УДК 534.1:517.957

ТОЧНОЕ УЕДИНЕННО-ВОЛНОВОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГАРДНЕРА-БЮРГЕРСА

Бочкарев А.В.[1], Землянухин А.И.[2]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, ab2009sar@list.ru
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, zemlyanukhinai@sstu.ru

EXACT SOLITARY-WAVE SOLUTION OF THE GENERALIZED GARDNER-BURGERS EQUATION

Bochkarev A.V.[1], Zemlyanukhin A.I.[2]
[1]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, ab2009sar@list.ru
[2]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, zemlyanukhinai@sstu.ru

Аннотация. Прямой метод возмущений применен для нахождения точного уединенно-волнового решения уравнения Гарднера-Бюргерса. С использованием ряда метода возмущений установлена связь уравнения Гарднера-Бюргерса с парой уравнений Риккати. Показано, что точное решение может быть получено из преобразования Коула-Хопфа, содержащего функцию, являющуюся решением дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Найдено точное решение обобщенного уравнения Гарднера-Бюргерса, дополненного полиномом четвертого порядка по зависимой переменной.

Ключевые слова: точные уединенно-волновые решения, метод возмущений, уравнение Риккати

Abstract. A direct perturbation method is applied for finding exact solitary-wave solution to the Gardner-Burgers equation. Using a perturbation series the connection of the Gardner-Burgers equation with a pair of Riccati equations is established. It is shown that the exact solution can be obtained from the Cole-Hopf transformation that contains the function, which is the solution of a second-order differential equation with constant coefficients. An exact solution of the generalized Gardner-Burgers equation with fourth-order polynomial in the dependent variable is found.

Keywords: exact solitary-wave solutions, perturbation method, Riccati equation

Введение

Уравнение Гарднера-Бюргерса (ГБ) возникает при описании широкого класса нелинейных волновых явлений в деформируемых системах с дисперсией и диссипацией [1]. Специфика этого уравнения состоит в том, что квадратичная геометрическая нелинейность и характеризующая закон деформирования кубическая нелинейность являются величинами одного порядка. Известно точное уединенно-волновое решение уравнения ГБ, полученное с использованием упрощенного метода укороченных разложений [2]. В данной статье для построения точных решений уравнения ГБ и его обобщения применяется прямой метод возмущений на основе решения линеаризованной задачи [3].

Точное решение уравнения Гарднера-Бюргерса

Уравнение ГБ общего вида

$$U_\tau - aU_{\xi\xi} + bU_{\xi\xi\xi} + cUU_\xi - dU^2U_\xi = 0$$

масштабированием зависимой и независимых переменных

$$U = \frac{a^2}{bc}u, \quad x = \frac{a}{b}\xi, \quad t = \frac{a^3}{b^2}\tau$$

приводится к уравнению

$$u_t - u_{xx} + u_{xxx} + uu_x - \alpha u^2 u_x = 0, \tag{1}$$

содержащему единственный параметр

$$\alpha = \frac{a^2 d}{bc^2}.$$

Будем искать решение уравнения (1) в форме

$$u = E + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x,t), \tag{2}$$

где E, ε – постоянные величины, $u_n(x,t)$ – неизвестные функции. Подставляя (2) в (1) и группируя по степеням ε, получим систему уравнений для определения функций $u_n(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&u_{1t} - u_{1xx} + u_{1xxx} + E(1-\alpha E)u_{1x} = 0,\\
&u_{2t} - u_{2xx} + u_{2xxx} + E(1-\alpha E)u_{2x} = -(1-2\alpha E)u_1 u_{1x},\\
&u_{3t} - u_{3xx} + u_{3xxx} + E(1-\alpha E)u_{3x} = -(1-2\alpha E)(u_1 u_2)_x + \alpha u_1^2 u_{1x}, \ \ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

Первое уравнение системы (3) имеет частное решение $u_1 = \exp(kx - \omega t)$, в котором k и ω связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = k^3 - k^2 + E(1-\alpha E)k. \tag{4}$$

