УДК 532.517.2:539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕХСЛОЙНОГО ЭЛЕМЕНТА ОПОРЫ С ПУЛЬСИРУЮЩИМ СЛОЕМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Грушенкова Е.Д.[1], Могилевич Л.И.[2], Попова А.А.[3]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, katenok.09041992@gmail.com
[2]Поволжский филиал Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Россия, Саратов, mogilevich@sgu.ru
[3]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, anay_p@bk.ru

HYDROELASTIC OSCILLATIONS MATHEMATICAL MODELING OF THREE-LAYER ELEMENTS OF SUPPORTING DEVICE WITH PULSATING LAYER OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID

Grushenkova E.D.[1], Mogilevich L.I.[2], Popova A.A.[3]
[1] Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, katenok.09041992@gmail.com
[2]Volga Region Branch of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Russia, Saratov, mogilevich@sgu.ru
[3]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, vic_p@bk.ru

Аннотация. Исследована задача гидроупругих колебаний трехслойной пластины образующей стенку щелевого канала опоры. Трехслойная пластина считается жестко защемленной на торцах. Колебания пластины обусловлены пульсацией вязкой несжимаемой жидкости в щелевом канале. Рассматривается плоская задача для режима установившихся гармонических колебаний. Построена математическая модель опоры и предложены подходы к ее исследованию.

Ключевые слова: гидроупругость, колебания, трехслойна пластина, пульсация давления, вязкая несжимаемая жидкость.

Abstract. The hydroelastic oscillation problem of a three-layer plate, forming slit channel wall of supporting device is investigated. The three-layer elastic plate is clamped at its butt ends. The plate oscillations are caused by pulsation of viscous incompressible liquid in the slit channel. We investigate the flat problem for the regime of stationary harmonic oscillations. As a result, the mathematical model of supporting device was built and we have proposed the approaches for its study.

Keywords: hydroelasticity, oscillations, three-layer plate, pressure pulsation, viscous incompressible liquid

Статика и динамика трехслойных конструкций в настоящее время достаточно хорошо изучена, например, сошлемся на обзор в [1]. Данные конструкции находят все более широкое применение на практике, и в частности, в качестве стенок каналов заполненных жидкостью. Проблемы гидроупругости однородных пластин достаточно хорошо изучены, сошлемся здесь на обзорные части [2-5]. Особый практический интерес вызывают задачи гидроупругих колебаний при взаимодействии упругих элементов с реальной (т.е. вязкой) жидкостью. Например, в работах [6-15] рассмотрены задачи динамики взаимодействия однородных пластин со слоем вязкой жидкости в различных постановках. В [16-20] рассмотрены осесимметричные задачи колебаний геометрически регулярных и ребристых цилиндрических оболочек, в том числе образующих кольцевой канал с вязкой жидкостью. Задачи без осевой симметрии рассмотрены в работах [21-26]. Проблемам изучения распространения нелинейных продольных волн деформаций в цилиндрических оболочках, заполненных вязкой жидкостью, в осесимметричной постановке посвящены работы [27-29]. В [30-32] исследованы проблемы гидроупругости круглых трехслойных пластин с жестким защемлением, а в [32, 33] прямоугольных пластин с шарнирным опиранием взаимодействующих с вязкой жидкостью в условиях пульсации давления в жидкости и вибрации. Однако, представляют несомненный теоретический и практический интерес разработки математических моделей гидроупругости трехслойных стенок каналов для случая их жесткого защемления на торцах.

