

УДК 519.24

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ СИСТЕМ СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Олейникова С.А.¹

¹Центрально-Черноземный государственный инженерный университет, Россия,
Воронеж, s.a.oleynikova@gmail.com

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF FUNCTIONING OF COMPLEX SERVICE SYSTEMS WITH STOCHASTIC PARAMETERETS

Oleynikova S.A.¹

¹Central Chernozem State Engineering University, Russia, Voronezh,
s.a.oleynikova@gmail.com

Аннотация. Исследована специфика функционирования сложных обслуживающих систем со стохастическими параметрами и обоснована необходимость экспериментального анализа вероятностно-временных характеристик таких систем. Для решения данной задачи разработана система имитационного моделирования и представлены результаты ее работы.

Ключевые слова: обслуживающая система, стохастические параметры, экспериментальный анализ, система имитационного моделирования, длительность обслуживания

Abstract. In the article the specifics of the functioning of complex service systems with stochastic parameters are investigated and the necessity of experimental analysis of probabilistic and temporal characteristics of such systems is substantiated. To solve this problem the simulation system is developed and the results of its work are presents.

Keywords: service system, stochastic parameters, experimental analysis, simulation system, duration of service

Введение

Рассматривается функционирование системы, отличительными особенностями которой являются взаимная зависимость между отдельными работами, которые необходимо выполнить для обслуживания поступающих заявок, и произвольное время их обслуживания. Для эффективного управления работой таких систем и минимизации погрешностей при составлении расписаний необходимо наличие точных оценок случайных величин, описывающих как длительность выполнения отдельных работ, так и время обслуживания всей заявки в целом. В настоящее время существует ряд методов, позволяющих решать данную задачу. В частности, наиболее распространенным является метод PERT [1, 2]. Однако, симметричность нормального закона распределения, лежащего в основе PERT при оценке длительности обслуживания заявки, ненулевая вероятность принятия отрицательных значений (в качестве которых в данном случае будет выступать время) и ряд других причин обусловили необходимость проведения детального анализа

функционирования исследуемых систем в различных условиях для оценки погрешности аппроксимации длительности обслуживания нормальным законом и, при необходимости, - разработки более точной аппроксимации. Для этого была разработана система имитационного моделирования, ориентированная на использование именно в данной области. В результате с помощью данной системы был проведен экспериментальный анализ, на основании которого была выдвинута, а затем обоснована гипотеза о более точной аппроксимации длительности обслуживания.

1. Особенности экспериментального анализа для сложных многостадийных систем со стохастическими параметрами

Многостадийные обслуживающие системы со стохастическими параметрами обладают целым рядом особенностей, которые необходимо учесть для оптимизации их функционирования. В первую очередь к ним следует отнести случайный характер времени обслуживания. Точная оценка этой характеристики крайне важна при формировании план-графика работ, а также диспетчерском и оперативном управлении. В этом случае можно сформировать такой график обслуживания заявок, при котором фактическое время выполнения всех работ будет максимально приближено к плановому и, как следствие, обеспечить минимизацию погрешностей при планировании. Наличие взаимной зависимости между последовательно выполняемыми работами существенно осложняет процесс составления расписания, поскольку погрешности, связанные с вероятностным характером времени обслуживания, будут накапливаться с увеличением числа работ. Эти и другие особенности исследуемых систем (такие как необходимость использования сразу нескольких видов ресурсов при выполнении работы, наличие нескольких центров обслуживания и т.д.) обуславливают целесообразность постановки и проведения экспериментов для анализа результатов функционирования многостадийных обслуживающих систем в различных условиях. В частности, одной из главных целей экспериментального анализа будет являться исследование случайной величины η , описывающей длительность обслуживания заявки. Это обусловлено тем, что существующие методы (в частности, метод PERT, который является наиболее распространенным подходом для описания исследуемой случайной величины) предлагают оценить распределение η нормальным законом. Действительно, если время выполнения всех работ считать одинаково распределенными, а количество работ, определяющих η , достаточно большим, то для случайной величины η будет действовать центральная предельная теорема, которая обеспечит сходимость к нормальному закону [3]. Однако, у нормального закона есть целый ряд недостатков применительно к использованию в данной задаче.

