вектор параметров, характеризующих реакцию объекта на внешние воздействия в момент $t, \bar{x}(t) \in R^n$. Вектор-функции $\bar{v}$ и $\bar{x}$ будем называть входом и выходом объекта соответственно. Будем считать, что $\bar{v} \in V[\theta,T]$, а $\bar{x} \in X[\theta,T]$, где $V[\theta,T]$ и $X[\theta,T]$ - некоторые подмножества из $B_1^m[\theta,T]$ и $B_2^n[\theta,T]$ соответственно.

Далее пусть $\bar{v} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$, а $\bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$, где $\bar{v}_1 \in V_1[\theta,T] \subseteq B_3^{m_1}[\theta,T], \bar{v}_2 \in V_2[\theta,T] \subseteq B_4^{m_2}[\theta,T]$,

$\bar{x}_1 \in X_1[\theta,T] \subseteq B_5^{n_1}[\theta,T], \bar{x}_2 \in X_2[\theta,T] \subseteq B_6^{n_2}[\theta,T]$,

$m_1 + m_2 = m, n_1 + n_2 = n$.

Введем обозначения:

$\tilde{\bar{v}}_1 = \{\bar{v}_1(t_0), \bar{v}_1(t_1), ..., \bar{v}_1(t_N)\}, \tilde{\bar{v}}_2 = \{\bar{v}_2(t_0), \bar{v}_2(t_1), ..., \bar{v}_2(t_N)\},$

$\tilde{\bar{x}}_1 = \{\bar{x}_1(t_0), \bar{x}_1(t_1), ..., \bar{x}_1(t_N)\}, \tilde{\bar{x}}_2 = \{\bar{x}_2(t_0), \bar{x}_2(t_1), ..., \bar{x}_2(t_N)\},$

где $t_0 = \theta, t_N = T, t_i = t_0 + i\Delta, \Delta = \dfrac{T-\theta}{N}$.

Будем считать, что

$\tilde{\bar{v}}_1 \in \tilde{V}_1[0,N] \subseteq R^{m_1(N+1)}, \tilde{\bar{v}}_2 \in \tilde{V}_2[0,N] \subseteq R^{m_2(N+1)}$,

$\tilde{\bar{x}}_1 \in \tilde{X}_1[0,N] \subseteq R^{n_1(N+1)}$

$\tilde{\bar{x}}_2 \in \tilde{X}_2[0,N] \subseteq R^{n_2(N+1)}$.

Определение 1. *Систему*

$$\begin{Bmatrix} F_1(x_1, x_2, v_1, v_2) = 0 \\ F_2(\tilde{x}_1, x_2, \tilde{v}_1, v_2) = 0 \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

назовем гибридной ε-моделью объекта, если:

1) $F_1 : X_1[\theta,T] \times \tilde{X}_2[0,N] \times V_1[\theta,T] \times \tilde{V}_2[0,N] \to W$ *- непрерывный оператор;*

2) $F_2 : \tilde{X}_1[0,N] \times \tilde{X}_2[0,N] \times \tilde{V}_1[0,N] \times \tilde{V}_2[0,N] \to R^q$ *- непрерывный оператор;*

3) система (1) однозначно разрешима относительно $\{x_1, x_2\}$ *при каждом* $\{v_1, v_2\} \in V_1[\theta,T] \times \tilde{V}_2[0,N]$ *;*

4) $\left\| F_1(\bar{x}_1, \tilde{\bar{x}}_2, \bar{v}_1, \tilde{\bar{v}}_2), F_2(\tilde{\bar{x}}_1, \tilde{\bar{x}}_2, \tilde{\bar{v}}_1, \tilde{\bar{v}}_2) \right\| \le \varepsilon$*, где* ε *- достаточно малое положительное число или нуль,*

$\|w, r\|$ *- норма в пространстве* $W \times R^q$ *,* $w \in W, r \in R^q$ *,* q *- целое число.*

Замечание 1. Условия, при которых выполняется пункт 3) определения 1 для некоторых классов гибридных моделей можно найти в [1]-[3].

Будем строить гибридную ε-модель в виде

$$\begin{cases} \overline{F}_1(x_1, x_2, v_1, v_2, \omega) = 0 \\ \overline{F}_2(\widetilde{x}_1, x_2, \widetilde{v}_1, v_2, \omega) = 0 \end{cases}, \tag{2}$$

где ω - неизвестный вектор параметров модели $\omega \in \Omega \subseteq R^k$,
$\overline{F}_1 : X_1[\theta, T] \times \widetilde{X}_2[0, N] \times V_1[\theta, T] \times$
$\times \widetilde{V}_2[0, N] \times \Omega \to W$ и
$\overline{F}_2 : \widetilde{X}_1[0, N] \times \widetilde{X}_2[0, N] \times \widetilde{V}_1[0, N] \times \widetilde{V}_2[0, N] \times \Omega \to R^q$ - непрерывные операторы,
$\widetilde{x}_1 = \{x_1(t_0), x_1(t_1), ..., x_1(t_N)\}, \widetilde{v}_1 = \{v_1(t_0), v_1(t_1), ..., v_1(t_N)\}$.

Пусть далее

$$y_1 = P_1(\overline{v}_1), y_2 = P_2(\widetilde{\overline{v}}_2), \tag{3}$$

$$z_1 = Q_1(\overline{x}_1), z_2 = Q_2(\widetilde{\overline{x}}_2) \tag{4}$$

измерения входа и выхода объекта, где $P_1 : V_1[\theta, T] \to Y_1, P_2 : \widetilde{V}_2[0, N] \to Y_2, Q_1 : X_1[\theta, T] \to Z_1,$
$Q_2 : \widetilde{X}_2[0, N] \to Z_2$ - непрерывные операторы, а Y_1, Y_2, Z_1, Z_2 - нормированные пространства.

Задачу идентификации поставим следующим образом: *по известным* $y_1, y_2, z_1, z_2, P_1, P_2, Q_1, Q_2,$
$\overline{F}_1, \overline{F}_2, \varepsilon$ *найти такое* $\omega \in \Omega$*, при котором система (2) является гибридной* ε*-моделью объекта.*

Далее пусть гибридная ε-модель имеет вид

$$\begin{cases} \overline{F}_1(x_1, x_2, v_1, v_2, \omega) = 0 \\ \overline{F}_2(\widetilde{x}_1, x_2, \widetilde{v}_1, v_2, \omega) = 0 \end{cases}, \tag{5}$$

Где

$\overline{F}_1 : X_1[\theta, T] \times \widetilde{X}_2[0, N] \times V_1[\theta, T] \times \widetilde{V}_2[0, N] \times \Omega \to$

$B_7^p[\theta, T], \overline{F}_1(x_1, x_2, v_1, v_2, \omega)(t) =$

$= \widetilde{F}_1(t, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} x_1, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} x_2^0, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v_1, \overset{t}{\underset{\theta}{C}} v_2^0, \omega), \widetilde{F}_1(t, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \omega) :$

