

УДК 532.517.2:539.3

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С УПРУГИМ
ТРЕХСЛОЙНЫМ СТАТОРОМ И АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫМ
ВИБРАТОРОМ ОПОРЫ**

Грушенкова Е.Д.¹, Могилевич Л.И.², Попов В.С.³, Скородумов Е.С.⁴

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, katenok.09041992@gmail.com

²Поволжский филиал Московского государственного университета путей
сообщения (МИИТ), Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru

³Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
Россия, Саратов, vic_p@bk.ru

⁴Поволжский филиал Московского государственного университета путей
сообщения (МИИТ), Россия, Саратов, evgen_rgot@mail.ru

**MATHEMATICAL MODELING OF VISCOUS LIQUID LAYER DYNAMIC
INTERACTION WITH ELASTIC FREE-LAYER STATOR AND
ABSOLUTELY SOLID VIBRATOR OF A SUPPORTING DEVICE**

Grushenkova E.D.¹, Mogilevich L.I.², Popov V.S.³, Skorodumov E.S.⁴

¹ Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
Russia, Saratov, katenok.09041992@gmail.com

²Volga Region Branch of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT),
Russia, Saratov, mogilevich@sgu.ru

³Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
Russia, Saratov, vic_p@bk.ru

⁴Volga Region Branch of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT),
Russia, Saratov, evgen_rgot@mail.ru

Аннотация. Исследована задача гидроупругости трехслойной пластины образующей статор опоры с абсолютно твердым вибратором. Рабочая жидкость опоры рассматривается как вязкая несжимаемая жидкость. Статор опоры считается жестко защемленным по торцам. Рассматривается плоская задача для режима установившихся гармонических колебаний вибратора. Построена математическая модель опоры и предложены подходы к ее исследованию.

Ключевые слова: гидроупругость, колебания, трехслойная пластины, абсолютно жесткий вибратор, вязкая несжимаемая жидкость.

Abstract. The hydroelasticity problem of three-layer plate, forming stator of a supporting device with absolutely solid vibrator is investigated. The working liquid of the supporting device consider as incompressible viscous liquid. The stator of supporting device is clamped at its butt ends. We investigate the flat problem for the regime of stationary harmonic oscillations of vibrator. As a result, the mathematical model of supporting device was built and we have proposed the approaches for its study.

Keywords: hydroelasticity, oscillations, three-layer plate, absolutely solid vibrator, viscous incompressible liquid

Исследованию статики и динамики трехслойных конструкций посвящено достаточно много работ, например, сошлемся здесь на обзор представленный в [1]. С другой стороны, в настоящее время актуальными являются исследования проблем гидроупругости однородных упругих конструкций [2-4]. При исследовании проблем гидроупругости особое направление составляют работы по учету влияния вязкости жидкости. Для примера сошлемся здесь на работы [5-13], в которых исследованы различные проблемы гидроупругого взаимодействия однородных пластин и цилиндрических оболочек со слоем вязкой жидкости. В работах [14-22] исследованы проблемы гидроупругих колебаний геометрических нерегулярных пластин и оболочек, взаимодействующих с вязкой жидкостью. В то же время работ, посвященных исследованию гидроупругости трехслойных конструкций крайне мало. В предлагаемой работе исследуются динамика упругой трехслойной конструкций, взаимодействующей с жидкостью, в составе опоры.

Гидродинамическая опора условно представлена на рис.1. Имеется абсолютно жесткое тело – вибратор I опоры. Внутренняя поверхность вибратора является плоской и образует одну из стенок щелевого канала. Вибратор имеет ширину b и длину 2ℓ и совершает заданные колебания в вертикальной плоскости с частотой ω и амплитудой z_m . Вторую стенку щелевого канала образует упругий трехслойный стержень – статор II опоры. Его ширина и длина совпадают с шириной и длиной вибратора. Статор представляет собой пакет, набранный из двух несущих слоев 1 и 2 толщиной h_1 и h_2 , воспринимающих основные динамические и статические нагрузки и заполнителя 3 толщиной $2c$, обеспечивающего их совместную работу. Материал заполнителя можно считать жестким.

