УДК 539.3: 534.2

УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ДВУМЕРНЫХ СЛОИСТЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

Архипова Н.И.[1], Ерофеев В. И.[2]
[1]ФГБУН Институт проблем машиностроения РАН,
Россия, Нижний Новгород, united-friends@bk.ru
[2]ФГБУН Институт проблем машиностроения РАН,
Россия, Нижний Новгород, erf04@sinn.ru

THE ELASTIC WAVES IN A TWO-DIMENSIONAL LAYERED CONSTRUCTIONS

Arkhipova N.I.[1], Erofeev V.I.[2]
[1]Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Russia, Nizhny Novgorod, united-friends@bk.ru
[2]Mechanical Engineering Research Institute, Russian Academy of Sciences,
Russia, Nizhny Novgorod, erf04@sinn.ru

Аннотация. В статье показано, что уточненные модели [1, 2] могут быть применены для описания динамических процессов в слоистых элементах конструкций. Рассуждения проводятся на примере двухслойной мембраны, совершающей поперечные колебания.

Ключевые слова: мембрана, уточненная модель, поперечные колебания, слоистая конструкция.

Abstract. The article has been shown that the improved models [1, 2] may be used for the dynamic processes description in layered elements of constructions. The reasoning is conducted on a sample of two-layer membrane that engages the transverse oscillation.

Keywords: membrane, improved model, transverse oscillations, layered construction

Рассмотрим случай, когда нарушается условие классической теории пластин: при рассмотрении поперечных колебаний необходимо учитывать влияние инерции вращения и деформации поперечного сдвига [3,4]. В этом случае так же учитывается натяжение пластины.

Плотность потенциальной энергии деформации пластины при изгибе имеет вид:

$$W_П = \frac{\lambda + 2\mu}{2} \cdot \frac{h^3}{12}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\lambda h^3}{12}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\aleph\mu}{2} \cdot \frac{h^3}{12}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] + \aleph\mu \cdot \frac{h^3}{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} +$$
$$+ \aleph\mu \cdot \frac{h}{2}\left[\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{N}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \quad (1)$$

Здесь w – поперечные отклонения пластины, $\aleph$ – коэффициент Тимошенко, φ, ψ – осредненные углы сдвига.

Плотность кинетической энергии пластины равна:

$$W_K = \frac{\rho h}{2}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + \frac{h^2}{12}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2\right]\right\} \tag{2}$$

Тогда изгибные колебания пластины [5] с натяжением представлены в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dfrac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)}\left(\varphi + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - \left(1 + \dfrac{\mu}{\rho}\right)\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dfrac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)}\left(\psi + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) - \left(1 + \dfrac{\mu}{\rho}\right)\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(N + \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

При решении задач динамики пластин в уточненной постановке удобно ввести в рассмотрение две потенциальные функции:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Delta\Theta,\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\Delta\chi,\ \text{здесь}\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{4}$$

Тогда система уравнений (3) перепишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}\Delta\Theta + \dfrac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)}(\Theta - w) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\Delta\chi + \dfrac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)}\chi = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(N + \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\right)\Delta w + \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\Delta\Theta = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Замечая, что второе уравнение системы решается независимо от связанных между собой первого и третьего, исключим его из рассмотрения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}\Delta\Theta + \dfrac{12\aleph E}{2\rho h^2(1+\nu)}(\Theta - w) = 0 \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(N + \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\right)\Delta w + \aleph\dfrac{E}{2\rho(1+\nu)}\Delta\Theta = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Для перехода к уравнению изгибных колебаний пластины с натяжением, необходимо из второго уравнения системы (6) выразить $\Delta\Theta$, подставить в первое уравнение, предварительно подействовав на него оператором Δ.

Тогда:

$$\frac{12\rho}{(\lambda+2\mu)h^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\left(\frac{2N\rho(1+\nu)}{\aleph E}+1\right)\Delta\Delta w+\frac{2\rho^2(1+\nu)}{(\lambda+2\mu)\aleph E}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4}-\frac{12N\rho}{(\lambda+2\mu)h^2}\Delta w-$$
$$-\left[\frac{2\rho(1+\nu)}{\aleph E}+\frac{2N\rho^2(1+\nu)}{(\lambda+2\mu)\aleph E}+\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\right]\frac{\partial^2\Delta w}{\partial t^2}=0 \quad (7)$$

Далее рассмотрим задачу о поперечных колебаниях двухслойной мембраны [6,7], которые описываются системой уравнений:

$$\begin{cases}\rho_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+R(u_1-u_2)=N_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+N_1\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\\ \rho_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+R(u_2-u_1)=N_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+N_2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\end{cases} \quad (8)$$

где $u_{1,2}$ – поперечные отклонения мембран, $\rho_{1,2}$ - погонные плотности, $N_{1,2}$ – натяжения мембран, R - сила упругого взаимодействия мембран.