Отыскивая частное решение второго уравнения системы (3) в форме $u_2 = K_2 u_1^2$, третьего уравнения – в форме $u_3 = K_3 u_1^3$ и т.д., определим последовательно постоянные K_2, K_3, ... После подстановки найденных функций u_1, u_2, u_3, … в (2) и обозначения $y = \varepsilon u_1$, функциональный ряд в правой части (2) преобразуется в степенной ряд:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n = y + \frac{2\alpha E - 1}{2k(3k-1)}y^2 + \frac{12\alpha^2E^2 + 6\alpha k^2 - 12\alpha E - 2\alpha k + 3}{12k^2(3k-1)(4k-1)}y^3 +\\
&+ \frac{(2\alpha E - 1)\left(120\alpha^2E^2k - 36\alpha^2E^2 + 180\alpha k^3 - 120\alpha Ek - 108\alpha k^2 + 36\alpha E + \ldots\right)}{72k^3(3k-1)^2(4k-1)(5k-1)}y^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{5}$$

Сумма ряда (5) в случае его сходимости определяет точное решение уравнения (1). Такая сумма имеет простейший вид, если ряд является геометрическим. Чтобы найти условие, при которых разложение (5) становится геометрическим рядом, составим для (5) последовательность диагональных аппроксимант Паде [N/N] [4]. Аппроксиманты геометрического ряда, начиная с некоторого N, имеют совпадающие выражения, равные сумме этого ряда.

Факторизация разностей $[N+1/N+1]-[N/N]$ при $N=1$ и $N=2$ обнаруживает общий множитель

$$12\alpha^2E^2-18\alpha k^2-12\alpha E+12\alpha k-2\alpha+3. \tag{6}$$

Приравнивая последнее выражение нулю, получим условие

$$E=\frac{1}{2\alpha}\pm\frac{3k-1}{\sqrt{6\alpha}}, \tag{7}$$

при котором ряд (5) становится геометрическим и имеет сумму

$$\frac{y}{1\mp\sqrt{\frac{\alpha}{6}\frac{y}{k}}}. \tag{8}$$

Вообще говоря, равенство нескольких первых аппроксимант еще не гарантирует геометричности ряда. Но проверять следующие аппроксиманты нет необходимости – достаточно убедиться, что выражение (8) определяет точное решение уравнения (1). Заменяя в (8) y на $\varepsilon\exp(kx-\omega t)$ и подставляя полученное выражение вместо ряда в (2), имеем

$$u=E+\frac{\varepsilon\,\mathrm{e}^{kx-\omega t}}{1\mp\sqrt{\frac{\alpha}{6}\frac{\varepsilon}{k}\mathrm{e}^{kx-\omega t}}}. \tag{9}$$

Простая подстановка (9) в (1) показывает, что при выполнении условий (4) и (7) сумма (9) является точным решением уравнения (1).

Выражение (9) зависит от трех произвольных постоянных α, ε, k и при $\alpha>0$, $\mp\varepsilon/k>0$ является вещественной ограниченной функцией от x, t, определяющей решение в форме бегущего фронта (кинка) со сдвигом E.

Связь с уравнениями Риккати

Покажем, что с использованием ряда метода возмущений уравнение ГБ (1) можно свести к паре уравнений Риккати.

С учетом равенств (4), (5) и $y=\varepsilon\exp(kx-\omega t)$, подставим (2) в уравнение Риккати с неопределенными коэффициентами A, B, C:

$$u_x=Au^2+Bu+C \tag{10}$$

и сгруппируем результат по степеням экспоненты:

$$\begin{gathered}AE^2+BE+C=0,\\ \varepsilon(2AE+B-k)=0,\\ \frac{\varepsilon^2}{2k(3k-1)}\left(4A\alpha E^2+6Ak^2+2B\alpha E-4\alpha Ek-2AE-2Ak-B+2k\right)=0,\ldots\end{gathered} \tag{11}$$

Из первых трех уравнений системы (11) находим

$$A=\frac{2\alpha E-1}{2(3k-1)},\quad B=k-\frac{E(2\alpha E-1)}{3k-1},\quad C=\frac{E\left(2\alpha E^2-6k^2-E+2k\right)}{2(3k-1)}. \tag{12}$$

Остальные уравнения системы (11) содержат общий множитель (6) и, следовательно, удовлетворяются при условии (7).