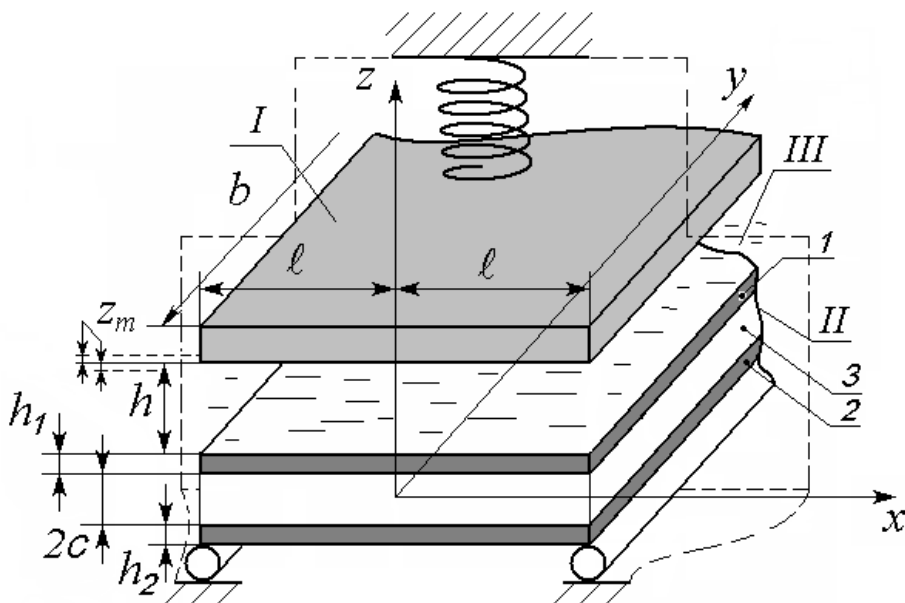


Рис.1.

Для статора справедлива гипотеза ломаной нормали, т.е. в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, а в несжимаемом заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной и не меняет своей длины,

однако поворачивается на некоторый дополнительный угол $\varphi(x)$. На торцах трехслойного статора предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Торцы трехслойного статора считаются жестко заземленными. Деформации трехслойного статора можно считать малыми.

Вязкая несжимаемая жидкость III полностью заполняет зазор между вибратором и статором. Средняя величина щелевого зазора равна h_0 . На торцах сторон 2ℓ имеются торцевые уплотнители, и истечение жидкости через эти торцы отсутствует. При этом предполагается что, на торцах сторон b торцевые уплотнители отсутствуют, и жидкость из щелевых зазоров вдоль сторон b может свободно истекать в окружающую жидкость, находящуюся в технологических полостях корпуса опоры.

1. Введем в рассмотрение декартовую систему координат $Oxuz$ связанную с абсолютно твердым корпусом опоры и совпадающую со срединной поверхностью заполнителя упругого трехслойного стержня (статора) в невозмущенном состоянии. Закон движения вибратора будем представлять как

$$z = z_m f_z(\omega t), \quad (1)$$

$$f_z(\omega t) = \sin(\omega t). \quad (2)$$

Динамика рабочей жидкости в двумерном случае описывается системой уравнений Навье-Стокса и неразрывности [22]:

$$\text{Re} \left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad (3)$$

$$\psi^2 \text{Re} \left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda \left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \right] = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2 \left[\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} \right],$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

во введенных для рассматриваемой задачи безразмерных переменных

$$\psi = \frac{h_0}{\ell} \ll 1, \quad \lambda = \frac{z_m}{h_0}, \quad \tau = \omega t, \quad \xi = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z - c - h_1}{h_0}, \quad u_x = z_m \omega \frac{\ell}{h_0} U_\xi, \quad u_z = z_m \omega U_\zeta, \quad (4)$$

$$\text{Re} = \frac{h_0^2 \omega}{\nu} = 2\varepsilon^2, \quad p = \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi^2} P(\xi, \tau),$$

здесь x, z – декартовы координаты; u_x, u_z – проекции вектора скорости жидкости на оси координат; p – давление; ρ, ν – плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости; ψ, λ, Re – параметры, характеризующие задачу.

