Б.И. Мызникова, С.А. Кудрявцева

Пермский государственный университет

ОПТИМИЗАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СОГЛАСОВАННЫХ ЛИЗИНГОВЫХ РАСЧЕТОВ

Долгосрочные банковские ссуды традиционно служили для предприятий одним из основных источников финансирования закупок нового оборудования.

Финансовая аренда (лизинг) также является возможностью использовать денежные средства банка для финансирования программ обновления производства [1]. Под лизингом понимается вид предпринимательской деятельности, направленной на инвестирование временно свободных или привлеченных финансовых средств, когда по договору финансовой аренды (лизинга) арендодатель (лизингодатель) обязуется приобрести в собственность обусловленное договором имущество у определенного продавца и предоставить это имущество арендатору (лизингополучателю) за плату во временное пользование для предпринимательских целей [4]. Таким образом, банк покупает имущество в свою собственность и затем сдает его предприятию в аренду, при этом доход банка складывается из арендной платы и всевозможных налоговых льгот.

Одной из самых современных форм лизинга является финансовая аренда с привлечением средств. Согласно этой финансовой технологии, лизинговая компания перед покупкой оборудования сама берет кредит в размере до 80 % от стоимости приобретаемого имущества. При правильном расчете такая операция оказывается выгодной для всех трех сторон – банка-кредитора, компании-арендодателя и фирмы-арендатора.

Предметом настоящей статьи является анализ инвестиционной программы финансовой аренды. Рассмотрим одну из возможных схем лизинга [3]:

1. банк предоставляет лизингодателю кредит;

2. на сумму кредита лизингодатель приобретает у поставщика предмет лизинга;
3. лизингодатель передает предмет лизинга в пользование лизингополучателю;
4. лизингополучатель периодически выплачивает лизингодателю лизинговые платежи, а по завершении лизингового договора лизингополучатель приобретает предмет лизинга по остаточной стоимости;
5. лизингодатель рассчитывается по кредиту с банком и платит налоги.

Все расходы лизингодателя разделим на две группы: зависящие от объемов лизинговых платежей и не зависящие от них. К первой группе относятся налоги с оборота и налог на прибыль. Пусть x_i - лизинговый платеж, выплачиваемый лизингополучателем лизингодателю в момент времени T_i; θ - суммарная ставка налогов с оборота $(0 < \theta < 1)$, тогда величина налогов с оборота, выплачиваемых с платежа x_i, равна θx_i.

Все расходы второй группы, в свою очередь, также разбиваются на две составные части: α_i - расходы, включаемые в расчет налога на прибыль, выплачиваемого в срок T_i (например, процентные платежи банку); β_i - расходы за тот же период, что и при расчете α_i, не включаемые в расчет налога на прибыль (например, погашение части кредита). Кроме того, обозначим через d_i амортизацию предмета лизинга, входящего в расчет налога на прибыль, выплачиваемого в срок T_i. Эта величина не зависит от размера лизингового платежа и к расходам не относится.

С учетом сделанных предположений математическая модель примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j e^{-RT_j} \to \min_x,$$

$$\sum_{j=1}^{i} \delta_j \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j e^{-rT_j} \geq \lambda,$$

$$x_i \geq 0, i = 1,...,n.$$

где δ_i - доход в момент T_i; R, r - безрисковые ставки процента лизингополучателя и лизингодателя, соответственно.

Введем вспомогательные обозначения: $\forall i = 1,...,n,$

$$a_i = (\alpha_i + \beta_i)/(1-\theta),$$

$$b_i = (\alpha_i + d_i)/(1-\theta),$$

$$c_i = e^{-RT_i}, v_i = e^{-rT_i},$$

$$g_i = \gamma_i/(1-\theta),$$

$$s = \lambda/(1-\theta).$$

В результате исследуемая задача примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_x, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{i} [x_j - a_j - t(g_j)_+] \geq 0, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} v_j [x_j - a_j - t(g_j)_+] \geq s, \tag{3}$$

$$g_i = x_i - b_i - \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}(-g_j)_+, \tag{4}$$

$$x_i \geq 0, \ \forall i = 1,...,n, \tag{5}$$

$c_j, v_j, s > 0$, коэффициенты c_j и v_j подчинены условию монотонности:

$$c_{j+1} < c_j, v_{j+1} < v_j,$$

Кроме того, выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \geq \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

