УДК 534.1:517.957

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ И ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КАЛОДЖЕРО-ДЕГАСПЕРИСА-ФОКАСА

Бочкарев А.В.[1], Землянухин А.И.[2]
[1]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, ab2009sar@list.ru
[2]Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, zemlyanukhinai@sstu.ru

CONTINUED FRACTIONS AND EXACT SOLUTION TO THE CALOGERO-DEGASPERIS-FOKAS EQUATION

Bochkarev A.V.[1], Zemlyanukhin A.I.[2]
[1]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, ab2009sar@list.ru
[2]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov, zemlyanukhinai@sstu.ru

Аннотация. Для нахождения точного уединенно-волнового решения уравнения Калоджеро-Дегаспериса-Фокаса используется прямой метод возмущений. Установлено, что непрерывная дробь, соответствующая ряду метода возмущений, обрывается и оставшаяся конечная дробь дает точное решение уравнения. Показано, что обрывание непрерывной дроби, построенной для степенного ряда, равносильно геометричности этого ряда. Предложен критерий, при выполнении которого непрерывная дробь вырождается в конечную дробь.

Ключевые слова: точные уединенно-волновые решения, метод возмущений, непрерывная дробь

Abstract. To find exact soliton-like solution of the Calogero-Degasperis-Fokas (CDF) equation the direct perturbation method is used. We found that the continued fraction corresponding to the perturbation series is cut off and the remaining finite fraction gives the exact solution of the CDF equation. It is shown that if continued fraction is cut off then the corresponding series is geometric. The criterion is proposed under which a continuous fraction is converted to a finite fraction.

Keywords: exact solitary-wave solutions, perturbation method, continued fraction

Уравнение Калоджеро-Дегаспериса-Фокаса (КДФ) относится к интегрируемым эволюционным уравнениям 3-го порядка и имеет вид [1]

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{4}\frac{u_x u_{xx}}{u} + \frac{3}{8}\frac{u_x^3}{u^2} + \frac{3}{8}\frac{u_x\left(\alpha u^2 + \beta\right)^2}{u^2} = 0, \qquad (1)$$

где α и β – произвольные постоянные.

В соответствии с прямым методом возмущений [2], будем искать решение уравнения (1) в окрестности произвольной постоянной E в форме функционального ряда по степеням формального параметра ε:

$$u = E + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x,t). \tag{2}$$

Умножая (1) почленно на u^2, подставим (2) в (1) и сгруппируем слагаемые по степеням ε. Получим систему уравнений для определения функций $u_n(x,t)$:

$$\begin{aligned}
&E^2 u_{1t} + \frac{3}{8}\left(E^2\alpha + \beta\right)^2 u_{1x} + \frac{1}{4}E^2 u_{1xxx} = 0,\\
&E^2 u_{2t} + \frac{3}{8}\left(E^2\alpha + \beta\right)^2 u_{2x} + \frac{1}{4}E^2 u_{2xxx} = \frac{3}{4}E u_{1x}u_{1xx} - \frac{3}{2}\alpha E\left(E^2\alpha+\beta\right)u_1 u_{1x} -\\
&-\frac{1}{2}E u_1 u_{1xxx} - 2E u_1 u_{1t},\\
&E^2 u_{3t} + \frac{3}{8}\left(E^2\alpha + \beta\right)^2 u_{3x} + \frac{1}{4}E^2 u_{3xxx} = -\frac{1}{2}E u_1 u_{2xxx} - \frac{1}{4}\left(2Eu_2 + u_1^2\right)u_{1xxx} -\\
&-\frac{3}{8}\left(4E^2\alpha^2 u_1^2 + 2\alpha\left(2Eu_2 + u_1^2\right)\right)\left(E^2\alpha+\beta\right)u_{1x} - \frac{3}{2}\alpha E\left(E^2\alpha+\beta\right)u_1 u_{2x} -\\
&-2Eu_1u_{2t} - \left(2Eu_2 + u_1^2\right)u_{1t} - \frac{3}{8}u_{1x}^3 + \frac{3}{4}Eu_{1x}u_{2xx} + \frac{3}{4}\left(Eu_{2x} + u_1u_{1x}\right)u_{1xx},\ \ldots
\end{aligned} \tag{3}$$