$X_1[\theta, t] \times X_2[\theta, t] \times V_1[\theta, t] \times V_2[\theta, t] \to R^p$

при каждом фиксированном $t \in [\theta, T]$ и $\omega \in \Omega, x_2^0(t) = x_2(i)$ при $t \in [t_i, t_{i+1}), (i = 0,1,2,..., N-1), x_2^0(N) = x_2(N),$

$v_2^0(t) = v_2(i)$

при $t \in [t_i, t_{i+1}), (i = 0,1,2,..., N-1), v_2^0(N) = v_2(N), \overline{F}_2 : \widetilde{X}_1[0, N] \times \widetilde{X}_2[0, N] \times \widetilde{V}_1[0, N] \times$

$\times \widetilde{V}_2[0, N] \times \Omega \to R^q, \overline{F}_2(\widetilde{x}_1, x_2, \widetilde{v}_1, v_2, \omega)(i) =$

$\widetilde{F}_2(i, \overset{i}{\underset{0}{S}} \widetilde{x}_1, \overset{i}{\underset{0}{S}} x_2, \overset{i}{\underset{0}{S}} \widetilde{v}_1, \overset{i}{\underset{0}{S}} v_2, \omega), \widetilde{F}_2(i, \bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \omega) : \widetilde{X}_1[0.i] \times \widetilde{X}_2[0, i] \times$

$\times \widetilde{V}_1[0, i] \times \widetilde{V}_2[0, i] \to R^{q_1}$

при каждом фиксированном $i = 0,1,2,..., N$ и $\omega \in \Omega$, где $\widetilde{X}_1[0, i] \subseteq R^{(i+1)n_1}$,

$\widetilde{X}_2[0, i] \subseteq R^{(i+1)n_2}, \widetilde{V}_1[0, i] \subseteq R^{(i+1)m_1}, \widetilde{V}_2[0, i] \subseteq R^{(i+1)m_2}$. $\overset{t}{\underset{\theta}{C}}$ - оператор сужения вектор функции на отрезок $[\theta, t]$,

а $\overset{i}{\underset{0}{S}}$ - оператор, который вектору $\{x(0), x(1), x(2),...., x(N)\} \in R^{(N+1)n}$ ставит в соответствие вектор $\{x(0), x(1), x(2),..., x(i)\} \in R^{(i+1)n}$, где $x(i) \in R^n, i = 0,1,2,..., N.$

А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_1 = \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} \overline{v}_1, y_2 = \overset{j}{\underset{0}{S}} \overline{\widetilde{v}}_2, t_0 < t_j < t_N, j \in \overline{0, N}, \tag{6}$$

$$z_1 = \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} \overline{x}_1, z_2 = \overset{j}{\underset{0}{S}} \overline{\widetilde{x}}_2, \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть*

1) $\exists \overline{\omega} \in \Omega : \left\| \overline{F}_1(\overline{x}_1, \overline{\overline{x}}_2, \overline{v}_1, \overline{\overline{v}}_2, \overline{\omega}), \overline{F}_2(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \overline{\overline{v}}_1, \overline{\overline{v}}_2, \overline{\omega}) \right\| \le \varepsilon$, *где* $\overline{F}_1$ *и* $\overline{F}_2$ *- непрерывные операторы, удовлетворяющие условию 3) определения 1;*

2) найдутся такие операторы $Q_1 : B_7^p[t_0, t_j] \to R^{p_1}$ *и* $Q_2 : R^{(j+1)q_1} \to R^{q_2}$ *, что система*

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} \overline{F}_1(\overline{x}_1, \overline{\overline{x}}_2, \overline{v}_1, \overline{\overline{v}}_2, \omega) = f_1 \\ Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}} \overline{F}_2(\overline{\overline{x}}_1, \overline{\overline{x}}_2, \overline{\overline{v}}_1, \overline{\overline{v}}_2, \omega) = f_2 \end{Bmatrix} \tag{8}$$

имеет единственное решение ω *в области* Ω *при каждом* $\{f_1, f_2\} \in R^{p_1} \times R^{q_2}$ *и это решение имеет вид*

$\omega = \varphi(\overline{x}_1, \overline{\overline{x}}_2, \overline{v}_1, \overline{\overline{v}}_2, f_1, f_2)$*,где*

$\varphi : X_1[\theta, T] \times \widetilde{X}_2[0, N] \times V_1[\theta, T] \times \widetilde{V}_2[0, N] \times R^{p_1} \times R^{q_2} \to \Omega$ *- непрерывный оператор;*

3) существует такое $c_0 = const \in R_+^1$*, что*

$\left\| \bar{f}_1, \bar{f}_2 \right\| \le \varepsilon.$ $\left\| Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} \bar{f}_1 - Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}(0), Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}} \bar{f}_2 - Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}}(0) \right\| \le c_0 \left\| \bar{f}_1, \bar{f}_2 \right\|$ *при любых* $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2\} \in B_7^p[\theta, T] \times R^{q_2}$ *удовлетворяющих условию* $\left\| \bar{f}_1, \bar{f}_2 \right\| \le \varepsilon$*;*

4) существует такое $c_1 = const \in R_+^1$*, что*

$\left\| \varphi(\overline{x}_1, \overline{\overline{x}}_2, \overline{v}_1, \overline{\overline{v}}_2, f_1, f_2) - \varphi(\overline{x}_1, \overline{\overline{x}}_2, \overline{v}_1, \overline{\overline{v}}_2, \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2) \right\| \le$

$c_1 \left\| f_1 - \widetilde{f}_1, f_2 - \widetilde{f}_2 \right\|$ *для любых* $\{f_1, f_2\} \in R^{p_1} \times R^{q_2}$ *и* $\{\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2\} \in R^{p_1} \times R^{q_2}$*;*

5) $\widetilde{\omega}$ *- решение системы (8) при* $f_1 = Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}(0)$ *и* $f_2 = Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}}(0)$.

Тогда $\left\|\overline{\omega}-\widetilde{\omega}\right\|\le c_0c_1\varepsilon$*, где* $\overline{\omega}$*- искомый вектор параметров в задаче идентификации для (5)(6)(7), а* $\widetilde{\omega}$*- приближение к* $\overline{\omega}$.

Доказательство.

В силу 1) существуют такие $\bar{f}_1\in R^{p_1}$ и $\bar{f}_2\in R^{q_2}$, что $\bar{f}_1=\overline{F}_1(\bar{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\bar{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,\overline{\omega})$ и
$\bar{f}_2=\overline{F}_2(\overset{\approx}{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\overset{\approx}{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,\overline{\omega})$ причем $\left\|\bar{f}_1,\bar{f}_2\right\|\le\varepsilon$.

