

## ПОСТРОЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЭКОНОМИКИ ПЕРМСКОГО КРАЯ

*М.И. Гребнев*

*Пермский государственный национальный  
исследовательский университет, г.Пермь*

*В данной работе рассматривается вопрос о построении производственной функции для экономики Пермского края. Представлены результаты моделирования валового регионального продукта Пермского края на основе производственной функции с постоянной эластичностью замены (ПФ CES). На основании полученного значения коэффициента эластичности замещения сделан вывод о допустимости использования для моделирования валового регионального продукта Пермского края двух асимптотических версий ПФ CES: линейной производственной функции и мультипликативной производственной функции (ПФ Кобба-Дугласа)*

Аппарат теории производственных функций является важнейшим инструментом экономико-математического моделирования. Производственные функции позволяют оценить эффективность функционирования системы и использования отдельных производственных факторов, определить влияние масштабов производства на его эффективность, проанализировать возможности замещения одних факторов производства другими.

В последние годы появилось большое количество работ, связанных с применением аппарата теории производственных функций для моделирования производственных процессов в регионах России, среди них можно выделить работы Е.А.Гафаровой [2] и Р.М.Нижегородцева [4].

Согласно Г.Б.Клейнеру «Производственная функция – экономико-статистическая модель процесса производства продукции, отражающая устойчивую закономерную количественную зависимость между объемными показателями ресурсов и выпуска» [3, с.15].

Формально производственная функция выглядит следующим образом:

$$Y = f(x, a), \quad (1)$$

где  $y$  – объем выпуска,  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  – вектор ресурсов, где  $x_i$  – объем затраченных ресурсов  $i$ -го вида,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  – число ресурсов,  $a$  – вектор параметров.

Существенное внимание при построении производственных функций необходимо уделять выбору факторов производства. Как правило, в производственную функцию в качестве факторов включают фактор «капитала»  $K$  и фактор «труда»  $L$ . Для моделирования производственных процессов в экономике России часто используют «инвестиционные» производственные функции. Вместо фактора «капитала» в «инвестиционных» производственных функциях используют фактор «инвестиций»  $I$ . Выбор инвестиций в качестве фактора производства обоснован переходным характером российской экономики. Инвестиции являются дефицитным фактором в переходной экономике и оказывают существенное влияние на динамику выпуска [1, с.50]. Кроме того, применительно к инвестициям не существует проблемы выделения эффективно используемой их части, в отличие от данных по капиталу [1, с.50]. «Инвестиционные» производственные функции были впервые предложены В.А.Бессоновым [1, с.50].

Для моделирования регионального развития Пермского края в данной работе будет использоваться «инвестиционная» производственная функция с постоянной эластичностью замены (ПФ CES):

$$Y = \gamma \left( \delta I^{-p} + (1 - \delta) L^{-p} \right)^{-\nu/p}, \quad (2)$$

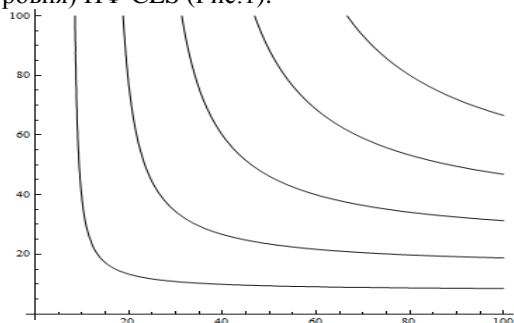
где  $Y$  – объем выпуска,  $L$  – затраты трудовых ресурсов,  $I$  – инвестиции в основной капитал,  $p = (1 - \sigma)/\sigma$ ,  $\sigma$  – эластичность замещения,  $p \geq -1$ ,  $\nu$  – степень однородности,  $0 < \delta < 1$  – параметр степени фондоемкости,  $A > 0$  – уровень технологии.

В качестве переменной, характеризующей объем выпуска  $Y$ , будет использоваться валовый региональный продукт (ВРП) в ценах 1998 года, млн. руб. Инвестиции в основной капитал  $I$  будут использоваться в ценах 1998 года, млн. руб. В качестве переменной, характеризующей затраты трудовых ресурсов  $L$ , будет использоваться следующее выражение:

$$L = \frac{N * w}{1000}, \quad (3)$$

где  $L$  – затраты трудовых ресурсов в ценах 1998 года, млн.руб.,  $N$  – среднегодовая численность занятых в экономике, тыс. чел.,  $W$  – среднемесячная заработная плата в ценах 1998 года.

ПФ CES применяется в случаях, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и вместе с тем есть основания предполагать, что это уровень существенно не изменится при изменении объемов вовлекаемых ресурсов [3, с.93]. Иными словами, технология обладает определенной устойчивостью по отношению к пропорциям факторов [3, с.93]. Ниже приведен график изоквант (линий уровня) ПФ CES (Рис.1).



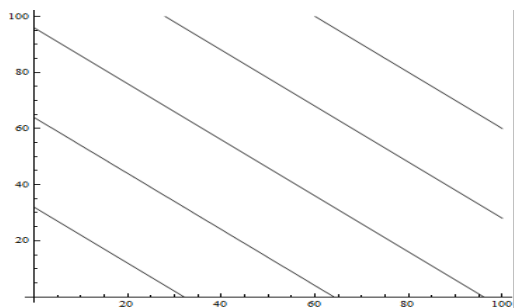
**Рис.1. Линии уровня ПФ CES**

Существует три асимптотические версии ПФ CES:

- При  $p = -1$  ( $\sigma = \infty$ ) результатом предельного перехода является линейная производственная функция (линейная ПФ):

$$Y = a_0 + a_1 K + a_2 L. \quad (4)$$

График изоквант (линий уровня) линейной ПФ приведен на Рис. 2.