1. Плотность нормального закона распределения неотрицательна на всей области своего определения. Это значит, существует ненулевая вероятность того, что длительность обслуживания будет отрицательной.

2. Плотность распределения нормального закона симметрична относительно своего математического ожидания. Однако, симметричность распределения длительности обслуживания для конкретных практических

задач будет напрямую зависеть от степени симметричности отдельных работ, время выполнения которых и будут определять эту величину.

3. На практике условия центральной предельной теоремы, как правило, не выполняются.

В связи с этим, необходимость в экспериментальном анализе поведении случайной величины η не вызывает сомнений.

В качестве исходных данных для проведения эксперимента будет выступать сетевой график всех работ, которые необходимо выполнить для обслуживания заявки (с заданными характеристиками таких работ). На выходе требуется получить вероятностно-временные характеристики случайной величины η :

- математическое ожидание, дисперсию, асимметрию и эксцесс;
- гистограмму;
- результаты проверки гипотез о законе распределения.

При проведении опытов будут исследоваться следующие особенности η :

- степень симметричности распределения в различных условиях;
- степень близости числовых характеристик соответствующим характеристикам нормального закона;
- результаты проверки гипотез о нормальном законе распределения.

Поскольку процесс обслуживания заявки представляет собой комплекс взаимно-зависимых работ, то при экспериментальном анализе будем исследовать влияние следующих факторов на степень точности оценок длительности обслуживания:

- количества работ, стоящих на критическом пути;
- размаха распределения случайных величин, описывающих отдельные работы;
- симметричности распределения случайных величин, описывающих отдельные работы.

2. Система имитационного моделирования для проведения эксперимента

Для экспериментального анализа многостадийных обслуживающих систем со стохастическими параметрами было разработано приложение, позволяющее моделировать процесс их функционирования и получить на выходе необходимую статистику. В настоящее время существует большое количество систем имитационного моделирования, однако они не ориентированы на решение данной задачи [4-7]. Кроме того, целесообразно сочетание системы имитационного моделирования с приложением, предназначенным для автоматизации процесса планирования исследуемых систем и нахождения оценок всех стохастических характеристик. Это обуславливает разработку собственной такой системы. Ее принципиальным отличием от существующих аналогов является ориентация на моделирование обслуживания взаимно-зависимых работ, возможность использования результатов системы планирования, импорт данных из базы данных, а также экспорт данных в базу или Excel. В [8] сформулированы требования, предъявляемые при разработке данной системы, а также основные принципы,

на основании которых она проектировалась. Там же предложены UML-диаграммы типа use-case и детализированы основные действия. Исходя из этого, в [9] была разработана структура предлагаемой системы, определены действия всех подсистем. В общем виде она имеет вид, представленный на рис.1.