Используя (10), представим все производные по x, содержащиеся в уравнении (1), в форме полиномов по $u(x,t)$:

$$u_{xx} = 2A^2u^3 + 3ABu^2 + \left(2AC + B^2\right)u + BC,$$

$$u_{xxx} = 6A^3u^4 + 12A^2Bu^3 + \left(8A^2C + 7AB^2\right)u^2 + \left(8ABC + B^3\right)u + C\left(2AC + B^2\right)$$

и подставим их в уравнение (1), которое после упрощения принимает форму уравнения Риккати

$$u_t = K\left(Au^2 + Bu + C\right), \tag{13}$$

где

$$K = \frac{6\alpha k^2 + 2\alpha - 3}{12\alpha}.$$

Таким образом, исходное уравнение ГБ (1) сводится к паре уравнений Риккати (10), (13), правые части которых пропорциональны с коэффициентом K. Последний факт становится очевидным, если учесть, что для решения в форме бегущей волны $u = f(kx - \omega t) = f(\xi)$, с учетом (4) и (7), имеет место

$$\frac{u_t}{u_x} = \frac{-\omega f_\xi}{kf_\xi} = -k^2 + k - E + \alpha E^2 = \frac{6\alpha k^2 + 2\alpha - 3}{12\alpha} = K.$$

Убедимся, что общее решение системы (10), (13) совпадает с (9). Используя (7) и (12), общему решению уравнения (10) можно придать вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1 + 3k\,\mathrm{th}\left(\frac{k}{2}\left(C(t) + x\right)\right)}{\sqrt{6\alpha}}, \tag{14}$$

где $C(t)$ – произвольная функция. Подставив (14) в равенство $u_t = Ku_x$, получим уравнение, которому должна удовлетворять эта функция:

$$12\alpha C_t = 6\alpha k^2 + 2\alpha - 3,$$

общее решение которого

$$C(t) = \left(\frac{k^2}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4\alpha}\right)t + C. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (14), записывая функцию th в экспоненциальной форме и выбирая для постоянной интегрирования $C = \frac{1}{k}\ln\frac{\varepsilon\sqrt{\alpha}}{k\sqrt{6}}$, получаем решение (9) со знаком “+” в знаменателе.

Неявная линеаризация уравнения Гарднера-Бюргерса

Известно [5], что уравнение Риккати (10) при помощи преобразования Коула-Хопфа

$$u = \gamma\frac{\varphi_x}{\varphi}, \tag{16}$$

в котором $\varphi = \varphi(x,t)$ – новая зависимая переменная, а γ – постоянная, приводится к линейному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\varphi_{xx} - B\varphi_x + AC\varphi = 0, \qquad (17)$$

если $\gamma = -1/A$.

Вычисляя частные производные от (16) по t и x

$$u_t = \frac{\varphi_x \varphi_t}{A\varphi^2} - \frac{\varphi_{xt}}{A\varphi}, \quad u_x = \frac{\varphi_x^2}{A\varphi^2} - \frac{\varphi_{xx}}{A\varphi}$$

убеждаемся, что равенство $u_t = Ku_x$ выполняется при аналогичном условии для функции φ:

$$\varphi_t = K\varphi_x. \qquad (18)$$

Докажем справедливость следующего утверждения: точное решение уравнения ГБ (1) определяется по формуле (16), где функция $\varphi(x,t)$ является решением линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (17).