которое следует из естественного требования

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \geq K_0 - K_n,$$

где K_0 - балансовая стоимость предмета лизинга, K_n - остаточная стоимость предмета лизинга и

$$K_0 = K_n + \sum_{j=1}^{n} d_j.$$

Преобразуем исходную задачу, для этого введем дополнительные неотрицательные неизвестные z_i:

$$z_i = \sum_{j=1}^{i} [x_j - a_j - t(g_j)_+].$$

Отсюда следует, что

$$x_j - a_j - t(g_j)_+ = z_i - z_{i-1}, i > 1,$$

и (3) примет вид:

$$v_1 z_1 + \sum_{j=2}^{n} v_j (z_j - z_{i-1}) \geq s.$$

После замены ограничений в исходной задаче данными ограничениями при дополнительном условии неотрицательности на переменные z_i, получим задачу нелинейного программирования.

Сведем решение исходной задачи к задаче линейного программирования. Для этого введем неотрицательные переменные p_i и l_i, характеризующие прибыль и убытки лизингодателя за период i, полагая $g_i = p_i - l_i$ и требуя

$$p_i l_i = 0, i = 1,...,n.$$

Тогда

$$p_i = (g_i)_+, l_i = (-g_i)_+.$$

Сделав соответствующие замены, получим линейные ограничения, но при этом добавится условие комплементарности. В итоге модель примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_x,$$

$$\sum_{j=1}^{i} x_j - t\sum_{j=1}^{i} p_j - z_i = \sum_{j=1}^{i} a_j,$$

$$v_1 z_1 + \sum_{j=2}^{n} v_j (z_j - z_{i-1}) \geq s,$$

$$-x_i + p_i + \sum_{j=1}^{i-1} k_{iq} l_q - l_i = -b_i,$$

$$x_j, z_j, p_j, l_j \geq 0,$$

$$p_j l_j = 0,$$

$$j = \overline{1,n}, i = \overline{1,n}.$$

Посмотрим на примере процесс оптимизации лизинговых платежей для случая двухпериодного лизинга.

Пусть в точке безубыточности выполняются соотношения:

$$\delta_i = \lambda_i = 0,$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Цена предмета лизинга $K_0 = 1$ млн. руб. Период действия договора составляет 2 квартала. Начало действия договора лизинга и кредитного договора T_0. Конец действия договоров T_2. Годовая норма амортизации равна 10%. Имущество передается лизингополучателю по остаточной стоимости

$K_2 = 875000$ руб. Банковская ставка процента 10% годовых Выплата процентов ежеквартальная, по методу постнумерандо. Вся сумма кредита возвращается банку только по завершении договора кредита. Ставка налога на прибыль $t = 30\%$. Суммарная ставка налогов с оборота $\theta = 4{,}1\%$. Амортизация имущества за первый квартал $d_1 = 50000$ руб., за второй квартал $d_2 = 75000$ руб. Стоимость имущества на начало второго квартала равна $K_1 = 950000$ руб. Ставка налога на имущество 2%. Налог на имущество за первый и второй кварталы совпадают и составляют величину 2375руб. По завершении кредита банку возвращается 1 млн. руб. Первый процентный платеж совпадает со вторым и равен 25000 руб. Убытки первого квартала лишь частично включаются в себестоимость продукции второго квартала ($k = 20\%$).

Запишем задачу для случая двух лизинговых платежей:

$$p_1 - l_1 + e^{-RT}(p_2 - l_2 + kl_1) \to \min_{p,l},$$

$$p_1 - l_1 \ge -b_1,$$

$$p_2 - l_2 + kl_1 \ge -b_2,$$

$$(1-t)p_1 - l_1 \ge f_1,$$

$$(1-t)(p_1 + p_2) - (1-k)l_1 - l_2 \ge 0,$$

$$(1-t)p_1 - l_1 + e^{-rT}((1-t)p_2 - l_2 + kl_1) \ge c,$$

$$p_i \ge 0, l_i \ge 0, i = 1,2,$$

$$p_i l_i = 0, i = 1,2,$$

где $f_i = a_i - b_i, T = T_2 - T_1, k = k_{21}, c = f_1 + e^{-rT} f_2$.