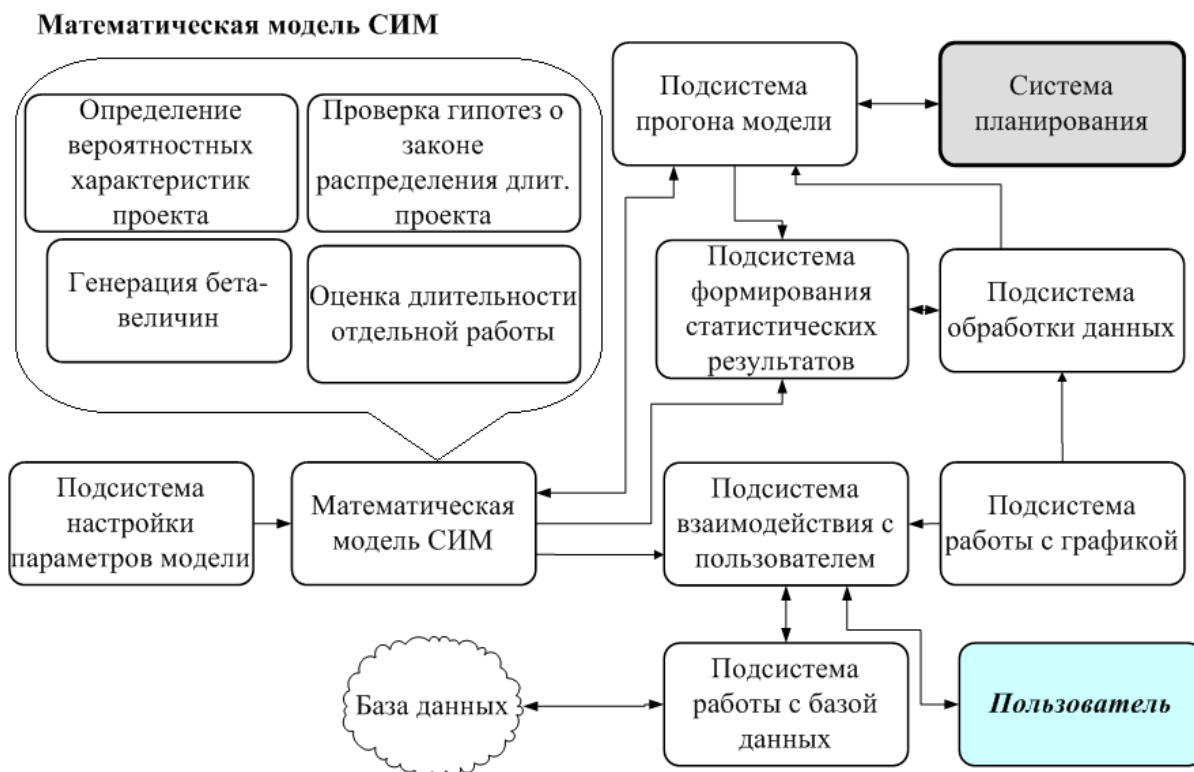


Рис. 1 Структура системы имитационного моделирования

В результате было разработано приложение, главное окно которого представлено на рис. 2.

