П.М.Симонов

Пермский государственный университет

ГИБРИДНАЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА

Построенная в настоящее время общая теория функционально-дифференциальных уравнений позволила дать ясное и лаконичное описание их основных свойств. В то же время широкие и актуальные для приложений классы систем гибридных функционально- дифференциальных уравнений с последействием формально не охватываются построенной теорией и во многом остаются вне поля зрения специалистов, использующих функционально-дифференциальные и разностные системы с последействием для моделирования реальных процессов. Ниже предлагаются гибридные функционально- дифференциальные аналоги основных утверждений теории функционально-дифференциальных уравнений для линейных краевых задач, задач устойчивости.

Запишем абстрактную гибридную функционально-дифференциальную систему (АГФДС) в виде

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_{11}x + \mathcal{L}_{12}y = \dot{x} - F_{11}x - F_{12}y = f, \\ &\mathcal{L}_{21}x + \mathcal{L}_{22}y = \Delta y - F_{21}x - F_{22}y = g. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь и ниже R^n – пространство векторов $\alpha = \mathrm{col}\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ с действительными компонентами и с нормой $\| \alpha \|_{R^n}$. Пространство D локально абсолютно непрерывных функций $x : [0, \infty) \to R^n$ с полунормами $\| x \|_{D[0,T]} = \| \dot{x} \|_{L[0,T]} + \| x(0) \|_{R^n}$ для всех $T > 0$. Пусть пространство L локально суммируемых $f : [0, \infty) \to R^n$ с полунормами $\| f \|_{L[0,\infty)} = \int_0^T \| f(t) \|_{R^n} dt$ для всех $T > 0$. Обозначим через $y = \{y(0), y(1), y(2), ..., y(N), \ldots\}$

бесконечную матрицу со столбцами $y(0), y(1), y(2),..., y(N),\ldots$ размерами n, а через $g = \{g(1), g(2),..., g(N),\ldots\}$ бесконечную матрицу со столбцами $g(1), g(2),..., g(N),\ldots$ размерами n. Будем считать, что y продолжено с точки $t = 0$ до точки $t = 1 - 0$ значением $y(0)$. Затем y продолжается с точки $t = 1$ до точки $t = 2 - 0$ значением $y(1)$ и т.д. Множество таких матриц-функций обозначим символом M. Обозначим $(\Delta y)(k) = y(k) - y(k-0)$.

Обозначим: $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11} & \mathcal{L}_{12} \\ \mathcal{L}_{21} & \mathcal{L}_{22} \end{pmatrix}$. Тогда уравнение (1) записывается в виде $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$.

Операторы $F_{11} : D \to L$, $F_{12} : M \to L$, $F_{21} : D \to M$, $F_{22} : M \to M$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Предположим, что для любых $x(0) \in R^n$ и $y(0) \in R^n$ однозначно разрешима задача Коши для «модельной» системы $\dot{x} = F_{11}^0 x + F_{12}^0 z + z$, $\Delta y = F_{21}^0 z + F_{22}^0 y + u$, где операторы $F_{11}^0 : D \to L$, $F_{12}^0 : M \to L$, $F_{21}^0 : D \to M$, $F_{22}^0 : M \to M$ предполагаются непрерывными и вольтерровыми. Тогда модельную систему можно коротко записать так: $\mathcal{L}_{\mathrm{o}}\{x, y\} = \mathrm{col}\{z, u\}$ Пусть её решение имеет представление

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}.$$

Где $\mathcal{W}: L \times M \to D \times M$ – оператор Коши для системы, $\mathcal{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}$, $U: R^n \times R^n \to D \times M$ – фундаментальная матрица для системы, $U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$.

Если элементы $\mathrm{col}\{x, y\}: [0, \infty) \times \{0, 1, 2 \ldots\} \to R^n \times R^n$, банаховы пространства $\mathbf{D} \times \mathbf{M} \cong (\mathbf{B} \times R^n) \times (\mathbf{M}_0 \times R^n)$ (пространство $\mathbf{D} \subset D$, пространство $\mathbf{M} \subset M$, пространство $\mathbf{B} \subset L$, пространство $\mathbf{M_0} \subset M$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}_0$ – банаховые пространства) обладают какими-нибудь специфическими свойствами, например $\sup\limits_{t \geq 0} \| x \|_{R^n} + \sup\limits_{k=0,1,\ldots} \| y(k) \|_{R^n} < \infty$, и для уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$ с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L}: \mathbf{D} \times \mathbf{M} \to \mathbf{B} \times \mathbf{M}_0$ однозначно разрешима задача Коши, то и решения этой задачи будут обладать такими же асимптотическими свойствами. Это следует из приводимой ниже теоремы.

Теорема 1. Пусть $\mathcal{W}: \mathbf{B} \times \mathbf{M}_0 \to \mathbf{D} \times \mathbf{M}$ – оператор Коши модельной краевой задачи и U – фундаментальная матрица модельного уравнения $\mathcal{L}_0\{x, y\} = \mathrm{col}\{0, 0\}$. Пусть, далее, линейный оператор $\mathcal{L}: \mathbf{D} \times \mathbf{M} \to \mathbf{B} \times \mathbf{M}_0$ ограничен, C – оператор Коши краевой задачи $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{f, g\}$, $\mathrm{col}\{x(0), y(0)\} = \mathrm{col}\{0, 0\}$ и X – фундаментальная матрица уравнения $\mathcal{L}\{x, y\} = \mathrm{col}\{0, 0\}$. Тогда для выполнения равенства

$$\mathcal{W}\{\mathbf{B}, \mathbf{M_0}\} + U\{R^n, R^n\} = C\{\mathbf{B}, \mathbf{M_0}\} + X\{R^n, R^n\} \qquad (2)$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $\mathcal{L}\mathcal{W}$ имел ограниченный обратный $(\mathcal{L}\mathcal{W})^{-1}: \mathbf{B} \times \mathbf{M}_0 \to \mathbf{B} \times \mathbf{M}_0$.

Следствие. Если оператор $\mathcal{L}:\mathbf{D}\times\mathbf{M}\to\mathbf{B}\times\mathbf{M}_0$ ограничен и выполнено неравенство $\|(\mathcal{L}-\mathcal{L}_0)\mathcal{W}\|_{\mathbf{B}\times\mathbf{M}_0}<1$, то выполняется равенство (2).

В случае равенства (2) (совпадения пространства решений модельного и исследуемого уравнений) мы говорим, что уравнение $\mathcal{L}\{x,y\}=\mathrm{col}\{f,g\}$ обладает свойством $\mathbf{D}\times\mathbf{M}$ или, короче: уравнение $\mathbf{D}\times\mathbf{M}$-устойчиво.

Отметим связь понятия $\mathbf{D}\times\mathbf{M}$-устойчивости с работами Х.Л.Массеры и Х.Х.Шеффера о допустимости пар пространств, работами Е.А.Барбашина о сохранении свойств решений при накоплении возмущений. И, не соблазняясь возможными применениями $\mathbf{D}\times\mathbf{M}$-свойства для изучения различных асимптотических свойств решений уравнений, ограничимся некоторыми обобщениями классических понятий устойчивости и стабилизируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений и разностными уравнениями.

Библиографический список

1. Марченко В.М., Луазо Ж.Ж. Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45. № 5. С. 728-740.