В частном решении $u_1 = \exp(kx - \omega t)$ первого уравнения системы (3) постоянные k и ω связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = \frac{k\left(3E^4\alpha^2 + 6E^2\alpha\beta + 2E^2k^2 + 3\beta^2\right)}{8E^2}. \tag{4}$$

Последовательно разрешая остальные уравнения системы (3), найдем функции u_2, u_3, …. Обозначая $z = \varepsilon u_1$, придадим ряду в правой части (2) форму степенного ряда:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n u_n = z - \frac{E^4\alpha^2 - E^2k^2 - \beta^2}{2E^3k^2}z^2 +\\
&+\frac{3E^8\alpha^4 - 10E^6\alpha^2k^2 - 6E^4\alpha^2\beta^2 + 3E^4k^4 + 6E^2\beta^2k^2 + 3\beta^4}{16E^6k^4}z^3 -\\
&-\frac{\left(E^4\alpha^2 - E^2k^2 - \beta^2\right)\left(E^4\alpha^2 - 2E^3\alpha k - E^2k^2 - \beta^2\right)\left(E^4\alpha^2 + 2E^3\alpha k - E^2k^2 - \beta^2\right)}{16E^9k^6}z^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{5}$$

Степенному ряду, содержащему все натуральные степени переменной z

$$z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{6}$$

можно поставить в соответствие правильную непрерывную C-дробь [3]

$$\cfrac{z}{1 + \cfrac{b_2 z}{1 + \cfrac{b_3 z}{1 + \cfrac{b_4 z}{1 + \ldots}}}}, \tag{7}$$

коэффициенты b_n которой определяются через коэффициенты (6) по формулам

$$
\begin{aligned}
&b_2 = -a_2,\\
&b_3 = \frac{a_2^2 - a_3}{a_2},\\
&b_4 = \frac{a_2 a_4 - a_3^2}{a_2\left(a_2^2 - a_3\right)},\\
&b_5 = -\frac{\left(a_2^2 a_5 - 2a_2 a_3 a_4 + a_3^3 - a_3 a_5 + a_4^2\right)}{\left(a_2^2 - a_3\right)\left(a_2 a_4 - a_3^2\right)},\ldots
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Первые n уровней дроби (7) образуют ее n-ю подходящую дробь $\frac{P_n}{Q_n}$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{P_1}{Q_1} = z,\\
&\frac{P_2}{Q_2} = \frac{z}{1 + b_2 z},\\
&\frac{P_3}{Q_3} = \frac{z}{1 + \dfrac{b_2 z}{1 + b_3 z}} = \frac{z + b_3 z^2}{1 + \left(b_2 + b_3\right) z},\\
&\frac{P_4}{Q_4} = \frac{z}{1 + \dfrac{b_2 z}{1 + \dfrac{b_3 z}{1 + b_4 z}}} = \frac{z + \left(b_3 + b_4\right) z^2}{1 + \left(b_2 + b_3 + b_4\right) z + \left(b_2 b_4\right) z^2},\ldots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Равенства (8) можно получить, приравнивая подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ соответствующим частичным суммам ряда (6).

Для разности двух соседних подходящих дробей справедливо равенство [4]

$$
\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{(-1)^n b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n+1}}{Q_{n+1} Q_n} z^{n+1}
\tag{10}
$$

Из соотношения (10) видно, что непрерывная дробь обрывается и становится конечной n-й подходящей дробью, если $\forall n \geq N$ выполняется

$$
b_2 b_3 \cdot \ldots \cdot b_{n+1} = 0.
\tag{11}
$$

Вычисляя значения b_i для ряда метода возмущений (5) по формулам (8), запишем последовательность произведений (11):

$$b_2 = \frac{E^4\alpha^2 - E^2k^2 - \beta^2}{2E^3k^2},$$

$$b_2b_3 = -\frac{\left(E^4\alpha^2 - 2E^2\alpha\beta + E^2k^2 + \beta^2\right)\left(E^4\alpha^2 + 2E^2\alpha\beta + E^2k^2 + \beta^2\right)}{16E^6k^4},$$

