В. Л. Чечулин

Пермский Государственный университет

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Основное логистическое уравнение, описывающее безинфляционное состояние экономики [7], [8], является нелинейным уравнением и не допускает решения в аналитическом виде

$x = 1 - x^X$

или в иной записи

$x = 1 - \exp(x \cdot \ln(x))$ (1)

Возможность построения вычислительных процедур нахождения существующего решения следует из теоремы о неподвижной точке в лямбда-исчислении [1].

Решение уравнения находится путём последовательных приближений в итеративном процессе:

$x_0 \in]0, 1[$,

$x_{n+1} = 1 - x_n^{Xn}$ (2)

Установлено, что по теореме о сжимающих отображениях [3], [2] последовательность $\{x_n\}$, получаемая в результате последовательных приближений в формуле (2), сходится если $x_0 \in [0{,}11\ldots,\ 1[$ (границы сходимости определены приближённо).

Решение основного логистического уравнения полученное последовательными итерациями по формуле (2) таково: $c_0 = 0{,}3036\ldots$.

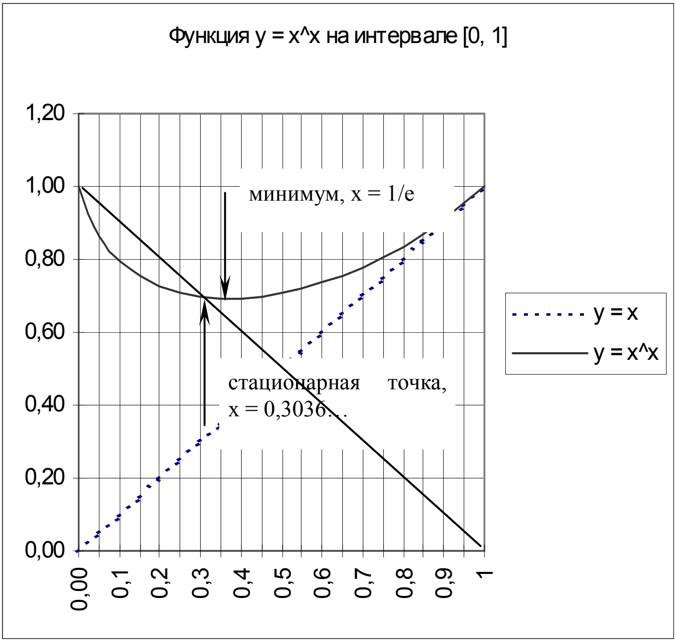

Рис. 1. Графическое решение логистического уравнения.

Исследуем свойства этого решения.
Перепишем уравнение $x + x^x = 1$ в логарифмической форме:

$\log x\,(1 - x) = x$, или

$$\ln (1 - x) / \ln x = x \qquad (3)$$

Пусть $x = c_0 = 0{,}3036\ldots$.

Предположим, что c_0 — алгебраическое число, тогда $\ln(c_0)$ — число трансцендентное, значит, по (3), c_0 — трансцендентно, противоречие, доказывающее теорему (в 1-м приближении). Продолжим рассуждения далее. Предположим, что трансцендентное число, алгебраически выражающееся через e. Если бы c_0 алгебраически выражалось через e = 2,71828… (через e в алгебраической степени), то $\ln(c_0)$ — алгебраическое число, если бы $(1 - c_0)$ алгебраически выражалось бы через e, то $\ln (1 - c_0)$ — алгебраическое число, и значение $\ln (1 - c_0) / \ln(c_0)$ было бы алгебраическим,— противоречие с первоначальным предположением о том, что c_0 — трансцендентное число алгебраически выражающееся через е, следовательно значение $\ln(1 - c_0) / \ln(c_0)$ — трансцендентно и алгебраически не выражается через число е.

Итак, доказана теорема.

Теорема 1. (о трансцендентности числа c_0). Число $c_0 = 0{,}3036\ldots$, являющееся решением уравнения $x + x^x = 1$ — трансцендентно и, более того, алгебраически не выражается через число е. □

Эта теоремы означает, что решение уравнения (1), соответствующее точке безинфляционности, не может быль получено в виде решения алгебраического уравнения (поле вещественных чисел, включающих в себя трансцендентные числа шире, чем поле алгебраических чисел [4]). То есть модель не может быть упрощена до алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

Исследуем ещё одно свойство. Производная функции x^X такова [5, с. 77]:

$d / dx\,(x^X) = (1 + \ln x)\, x^X$

Из этого выражения находим экстремум функции $y = x^X$, он находится в точке, определяемой выражением

$(1 + \ln x)\, x^X = 0$,

т. е. $(1 + \ln x) = 0$, откуда $x = 1/e$.

Это значит, что минимум функции $y = x^X$, находящийся в точке $x_1 = 1/e$, и решение основного логистического уравнения c_0 — не совпадают (см. рис. 1).

Экономическая интерпретация этого несовпадения такова. Если x — это доля высвобождаемого-общественно необходимого времени, то $1–x = x^X$ — это доля затрачиваемого общественно-необходимого времени (издержки). Тогда получается, что минимум издержек (максимум прибыли) в равновесном случае не соответствует безинфляционному состоянию. (О неустойчивости цен при максимизации прибыли говорилось из других соображений другими авторами ранее [6].)

В точке безинфляионности издержки больше минимума примерно на 0,004 (0,4% от единичной меры общественно необходимого времени).

С другой стороны, минимуму издержек соответствует более чем 5% инфляция.

Таким образом, несение чуть больших (на 0,4%), чем минимум, издержек, оправдывается достижением при этом безинфляционности.

Библиографический список

1. Барендрегт Х., Лямбда-исчисление, его синтаксис и сематика / пер с. англ. Г. Е. Минц. М.: Мир, 1985. 606 с.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ, М.:"Наука", Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.— 744 с.
3. Колмогоров А. Н.. Фомин С. В.. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: "Наука", 1968.
4. Курош А. Г., Общая алгебра. М.: 1974.
5. Справочник по специальным функциям, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Карамзиной Л. Н., М.:"Наука", 1979.— 830 с.
6. Чернавский, Щербаков А. В., Старков Н. И., Суслаков Б. А., Ценообразование при максимизации прибыли // Экономика и математические методы, 1998, т. 34, вып. 2, сс. 44–54.
7. Чечулин В. Л., Об инфляционных циклах / Чечулин В. Л., Пьянков А. С. // Журнал экономической теории (РАН), 2009 г., №3, сс. 236-241.Чечулин В. Л., Анализ стационарного режима оборота общественно-необходимого времени, определяющего меру инфляции / Чечулин В. Л., Мясникова С. А. // Журнал экономической теории (РАН), Екатеринбург, 2008 г., №2, сс. 240–245.