Далее справедливы равенства

$$Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}\overline{F}_1(\bar{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\bar{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,\overline{\omega})=Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}\bar{f}_1,Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}\overline{F}_2(\overset{\approx}{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\overset{\approx}{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,\overline{\omega})=Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}\bar{f}_2.$$

Отсюда в силу 2) и 5) имеем

$$\overline{\omega}=\varphi(\bar{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\bar{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}\bar{f}_1,Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}\bar{f}_2)$$ и

$$\widetilde{\omega}=\varphi(\bar{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\bar{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}(0),Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}(0))$$, следовательно, в силу 4)

$$\left\|\overline{\omega}-\widetilde{\omega}\right\|\le c_1\left\|Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}\bar{f}_1-Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}(0),Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}\bar{f}_2-Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}(0)\right\|\le c_0c_1\left\|\bar{f}_1,\bar{f}_2\right\|\le c_0c_1\varepsilon$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Справедливы равенства

$$\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}\overline{F}_1(\bar{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\bar{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,\omega)=\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}\widetilde{F}_1(\bullet,\overset{(\bullet)}{\underset{\theta}{C}}z_1,\overset{(\bullet)}{\underset{\theta}{C}}z_2^0,\overset{(\bullet)}{\underset{\theta}{C}}y_1,\overset{(\bullet)}{\underset{\theta}{C}}y_2^0,\omega),$$

$$\overset{j}{\underset{0}{S}}\overline{F}_2(\overset{\approx}{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\overset{\approx}{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,\omega)=\overset{j}{\underset{0}{S}}\widetilde{F}_2(\bullet,\overset{j}{\underset{0}{S}}\tilde{z}_1,\overset{j}{\underset{0}{S}}z_2,\overset{j}{\underset{0}{S}}\tilde{y}_1,\overset{j}{\underset{0}{S}}y_2,\omega),$$

следовательно $\widetilde{\omega}=\overline{\varphi}(z_1,z_2,y_1,y_2,Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}(0),Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}(0))=$

$=\varphi(\bar{x}_1,\overset{\approx}{x}_2,\bar{v}_1,\overset{\approx}{v}_2,Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}(0),Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}(0))$ то есть $\widetilde{\omega}$ строится по измерениям входа и выхода объекта.

Эту теорему иллюстрирует

Пример 1. Пусть $\overline{v}(t)=\{\overline{v}_1(t),\overline{v}_2(t)\}$, где $\overline{v}_1(t)=1-t-i$ при $t\in[i,i+1), i=\overline{0,5}, \overline{v}_1(6)=41,$

$\overline{v}_2(t)=1+t$

при $t\in[0,6], \overline{v}_1\in L_2[0,6], \overline{v}_2\in L_2[0,6]$, $L_2[0,6]$ - пространство квадратично суммируемых на $[0,6]$ функций с нормой $\|x\|_1=\left\{\int\limits_0^6[x(t)]^2\,dt\right\}^{0.5}$, $\overline{x}(t)=\{\overline{x}_1(t),\overline{x}_2(t)\}=\{t,t^2\}$ при $t\in[0,6]$, $\overline{x}_1\in D[0,6]$, $\overline{x}_2\in D[0,6], D[0,6]$ - пространство абсолютно непрерывных на $[0,6]$ функций с нормой $\|x\|=|x(0)|+\|\dot{x}\|_1$.

А гибридная ε-модель имеет вид

$$\left\{\begin{array}{c}\dot{x}_1(t)-a_1x_1(t)-a_2x_2(i)-b_1v_1(t)=0, t\in[i,i+1), i=\overline{0,5}\\ \dot{x}_1(6)-a_1x_1(6)-a_2x_2(6)-b_1v_1(6)=0\\ x_2(i)-\overline{a}_1x_1(i-1)-\overline{a}_2x_2(i-1)-\overline{b}_1v_2(i-1)=0, i=\overline{1,6}\\ x_1(0)-\alpha_1=0\\ x_2(0)-\alpha_2=0\end{array}\right\} \qquad (9)$$

где:

$v_1\in L_2[0,6], v_2\in R^7, x_1\in D[0,6], x_2\in R^7, \theta=0, T=6, t_i$

$=i, i=\overline{0,6}, W=L_2[0,6], q=8,$

$\omega=\{\alpha_1,\alpha_2,a_1,a_2,b_1,\overline{a}_1,\overline{a}_2,\overline{b}_1\}\in R^8, \varepsilon=0.00001$.

Далее пусть измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_1(t)=\tilde{v}_1(t)=\left\{\begin{array}{c}1-t, t\in[0,1)\\ -t, t\in[1,2)\\ -3-t, t\in[2,3)\\ -11, t=3\end{array}\right\}, y_2(i)=\tilde{\tilde{v}}_2(i)=1+i, i=\overline{0,3} \qquad (10)$$

$$z_1(t) = \bar{x}_1(t) = t, t \in [0,3], z_2(i) = \tilde{\tilde{x}}_2(i) = i^2, i = \overline{0,3}, j = 3, \qquad (11)$$

а норма в пространстве $W \times R^q$ имеет вид

$$\|w, r\| = \left\{ \int_0^6 [w(t)]^2 dt + \sum_{i=0}^{7} [r_i]^2 \right\}^{0.5}, \text{ где } w \in W, r \in R^8.$$

Далее проверим выполнение условий теоремы 1 для (9)(10)(11).

Условие 1) выполняется, так как при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, a_1 = 1, a_2 = 1, b_1 = 1, \bar{a}_1 = 1, \bar{a}_2 = 1, \bar{b}_1 = 1$ выполняется неравенство $\left\| \bar{F}_1(\bar{x}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \bar{v}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \bar{\omega}), \bar{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \tilde{\tilde{v}}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \bar{\omega}) \right\| \le \varepsilon$,

где $\bar{F}_1(x_1, x_2, v_1, v_2, \omega)(t) = \{ \dot{x}_1(t) - a_1 x_1(t) -$
$- a_2 x_2(t) - b_1 v_1(t)$
при $t \in [i, i+1), \dot{x}_1(6) - a_1 x_1(6) - a_2 x_2(6) - b_1 v_1(6)$
при $t = 6\}$, $\bar{F}_2(\tilde{x}_1, x_2, \tilde{v}_1, v_2, \omega)(i) =$
$= \{ x_2(i) - \bar{a}_1 \tilde{x}_1(i-1) - \bar{a}_2 x_2(i-1) - \bar{b}_1 v_2(i-1)$

при $i = \overline{1,6}, x_1(0) - \alpha_1$ при $i = 7, x_2(0) - \alpha_2$ при $i = 0\}$. Кроме того очевидно, что выполняются условия 1),2),3) определения 1 при любых $\omega \in R^8$.

