СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛИМЫХ МОДЕЛЕЙ ОБЩЕГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Д.Н. Шульц,
ЗАО «ПРОГНОЗ», Пермь
М.Н. Шульц,
Западно-Уральский банк ОАО «Сбербанк России», Пермь

Приводится обзор методов, применяемых для численного решения систем нелинейных уравнений, используемых в вычислимых моделях общего экономического равновесия для нахождения неподвижной точки, являющейся равновесным состоянием. Раскрываются основные достоинства и недостатки каждого из методов, область их применения, возможности для использования.

В последнее время в экономической науке все большее распространение приобретают вычислимые модели общего экономического равновесия (CGEM) [2]. Если модели частного равновесия описывают состояние равенства спроса и предложения на отдельно взятом рынке, то CGE модели – на всех рынках товаров, услуг и факторов производства одновременно. Функции спроса и предложения выводятся как функции реакции из оптимизационных моделей поведения экономических агентов. Например, для домашних хозяйств, как правило, решается задача максимизации полезности при заданном бюджетном ограничении. А для отраслей реального сектора – максимизации прибыли или минимизации издержек при бюджетном ограничении в виде производственной функции.

По своей сути, любая CGE модель представляет собой систему уравнений, решением которой является общее экономическое равновесие, как правило, сводящееся к уравновешиванию спроса и предложения на рынках товаров и услуг, рассматриваемых в модели.

Итак, нахождение равновесного состояния модели, как уже было сказано выше, сводится к нахождению решения системы уравнений (неравенств).

Задача поиска равновесного вектора цен p может быть представлена в виде условия отсутствия избыточного спроса:

$$E(p) = \sum_i (d_i(p) - w_i) - \sum_j y_j(p) = 0, \qquad (1)$$

где $E(p)$ — вектор-функция избыточного спроса;

$d_i(p)$ — вектор-функция спроса на товары со стороны i-го агента;

w_i — вектор начальных запасов товаров i-го агента;

$y_j(p)$ — функция предложения товаров j-м производителем. Количество товаров и факторов, а соответственно и их рынков — n.

Равновесие в системе уравнений (1) зачастую может определяться на основе закона Вальраса

$$pE(p) = 0. \qquad (2)$$

Выражение (2) отражает следующую экономическую идею: либо товар (ресурс) является дефицитным $E(p) > 0$, либо его цена равна 0.

Для поиска равновесного вектора цен используются как традиционные методы решения систем нелинейных уравнений, так и специально разработанные для МОЭР.

К первым можно отнести:

– метод Ньютона и его модификации;
– «гибридный» метод;
– генетические алгоритмы;
– метод штрафных функций.

Эти методы достаточно хорошо известны и подробно описаны в литературе по численным методам [5]. Нам бы хотелось уделить больше внимания именно специальным методам, предназначенным для решения системы уравнений (1) и учитывающим свойства функций спроса и предложения, которые используются в вычислимых МОЭР.

К таким методам можно отнести следующие:

– метод «нащупывания»;
– метод Скарфа (Scarf);
– метод Меррилла (Merrill);
– метод Ван дер Лаана и Талмана (Van der Laan; Talman).

Метод нащупывания основывается на положении неоклассической теории, что рынки автоматически двигаются в сторону равновесия. Соответственно цены на рынках товаров и факторов производства снижаются в случае избытка и растут в случае дефицита. Метод представляет собой частный случай метода простых итераций и может быть представлен следующим образом:

$$p[h+1] - p[h] = gE(p[h]), \quad (3)$$

где h — номер итерации;

$p[h]$ — значение вектора цен на h-й итерации;

$g > 0$ — параметр, определяющий скорость коррекции цен в зависимости от рыночной ситуации.

Обычно выражение (3) дополняется условием неотрицательности цен (4):

$$p[h+1] = \max\{0;\ p[h] + gE(p[h])\}. \quad (4)$$

Во всех указанных методах поиск равновесия сводится к итерационной корректировке вектора цен на основе отображения:

$$E(p) \to p. \quad (5)$$

Таким образом, задача поиска равновесия представляет собой задачу поиска неподвижной точки. Как правило, используется следующий алгоритм пересчета, имитирующий «аукциониста» Вальраса, или рыночный процесс «нащупывания» равновесия:

$$p_i \leftarrow \frac{p_i + \max\{0;\ E_i(p)\}}{1 + \sum_i \max\{0;\ E_i(p)\}}, i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Выражение (6) позволяет осуществлять поиск равновесных цен в единичном симплексе. При этом используется следующее свойство рыночного равновесия: если вектор p^* является равновесным, то вектор λp^* (при $\lambda > 0$) также будет равновесным.