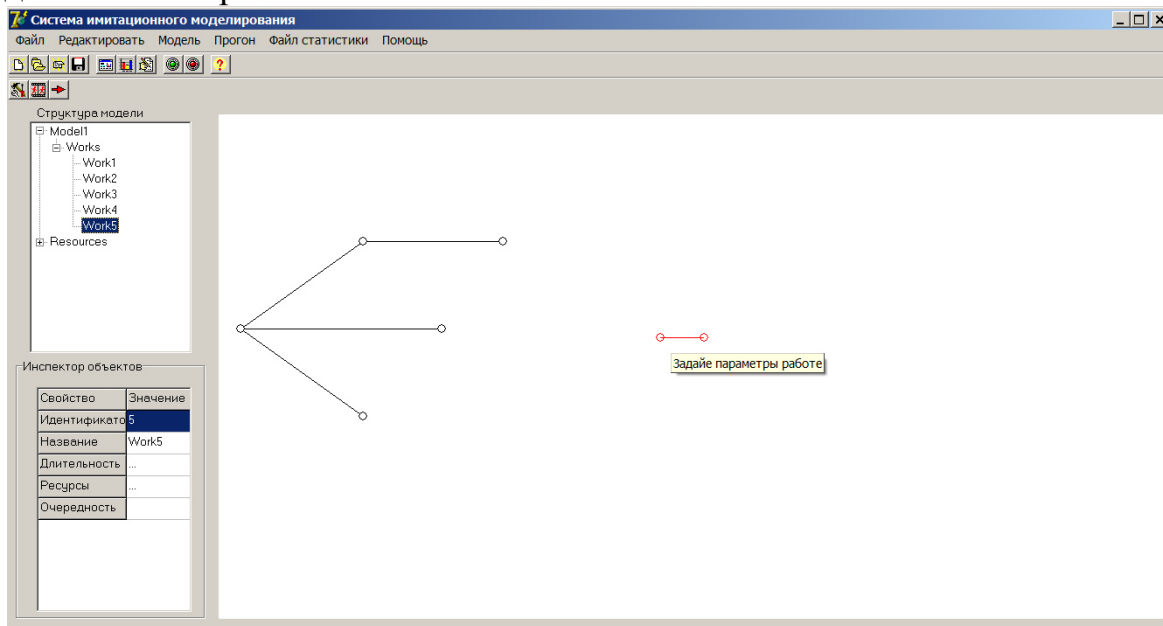


Рис.2. Главное окно приложения

Как видно из данного рисунка, основное окно состоит из меню, панели инструментов, которая дублирует наиболее часто используемые команды меню,

основного холста для прорисовки графа проекта, дерева объектов и инспектора объектов. При добавлении на холст работы она отображается красным цветом, добавляется в дерево объектов, для нее отображается инспектор объектов, и пользователю высвечивается подсказка с напоминанием о необходимости задать параметры работы в инспекторе. Часть свойств (такие, как наименование) можно ввести непосредственно в представленной таблице. При нажатии на область напротив других свойств открываются специальные диалоговые окна, позволяющие ввести соответствующие параметры.

После прогона модели становится доступным многостраничный блокнот, внешний вид которого представлен на рис. 3.

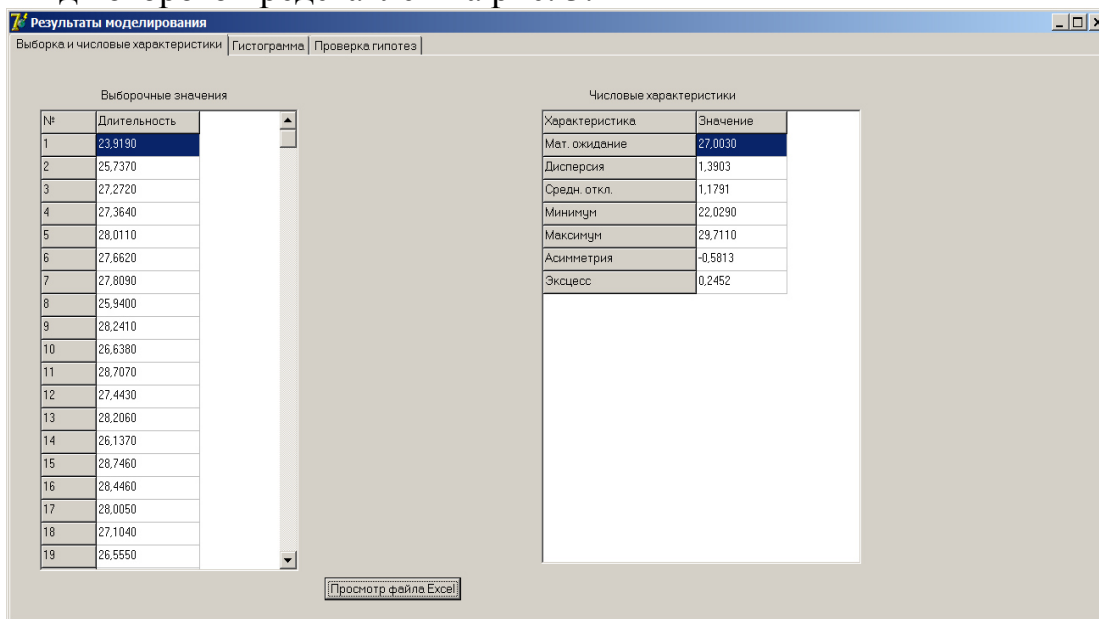


Рис.3. Результаты моделирования

Первая страница блокнота содержит выборку, каждый элемент которой представляет собой случайную величину, описывающую длительность обслуживания заявки, а также рассчитанные числовые характеристики этой выборки. На второй странице представлена гистограмма, а на третьей – результаты проверки гипотезы о законах распределения с помощью критериев критериями χ^2 - Пирсона, Колмогорова-Смирнова с поправкой Лиллиефорса, а также модификацией критерия Шапиро для выборок большого объема.