Условие 2) выполняется, так как при $Q_1 : L_2[0,3] \to R^3, Q_1(x) = \left\{ \int_0^3 x(t)dt, \int_0^3 tx(t)dt, \int_0^3 t^2 x(t)dt \right\}$ и

$Q_2 : R^5 \to R^5, Q_2(x) = x$ система (8) имеет вид

$$\left\{\begin{array}{c}\int\limits_0^3 \dot{x}(t)dt - a_1\int\limits_0^3 \bar{x}_1(t)dt - a_2\int\limits_0^3 \tilde{\bar{x}}_2^0(t)dt - b_1\int\limits_0^3 \bar{v}_1(t)dt = f_{11} \\ \int\limits_0^3 t\dot{x}_1(t)dt - a_1\int\limits_0^3 t\bar{x}_1(t)dt - a_2\int\limits_0^3 t\tilde{\bar{x}}_2^0(t)dt - b_1\int\limits_0^3 t\bar{v}_1(t)dt = f_{12} \\ \int\limits_0^3 t^2\dot{x}_1(t)dt - a_1\int\limits_0^3 t^2\bar{x}_1(t)dt - a_2\int\limits_0^3 t^2\tilde{\bar{x}}_2^0(t)dt - b_1\int\limits_0^3 t^2\bar{v}_1(t)dt = f_{13}\end{array}\right\}, \quad (12)$$

$$\left\{\begin{array}{c}\tilde{\bar{x}}_2(1) - \bar{a}_1\tilde{\bar{x}}_1(0) - \bar{a}_2\tilde{\bar{x}}_2(0) - \bar{b}_1\tilde{\bar{v}}_2(0) = f_{21} \\ \tilde{\bar{x}}_2(2) - \bar{a}_1\tilde{\bar{x}}_1(1) - \bar{a}_2\tilde{\bar{x}}_2(1) - \bar{b}_1\tilde{\bar{v}}_2(1) = f_{22} \\ \tilde{\bar{x}}_2(3) - \bar{a}_1\tilde{\bar{x}}_1(2) - \bar{a}_2\tilde{\bar{x}}_2(2) - \bar{b}_1\tilde{\bar{v}}_2(2) = f_{23}\end{array}\right\}, \quad (13)$$

$$\left\{\begin{array}{c}\tilde{\bar{x}}_1(0) - \alpha_1 = f_{24} \\ \tilde{\bar{x}}_2(0) - \alpha_2 = f_{25}\end{array}\right\}, \quad (14)$$

где $\tilde{\bar{v}}_2^0(t) = \bar{v}_2(i)$ при $t \in [i, i+1), i = \overline{0,5}$,

а $\tilde{\bar{x}}_2^0(t) = \tilde{\bar{x}}_2(i)$ при $t \in [i, i+1), i = \overline{0,5}$.

Эта система однозначно разрешима относительно ω при любых $f_1 = \{f_{11}, f_{12}, f_{13}\} \in R^3$ и $f_2 = \{f_{21}, f_{22}, f_{23}, f_{24}, f_{25}\} \in R^5$, так как $det\, M_1 \neq 0, det\, M_2 \neq 0$, где M_1 и M_2 - матрицы линейных алгебраических систем (12 и (13) соответственно, и ее решение представимо в виде

$$\omega = \left\{\tilde{\bar{x}}_1(0) - f_{24}, \tilde{\bar{x}}_2(0) - f_{25}, M_1^{-1}(g_1 - f_1), M_2^{-1}(g_2 - \tilde{f}_2)\right\} = \varphi(\bar{x}_1, \tilde{\bar{x}}_2, \bar{v}_1, \tilde{\bar{v}}_2, f_1, f_2)$$

где

$$g_1 = \left\{\int\limits_0^3 \dot{x}_1(t)dt, \int\limits_0^3 t\dot{x}_1(t)dt, \int\limits_0^3 t^2\dot{x}_1(t)dt\right\}, g_2 = \left\{\tilde{\bar{x}}_2(1), \tilde{\bar{x}}_2(2), \tilde{\bar{x}}_2(3)\right\}, \tilde{f}_2 = \left\{f_{21}, f_{22}, f_{23}\right\}, M_1^{-1}$$

и M_2^{-1} - матрицы обратные к M_1 и M_2 соответственно.

Условие 3) тоже выполняется, так как

$$\left\| Q_1 \overset{3}{\underset{0}{C}} \bar{f}_1 - Q_1\, C(0), Q_2 \overset{3}{\underset{0}{S}} \bar{f}_2 - Q_2 \overset{3}{\underset{0}{S}}(0) \right\| \le c_0 \left\| \bar{f}_1, \bar{f}_2 \right\|$$ для любых

$\bar{f}_1 \in L_2[0,6]$ и $\bar{f}_2 \in R^8$, где $c_0 = 60.6$.

Условие 4) выполняется, так как справедливо неравенство

$$\left\| \begin{matrix} \left\{ \bar{x}_1(0) - f_{24}, \bar{\bar{x}}_2(0) - f_{25}, M_1^{-1}(g_1 - \bar{f}_1), M_2^{-1}(g_2 - \bar{f}_2) \right\} - \\ \left\{ \bar{x}_1(0) - \tilde{f}_{24}, \bar{\bar{x}}_2(0) - \tilde{f}_{25}, M_1^{-1}(g_1 - \tilde{f}_1), M_2^{-1}(g_2 - \tilde{\bar{f}}_2) \right\} \end{matrix} \right\| \le$$

$c_1 \left\| f_1 - \tilde{f}_1, f_2 - \tilde{f}_2 \right\|$, где $c_1 = 14.39525$.

Условие 5) выполняется, так как $\tilde{\omega} = \left\{ \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2, b_1, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}_1 \right\} = \{0,0,1,1,1,1,1,1\}$.

И, наконец, выполняется неравенство $\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \le c_0 c_1 \varepsilon = 0.00872$, где $\bar{\omega}$ - искомый вектор параметров модели, а $\tilde{\omega}$ - найденное приближение к $\bar{\omega}$. Пример закончен.

Продолжим рассмотрение задачи идентификации для гибридной ε-модели (5) при измерениях входа и выхода объекта (6),(7).

Теорема 2. *Пусть*

1) существует такое $\bar{\omega} \in \Omega$, при котором выполняются условия определения 1 для модели (5);

2) найдутся такие операторы $Q_1 : B_7^p[t_0, t_j] \to H$ и $Q_2 : R^{(j+1)q_1} \to R^{q_2}$, что система

$$\left\{ \begin{matrix} Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} \bar{F}_1(\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{v}_1, \bar{\bar{v}}_2, \omega) = f_1 \\ Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}} \bar{F}_2(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{v}}_1, \bar{\bar{v}}_2, \omega) = f_2 \end{matrix} \right\} \qquad (15)$$

имеет единственное решение ω в области Ω при каждом $\{f_1, f_2\} \in H \times R^{q_2}$ и это решение имеет вид

$\omega = \varphi(\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{v}_1, \bar{\bar{v}}_2, f_1, f_2),$

где $\varphi : X_1[\theta,T]\times\widetilde{X}_2[0,N]\times V_1[\theta,T]\times\widetilde{V}_2[0,N]\times H\times R^{q_2}\to\Omega$ - *непрерывный оператор, H - нормированное пространство;*

