УДК 532.12

ЗАДАЧА МОДЕЛИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СДАВЛИВАЕМОГО СЛОЯ ВЯЗКОГО ГАЗА С КРУГЛОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНОЙ

Бучной Н. В.[1], Кондратов Д. В.[2], Могилевич Л.И.[3]
[1]Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал РАНХиГС, Россия, Саратов, buchnoy@gmail.com
[2]Поволжский институт управления имени П.А. Столыпина – филиал РАНХиГС, Россия, Саратов, kondratovdv@yandex.ru
[2]Поволжский филиал Московского государственного университета путей сообщения (МИИТ), Россия, Саратов, mogilevichli@gmail.com

THE PROBLEM OF MODELING THE INTERACTION OF VISCOUS COMPRESSIBLE GAS LAYER WITH A CIRCULAR ELASTIC PLATE

Buchnoy N.V. [1], Kondratov D.V. [2], Mogilevich L.I. [3]
[1]Stolypin Volga Region Institute of Administration of Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Russia, Saratov, buchnoy@gmail.com
[2]Stolypin Volga Region Institute of Administration of Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (RANEPA), Russia, Saratov, kondratovdv@yandex.ru
[2]Volga Region Branch of Moscow State University of Railway Engineering (MIIT), Russia, Saratov, mogilevichli@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача моделирования течения вязкого сжимаемого газа в щелевом канале, состоящим из двух круглых пластин, одна из которых является упругой и удерживается жестким защемлением по краям, а вторая совершает гармонические колебания в вертикальной оси относительно первой и является абсолютно жесткой. Модель представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений в частных производных, описывающую динамику движения вязкого сжимаемого газа и упругого статора с соответствующими граничными условиями.

Ключевые слова: вязкий сжимаемый газ; щелевой канал; упругая пластина; тонкостенные конструкции; уравнение Навье-Стокса.

Abstract. This article is focused on the problem of modeling the flow of viscous compressible fluid in the slot channel. Slit channel consists of two circular plates. The first plate is elastic and is held rigidly clamped at the edges. The second plate oscillates in a vertical axis relative to the first. The second plate is absolutely rigid. The mathematical model of this system consists of differential equations in partial derivatives for describing dynamics of viscous compressible gas and an elastic stator together with boundary conditions.

Keywords: viscous compressible gas; slotted channel; the elastic plate; Thin-wall construction; Navier-Stokes equation.

На современном этапе развития машиностроения и производства агрегатов применение тонкостенных конструкций является одним из важнейших направлений, так как подобные конструкции позволяют существенно снижать массовые и габаритные характеристики изделий, без ущерба для жёсткости и прочности. Динамика системы в значительной степен зависит от геометрии стенок, соответственно, именно форма стенок определяет физические свойства и технические параметры реальных конструкций.

Большой интерес представляют конструкции с тонким щелевым каналом между стенками, заполненным вязким газом. Описанный случай распространен в технике, например, в газодинамических опорах, и предусматривает вынужденное движение газа в канале, возникающее под действием на систему внешних сил [1]. Стоит отметить, что стенки щелевого канала и вспомогательные конструкции в процессе работы могут испытывать значительные нагрузки со стороны газа. В связи с выше сказанным, представляют большой научный и практический интерес вопросы моделирование динамики взаимодействия вязкого газа со стенками щелевого канала, один из которых обладает упругой податливостью.

Ранее неоднократно рассматривались задачи гидроупругости жидкостных демпферов с упругими элементами. В них моделировалась динамика вязкой несжимаемой жидкости в щелевом канале, стенки которых могли быть ребристыми и трехслойными [2-5].

Разработка схем приборов и агрегатов, имеющих в своем составе упругие тонкостенные конструкции в виде пластин, взаимодействующие с окружающим слоем вязкого газа, предусматривает исследование динамики механической системы пластина-слой вязкого газа. Эта процедура фактически сводится к необходимости постановки и решения динамических задач моделирования поведения упругой пластины, взаимодействующей со слоем вязкого газа, находящегося в плоском щелевом канале, одной из вибрирующих стенок которого является рассматриваемая пластина.

Под воздействием вибрации упругая податливость стенки приводит к динамическому воздействию ее поверхности на окружающий слой вязкого газа, в котором, вследствие этого, возникают области пониженного и повышенного давления. Разность давлений формирует силовые течения газа в щелевом канале.

Следует отметить, что при воздействии пульсирующего давления на стенку, обладающую упругой податливостью, возникают колебания всего канала. Следовательно, на определенных частотах в рассматриваемой колебательной системе – пластина-слой вязкого газа возможен резонанс. Резонансные процессы губительно воздействуют на систему и способствуют ее преждевременному износу или разрушению, вследствие воздействия на тонкостенную конструкцию чрезмерных нагрузок.

При исследовании динамики механической системы – пластина-слой вязкого газа обратим внимание, что при работе на высоких частотах показатели вязкости сжимаемого газа будут в значительной степени определять демпфирующие свойства рабочего газового слоя. Вместе с этим, сильное демпфирование, обусловленное вязкостью газового слоя, способствует быстрому затуханию собственных колебаний системы.

Рассмотрим физическую модель механической системы (рис.1).