3. Результаты экспериментального анализа

Будем исследовать поведение случайной величины η в следующих условиях:

- последовательно увеличивая количество работ, стоящих на критическом пути (с увеличением числа слагаемых погрешности аппроксимации нормальным распределением должны уменьшаться);
- последовательно увеличивая асимметрию случайных величин, описывающих отдельные работы (в первую очередь, это касается работ, стоящих на критическом пути);
- последовательно увеличивая размах случайных величин (как и в предыдущем случае, в первую очередь, это касается работ, стоящих на

критическом пути).

Без ограничения общности, количество прогонов модели выберем равное 10000. Экспериментальные исследования в данных условиях позволили получить следующие выводы относительно поведения исследуемой случайной величины.

1. В случае симметричности случайных величин, описывающих работы, которые необходимо выполнить для обслуживания заявки (в первую очередь, работы, стоящие на критическом пути) итоговое распределение близко к симметричному. Выборочные числовые характеристики близки к соответствующим значениям для нормальной случайной величины уже при небольшом количестве слагаемых. Проверка гипотез на нормальность выборки критериями χ^2 - Пирсона, Колмогорова-Смирнова с поправкой Лиллиефорса, а также модификацией критерия Шапиро для выборок большого объема дают разные результаты. Однако, с увеличением количества слагаемых показатели соответствующих экспериментальных значений приближаются к значениям, позволяющим сделать вывод о нормальном распределении η .

2. Если описанные выше случайные величины асимметричны, то итоговый закон будет, как правило, также асимметричным. Исключение составляет лишь случай, когда знак асимметрии у отдельных слагаемых разный и итоговая асимметрия близка к нулю. В остальных случаях гистограмма, числовые характеристики и критерии свидетельствуют о нецелесообразности использования нормального закона в качестве аппроксимации. В частности, гистограмма закона распределения исследуемой случайной величины в случае пяти одинаково асимметричных работ, стоящих на критическом пути, приведена на рис. 4.

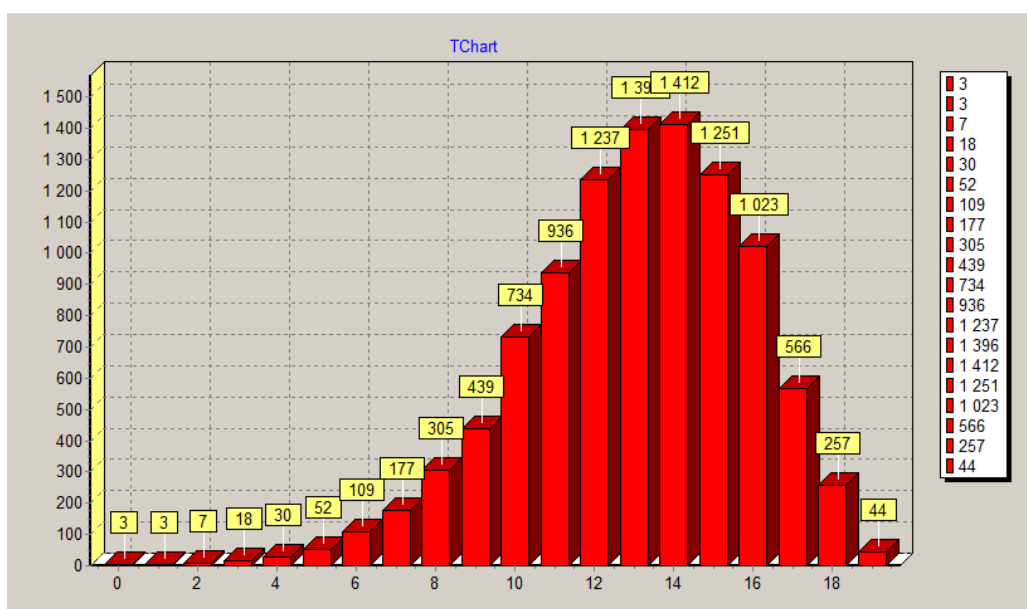


Рис. 4. Гистограмма в случае пяти одинаково асимметричных работ

3. Если случайные величины, описывающие длительность работ, стоящих на критическом пути, одинаково распределены, то сходимость к нормальному закону распределения при увеличении числа таких величин

происходит быстрее. Если хотя бы у одной величины меняется размах, это приводит к увеличению погрешности нормальным законом распределения. Если размах у каждой случайной величины индивидуален, то итоговая величина будет плохо аппроксимироваться нормальным законом.