3) существует такое $c_0 = const\in R^1_+$, *что* $\left\|Q_1(\bar{f}_1)-Q_1(\widetilde{f}_1),Q_2(\bar{f}_2)-Q_2(\widetilde{f}_2)\right\|\le c_0\left\|\bar{f}_1-\widetilde{f}_1,\bar{f}_2-\widetilde{f}_2\right\|$ *для любых* $\bar{f}_1,\widetilde{f}_1\in B^p_7[t_0,t_j]$ *и* $\bar{f}_2,\widetilde{f}_2\in R^{(j+1)q_1}$;

4) существует такое $c_1 = const\in R^1_+$, *что*

$$\left\|\varphi(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,f_1,f_2)-\varphi(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)\right\|\le c_1\left\|f_1-\widetilde{f}_1,f_2-\widetilde{f}_2\right\|$$

для любых $f_1,\widetilde{f}_1\in H$ *и* $f_2,\widetilde{f}_2\in R^{q_2}$;

5) существует

$$\widetilde{\omega}=\arg\min_{\omega\in\Omega}\left\|\mathop{C}_{t_0}^{t_j}\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega),\mathop{S}_{0}^{j}\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega)\right\|.$$

Тогда $\left\|\overline{\omega}-\widetilde{\omega}\right\|\le 2c_0c_1\varepsilon$, *где* $\overline{\omega}$ - *искомый вектор параметров модели, а* $\widetilde{\omega}$ - *приближение к* $\overline{\omega}$.

Доказательство. В силу 1) существуют такие $\bar{f}_1\in B^p_7[\theta,T]$ и $\bar{f}_2\in R^q$, что $\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\overline{\omega})=\bar{f}_1$, $\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\overline{\omega})=\bar{f}_2$ и $\left\|\bar{f}_1,\bar{f}_2\right\|\le\varepsilon$.

Далее справедливо неравенство

$$\left\|\mathop{C}_{t_0}^{t_j}\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega),\mathop{S}_{0}^{j}\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega)\right\|\le$$

$$\left\|\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega),\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega)\right\|$$

, следовательно

$$\left\|\mathop{C}_{t_0}^{t_j}\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\widetilde{\omega}),\mathop{S}_{0}^{j}\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\widetilde{\omega})\right\|\le$$

$$\left\|\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega_0),\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega_0)\right\|$$

, где

$$\omega_0=\arg\min_{\omega\in\Omega}\left\|\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega),\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega)\right\|.$$

Далее $\left\|\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega_0),\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\omega_0)\right\|\le$

$\le\left\|\overline{F}_1(\bar{x}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\bar{v}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\overline{\omega}),\overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1,\tilde{\tilde{x}}_2,\tilde{\tilde{v}}_1,\tilde{\tilde{v}}_2,\overline{\omega})\right\|\le\varepsilon$

и $\left\| \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} \overline{F}_1(\overline{x}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \overline{v}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\omega}), \mathop{S}\limits_{0}^{j} \overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \tilde{\tilde{v}}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\omega}) \right\| \le \varepsilon$, т.е.

$\left\| \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \right\| \le \varepsilon$, где $\tilde{f}_1 = \overline{F}_1(\overline{x}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \overline{v}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\omega}), \tilde{f}_2 = \overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \tilde{\tilde{v}}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\omega})$.

Очевидно справедливы равенства

$$Q_1 \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} \overline{F}_1(\overline{x}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \overline{v}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\omega}) = Q_1 \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} \tilde{f}_1, Q_2 \mathop{S}\limits_{0}^{j} \overline{F}_2(\tilde{\tilde{x}}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \tilde{\tilde{v}}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, \tilde{\omega}) = Q_2 \mathop{S}\limits_{0}^{j} \tilde{f}_2,$$

следовательно, в силу 2), имеем

$\tilde{\omega} = \varphi(\overline{x}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \overline{v}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, Q_1 \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} \tilde{f}_1, Q_2 \mathop{S}\limits_{0}^{j} \tilde{f}_2)$ и аналогично

$\overline{\omega} = \varphi(\overline{x}_1, \tilde{\tilde{x}}_2, \overline{v}_1, \tilde{\tilde{v}}_2, Q_1 \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} f_1, Q_2 \mathop{S}\limits_{0}^{j} f_2)$.

Отсюда, в силу 3), 4),

$$\left\| \overline{\omega} - \tilde{\omega} \right\| \le c_0 \left\| Q_1 \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} f_1 - Q_1 \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} \tilde{f}_1, Q_2 \mathop{S}\limits_{0}^{j} f_2 - Q_2 \mathop{S}\limits_{0}^{j} \tilde{f}_2 \right\| \le c_0 c_1 \left\| \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} f_1 - \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} \tilde{f}_1, \mathop{S}\limits_{0}^{j} f_2 - \mathop{S}\limits_{0}^{j} \tilde{f}_2 \right\|$$

. Далее справедливо неравенство $\left\| \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} f_1, \mathop{S}\limits_{0}^{j} f_2 \right\| \le \left\| f_1, f_2 \right\| \le \varepsilon$.

Отсюда $\left\| \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} f_1 - \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} \tilde{f}_1, \mathop{S}\limits_{0}^{j} f_2 - \mathop{S}\limits_{0}^{j} \tilde{f}_2 \right\| \le \left\| \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} f_1, \mathop{S}\limits_{0}^{j} f_2 \right\| + \left\| \mathop{C}\limits_{t_0}^{t_j} \tilde{f}_1, \mathop{S}\limits_{0}^{j} \tilde{f}_2 \right\| \le 2\varepsilon$ и

$\left\| \overline{\omega} - \tilde{\omega} \right\| \le 2c_0 c_1 \varepsilon$, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Эту теорему иллюстрирует

Пример 2. Пусть гибридная ε-модель объекта имеет вид (9) , а измерения входа и выхода объекта имеют вид (10),(11). Тогда

$$\tilde{\omega} = \left\{ \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_1, \tilde{\tilde{a}}_1, \tilde{\tilde{a}}_2, \tilde{\tilde{b}}_1 \right\} =$$

$$\arg\min_{\omega \in \Omega} \{ \int_0^3 [\dot{\overline{x}}_1(t) - a_1 \overline{x}_1(t) - a_2 \tilde{\tilde{x}}_2(t) - b_1 \overline{v}_1(t)]^2 dt +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\begin{matrix}[\tilde{\tilde{x}}_2(i)-\bar{a}_1\tilde{\tilde{x}}_1(i-1)-\bar{a}_2\tilde{\tilde{x}}_2(i-1)-\bar{b}_1\tilde{\tilde{v}}_2(i-1)]^2+[\bar{x}_1(0)-\alpha_1]^2\\+[\tilde{\tilde{x}}_2(0)-\alpha_2]^2\}^{0.5}=\{0,0,1,1,1,1,1,1\}\end{matrix},c_0=60.6,$$

$c_1=14.39525$. Полагая $\varepsilon=0.00001,$ получаем $\|\bar{\omega}-\tilde{\omega}\|\le 2c_0c_1\varepsilon=0.01745$. Условия 1),2),3)и 4) теоремы 2 выполняются так же как и в примере 1. Пример закончен.