Общее решение уравнения (17), получаемого подстановкой (16) из уравнения (10), содержит две произвольные функции $F_1(t)$ и $F_2(t)$:

$$\varphi(x,t) = F_1(t)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}\sqrt{B^2-4AC}\right)x} + F_2(t)\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}\sqrt{B^2-4AC}\right)x} \qquad (19)$$

Для уединенно-волнового решения показатели экспонент должны быть вещественными: $B^2 - 4AC > 0$. Обозначая $d_1 = \frac{1}{2}B$, $d_2 = \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4AC}$, подставим (19) в (16):

$$u = \gamma \frac{F_1(t)(d_1 + d_2)\mathrm{e}^{(d_1+d_2)x} + F_2(t)(d_1 - d_2)\mathrm{e}^{(d_1-d_2)x}}{F_1(t)\mathrm{e}^{(d_1+d_2)x} + F_2(t)\mathrm{e}^{(d_1-d_2)x}}, \qquad (20)$$

чтобы затем подставить функцию (20) в уравнение (1). Производя факторизацию и группируя ведущий множитель по степеням экспоненты, получим переопределенную систему дифференциальных уравнений для $F_1(t)$ и $F_2(t)$:

$$\begin{aligned}
F_1F_{2t} - F_{1t}F_2 &= -2d_2\left(\alpha\gamma^2\left(d_1^2 - d_2^2\right) - d_1\gamma + 8d_2^2\right)F_1F_2, \\
F_1F_{2t} - F_{1t}F_2 &= -2d_2\left(\alpha\gamma^2(d_1 - d_2)^2 - \gamma(d_1 - d_2) - 4d_2^2 + 2d_2\right)F_1F_2, \\
F_1F_{2t} - F_{1t}F_2 &= -2d_2\left(\alpha\gamma^2(d_1 + d_2)^2 - \gamma(d_1 + d_2) - 4d_2^2 - 2d_2\right)F_1F_2.
\end{aligned} \qquad (21)$$

При выполнении условий

$$\gamma = \pm\sqrt{\frac{6}{\alpha}}, \quad d_1 = \frac{\gamma + 2}{12}$$

правые части уравнений (21) совпадают между собой и система сводится к единственному уравнению

$$F_1F_{2t} - F_{1t}F_2 = -\frac{d_2}{6\alpha}\left(24\alpha d_2^2 + 2\alpha - 3\right)F_1F_2.$$

Разделив последнее уравнение почленно на F_2^2 и обозначив

$$F(t)=\frac{F_1(t)}{F_2(t)}, \tag{22}$$

получим дифференциальное уравнение для функции $F(t)$:

$$F_t=\frac{d_2}{6\alpha}\left(24\alpha d_2^2+2\alpha-3\right)F$$

общее решение которого

$$F=C\,\mathrm{e}^{\frac{d_2}{6\alpha}\left(24\alpha d_2^2+2\alpha-3\right)t}. \tag{23}$$

Замечая, что после почленного деления на F_2, выражение (20) будет зависеть только от отношения F_1/F_2, заменим это отношение в (20) на правую часть (23). В результате, равенству (20) можно придать вид

$$u=\pm\sqrt{\frac{6}{\alpha}}\,\frac{C\left(\pm\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{\alpha}}+\frac{1}{6}+d_2\right)\mathrm{e}^{2d_2x+\frac{d_2}{6\alpha}\left(24\alpha d_2^2+2\alpha-3\right)t}\pm\frac{1}{12}\sqrt{\frac{6}{\alpha}}+\frac{1}{6}-d_2}{C\,\mathrm{e}^{2d_2x+\frac{d_2}{6\alpha}\left(24\alpha d_2^2+2\alpha-3\right)t}+1}. \tag{24}$$

Выражение (24) содержит три произвольные постоянные α, C, d_2 и является точным решением уравнения (1). Легко проверить, что после подстановок $d_2=\frac{k}{2}$ и $C=\pm\frac{\varepsilon}{k}\sqrt{\frac{\alpha}{6}}$ выражение (24) будет совпадать с решением (9), найденным выше при помощи метода возмущений.