В краевых условиях системы (3) учитываем, что скорость жидкости на вибраторе и статоре совпадает их скоростями [4, 22]

$$U_\xi = 0, U_\zeta = \frac{df}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1 + \lambda f(\tau) \quad (5)$$

$$U_\xi = \psi \frac{u_m}{z_m} \frac{\partial U}{\partial \tau}, U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W,$$

где $u = u_m U(\xi, \tau)$, $w = w_m W(\xi, \tau)$, $\varphi = \varphi_m \Phi(\xi, \tau)$, – перемещения статора в направлении оси Ox и Oz и поворот нормали в заполнителе соответственно.

Условие свободного истечения жидкости в направлении оси Ox и в противоположном направлении принимают вид для давления

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1. \quad (6)$$

Уравнения динамики упругого трехслойного статора (уравнения динамики трехслойного стержня с несжимаемым заполнителем см. [1]) во введенных безразмерных переменных имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (a_1 u_m U + a_6 \varphi_m \Phi - a_7 \frac{1}{\ell} w_m \frac{\partial W}{\partial \xi}) = \\ & = -q_{zx} + \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (m_1 u_m U + m_6 \varphi_m \Phi - m_7 \frac{1}{\ell} w_m \frac{\partial W}{\partial \xi}), \\ & \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (a_6 u_m U + a_2 \varphi_m \Phi - a_3 \frac{1}{\ell} w_m \frac{\partial W}{\partial \xi}) - a_5 \varphi_m \Phi = \\ & = \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (m_6 u_m U + m_2 \varphi_m \Phi - m_3 \frac{1}{\ell} w_m \frac{\partial W}{\partial \xi}), \\ & \frac{1}{\ell^3} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} (a_7 u_m U + a_3 \varphi_m \Phi - a_4 \frac{1}{\ell} w_m \frac{\partial W}{\partial \xi}) = -q_{zz} + m_1 \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} w_m W + \\ & + \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \xi} (m_7 u_m U + m_3 \varphi_m \Phi - m_4 \frac{1}{\ell} w_m \frac{\partial W}{\partial \xi}). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь a_1, \dots, a_7 – коэффициенты, приведенные в [1];

$$m_1 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 2\rho_3 c, \quad m_6 = (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)c,$$

$$m_7 = \rho_1 h_1 (c + h_1/2) - \rho_2 h_2 (c + h_2/2), \quad m_2 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 4\rho_3 c/3)c^2,$$

$$m_3 = [\rho_1 h_1 (c + h_1/2) + \rho_2 h_2 (c + h_2/2) + 2\rho_3 c^2/3]c,$$

$$m_4 = \rho_1 h_1 (c^2 + ch_1 + h_1^2/3) + \rho_2 h_2 (c^2 + ch_2 + h_2^2/3) + 2\rho_3 c^3/3,$$

и приняты обозначения: ρ_k – плотность материала k -го слоя, $k = 1, 2, 3$ – номер слоя; q_{zx} , q_{zz} – напряжения, действующие на внутреннюю поверхность статора со стороны слоя жидкости.

Выражения для напряжений q_{zx} , q_{zz} , действующих на статор со стороны жидкости в безразмерных переменных (4) запишутся как

$$q_{zx} = \frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi} \left(\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} \right) \text{ при } \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W. \quad (8)$$

$$q_{zz} = -\frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi^2} \left(P - 2\psi^2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} \right) \text{ при } \zeta = \lambda \frac{w_m}{z_m} W. \quad (9)$$

Уравнения динамики трехслойного статора дополняются условиями его жесткого заземления на торцах

$$W = \Phi = U = \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \xi = \pm 1. \quad (10)$$

2. В нулевом приближении по ψ и λ получаем линеаризованные уравнения динамики тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости

$$\text{Re} \frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \quad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0, \quad \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0, \quad (11)$$

и соответствующие им граничные условия для скоростей на непроницаемых поверхностях абсолютно жесткого вибратора и упругого геометрически нерегулярного статора

$$U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{df_z(\tau)}{d\tau} \text{ при } \zeta = 1, \quad U_\xi = 0, \quad U_\zeta = \frac{w_m}{z_m} \frac{\partial W}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = 0, \quad (12)$$

а также условия для гидродинамического давления на торцах (6).