Лизинговые платежи определяются формулами:

$$x_1 = p_1 - l_1 + b_1,$$

$$x_2 = p_2 - l_2 + b_2 + kl_1.$$

Доход лизингодателя равен:

$$\delta_1 = (1-\theta)((1-t)p_1 - l_1 - f_1),$$

$$\delta_2 = (1-\theta)((1-t)p_2 - l_2 + kl_1 - f_2).$$

Возможны четыре комбинации комплементарных переменных p_i и l_i:

$$p_1 = 0, l_1 > 0, p_2 = 0, l_2 > 0,$$
$$p_1 = 0, l_1 \geq 0, p_2 \geq 0, l_2 = 0,$$
$$p_1 > 0, l_1 = 0, p_2 > 0, l_2 = 0,$$
$$p_1 > 0, l_1 = 0, p_2 = 0, l_2 > 0,$$

Так как в нашем примере

$$f_1 = a_1 - b_1 = 28545{,}36 - 80683{,}00 = -52137{,}64 < 0,$$

то нас интересует случай $p_1 = 0, l_1 \geq 0, p_2 \geq 0, l_2 = 0$. В этой ситуации задача примет вид:

$$-(1 - ke^{-RT})l_1 + e^{-RT} p_2 \to \min_{p,l},$$
$$l_1 \leq -f_1,$$
$$-(1-k)l_1 + (1-t)p_2 \geq 0,$$
$$-(1 - ke^{-rT})l_1 + e^{-rT}(1-t)p_2 \geq c,$$
$$p_2 \geq 0, l_1 \geq 0.$$

Для поиска ее решения был использован пакет MAPLE.

Так как решение данной задачи зависит от величины, непрерывно начисляемой безрисковой ставки процента лизингополучателя R, то возможны два случая:

- R больше пороговой ставки;
- R меньше пороговой ставки.

Таким образом, получим оптимальные стратегии выплат:

$$\alpha_i = 1000000 * \frac{0{,}1}{4} + 2375 = 27375, \quad (i = 1{,}2)$$ –

процентный платеж банку и налог на имущество;

$\beta_1 = 0$; $\beta_2 = 1000000 - 875000 = 125000$ – разница между возвращенным банку кредитом и выплачиваемой лизингополучателем остаточной стоимостью;

$$a_1 = (\alpha_1 + \beta_1)/(1 - \theta) = \frac{27375 + 0}{1 - 0{,}041} = 28545{,}36;$$

$$a_2 = (\alpha_2 + \beta_2)/(1-\theta) = \frac{27375+12500}{1-0{,}041} = 158889{,}47;$$

$$b_1 = (\alpha_1 + d_1)/(1-\theta) = \frac{27375+5000}{1-0{,}041} = 80683{,}00;$$

$$b_2 = (\alpha_2 + d_2)/(1-\theta) = \frac{27375+75000}{1-0{,}041} = 106751{,}82;$$

Поскольку

$$f_1 = a_1 - b_1 = 28545{,}36 - 80683{,}00 = -52137{,}64 < 0,$$

то решение реализуется в области значений параметров:

$$p_1 = 0, \quad l_1 \ge 0, \quad p_2 \ge 0, \quad l_2 = 0.$$

При этом искомые размеры лизинговых платежей таковы:

a) при $R > R_T$:

$x_1 = 28545{,}36$ руб., $x_2 = 176765{,}22$ руб., итого 205310,58 руб.

b) при $R < R_T$:

$x_1 = 80683{,}00$ руб., $x_2 = 106751{,}82$ руб., итого 187434,82 руб.

Полученные результаты свидетельствуют о целесообразности увеличения первого лизингового платежа, в результате сумма приведенных лизинговых платежей сократится.

На практике графики лизинговых платежей, самостоятельно разработанные предприятием и лизинговой компанией, в силу их различных интересов, как правило, между собой не совпадают. Следовательно, необходимо выбрать координирующие параметры – изменения графика выплат $\Delta r = (\Delta r_1, ..., \Delta r_t, ..., \Delta r_T)$, разработанного предприятием [2]. Причем координирующие параметры должны удовлетворять следующим условиям: во-первых, обеспечивать дополнительный финансовый эффект кредитора (лизинговой компании), и, в то же время, положительный финансовый поток должника (предприятия).

Рассмотрим график $r = (r_1,...,r_t,...,r_T)$ выплаты лизинговых платежей лизинговой компанией, которая выступает в роли кредитора. Здесь r_t – суммы, выплачиваемые должником кредитору в периоды $t = 1,...T$, причем выплачиваемые средства должны обеспечивать возмещение суммы лизинговых платежей R.