Точные решения уравнения Гарднера-Бюргерса с источником

Рассмотрим обобщенное уравнение ГБ с добавкой в виде полинома четвертой степени от функции $u(x,t)$:

$$u_t-u_{xx}+u_{xxx}+uu_x-\alpha u^2u_x+\beta_1u+\beta_2u^2+\beta_3u^3+\beta_4u^4=0. \tag{25}$$

Будем искать решение уравнения (25) в форме

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n(x,t). \tag{26}$$

Подставляя (26) в (25) и группируя по степеням ε, получим

$$\begin{aligned}
&u_{1t}-u_{1xx}+u_{1xxx}+\beta_1u_1=0,\\
&u_{2t}-u_{2xx}+u_{2xxx}+\beta_1u_2=-u_1u_{1x}-\beta_2u_1^2,\\
&u_{3t}-u_{3xx}+u_{3xxx}+\beta_1u_3=-(u_1u_2)_x+\alpha u_1^2u_{1x}-2\beta_2u_1u_2-\beta_3u_1^3,\ldots
\end{aligned} \tag{27}$$

Из первого уравнения системы (27) найдем $u_1=\exp(kx-\omega t)$, где $\omega=k^3-k^2+\beta_1$. Отыскивая решения остальных уравнений в виде $u_n=K_nu_1^n$ и вводя обозначение $y=\varepsilon u_1$, для ряда (26) получим

$$u = y - \frac{k+\beta_2}{6k^3 - 2k^2 - \beta_1} y^2 +$$
$$+ \frac{6\alpha k^4 - 2\alpha k^3 - 6k^3\beta_3 - \alpha k\beta_1 + 2k^2\beta_3 + 3k^2 + 5k\beta_2 + \beta_1\beta_3 + 2\beta_2^2}{2\left(6k^3 - 2k^2 - \beta_1\right)\left(12k^3 - 3k^2 - \beta_1\right)} y^3 - \ldots \qquad (28)$$

Равенство двух первых диагональных аппроксимант Паде [1/1] и [2/2] ряда (28) выполняется при условии

$$\beta_3 = \frac{k\delta - k\left(k+\beta_2\right)\left(6k^2\beta_2 - 2k\beta_2 + \beta_1\right)}{\left(6k^3 - 2k^2 - \beta_1\right)^2}, \qquad (29)$$

где

$$\delta = 36\alpha k^6 - 24\alpha k^5 + 4\alpha k^4 - 12\alpha k^3\beta_1 + 4\alpha k^2\beta_1 - 6k^4 - 12k^3\beta_2 - 6k^2\beta_2^2 + \alpha\beta_1^2.$$

Для совпадения двух следующих аппроксимант [2/2] и [3/3] достаточно потребовать

$$\beta_4 = -\frac{k\left(k+\beta_2\right)\delta}{\left(6k^3 - 2k^2 - \beta_1\right)^3}. \qquad (30)$$

При соблюдении условий (29) и (30) все последующие диагональные аппроксиманты [*N*/*N*] совпадают с первыми тремя и равны

$$\frac{y}{1 + \dfrac{k+\beta_2}{6k^3 - 2k^2 - \beta_1} y}.$$

Заменяя в последнем выражении переменную y на $\varepsilon \exp\left(kx - \left(k^3 - k^2 + \beta_1\right)t\right)$, получим точное решение уравнения (25)

$$u = \frac{\varepsilon\, \mathrm{e}^{kx - \left(k^3 - k^2 + \beta_1\right)t}}{1 + \dfrac{k+\beta_2}{6k^3 - 2k^2 - \beta_1}\varepsilon\, \mathrm{e}^{kx - \left(k^3 - k^2 + \beta_1\right)t}},$$

зависящее от четырех свободных параметров β_1, β_2, k и ε, имеющее форму бегущего фронта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00176-а).

Список литературы

1. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 328 с.
2. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2010. 368 с.
3. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
4. G.A. Baker Jr., P. Graves-Morris. Padé Approximants, Cambridge U.P., Cambridge, 1996.

5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1950. 473 с.