Принимая во внимание, что согласно (8), (9) выполняется условие $q_{zz} \gg q_{zx}$, пренебрегаем q_{zx} и в нулевом приближении по λ и ψ , нормальное напряжение на статоре имеет вид

$$q_{zz} = -\frac{\rho \nu z_m \omega}{h_0 \psi^2} P, \quad (13)$$

также учтем, что $m_4/\ell^2 \ll m_1$, $m_7/\ell \ll m_1$, $m_3/\ell \ll m_1$ и ими можно пренебречь.

Проводя решение задачи динамики жидкости (11) с граничными условиями (12), (6) при гармоническом законе движения вибратора найдено безразмерное давление в жидкости:

$$P = \frac{1}{2} (\xi^2 - 1) \left[2\varepsilon^2 \alpha \frac{d^2 f_z}{d\tau^2} + 12\gamma \frac{df_z}{d\tau} \right] + \frac{w_m}{z_m} \int_{-\xi}^1 \int_{-\xi}^1 \left(2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi \quad (14)$$

$$+ \frac{1}{2} (\xi - 1) \frac{w_m}{z_m} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W}{\partial \tau} \right) d\xi d\xi,$$

где $2\varepsilon^2 = h_0^2 \omega / \nu$, α , γ – частотозависимые коэффициенты, определенные в [4].

Решение уравнений (7) исходя из граничных условий (10) представим в виде разложения по собственным функциям:

$$W = \sum_{k=1}^n R_k(\tau) X_k(\xi), \quad U = -\sum_{k=1}^n Q_k(\tau) Y_k(\xi) \alpha_k, \quad \Phi = -\sum_{k=1}^n P_k(\tau) Y_k(\xi) \alpha_k,$$

$$X_k = \left(\frac{\cos \alpha_k \xi}{\cos \alpha_k} - \frac{ch \alpha_k \xi}{ch \alpha_k} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad Y_k = \left(\frac{\sin \alpha_k \xi}{\cos \alpha_k} + \frac{sh \alpha_k \xi}{ch \alpha_k} \right) \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (15)$$

Здесь α_k – корни уравнения $th\alpha_k + tg\alpha_k = 0$, $\alpha_1 = 2,356$, $\alpha_2 = 5,498$, ..., $\alpha_k = (k-1/4)\pi$.

Подставляя (15) в уравнения (7) с учетом (13), (14) и производя переразложение членов уравнения по собственным функциям Y_k , X_k , учитывая гармонический характер по времени, полагая $\frac{d^2 R_k}{d\tau^2} = -R_k$, $\frac{d^2 Q_k}{d\tau^2} = -Q_k$, $\frac{d^2 P_k}{d\tau^2} = -P_k$, $\frac{dR_k}{d\tau} = iR_k$, $\frac{dQ_k}{d\tau} = iQ_k$, $\frac{dP_k}{d\tau} = iP_k$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получим системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\ell^2} \sum_{k=1}^n [a_1 u_m Q_k + a_6 \varphi_m P_k - a_7 \frac{1}{\ell} w_m R_k] \alpha_k^3 \sum_{p=1}^n d_{kp}^{1,2} Y_p - \\
& - \omega^2 \sum_{k=1}^n [m_1 u_m Q_k + m_6 \varphi_m P_k - m_7 \frac{1}{\ell} w_m R_k] \alpha_k Y_k = 0 \\
& \frac{1}{\ell^2} \sum_{k=1}^n [a_6 u_m Q_k + a_2 \varphi_m P_k - a_3 \frac{1}{\ell} w_m R_k] \alpha_k^3 \sum_{p=1}^n d_{kp}^{1,2} Y_p - a_5 \sum_{k=1}^n \varphi_m P_k \alpha_k Y_k - \\
& - \omega^2 \sum_{k=1}^n [m_6 u_m Q_k + m_2 \varphi_m P_k - m_3 \frac{1}{\ell} w_m R_k] \alpha_k Y_k = 0 \\
& \frac{1}{\ell^3} \sum_{k=1}^n [a_7 u_m Q_k + a_3 \varphi_m P_k - a_4 \frac{1}{\ell} w_m R_k] \alpha_k^4 X_k - \\
& - \frac{\rho v w_m \omega}{h_0 \psi^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_k^2} R_k (-2\varepsilon^2 \alpha + 12\gamma) \sum_{p=1}^n d_{kp}^{33} X_p + \omega^2 w_m m_1 \sum_{k=1}^n R_k X_k = \\
& = \frac{\rho v z_m \omega}{h_0 \psi^2} f_z (-2\varepsilon^2 \alpha + 12\gamma) \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n d_k^{32} X_k.
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь $d_{kp}^{1,2} = \frac{4}{\alpha_k^4 - \alpha_p^4} (\alpha_p^3 tg\alpha_k - \alpha_k^3 tg\alpha_p)$, если $p \neq k$ и