## Рис. 2. Линии уровня линейной ПФ

- При  $p \rightarrow 0$  ( $\sigma = 1$ ) результатом предельного перехода является мультипликативная производственная функция (ПФ Кобба-Дугласа):

$$Y = AK^\alpha L^\beta. \quad (5)$$

График изоквант (линий уровня) ПФ Кобба-Дугласа приведен на Рис. 3

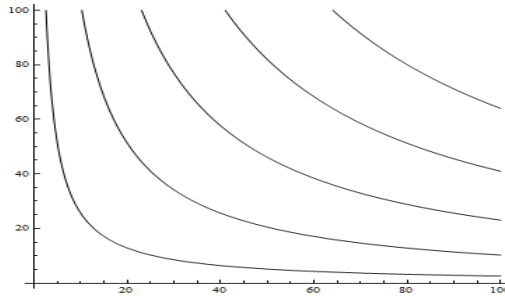


Рис. 3. Линии уровня ПФ Кобба-Дугласа

- При  $p \rightarrow \infty$  ( $\sigma = 0$ ) результатом предельного перехода является производственная функция с фиксированными пропорциями факторов (ПФ Леонтьева):

$$Y = \min\{a_1 K, a_2 L\}. \quad (6)$$

График изоквант (линий уровня) ПФ Леонтьева приведен на Рис. 4.

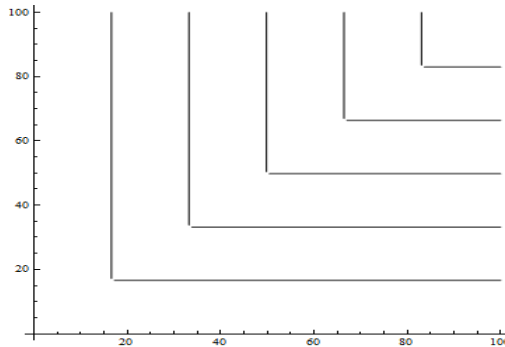


Рис. 4. Линии уровня производственной функции Леонтьева

Оценим параметры производственной функции CES для экономики Пермского края на периоде с 1998 по 2012 год.

ПФ CES относится к классу существенно нелинейных моделей. Оценки параметров ПФ CES можно получить только с помощью нелинейных методов оценивания. С этим связаны основные сложности использования функции CES на практике. Непосредственно для ПФ CES Кментой был предложен метод приближенной линейаризации [5]. Применим его к ПФ CES нашего вида:

$$\ln Y = \ln \gamma + \nu \delta \ln I + \nu(1 - \delta) \ln L - \frac{p\nu}{2} \delta(1 - \delta)(\ln I - \ln L)^2. \quad (7)$$

В результате получаем следующие оценки параметров:  $\gamma=78,9$ ,  $\delta=2,6$ ,  $p=-0,26$ ,  $\nu=0,6$ .

Полученные в результате применения данного метода оценки параметров не удовлетворяют ограничениям:  $\delta > 1$ . Данный факт ставит под сомнение точность аппроксимации.

Применим для оценки параметров метод безусловной оптимизации Нелдера-Мида. В результате получаем следующее выражение:

$$Y = 100,6 \left( 0,25I^{0,5} + 0,75L^{0,5} \right)^{0,79} / 0,5. \quad (8)$$
$$(adjR^2 = 0,92)$$

Оценки параметров получены с помощью Prognoz Platform 7.2\*. Оценки параметров удовлетворяют ограничениям задачи.

Оценка коэффициента  $p$  для экономики Пермского края составляет  $-0,5$ . Данное значение коэффициента  $p$  говорит о допустимости использования для моделирования двух асимптотических версий производственной функции CES: линейной ПФ и ПФ Кобба-Дугласа.

Получим оценки параметров «инвестиционной» ПФ Кобба-Дугласа для экономики Пермского края:

$$Y = 240,5I^{0,32}L^{0,35} \quad (9)$$
$$(adjR^2 = 0,95)$$

Получим оценки параметров «инвестиционной» линейной ПФ для экономики Пермского края:

---

\* <http://www.prognoz.ru/>

$$Y = 23215,3 + 1,2I + 15,9L \quad (adjR^2 = 0,94) \quad (10)$$

На основании значения скорректированного  $R^2$  можно сделать вывод о том, что полученные модели достаточно хорошо описывают зависимость между объясняющими и зависимой переменными.

В процессе написания данной работы были получены оценки производственной функции с постоянной эластичностью замены. На основании полученной оценки коэффициента  $\rho$  сделан вывод о допустимости использования линейной ПФ и ПФ Кобба-Дугласа для моделирования ВРП Пермского края. Получены оценки линейной ПФ и ПФ Кобба-Дугласа.

### ***Список литературы***

1. *Бессонов В.А., С.В. Цухло.* Анализ динамики российской переходной экономики. – М.: Институт экономики переходного периода, 2002. с. 5-89.
2. *Гафарова Е.А.* Моделирование регионального развития на основе производственной функции / Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» №3, 2013.
3. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции: Теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
4. *Нижегородцев Р.М.* Прогнозирование объема валового регионального продукта на основе трехфакторной модели в приращениях (на примере Приволжского федерального округа) // Вестник ЮРГТУ (НПИ), 2011. №3. с.90-100.
5. *Kmenta J.* «On Estimation of the CES Production Function», International Economic Review, 8, 1967, 180-189.