Пусть далее гибридная ε-модель имеет вид

$$\begin{Bmatrix}A_0(x_1)-\alpha_1(\omega)A_1(x_1)-\alpha_2(\omega)A_2(x_2)-\beta_1(\omega)B_1(v_1)-\beta_2(\omega)B_2(v_2)=0\\ \bar{A}_0(x_2)-\bar{\alpha}_1(\omega)\bar{A}_1(\tilde{x}_1)-\bar{\alpha}_2(\omega)\bar{A}_2(x_2)-\bar{\beta}_1(\omega)\bar{B}_1(\tilde{v}_1)-\bar{\beta}_2(\omega)\bar{B}_2(v_2)=0\end{Bmatrix} \tag{16}$$

где

$A_i:X_1[\theta,T]\to B_7^p[\theta,T],A_i(x_1)(t)=\tilde{A}_i(t,\overset{t}{\underset{\theta}{C}}x_1),\tilde{A}_i(t,\bullet):X_1[\theta,t]\to R^p$

при каждом $t\in[\theta,T],i=0,1$,

$A_2:\tilde{X}_2[0,N]\to B_7^p[\theta,T],A_2(x_2)(t)=\tilde{A}_2(t,\overset{t}{\underset{\theta}{C}}x_2^0),\tilde{A}_2(t,\bullet):X_2[\theta,t]\to R^p$

при каждом

$t\in[\theta,T],\quad x_2^0(t)=x_2(i)$ при

$t\in[i,i+1),i=\overline{0,N-1},B_1:V_1[\theta,T]\to B_7^p[\theta,T],B_1(x_1)(t)=$

$\tilde{B}_1(t,\overset{t}{\underset{\theta}{C}}v_1),\tilde{B}_1(t,\bullet):V_1[\theta,t]\to$

$\to R^p$ при каждом фиксированном

$t\in[\theta,T],B_2:\tilde{V}_2[0,N]\to B_7^p[\theta,T],B_2(v_2)(t)=\tilde{B}_2(t,\overset{t}{\underset{\theta}{C}}v_2^0),\tilde{B}_2(t,\bullet):$

$V_2[\theta,t]\to R^p$ при каждом $t\in[\theta,T],v_2^0(t)=v_2(i)$

при $t\in[i,i+1),i=\overline{0,N-1}$.

$$\overline{A}_0 : \tilde{X}_2[0,N] \to R^q, \overline{A}_0(x_2)(i) = \tilde{A}_2(i, \mathop{S}_{0}^{i} x_2), \tilde{A}_2(i,\bullet) : \tilde{X}_2[0,i] \to R^{q_2}$$

при каждом $i = \overline{0,N}, \overline{A}_1 : \tilde{X}_1[0,N] \to$

$\to R^q, \overline{A}_1(\tilde{x}_1)(t) = \tilde{\tilde{A}}_1(i, \mathop{S}_{0}^{i} \tilde{x}_1), \tilde{\tilde{A}}_1(i,\bullet) : \tilde{X}_1[0,i] \to R^{q_1}$

при каждом $i = \overline{0,N}, \overline{A}_2 : \tilde{X}_2[0,N] \to R^q,$

$\overline{A}_2(x_2)(i) = \tilde{\tilde{A}}_2(i, \mathop{S}_{0}^{i} x_2), \tilde{\tilde{A}}_2(i,\bullet) : \tilde{X}_2[0,i] \to R^{q_1}$

при каждом $i = \overline{0,N}, \overline{B}_1 : \tilde{V}_1[0,N] \to R^q, \overline{B}_1(\tilde{v}_1)(i) =$

$= \tilde{\tilde{B}}_1(i, \mathop{S}_{0}^{i} \tilde{v}_1), \tilde{\tilde{B}}_1(i,\bullet) : \tilde{V}_1[0,i] \to R^{q_3}$

при каждом $i = \overline{0,N}, \overline{B}_2 : \tilde{V}_2[0,N] \to R^q, \overline{B}_2(v_2)(i) = \tilde{\tilde{B}}_2(i, \mathop{S}_{0}^{i} v_2),$

$\tilde{\tilde{B}}_2(i,\bullet) : \tilde{V}_2[0,i] \to R^{q_4}$

при каждом

$i = \overline{0,N}, \alpha_i : \Omega \to R^1, \beta_i : \Omega \to R^1, \overline{\alpha}_i : \Omega \to R^1, \overline{\beta}_i : \Omega \to R^1$ - непрерывные функции при $i = 1,2$, $\Omega \subseteq R^k$, операторы $A_i, B_i, \overline{A}_i$ и $\overline{B}_i$ непрерывны.

А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_1 = Q_1 \mathop{C}_{t_0}^{t_j} B_1(\overline{v}_1), y_2 = Q_1 \mathop{C}_{t_0}^{t_j} B_2(\overline{\overline{v}}_2), y_3 = Q_2 \mathop{S}_{0}^{j} \overline{B}_1(\overline{\overline{v}}_1), y_4 = Q_2 \mathop{S}_{0}^{j} \overline{B}_2(\overline{\overline{v}}_2), \tag{17}$$

$$z_0 = Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} A_0(\bar{x}_1), z_1 = Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} A_1(\bar{x}_1), z_2 = Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} A_2(\tilde{\tilde{x}}_2), z_3 = Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}} \bar{A}_0(\tilde{\tilde{x}}_2), z_4 = Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}} \bar{A}_1(\tilde{\tilde{x}}_1), \quad (18)$$

$$z_5 = Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}} \bar{A}_2(\tilde{\tilde{x}}_2), \quad (19)$$

где $Q_1 : B_7^p [t_0, t_j] \to H, Q_2 : R^{(j+1)q_5} \to R^r$ - линейные ограниченные операторы, H - нормированное пространство.

Теорема 3. *Пусть*

1) существует такое $\bar{\omega} \in \Omega$*, при котором выполняются условия определения 1 для модели (16);*

2) найдутся такие линейные операторы $G_1 : H \to R^4$ *и* $G_2 : R^r \to R^4$*, что линейная алгебраическая система*

$$\begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_1 G_1 z_1 + \bar{\alpha}_2 G_1 z_2 + \bar{\beta}_1 G_1 y_1 + \bar{\beta}_2 G_1 y_2 = G_1 z_0 \\ \tilde{\alpha}_1 G_2 z_4 + \tilde{\alpha}_2 G_2 z_5 + \tilde{\beta}_1 G_2 y_3 + \tilde{\beta}_2 G_2 y_4 = G_2 z_3 \end{Bmatrix}, \quad (20)$$

имеет единственное решение $\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2\} \in R^8$*;*

3) система

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1(\omega) = \tilde{\tilde{\alpha}}_1, \alpha_2(\omega) = \tilde{\tilde{\alpha}}_2, \beta_1(\omega) = \bar{\beta}_1, \beta_2(\omega) = \tilde{\tilde{\beta}}_2 \\ \bar{\alpha}_1(\omega) = \tilde{\tilde{\alpha}}_1, \bar{\alpha}_2(\omega) = \tilde{\tilde{\alpha}}_2, \bar{\beta}_1(\omega) = \tilde{\tilde{\beta}}_1, \bar{\beta}_2(\omega) = \tilde{\tilde{\beta}}_2 \end{Bmatrix}, \quad (21)$$