Стратегией лизингополучателя является выбор графика платежей $r^* = (r_1^*,...,r_t^*,...,r_T^*)$, который составляется на основе анализа структуры активов и хозяйственно-экономических возможностей предприятия. В свою очередь лизинговая компания, преследуя собственные цели и интересы, разрабатывает оптимальный, со своей точки зрения, график $r^0 = (r_1^0,...,r_t^0,...,r_T^0)$ возмещения лизинговых платежей.

Целевая функция должника $f(r)$ представляет собой сумму дисконтированных разностей между доходом $H(q_t(r_t))$, полученным в ходе использования объекта лизинга, и сумм возмещения лизинговых платежей r_t:

$$f(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{H(q_t(r_t)) - r_t}{(1+i)^t} \quad ,$$

где $q_t(r_t) < Q_t$ – объем услуг, реализованный предприятием в период t, который имеет максимально возможный размер Q_t (ограничение по техническим возможностям, либо ограничение по спросу на услуги), H - функция дохода предприятия, i - ставка дисконтирования.

Так как в итоге должно быть обеспечено погашение суммы лизинговых платежей R, то

$$\sum_{t=1}^{T} r_t = R .$$

Кроме того, предприятие не может выплатить средств больше, чем у него имеется в наличии, то есть в каждый из периодов подразумевается положительность финансовых потоков:

$$H(q_t(r_t)) - r_t \geq 0, t = \overline{1,T}.$$

С учетом рассмотренных ограничений, модель выбора оптимального графика выплат с позиции интересов предприятия такова:

$$f(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{H(q_t(r_t)) - r_t}{(1+i)^t} \xrightarrow[r]{} \max$$

$$\begin{cases} 0 \leq q_t(r_t) \leq Q_t, t = \overline{1,T}; \\ \sum_{t=1}^{T} r_t = R; \\ \sum_{t=1}^{T} H(q_t(r_t)) - r_t \geq 0, t = \overline{1,T}; \\ r_t \geq 0, t = \overline{1,T}. \end{cases}$$

Результатом решения данной задачи является график лизинговых платежей $r^* = (r_1^*, ..., r_t^*, ..., r_T^*)$.

С другой стороны, целевая функция лизинговой компании – сумма дисконтированных разностей между лизинговыми выплатами r_t и затратами на обслуживание договора лизинга $C(r_t)$, в частности, выплата налога на объект лизинга, такова:

$$F(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{r_t - C(r_t)}{(1+i)^t}.$$

Затраты лизинговой компании на обслуживание договора лизинга не должны превышать сумм выплат по договору лизинга, полученных от предприятия, то есть:

$$r_t - C(r_t) \geq 0, t = \overline{1,T}.$$

Следовательно, модель механизма выбора оптимального графика выплат с учетом интересов лизинговой компании имеет вид:

$$F(r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{r_t - C(r_t)}{(1+i)^t} \xrightarrow[r]{} \max$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} r_t = R; \\ r_t \geq C(r_t) \geq 0, t = \overline{1,T}. \end{cases}$$

Решение, полученное с ее помощью, представляет собой оптимальный график выплат, ранее обозначенный $r^0 = (r_1^0,...,r_t^0,...,r_T^0)$.

Если графики, оптимальные с точек зрения предприятия и лизинговой компании, совпадают $(r^* = r^0)$, то взаимодействие в системе является согласованным. Но на практике это случается редко. С целью удовлетворения интересов обеих сторон в каждом из периодов вводится Δr_t – координирующий параметр по объему платежа. Модель механизма взаимодействия, согласованного по графику выплат, будет состоять из следующей совокупности взаимосвязанных моделей:

$$f(\Delta r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{H(q_t(r_t^* + \Delta r_t)) - (r_t^* + \Delta r_t)}{(1+i)^t} \xrightarrow[\Delta r]{} \max$$

$$\begin{cases} 0 \leq q_t(r_t^* + \Delta r_t) \leq Q_t, t = \overline{1,T}; \\ \sum_{t=1}^{T} (r_t^* + \Delta r_t) = R; \\ \sum_{t=1}^{T} H(q_t(r_t^* + \Delta r_t)) - (r_t^* + \Delta r_t) \geq 0, t = \overline{1,T}; \\ r_t \geq 0, t = \overline{1,T}. \end{cases}$$

$$F(\Delta r) = \sum_{t=1}^{T} \frac{(r_t^* + \Delta r_t) - C(r_t)}{(1+i)^t} \xrightarrow[\Delta r]{} \max$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} [(r_t^* + \Delta r_t) - C(r_t)] \geq 0, t = \overline{1,T}; \\ r_t \geq C(r_t) \geq 0, t = \overline{1,T}. \end{cases}$$

Таким образом, после выбора лизинговой компанией графика лизинговых платежей $r^0 = (r_1^0,...,r_t^0,...,r_T^0)$ и выбора предприятием графика выплат $r^* = (r_1^*,...,r_t^*,...,r_T^*)$, лизинговая компания может предложить предприятию изменения $\Delta r = (\Delta r_1,...,\Delta r_t,...,\Delta r_T)$ в его график, которые будут выгодны им обоим.