Система (8) может быть сведена к одному уравнению относительно поперечного смещения u_1. Для этого достаточно выразить u_2 из первого уравнения и подставить во второе. В результате получим уравнение в виде:

$$(\rho_1+\rho_2)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\rho_1\rho_2}{R}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}-(N_1+N_2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{N_1N_2}{R}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)-$$
$$-\frac{N_1\rho_2+N_2\rho_1}{R}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial t^2}\right)=0 \quad (9)$$

где $u=u_1(x,t)$.

Заметим, что (9) совпадает с уравнением (7), возникшим при распространении теории Тимошенко для стержней на пластины. Таким образом, поперечные колебания двухслойной мембраны можно описать уравнением (7), параметры которого выражаются через параметры мембран следующим образом:

$$\begin{cases}\dfrac{12\rho}{(\lambda+2\mu)h^2}=\rho_1+\rho_2;\\ \dfrac{2\rho^2(1+\nu)}{(\lambda+2\mu)\aleph E}=\dfrac{\rho_1\rho_2}{R};\\ \dfrac{12N\rho}{(\lambda+2\mu)h^2}=N_1+N_2;\\ \dfrac{2N\rho(1+\nu)}{\aleph E}+1=\dfrac{N_1N_2}{R};\\ \dfrac{2\rho(1+\nu)}{\aleph E}+\dfrac{2N\rho^2(1+\nu)}{(\lambda+2\mu)\aleph E}+\dfrac{\rho}{\lambda+2\mu}=\dfrac{N_1\rho_2+N_2\rho_1}{R}\end{cases}$$

Перемещение u считаем изменяющимся по закону бегущей гармонической волны: $u(x,y,t) = Ae^{i\theta} + A^{*}e^{-i\theta}$, здесь $\omega t - k_x x - k_y y = \theta$ - фаза волны.

Уравнение в частных производных (9) сведем к бигармоническому уравнению:

$$\omega^4\rho_1\rho_2 - \omega^2(N_1\rho_2 + N_2\rho_1)(k_x^2 + k_y^2) + N_1N_2(k_x^2 + k_y^2)^2 - \omega^2 R(\rho_2 + \rho_1) + R(N_1 + N_2)(k_x^2 + k_y^2) = 0$$

Частота и волновые числа связаны соотношением:

$$\omega = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{(N_1\rho_2 + N_2\rho_1)(k_x^2 + k_y^2) + R(\rho_2 + \rho_1) \pm \sqrt{(N_1\rho_2 - N_2\rho_1)^2(k_x^2 + k_y^2)^2 + R^2(\rho_2 + \rho_1)^2 + 2R(k_x^2 + k_y^2)(N_1\rho_2 - N_2\rho_1)(\rho_2 - \rho_1)}}{\rho_1\rho_2}}$$

Качественный вид дисперсионных зависимостей $\omega(k_x, k_y)$ приведен на рис.1.

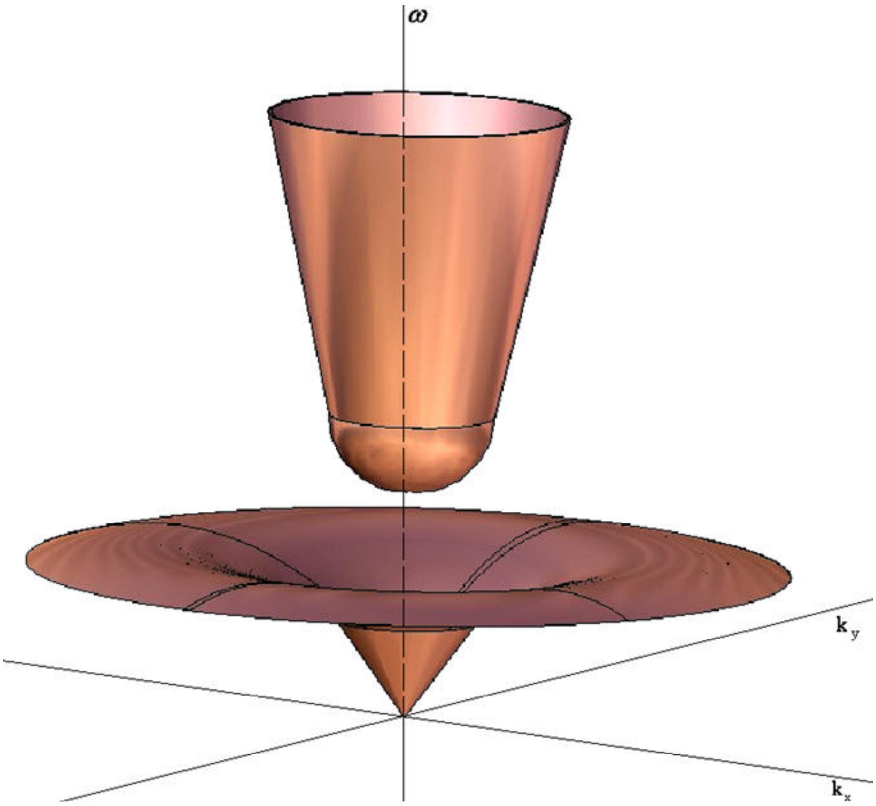

Рис. 1 Зависимость частоты волны от волновых чисел

Из рисунка 1 видно, что купол, выходящий из начала координат движется вперёд по оси ω, расплываясь в стороны по осям k_x, k_y. С ростом k_x, k_y парабола $\omega(k_x, k_y)$ растёт до определенного предела, постоянно расплываясь в стороны и двигаясь вперёд, приводя к крестообразной структуре.