В предлагаемой работе рассматривается вопрос построения математической модели гидроупругости трехслойных конструкций взаимодействующих с пульсирующим слоем жидкости применительно к гидроопоре. Рассмотрим опору, представляющую собой плоский канал шириной b и длиной 2ℓ, одна из стенок которого абсолютно жесткая, а вторая – упругая трехслойная балка-полоска (стержень) – статор опоры. Статор представляет собой пакет, набранный из двух несущих слоев: верхний – толщиной h_1 (взаимодействующий с жидкостью) и нижний – толщиной h_2, воспринимающих основные динамические и статические нагрузки, и заполнителя толщиной $2c$, обеспечивающего их совместную работу. Материал заполнителя можно считать жестким. Для статора справедлива гипотеза ломаной нормали, т.е. в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, а в несжимаемом заполнителе нормаль остается прямолинейной и не меняет своей длины, однако поворачивается на некоторый дополнительный угол $\varphi(x)$. На торцах трехслойного статора предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Торцы трехслойного статора считаются жестко защемленными. Деформации трехслойного статора можно считать малыми. Вязкая несжимаемая жидкость полностью заполняет зазор между стенками. В жидкости, находящейся в левой и правой торцевой полости, поддерживается пульсирующее давление $p(\omega t)$. Средняя величина щелевого зазора равна h_0. На торцах сторон 2ℓ имеются торцевые уплотнители, и истечение жидкости через эти торцы отсутствует. При этом предполагается что, на торцах сторон b торцевые уплотнители отсутствуют, и жидкость из щелевых зазоров вдоль сторон b может свободно истекать в окружающую жидкость, находящуюся в технологических полостях корпуса опоры.

Введем в рассмотрение декартовую систему координат $Oxyz$, связанную со срединной поверхностью заполнителя упругого трехслойного стержня (статора) в невозмущенном состоянии. Закон изменения давления на торцах имеет вид

$$p = p_m f_p(\tau), \tag{1}$$

$$f_p(\tau) = p_m \sin(\tau + \varphi_p). \tag{2}$$

Динамика рабочей жидкости в двумерном случае описывается системой уравнений Навье-Стокса и неразрывности [34]:

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} + \lambda\left(U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta}\right)\right] = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \psi^2 \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \tag{3}$$

$$\psi^2 \mathrm{Re}\left[\frac{\partial U_\zeta}{\partial \tau} + \lambda\left(U_\xi \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} + U_\zeta \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}\right)\right] = -\frac{\partial P}{\partial \zeta} + \psi^2\left[\psi^2 \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2}\right],$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

во введенных для рассматриваемой задачи безразмерных переменных

$$\psi = \frac{h_0}{\ell} << 1,\ \lambda = \frac{w_m}{h_0},\ \tau = \omega t,\ \xi = \frac{x}{\ell},\ \zeta = \frac{z - c - h_1}{h_0},\ u_x = w_m\, \omega \frac{\ell}{h_0} U_\xi,\ u_z = w_m\, \omega U_\zeta,$$

$$\mathrm{Re} = \frac{h_0^2\, \omega}{\nu} = 2\varepsilon^2,\ p = p(\tau) + \frac{\rho \nu w_m \omega}{h_0 \psi^2} P(\xi, \tau), \tag{4}$$

здесь x, z – декартовы координаты; u_x, u_z – проекции вектора скорости жидкости на оси координат; p – давление; ρ, ν – плотность и коэффициент кинематической вязкости жидкости; ψ, λ, Re – параметры, характеризующие задачу.

Краевые условия системы (3) – условия прилипания жидкости к стенкам канала [31, 32]

$$U_\xi = 0,\ U_\zeta = 0 \text{ при } \zeta = 1;$$

$$U_\xi = \psi \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial U}{\partial \tau},\ U_\zeta = \frac{\partial W}{\partial \tau} \text{ при } \zeta = \lambda W, \tag{5}$$

где $u = u_m U(\xi, \tau), w = w_m W(\xi, \tau), \varphi = \varphi_m \Phi(\xi, \tau)$, – перемещения статора в направлении оси Ox и Oz и поворот нормали в заполнителе соответственно.