$$d_{kp}^{1,2} = tg^2 \alpha_k - 3 \frac{tg\alpha_k}{\alpha_k} \text{ если } p = k,$$

$$d_{kp}^{33} = \frac{4\alpha_k}{(\alpha_k^4 - \alpha_p^4)\alpha_p} (\alpha_p^3 tg\alpha_k - \alpha_k^3 tg\alpha_p), \text{ если } p \neq k \text{ и}$$

$$d_{kp}^{33} = tg^2 \alpha_k - 3 \frac{tg\alpha_k}{\alpha_k} \text{ если } p = k, \quad d_k^{32} = \frac{8}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha_k^2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получаем систему линейных алгебраических уравнений. Задавая количество членов разложения из этой системы можно известными методами найти искомые величины Q_k , P_k , R_k тем самым, определяя перемещения трехслойного статора, а, следовательно, определяя законы упругих

перемещений трехслойного статора и давление в слое жидкости в зависимости от заданного закона движения вибратора.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 15-01-01604-а.

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: Физматлит, 2005. 576 с.
2. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
3. Анкилов А.В., Вельмисов П.А., Покладова Ю.В., Горбоконенко В.Д. Математическое моделирование механической системы «трубопровод - датчик давления». Ульяновск, 2008, 188 с.
4. Могилевич Л.И., Попов В.С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроении. Саратов: Изд-во Саратов. гос. агр. ун-та им. Н.И.Вавилова, 2003. 156 с.
5. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78
6. Попова А.А. Взаимодействие шарнирно закрепленной пластины со слоем вязкой жидкости // Научные труды SWorld. 2014. Т. 29. № 4. С. 3-5.
7. Попова А.А. Математическое моделирование динамических процессов в виброопоре с упругими элементами конструкции // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 4. № 1 (28). С. 25-31.
8. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 4. С. 23-32.
9. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical model of pulsating viscous liquid layer movement in a flat channel with elastically fixed wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Т. 8. № 157-160. С. 7899-7908.
10. Попов В.С., Попова А.А. Исследование гидроупругих колебаний стенок плоского канала при инерционном возбуждении // Научные труды SWorld. 2013. Т. 3. № 3. С. 77-79.
11. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
12. Попова А.А., Попова Е.В. Исследование давления в кольцевом слое вязкой жидкости в канале с подвижной стенкой // Техническое регулирование в транспортном строительстве. 2015. № 5 (13). С. 53-59.
13. Попова А.А. Динамика вязкой жидкости в кольцевом канале при вибрации внутренней стенки // Научные труды SWorld. 2015. Т. 12. № 3 (40). С. 56-59.

14. Могилевич Л.И., Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости вибропоры с упругой ребристой пластиной // Наука и техника транспорта. 2007. № 4. С. 55-61.
15. Попов В.С., Попова А.А., Волон М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.
16. Попова А.А. Динамическая задача гидроупругости плоского канала со стенкой переменной толщины // Научные труды SWorld. 2014. Т. 27. № 3. С. 25-27.
17. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Саратов, 2008. 32 с.
18. Попова А.А. Математическое моделирование процессов взаимодействия вязкой жидкости с тонкостенными ребристыми элементами гидродинамических демпферов и трубопроводов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук/Саратовский государственный технический университет. Саратов, 2008. 174 с.
19. Агеев Р.В., Попова А.А. Динамика взаимодействия потока вязкой жидкости с упругой геометрически нерегулярной стенкой канала // Научные труды SWorld. 2015. Т. 7. № 2 (39). С. 37-40.
20. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 4.
21. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Плаксина И.В., Попова А.А. Моделирование процессов динамического взаимодействия упругой геометрически нерегулярной внешней оболочки с тонким пульсирующим слоем вязкой жидкости // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. 2015. С. 1917-1920.
22. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Т.1 727 с.