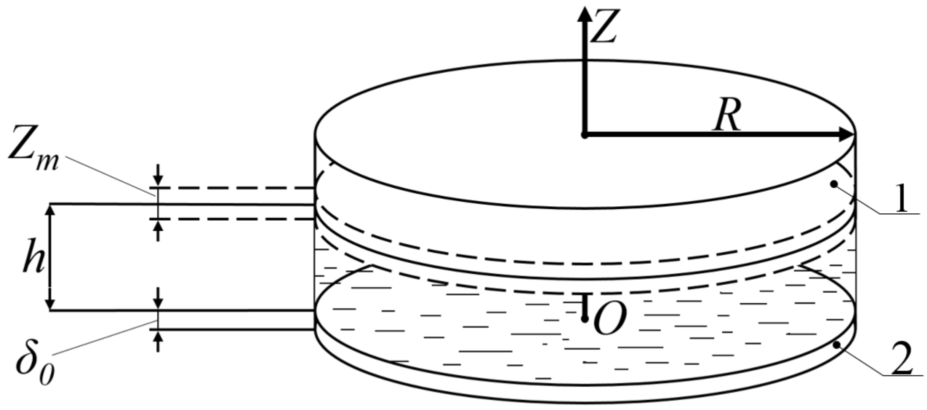

Рис. 1. Физическая модель

Физическая модель механической системы (Рис.1) состоит из абсолютно жесткой круглой пластины 1 и круглой пластины 2, представляющей собой упругую стенку щелевого канала. Пространство между пластинами 1 и 2 заполнено вязким сжимаемым газом. Пластина 1 совершает колебания в вертикальном направлении относительно пластины 2. Движение пластины 1 описываются гармоническим законом и имеет амплитуду z_m. Таким образом пластина 1 выступает в качестве вибратора и образует одну из стенок щелевого канала. Пластина 2 имеет жесткое защемление на краях и в данной системе выступает в качестве статора. Обе стенки щелевого канала, образуемые пластинами 1 и 2, имеют радиус R.Толщина слоя вязкого газа имеет ширину h. Будем считать газ изотермическим.

Динамика движения вязкого сжимаемого газа, находящегося между пластинами описывается уравнениями Навье-Стокса и уравнением неразрывности, которые в цилиндрических координатах имеют вид:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} + \\
+ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial y^2} - \frac{V_r}{r^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right); \\
\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial y} + \\
+ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{3}\nu\left(\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right); \\
\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + V_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + V_z \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где r, z - цилиндрические координаты; V_r - проекция вектора скорости на r; V_z - проекция вектора скорости z; t - время; p - давление; ρ - плотность; μ -

коэффициент динамической вязкости газа; λ - коэффициент объёмной вязкости газа; ν - кинетическая вязкость.

Уравнения динамики круглого упругого статора, которые запишутся в виде:

$$\frac{Eh_0^3}{12(1-\mu_0^2)}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\mu_0}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\mu_0\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)\right]\right\}+$$

$$+\rho_0 h_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) = (q_{zz}-q_{zr}\cdot\frac{\partial w}{\partial r})\Bigg|_{z=w+\frac{h_0}{2}} \tag{2}$$

где w - прогиб пластины, μ_0 - коэффициент Пуассона оболочки.

Выражения для напряжений q_{zr}, q_{zz}, действующих со стороны вязкого сжимаемого газа могут быть записаны как:

$$q_{zr}=\rho\nu\left(\frac{\partial V_z}{\partial r}+\frac{\partial V_r}{\partial z}\right),\ q_{zz}=-p+2\rho\nu\frac{\partial V_z}{\partial z}\ . \tag{3}$$

Краевые условия для уравнений динамики круглого статора представляют собой условия жесткого защемления, записываемые в виде:

$$w=\frac{\partial w}{\partial r}=0 \text{ при } r=R, \tag{4}$$

где R - радиус пластин.

Кроме того, ставится условие ограниченности при $r = 0$

$$r\frac{\partial w}{\partial r}=0 \text{ при } r=0\,. \tag{5}$$

Принимая во внимание, что абсолютно жесткий вибратор совершает гармонические колебания вдоль оси Oz закон его движения в веденной системе координат представим в следующем виде:

$$z=h(t)=h_0+z_m f\ (\omega t)\,. \tag{6}$$

Таким образом, получим математическую модель механической системы, состоящую из упругого статора, абсолютно жесткого вибратора и протекающего между ними слоя вязкого сжимаемого газа. Исследование указанной математической модели позволит выявить опасные режимы работы, при которых возникают резонансные явления.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-01-01604-а и гранта Президента РФ МД-6012.2016.8.

Литература

1. Башта Т. М. Гидропривод и гидропневматика. М : Машиностроение, 1972. 320 с.
2. Агеев Р.В., Быкова Т.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия подвижных стенок плоского канала со сдавливаемым слоем жидкости, находящимся между ними // Вестник Саратовского

государственного технического университета. 2009. Т. 4. № 1 (42). С. 7-13.
3. Ageev R.V., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A., Kondratov D.V. Mathematical model of pulsating viscous liquid layer movement in a flat channel with elastically fixed wall // Applied Mathematical Sciences. 2014. T. 8. № 157-160. С. 7899-7908.
4. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 3. С. 17-35.
5. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56-63.
6. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика: Общий курс. М. : Наука, 1964 . 816 с.
7. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М. : Наука, 1982. 568 с.