Условие свободного истечения жидкости в направлении оси Ox и в противоположном направлении принимают вид для давления

$$P = 0 \text{ при } \xi = \pm 1. \tag{6}$$

Уравнения динамики упругого трехслойного статора (уравнения динамики трехслойного стержня с несжимаемым заполнителем см. [1]) во введенных безразмерных переменных имеют вид:

$$\frac{1}{\ell^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(a_1 u_m U + a_6\varphi_m\Phi - a_7\frac{1}{\ell}w_m\frac{\partial W}{\partial\xi}) =$$

$$= -q_{zx} + \omega^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(m_1 u_m U + m_6\varphi_m\Phi - m_7\frac{1}{\ell}w_m\frac{\partial W}{\partial\xi}),$$

$$\frac{1}{\ell^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(a_6 u_m U + a_2\varphi_m\Phi - a_3\frac{1}{\ell}w_m\frac{\partial W}{\partial\xi}) - a_5\varphi_m\Phi =$$

$$= \omega^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}(m_6 u_m U + m_2\varphi_m\Phi - m_3\frac{1}{\ell}w_m\frac{\partial W}{\partial\xi}), \qquad (7)$$

$$\frac{1}{\ell^3}\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}(a_7 u_m U + a_3\varphi_m\Phi - a_4\frac{1}{\ell}w_m\frac{\partial W}{\partial\xi}) = -q_{zz} + m_1\omega^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}w_m W +$$

$$+\omega^2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\frac{1}{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi}(m_7 u_m U + m_3\varphi_m\Phi - m_4\frac{1}{\ell}w_m\frac{\partial W}{\partial\xi}).$$

Здесь $a_1 = K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c$; $a_2 = c^2\left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3}K_3^+ c\right]$;

$$a_3 = c\left[K_1^+ h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right) + K_2^+ h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right) + \frac{2}{3}K_3^+ c^2\right];$$

$$a_4 = K_1^+ h_1\left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3}h_1^2\right) + K_2^+ h_2\left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3}h_2^2\right) + \frac{2}{3}K_3^+ c^3;$$

$$a_5 = 2G_3 c;\ a_6 = c\left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2\right];\ a_7 = K_1^+ h_1\left(c + \frac{1}{2}h_1\right) - K_2^+ h_2\left(c + \frac{1}{2}h_2\right);$$

$m_1 = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 2\rho_3 c$, $m_6 = (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)c$,

$m_7 = \rho_1 h_1(c + h_1/2) - \rho_2 h_2(c + h_2/2)$, $m_2 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + 4\rho_3 c/3)c^2$,

$m_3 = [\rho_1 h_1(c + h_1/2) + \rho_2 h_2(c + h_2/2) + 2\rho_3 c^2/3]c$,

$m_4 = \rho_1 h_1(c^2 + ch_1 + h_1^2/3) + \rho_2 h_2(c^2 + ch_2 + h_2^2/3) + 2\rho_3 c^3/3$,

и приняты обозначения: $K_k^+ = K_k + \frac{3}{4}G_k$; G_k, K_k – модули сдвиговой и объемной деформации; ρ_k – плотность материала k-го слоя, $k = 1, 2, 3$ – номер слоя; q_{zx}, q_{zz} – напряжения, действующие на внутреннюю поверхность статора со стороны слоя жидкости.

Выражения для напряжений q_{zx}, q_{zz}, действующих на статор со стороны жидкости в безразмерных переменных (4) запишутся как

$$q_{zx} = \frac{\rho\nu w_m\omega}{h_0\psi}\left(\psi^2\frac{\partial U_\zeta}{\partial\xi} + \frac{\partial U_\xi}{\partial\zeta}\right) \text{ при } \zeta = \lambda W, \qquad (8)$$

$$q_{zz} = -p(\tau) - \frac{\rho\nu w_m\omega}{h_0\psi^2}\left(P - 2\psi^2\frac{\partial U_\zeta}{\partial\zeta}\right) \text{ при } \zeta = \lambda W. \qquad (9)$$