имеет единственное решение $\omega \in \Omega$ *при любых* $\left\{\tilde{\tilde{\alpha}}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2, \tilde{\tilde{\beta}}_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2, \tilde{\tilde{\alpha}}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2, \tilde{\tilde{\beta}}_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2\right\}$ *являющихся решениями линейной алгебраической системы*

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\tilde{\alpha}}_1 G_1 z_1 + \tilde{\tilde{\alpha}}_2 G_1 z_2 + \tilde{\tilde{\beta}}_1 G_1 y_1 + \tilde{\tilde{\beta}}_2 G_1 y_2 = G_1 z_0 - G_1 Q_1 \overset{t_j}{\underset{t_0}{C}} f_1 \\ \tilde{\tilde{\alpha}}_1 G_2 z_4 + \tilde{\tilde{\alpha}}_2 G_2 z_5 + \tilde{\tilde{\beta}}_1 G_2 y_3 + \tilde{\tilde{\beta}}_2 G_2 y_4 = G_2 z_3 - G_2 Q_2 \overset{j}{\underset{0}{S}} f_2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

где $f_1 \in B_7^p [\theta, T]$ *и* $f_2 \in R^q$ *такие, что* $\|f_1, f_2\| \le \varepsilon$*;*

4) $\tilde{\omega}$ *- решение системы (21) при*

$\tilde{\tilde{\alpha}}_1=\overline{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2=\overline{\alpha}_2, \tilde{\tilde{\beta}}_1=\overline{\beta}_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2=\overline{\beta}_2, \tilde{\tilde{\alpha}}_1=\tilde{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2=\tilde{\alpha}_2, \tilde{\tilde{\beta}}_1=\tilde{\beta}_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2=\tilde{\beta}_2$;

5)существует такое $c_0=const\in R^1_+$, *что* $\|\omega-\tilde{\omega}\|\le$

$\le c_0\left\|\tilde{\tilde{\alpha}}_1-\overline{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2-\overline{\alpha}_2, \tilde{\tilde{\beta}}_1-\overline{\beta}_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2-\overline{\beta}_2, \tilde{\tilde{\alpha}}_1-\tilde{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2-\tilde{\alpha}_2, \tilde{\tilde{\beta}}_1-\tilde{\beta}_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2-\tilde{\beta}_2\right\|$

где ω *- решение системы (21).*

Тогда $\|\overline{\omega}-\tilde{\omega}\|\le c_0c_1c_2\varepsilon$, *где* $c_1\ge\left\|M^{-1}\right\|, M$ *- матрица линейной алгебраической системы(20)* , $c_2\ge\left\|G_1Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}, G_2Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}\right\|$,

$\overline{\omega}$ *- искомое в задаче идентификации значение вектора параметров модели, а* $\tilde{\omega}$ *- приближение к* $\overline{\omega}$.

Доказательство. В силу 1) существуют такие $f_1\in B^p_7[\theta,T]$ и $f_2\in R^q$, что $\|f_1,f_2\|\le\varepsilon$,

$$A_0(\overline{x}_1)-\alpha_1(\overline{\omega})A_1(\overline{x}_1)-\alpha_2(\overline{\omega})A_2(\tilde{\tilde{x}}_2)-\beta_1(\overline{\omega})B_1(\overline{v}_1)-\beta_2(\overline{\omega})B_2(\tilde{\tilde{v}}_2)=f_1$$

и

$$\overline{A}_0(\tilde{\tilde{x}}_2)-\overline{\alpha}_1(\overline{\omega})\overline{A}_1(\tilde{\tilde{x}}_1)-\overline{\alpha}_2(\overline{\omega})\overline{A}_2(\tilde{\tilde{x}}_2)-\overline{\beta}_1(\overline{\omega})\overline{B}_1(\tilde{\tilde{v}}_1)-\overline{\beta}_2(\overline{\omega})\overline{B}_2(\tilde{\tilde{v}}_2)=f_2$$

.

Применяя к обеим частям этих равенств операторы $G_1Q_1\overset{t_j}{\underset{t_0}{C}}$ и $G_2Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}$ получим равенства

$$G_1z_0-\alpha_1(\overline{\omega})G_1z_1-\alpha_2(\overline{\omega})G_1z_2-\beta_1(\overline{\omega})G_1y_1-\beta_2(\overline{\omega})G_1y_2=G_1Q_1\overset{t_j}{\underset{0}{C}}f_1$$

,

$$G_2z_3-\overline{\alpha}_1(\overline{\omega})G_2z_4-\overline{\alpha}_2(\overline{\omega})G_2z_5-\overline{\beta}_1(\overline{\omega})G_2y_3-\overline{\beta}_2(\overline{\omega})G_2y_4=G_2Q_2\overset{j}{\underset{0}{S}}f_2$$

.

Введем обозначения: $\tilde{\tilde{\alpha}}_1=\alpha_1(\overline{\omega}), \tilde{\tilde{\alpha}}_2=\alpha_2(\overline{\omega}), \tilde{\tilde{\beta}}_1=\beta_1(\overline{\omega}), \tilde{\tilde{\beta}}_2$
$=\beta_2(\overline{\omega}), \tilde{\tilde{\alpha}}_1=\overline{\alpha}_1(\overline{\omega}), \tilde{\tilde{\alpha}}_2=\overline{\alpha}_2(\overline{\omega}), \tilde{\tilde{\beta}}_1=\overline{\beta}_1(\overline{\omega}),$

$\tilde{\tilde{\beta}}_2 = \overline{\beta}_2(\overline{\omega}),$ тогда справедливы равенства (21),(22), то есть система (21),(22) имеет единственное решение $\overline{\omega} \in \Omega$. В силу определения $\tilde{\omega}$, то есть в силу 4) и 5) справедливы неравенства $\|\overline{\omega} - \tilde{\omega}\| \leq$

$$\leq c_0 \left\| \tilde{\tilde{\alpha}}_1 - \overline{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2 - \overline{\alpha}_2, \tilde{\tilde{\beta}}_1 - \overline{\beta}_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2 - \overline{\beta}_2, \tilde{\tilde{\alpha}}_1 - \tilde{\alpha}_1, \tilde{\tilde{\alpha}}_2 - \tilde{\alpha}_2, \tilde{\tilde{\beta}}_1 - \tilde{\beta}_1, \tilde{\tilde{\beta}}_2 - \tilde{\beta}_2 \right\| \leq$$

$$c_0 \left\| M_1^{-1} G_1 Q_1 \mathop{C}_{t_0}^{t_j} f_1, M_2^{-1} G_2 Q_2 \mathop{S}_{0}^{j} f_2 \right\| \leq$$

$$\leq c_0 c_1 \left\| G_1 Q_1 \mathop{C}_{t_0}^{t_j} f_1, G_2 Q_2 \mathop{S}_{0}^{j} f_2 \right\| \leq c_0 c_1 c_2 \| f_1, f_2 \| \leq c_0 c_1 c_2 \varepsilon,$$ где M_1, M_2 - составляющие матрицы M, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Эту теорему иллюстрирует

Пример 3. Пусть $\overline{v}(t) = \{\overline{v}_1(t), \overline{v}_2(t)\} = \{1 - t - i^2, 1 + t\}$ при $t \in [i, i+1), i = \overline{0{,}5}, \overline{v}(6) = \{-41{,}7\}, \overline{v}_1 \in L_2[0{,}6], \overline{v}_2 \in L_2[0{,}6], \overline{x}(t) = \{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t)\} = \{t, t^2\}, t \in [0{,}6]$.