На основании рассмотренных моделей сформулируем задачу оптимально-согласованного управления лизинговыми операциями с позиции лизингополучателя.

С учетом введенных ранее обозначений, расчет прибыли лизинговой компании за период t будет осуществляться по формуле:

$$\gamma_t = r_t - \theta r_t - \alpha_t - d_t - \sum_{j=1}^{t-1} k_{tj}(-\gamma_j)_+,$$

где k_{tj} – неотрицательные коэффициенты, содержательный смысл которых поясняет следующее соображение: прибыль возможна лишь в случае неотрицательных γ_t; в противном случае речь идет об убытке в размере $(-\gamma_t)$.

Следовательно, коэффициенты k_{tj} задают учет в прибыли периода t убытков периода j. Они удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} k_{tj} = 0, t = 1,..., j, \\ \sum_{t=j+1}^{T} k_{tj} \le 1. \end{cases}$$

Обозначим через ω ставку налога на прибыль $(0 < \omega < 1)$.

Издержки $C(r_t)$ лизингодателя за период t могут быть выражены соотношением:

$$C(r_t) = \theta r_t + \alpha_t + \beta_t + \omega(\gamma_t)_+, t = 1,...,T.$$

Пусть известен график выплат, оптимальный для лизинговой компании $r^0 = (r_1^0,...,r_t^0,...,r_T^0)$.

В результате математическая модель оптимально-согласованного осуществления лизинговых операций примет вид:

$$f(\Delta r)=\sum_{t=1}^{T}\frac{H(q_t(r_t^0+\Delta r_t))-(r_t^0+\Delta r_t)}{(1+i)^t}\xrightarrow[\Delta r]{}\max$$

$$\begin{cases}0\le q_t(r_t^0+\Delta r_t)\le Q_t, t=\overline{1,T};\\ \sum_{t=1}^{T}(r_t^0+\Delta r_t)=R;\\ \sum_{t=1}^{T}H(q_t(r_t^0+\Delta r_t))-(r_t^0+\Delta r_t)\ge 0, t=\overline{1,T};\\ r_t\ge 0, t=\overline{1,T}.\end{cases}$$

$$F(\Delta r)=\sum_{t=1}^{T}\frac{(r_t^0+\Delta r_t)-(\theta(r_t^0+\Delta r_t)+\alpha_t+\beta_t+\omega(\gamma_t)_+)}{(1+i)^t}\xrightarrow[\Delta r]{}\max$$

$$\begin{cases}\sum_{t=1}^{T}[(r_t^0+\Delta r_t)-(\theta(r_t^0+\Delta r_t)+\alpha_t+\beta_t+\omega(\gamma_t)_+)]\ge 0, t=\overline{1,T};\\ r_t\ge[\theta(r_t^0+\Delta r_t)+\alpha_t+\beta_t+\omega(\gamma_t)_+]\ge 0, t=\overline{1,T}.\end{cases}$$

Таким образом, после выбора лизинговой компанией графика лизинговых платежей $r^0=(r_1^0,...,r_t^0,...,r_T^0)$, предприятие сможет определить координирующие параметры – изменения собственного графика выплат.

Библиографический список

1. Волошинов В.В. Экстремальные ограничения в моделях инвестиционных программ с финансовым механизмом обеспечения предстоящих выплат / В.В. Волошинов, Е.С. Левитин // Экономика и математические методы. – 1996. – Вып. 2. – С. 117-127.
2. Озернов Р.С. Постановка задач оптимально-согласованного управления в авиации// УБС. – 2006. – Вып. 15. – С. 167-176.
3. Осадчий М.С. Оптимизация лизинговых платежей / М.С. Осадчий, В.И. Шмырев // Экономика и математические методы. – 2002. – Вып. 2. – С. 111-117.
4. Прилуцкий Л.С. Финансовый лизинг. – М.: «Экономика», 1997 г. – 295 с. – 295 с.