Уравнения динамики трехслойного статора дополняются условиями его жесткого защемления на торцах

$$W = \Phi = U = \frac{\partial W}{\partial \xi} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \pm 1. \qquad (10)$$

2. В нулевом приближении по ψ и λ получаем линеаризованные уравнения динамики тонкого слоя вязкой несжимаемой жидкости

$$\mathrm{Re}\frac{\partial U_\xi}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial \zeta^2}, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = 0,$$

и соответствующие им граничные условия

$$U_\xi = 0,\ U_\zeta = 0 \ \text{при} \ \zeta = 1,$$

$$U_\xi = 0,\ U_\zeta = \frac{\partial W}{\partial \tau} \ \text{при} \ \zeta = 0, \qquad (12)$$

а также условия для гидродинамического давления на торцах (6).
Принимая во внимание, что согласно (8), (9) выполняется условие $q_{zz} >> q_{zx}$, пренебрегаем q_{zx} и в нулевом приближении по λ и ψ, нормальное напряжение на статоре имеет вид

$$q_{zz} = -p(\tau) - \frac{\rho \nu \, w_m \, \omega}{h_0 \, \psi^2} P, \qquad (13)$$

также учтем, что $m_4 / \ell^2 << m_1$, $m_7 / \ell << m_1$, $m_3 / \ell << m_1$ и ими можно пренебречь.

Проводя решение задачи динамики жидкости (11) с граничными условиями (12), (6) при гармоническом изменения давления (1), (2) найдено безразмерное давление в жидкости:

$$P = \frac{1}{2}(\xi - 1)\int_{-1}^{1}\int\left(2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W}{\partial \tau}\right) d\xi d\xi + \int_{\xi}^{1}\int\left(2\varepsilon^2 \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + 12\gamma \frac{\partial W}{\partial \tau}\right) d\xi d\xi, \qquad (14)$$

где $2\varepsilon^2 = h_0^2 \omega / \nu$, α, γ – частотозависимые коэффициенты, определенные в [32].
Решение уравнений (7) исходя из граничных условий (10) представим в виде разложения по собственным функциям

$$W = \sum_{k=1}^{n} R_k(\tau) X_k(\xi),\ U = -\sum_{k=1}^{n} Q_k(\tau)\, Y_k(\xi)\alpha_k,\ \Phi = -\sum_{k=1}^{n} Q_k(\tau)\, Y_k(\xi)\alpha_k,$$

$$X_k = \left(\frac{\cos \alpha_k \xi}{\cos \alpha_k} - \frac{ch \alpha_k \xi}{ch \alpha_k}\right)\frac{1}{\sqrt{2}},\ Y_k = \left(\frac{\sin \alpha_k \xi}{\cos \alpha_k} + \frac{sh \alpha_k \xi}{ch \alpha_k}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (15)$$

Здесь α_k – собственные числа – корни уравнения

$$th \alpha_k + tg \alpha_k = 0,$$

при этом $\alpha_1 = 2{,}356$, $\alpha_2 = 5{,}498$, …., $\alpha_k = (k - 1/4)\pi$.

Подставляя (15) в уравнения (7) с учетом (13), (14) и производя переразложение членов уравнения по собственным функциям Y_k, X_k учитывая гармонический характер по времени, полагая

$$\frac{d^2R_k}{d\tau^2}=-R_k,\ \frac{d^2Q_k}{d\tau^2}=-Q_k,\ \frac{d^2P_k}{d\tau^2}=-P_k,\ \frac{dR_k}{d\tau}=iR_k,\ \frac{dQ_k}{d\tau}=iQ_k,\ \frac{dP_k}{d\tau}=iP_k$$

и приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях получим системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\ell^2}\sum_{k=1}^{n}\ [a_1u_mQ_k+a_6\varphi_mP_k-a_7\frac{1}{\ell}w_mR_k\alpha_k^3\sum_{p=1}^{n}d_{kp}^{1,2}Y_p-\\
&-\omega^2\sum_{k=1}^{n}\ [m_1u_mQ_k+m_6\varphi_mP_k-m_7\frac{1}{\ell}w_mR_k]\alpha_kY_k=0,\\
&\frac{1}{\ell^2}\sum_{k=1}^{n}\ [a_6u_mQ_k+a_2\varphi_mP_k-a_3\frac{1}{\ell}w_mR_k]\alpha_k^3\sum_{p=1}^{n}d_{kp}^{1,2}Y_p-a_5\sum_{k=1}^{n}\ \varphi_mP_k\alpha_kY_k-\\
&-\omega^2\sum_{k=1}^{n}\ [m_6u_mQ_k+m_2\varphi_mP_k-m_3\frac{1}{\ell}w_mR_k]\alpha_kY_k=0,\\
&\frac{1}{\ell^3}\sum_{k=1}^{n}\ [a_7u_mQ_k+a_3\varphi_mP_k-a_4\frac{1}{\ell}w_mR_k]\alpha_k^4X_k-\\
&-\frac{\rho\nu w_m\omega}{h_0\psi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_k^2}R_k(-2\varepsilon^2\alpha+12\gamma i)\sum_{p=1}^{n}d_{kp}^{33}X_p+\omega^2w_mm_1\sum_{k=1}^{n}R_kX_k=\\
&=p(\tau)\sum_{k=1}^{n}d_k^{31}X_k.
\end{aligned}\tag{16}$$

Здесь $d_{kp}^{1,2}=\dfrac{4}{\alpha_k^4-\alpha_p^4}(\alpha_p^3tg\alpha_k-\alpha_k^3tg\alpha_p)$, если $p\neq k$ и

$d_{kp}^{1,2}=tg^2\alpha_k-3\dfrac{tg\alpha_k}{\alpha_k}$ если $p=k$,

$d_{kp}^{33}=\dfrac{4\alpha_k}{(\alpha_k^4-\alpha_p^4)\alpha_p}(\alpha_p^3tg\alpha_k-\alpha_k^3tg\alpha_p)$, если $p\neq k$ и

$d_{kp}^{33}=tg^2\alpha_k-3\dfrac{tg\alpha_k}{\alpha_k}$ если $p=k$, $d_k^{31}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}\dfrac{tg\alpha_k}{\alpha_k}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получаем систему линейный алгебраических уравнений. Задаваясь количеством членов разложения из этой системы можно известными методами найти искомые величины Q_k, P_k, R_k тем самым, определяя перемещения трехслойного статора в зависимости от заданного давления $p(\tau)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ15-01-01604-а.

Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: Физматлит, 2005. 576 с.
2. Горшков А.Г., Морозов В.И., Пономарев А.Т., Шклярчук Ф.Н. Аэрогидроупругость конструкций. М.: Физматлит, 2000. 591 с.
3. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2013. 322 с.
4. Попов В.С. Динамические задачи гидроупругости геометрически регулярных и нерегулярных тонкостенных конструкций в машино- и приборостроении: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук. Саратов, 2005. 32 с.
5. Попов В.С. Динамические задачи гидроупругости геометрически регулярных и нерегулярных тонкостенных конструкций в машино- и приборостроении: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Саратов, 2005. 378 с.
6. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной // Труды МАИ. 2014. № 78.
7. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Динамика взаимодействия упругих элементов вибромашины со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 4. С. 23-32.
8. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 17-35.
9. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical model of pulsating viscous liquid layer movement in a flat channel with elastically fixed wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. Т. 8. № 157-160. С. 7899-7908.
10. Попов В.С., Попова А.А. Исследование гидроупругих колебаний стенок плоского канала при инерционном возбуждении // Научные труды SWorld. 2013. Т. 3. № 3. С. 77-79.
11. Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 23. С. 1101-1109.
12. Агеев Р.В., Попов В.С., Попова А.А. Математическое моделирование взаимодействия подвижной стенки канала с пульсирующим слоем вязкой жидкости // Сборник научных трудов Sworld. 2014. Т. 29. № 2. С. 23-25.
13. Агеев Р.В., Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия подвижных стенок плоского канала со сдавливаемым слоем