И пусть гибридная ε-модель имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1(t) - \alpha_1 - a_1 \int_0^t x_1(s)ds - a_2 \int_0^t x_2^0(s)ds - b_1 \int_0^t v_1(s)ds = 0, t \in [0{,}6] \\ x_2(i) - \overline{a}_1 \tilde{x}_1(i-1) - \overline{a}_2 x_2(i-1) - \overline{b}_1 v_2(i-1) = 0, i = \overline{1{,}6} \\ x_2(0) - \alpha_2 = 0 \end{array} \right\}, \quad (23)$$

где $x_1 \in D[0{,}6], x_2 \in R^7, x_2^0(t) = x_2(i)$ при

$t \in [i, i+1), i = \overline{0{,}5}, x_2^0(6) = x_2(6), \tilde{x}_1(i) = x_1(i), i = \overline{0.6}, \tilde{x}_1 \in R^7,$

$v_1 \in L_2[0{,}6], v_2 \in R^7, \omega = \{\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2, b_1, \overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{b}_1\} \in R^8, \varepsilon = 0.00005$.

А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y_i = \int_0^i \overline{v}_1(t)dt, i = \overline{0,3}, \overline{y}_\xi = \sum_{i=0}^{\xi} \overline{v}_2(i), \xi = \overline{0,3}, \tag{24}$$

$$z_i = \overline{x}_1(i), i = \overline{0,3}, \overline{z}_\xi = \int_0^\xi \overline{x}_1(t)dt, \xi = \overline{0,3}, \tilde{z}_\xi = \sum_{i=0}^{\xi} \overline{x}_2(i), \xi = \overline{0,3}, \tilde{\tilde{z}}_\xi = \sum_{i=0}^{\xi} \overline{x}_1(i), \xi = \overline{0,3}. \tag{25}$$

Проверим выполнение условий теоремы 2 для (23),(24),(25).

Условие 1) выполняется, так как при $\overline{\omega} = \{0,0,1,1,1,1,1,1\}$ выполняются условия определения 1 .

Условие 2) выполняется, так как измерения (24),(25) можно записать в виде (17),(18),(19) положив

$A_0(x_1)(t) \equiv x_1(t), A_1(x_1)(t) \equiv \int_0^t x_1(s)ds, A_2(x_2)(t) \equiv \int_0^t x_2^0(s)ds, B_1(v_1)(t) \equiv \int_0^t v_1(s)ds, B_2(v_2)(t) \equiv 0,$

$\overline{A}_0(x_2)(i) \equiv x_2(i), \overline{A}_1(\tilde{x}_1)(i) \equiv \tilde{x}_1(i-1), \overline{A}_2(x_2)(i) \equiv x_2(i-1), \overline{B}_1(\tilde{v}_1)(i) \equiv 0, \overline{B}_2(v_2)(i) \equiv v_2(i-1),$

$Q_1 : D[0,3] \to R^4, Q_1(x_1) = \left\{0, \int_0^1 x_1(t)dt, \int_0^2 x_1(t)dt, \int_0^3 x_1(t)dt\right\}$

$Q_2 : R^4 \to R^4, Q_2(x_2) = \{x_2(0), x_2(0) + x_2(1),$
$x_2(0) + x_2(1) + x_2(2), x_2(0) + x_2(1) + x_2(2) + x_2(3)\}$, а операторы G_1 и G_2 взять в виде $G_1 : R^4 \to R^4$,
$G_1(x) \equiv x, G_2 : R^4 \to R^4, G_2(x) \equiv x$. Таким образом система (20) для этого примера принимает вид

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_1 = z_0 \\ \overline{z}_1 a_1 + \tilde{z}_1 a_2 + y_1 b_1 = z_1 \\ \overline{z}_2 a_1 + \tilde{z}_2 a_2 + y_2 b_1 = z_2 \\ \overline{z}_3 a_1 + \tilde{z}_3 a_2 + y_3 b_1 = z_3 \end{array}\right\}, \tag{26}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_2 = \overline{y}_0 \\ \tilde{\tilde{z}}_1 \overline{a}_1 + \tilde{z}_1 \overline{a}_2 + \overline{y}_1 \overline{b}_1 = \tilde{z}_1 - \tilde{z}_0 \\ \tilde{\tilde{z}}_2 \overline{a}_1 + \tilde{z}_2 \overline{a}_2 + \overline{y}_2 \overline{b}_1 = \tilde{z}_2 - \tilde{z}_0 \\ \tilde{\tilde{z}}_3 \overline{a}_1 + \tilde{z}_3 \overline{a}_2 + \overline{y}_3 \overline{b}_1 = \tilde{z}_3 - \tilde{z}_0 \end{array}\right\}. \tag{27}$$

Эта линейная алгебраическая система имеет единственное решение $\tilde{\omega} = \left\{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_1, \tilde{\tilde{a}}_1, \tilde{\tilde{a}}_2, \tilde{\tilde{b}}_1\right\} =$
$= \{0,0,1,1,1,1,1,1\}$.

В условии 4) определяется $\tilde{\omega}$, которое вычислено выше.

Условие 5) выполняется, так как для этого примера $c_0 = 1$. Таким образом $\|\overline{\omega} - \tilde{\omega}\| \le c_0 c_1 c_2 \varepsilon = 0.0098$, где $c_0 = 1, c_1 = 13.34166, c_2 = 14.69694$. Пример закончен.

Замечание 2. Вычисления проводились с точностью до десяти знаков после запятой, а окончательные результаты указаны с точностью до пяти знаков после запятой, следовательно абсолютная погрешность результатов не превосходит 0.000005.

Замечание 3. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (региональный грант УралРФФИ № 10-01-96054).

Библиографический список

1. Марченко В.М., Луазо Ж.Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения.-2009.-Т.45.-№5.-С.728-740.
2. Марченко В.М., Поддубная О.Н. Представление решений гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения.-2006.-Т.42.-№6. С.741-755.
3. Марченко В.М., Поддубная О.Н. Преставление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями // Доклады академии наук.-2005 .-Т.404.-№4.-С.465-469.