Методы Скарфа и Меррилла представляют собой численные методы аппроксимации неподвижной точки: на каждом шаге расчета получаем некоторое приближение к равновесному состоянию [3].

В методе Скарфа [1] расчет всегда начинается с начального симплекса (начального приближения), затем выбирается одна из вершин симплекса, которая будет в дальнейшем использована в качестве нового начального приближения. Алгоритм гарантирует сходимость вычислений за конечное число шагов, но не позволяет получить достаточно точного решения (низкая степень аппроксимации неподвижной точки). Поэтому для получения удовлетворительного результата требуется повторить вычислительную процедуру несколько раз, используя при каждой итерации новые начальные приближения.

Другим существенным недостатком рассматриваемого метода являются значительные вычислительные затраты. Увеличение затрат происходит при уменьшении размеров начального симплекса, а также при необходимости пересчета метода из разных вершин симплекса. Это в свою очередь является одной из причин, приводящей к значительной неточности аппроксимации, и, как следствие, не позволяет выбрать хорошую точку для начального приближения.

Таким образом, метод Скарфа может быть использован в задачах небольшой размерности, не требующих достаточно высокой степени точности решения.+

Алгоритм Меррилла [4] представляет собой модификацию метода Скарфа, призванную устранить недостатки последнего. Он, в отличие от алгоритма Скарфа, использует симплекс размерности n+1. Добавление дополнительной вершины в симплекс позволяет добиться однозначной определенности других координат симплекса. Это в свою очередь дает методу большую устойчивость по сравнению с методом Скарфа.

Если в алгоритме Скарфа требуется пересчет из разных вершин, то в алгоритме Меррилла итерации начинаются из одной начальной точки, в которую в ходе расчета не возвращаются. Это позволяет избежать зацикливания, которое может возникнуть при использовании метода Скарфа.

Если в ходе расчета было получено неадекватное решение, то требуется повторно провести процедуру расчета уже с новым начальным приближением, которое предварительно требуется пересчитать. Для сходимости итерационного процесса требуется, чтобы задаваемая точность удовлетворяла стандартному условию:

$$\max \rho_i (p_1, p_2, \dots, p_n) < \varepsilon \left(i = \overline{1, m}\right), \quad (7)$$

где m — количество используемых ресурсов (факторов производства);

ρ_i — расстояние между компонентами вектора цен.

Значительным преимуществом алгоритма Мерилла перед алгоритмом Скарфа является существенно меньшие временные затраты на проведение вычислений аппроксимации неподвижной точки. Это является важным фактором при выборе метода решения сложной задачи большой размерности.

Метод Ван дер Лаана и Талмана [4] является модификацией метода Меррилла, при которой не требуется добавления дополнительного измерения, т.е. сохраняется возможность начинать расчет из любой вершины n-мерного симплекса. Данный алгоритм в значительной степени уменьшает вычислительные затраты по сравнению с методом Меррилла, а также обеспечивает нахождение неподвижной точки за конечное число итераций. Однако следует отметить более существенные затраты на компьютерную реализацию данного алгоритма. Это связано с более высокой сложностью применяемых методов.

Но при этом метод Ван дер Лаана и Талмана является наиболее подходящим по критериям точности и затрачиваемого на поиск времени для решения задач большой размерности, так как позволяет за меньшее число итерации получать достаточно близкое истинному значению приближение.

Таким образом, каждый из рассмотренных алгоритмов обладает своими достоинствами и недостатками, и применение того или иного метода зависит от следующих факторов:

а) вида функций спроса и предложения в конкретной модели общего равновесия;
б) требуемой точности;
в) доступных временных и вычислительных ресурсов.

Список литературы

1. *Shoven J.B., Whalley J.* Applying general equilibrium. Cambridge university press, 2003.
2. *Бахтизин А.Р.* Агент-ориентированные модели экономики. М.: Экономика, 2008.
3. *Тодд М. Дж.* Вычисление неподвижных точек и приложения в экономике. М.: Наука, 1983.
4. *Барань И.* Алгоритмы вычисления неподвижных точек непрерывных отображений Междунар. Науч.-исслед. ин-т проблем управления. М., 1983.
5. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Изд-во «Лаборатория базовых знаний», 2003.