$$b_2b_3b_4 = -\frac{\left(E^4\alpha^2 - 2E^2\alpha\beta + E^2k^2 + \beta^2\right)^2\left(E^4\alpha^2 + 2E^2\alpha\beta + E^2k^2 + \beta^2\right)^2}{128E^9k^6\left(E^4\alpha^2 - E^2k^2 - \beta^2\right)}, \quad (12)$$

$$b_2b_3b_4b_5 = 0,$$

$$b_2b_3b_4b_5b_6 = 0, \ldots$$

Таким образом, начиная с $n = 4$ все n-подходящие дроби совпадают между собой. Следовательно, непрерывная дробь, соответствующая ряду (5), вырождается в подходящую дробь 4-го порядка

$$\frac{P_4}{Q_4} = \cfrac{z}{1 + \cfrac{b_2z}{1 + \cfrac{b_3z}{1 + b_4z}}} = \frac{z + (b_3 + b_4)z^2}{1 + (b_2 + b_3 + b_4)z + (b_2b_4)z^2} =$$

$$= \frac{16k^4E^6z}{\left(\left(E^2\alpha - \beta\right)^2 + E^2k^2\right)\left(\left(E^2\alpha + \beta\right)^2 + E^2k^2\right)z^2 + 8E^3k^2\left(E^4\alpha^2 - \beta^2 - E^2k^2\right)z + 16E^6k^4} = \quad (13)$$

$$= \frac{z}{1 + \frac{1}{2k^2E^3}\left(E^4\alpha^2 - \beta^2 - E^2k^2\right)z + \frac{1}{16k^4E^6}\left(\left(E^2\alpha - \beta\right)^2 + E^2k^2\right)\left(\left(E^2\alpha + \beta\right)^2 + E^2k^2\right)z^2}.$$

Рассматривая конечное выражение (13) как сумму геометрической прогрессии с первым членом z и знаменателем

$$-\left(\frac{1}{2k^2E^3}\left(E^4\alpha^2 - \beta^2 - E^2k^2\right)z + \frac{1}{16k^4E^6}\left(\left(E^2\alpha - \beta\right)^2 + E^2k^2\right)\left(\left(E^2\alpha + \beta\right)^2 + E^2k^2\right)z^2\right),$$

получаем для самой прогрессии ряд (5) метода возмущений для уравнения КДФ. Другими словами, (13) есть точная сумма геометрического ряда (5).

С учетом (4) для переменной z получаем

$$z = \varepsilon u_1 = \varepsilon \exp(kx - \omega t) = \varepsilon \exp\left(kx - \left(\frac{k\left(3E^4\alpha^2 + 6E^2\alpha\beta + 2E^2k^2 + 3\beta^2\right)}{8E^2}\right)t\right). \quad (14)$$

Таким образом, точное решение уравнения КДФ согласно (2) имеет вид

$$u = E +$$

$$+ \frac{z}{1 + \frac{1}{2k^2E^3}\left(E^4\alpha^2 - \beta^2 - E^2k^2\right)z + \frac{1}{16k^4E^6}\left(\left(E^2\alpha - \beta\right)^2 + E^2k^2\right)\left(\left(E^2\alpha + \beta\right)^2 + E^2k^2\right)z^2},$$

где z определяется равенством (14). Заметим, что это решение имеет вид несимметричного бегущего импульса и содержит произвольные параметры E, k, ε.

В данной статье на примере интегрируемого уравнения КДФ показано, что непрерывная дробь, соответствующая ряду метода возмущений, обрывается таким образом, что оставшаяся подходящая дробь представляет собой точное решение исходного уравнения. Этот результат равносилен геометричности ряда метода возмущений. Специфика применения метода возмущений в данном случае состоит в том, что формальный параметр ε может быть произвольным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00176-а).

Список литературы

1. Гандариас М.Л., Саез С. Решения вида бегущей волны для уравнения Калоджеро–Дегаспериса–Фокаса в размерности (2 + 1). ТМФ. 2005. т. 144. №1. С. 44-55.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
3. Джоунс У. Трон В. Непрерывные дроби. М.: Мир, 1985. 414 с.
4. Хованский А.Н. Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. М.: ГИТТЛ, 1956. 204 с.