жидкости, находящимся между ними // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2009. Т.1. № 4. С. 7-13.
14. Волов М.И., Попов В.С. Математическое моделирование динамики взаимодействия пульсирующего слоя вязкой жидкости с упругими стенками канала, образованного двумя параллельными пластинами // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 2. № 1 (55). С. 34-38.
15. Попов В.С., Агеев Р.В., Волов М.И. Гидроупругие колебания стенок канала со слоем вязкой жидкости, установленного на вибрирующем основании // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-5. С. 2433-2435.
16. Попов В.С. Исследование динамики взаимодействия пульсирующего ламинарного потока жидкости с упругой цилиндрической оболочкой // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2007. № 1 (33). С. 72-80.
17. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64-72.
18. Попов В.С., Попова А.А., Волов М.И. Математическое моделирование взаимодействия ламинарного пульсирующего потока с цилиндрической ребристой оболочкой, по которой он движется // Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений. 2010. № 1 (36). С. 51-66.
19. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Попов В.С., Плаксина И.В. Задачи гидроупругости для трубы кольцевого сечения с упругой, геометрически нерегулярной внешней оболочкой при воздействии давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. № 3. С. 70-76.
20. Кондратов Д.В., Калинина А.В. Исследование процессов гидроупругости ребристой трубы кольцевого профиля при воздействии вибрации // Труды МАИ. 2014. № 78. С. 4.
21. Могилевич Л.И., Попов В.С. Прикладная гидроупругость в машино- и приборостроение. Саратов: Саратовский ГАУ, 2003. 156 с.
22. Попов В. С. Колебания ребристой оболочки, окруженной слоем вязкой несжимаемой жидкости // Аграрный научный журнал. 2003. № 4. С. 47-50.
23. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости//Изв. РАН. МТТ. 2004. №5. С. 179-190.
24. Епишкина И.Н., Могилевич Л.И., Попов В.С., Симдянкин А.А. Математическое моделирование вынужденных колебаний гильзы цилиндра двигателя внутреннего сгорания // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. № 4. С. 19-26.

25. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия цилиндропоршневой группы двигателя внутреннего сгорания и слоя охлаждающей жидкости // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 1. С. 79.
26. Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Колебания гильзы цилиндра дви гателя внутреннего сгорания с водяным охлаждением под действием ударных нагру зок со стороны поршневой группы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2008. № 3. С. 100-106.
27. Блинкова А.Ю., Ковалева И.А., Могилевич Л.И., Попов В.С. Распространение волн деформации в двух упругих цилиндрических оболочках, между которыми находится вязкая жидкость // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 7-12.
28. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Моделирование колебаний и волн в цилиндрической оболочке с вязкой несжимаемой жидкостью внутри нее // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 1 (59). С. 13-19.
29. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель для исследования нелинейных волн в упругой цилиндрической оболочке с конструкционным демпфированием, окруженной упругой средой // Прикладная математика и механика (Ульяновск). 2014. № 10. С. 14-18.
30. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
31. Агеев Р.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Колебания стенок щелевого канала с вязкой жидкостью, образованного трехслойным и твердым дисками // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 1. С. 3-11.
32. Могилевич Л.И., Попов В.С., Христофорова А.В. Математические вопросы гидроупругости трехслойных элементов конструкций. Саратов: Изд-во КУБиК, 2012. 123 с.
33. Grushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Rabinsky L.N., Kuznetsova E.L. Mathematical model of three-layer plate interaction with viscous incompressible liquid layer under foundation vibration // Applied Mathematical Sciences. 2015. Т. 9. № 109-112. С. 5551-5559.
34. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. М.: Физматгиз, 1963. Т.1 727 с.