В случае пересечения поверхности вращения плоскостью k_y, на дисперсионной плоскости (ω, k_x), где k_x - волновое число, существуют две дисперсионные ветви, одна из которых выходит из начала координат и приближается к горизонтальной асимптоте

$$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{R(\rho_2+\rho_1)+\sqrt{R^2(\rho_2+\rho_1)^2+2R\left(k_x^2+k_y^2\right)\left(T_1\rho_2-T_2\rho_1\right)(\rho_2-\rho_1)}}{\rho_1\rho_2}}.$$

Вторая ветвь выходит из точки $\omega=\sqrt{\frac{R(\rho_2+\rho_1)}{\rho_1\rho_2}}$ и с увеличением частоты приближается к наклонной асимптоте $\omega=\pm k_x$. Качественный вид дисперсионных зависимостей $\omega(k_x, k_y)$ приведен на рис.2.

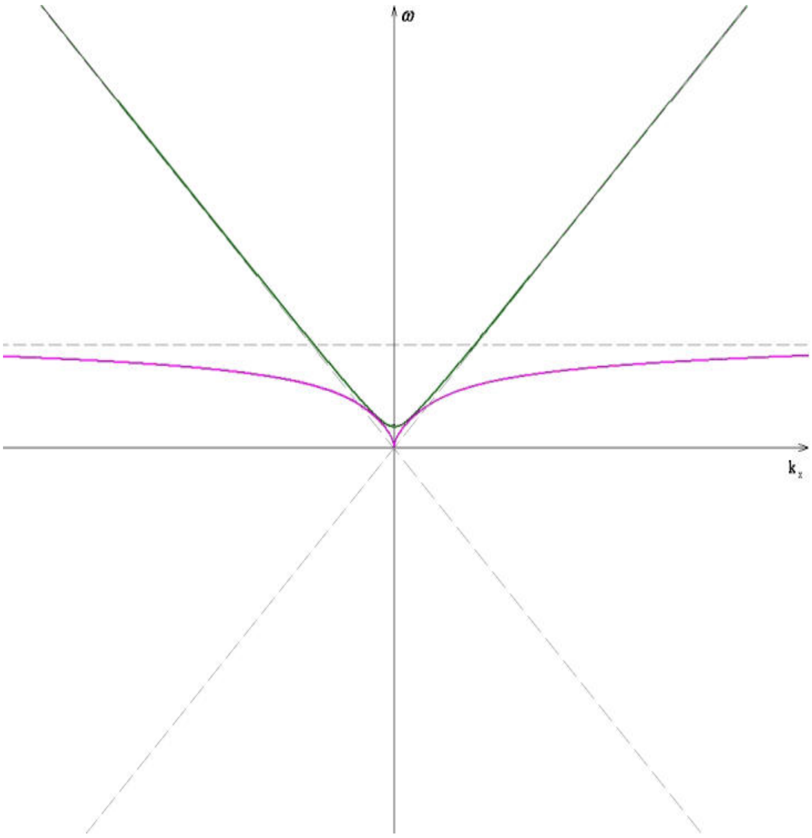

Рис. 2 Зависимость частоты от волнового числа при k_y=0

Таким образом, показано, что распространение теории Тимошенко для стержней на пластины может быть применимо для описания динамических процессов в двухслойной мембране.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований
(грант №16-38-00426)

Список литературы

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории стержней, пластин и оболочек. М.:ВИНИТИ, 1973. 272 с.
2. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979. 296 с.

3. Айнола Л.Я., Нигул У.К. Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек // Изв. АН Эст.ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук. 1965. Т. 14, № 1. С. 3-63.
4. Бердичевский В.А. К динамической теории тонких упругих пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 99-109.
5. Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах/ Ред. совет: К.В. Фролов (пред.). М.: Машиностроение. Т1: Колебания линейных систем. 2-е изд., испр. и доп./ Под ред. В.В.Болотина. 1999. 504с.
6. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 320 с.
7. Архипова Н.И., Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Сандалов В.М. Поперечные волны в двумерной слоистой конструкции // Прикладная механика и технологии машиностроения: сборник научных трудов / под ред. В.И. Ерофеева, В.Н. Перевезенцева и С.И.Смирнова. Нижний Новгород: Издательство общества „Интелсервис", 2014, № 1 (23). С.95-100.