4. Последовательное увеличение количества работ, стоящих на критическом пути, уменьшает погрешность аппроксимации нормальным законом распределения при любых условиях. Однако, степень данной погрешности будет зависеть от вышеперечисленных факторов.

Сформулируем общий вывод, полученный по результатам серии экспериментов, проведенных с помощью разработанного программного продукта. Лишь в единичных случаях итоговая случайная величина, описывающая длительность обслуживания всей заявки, может быть с приемлемой погрешностью аппроксимирована нормальным законом распределения. Таким образом, возникает необходимость в подборе более качественной аппроксимации для исследуемой случайной величины.

Анализ экспериментальных результатов позволил выдвинуть гипотезу о возможности использования для этого бета распределения. В работе [10] были получены параметры p и q гипотетического бета-распределения длительности обслуживания:

$$p = \frac{(b - M\eta) \cdot (M\eta - a)^2 - D\eta \cdot (M\mu - a)}{D\eta \cdot (b - a)} \quad (1)$$

и

$$q = \frac{(b - M\eta)^2 \cdot (M\eta - a) - D\eta \cdot (M\mu - a)}{D\eta \cdot (b - a)} \quad (2)$$

Здесь $M\eta$ и $D\eta$ - математическое ожидание и дисперсия случайной величины η ; a и b – наименьшее и наибольшее ее возможные значения.

Сравним погрешности, возникающие при аппроксимации случайной величины η нормальным и бета распределениями. Будем последовательно увеличивать число работ, стоящих на критическом пути, и сравнивать соответствующие погрешности. Динамика изменения погрешностей нормальной и бета аппроксимациями при увеличении числа слагаемых представлена на рис. 5.

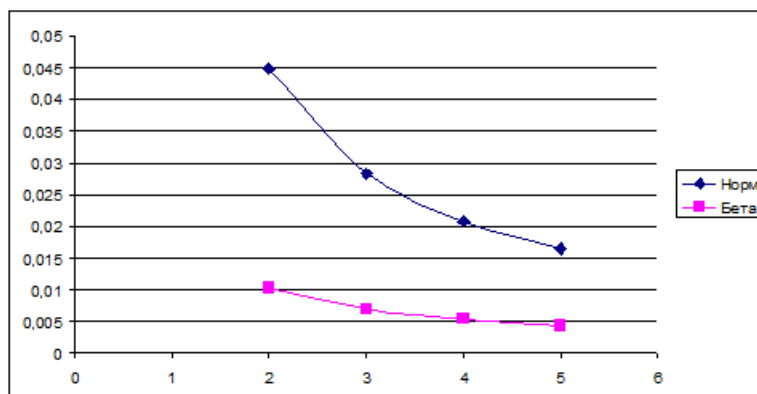


Рис. 5. Динамика изменения погрешностей от количества случайных величин

Здесь по оси абсцисс отложено число случайных величин, по оси ординат – погрешность; «норм» - погрешность, возникающая при аппроксимации длительности обслуживания нормальным законом распределения; «бета» - аналогичная погрешность при аппроксимации распределением бета.

Как видно из данного рисунка, в случае аппроксимации суммы симметричных случайных величин нормальным законом распределения погрешность уменьшается быстрее, однако, погрешность аппроксимации бета-распределения изначально в 4,5 раза меньше. Следовательно, в момент времени, когда значения двух аппроксимаций совпадут, их модули будут настолько незначительны, что в тот момент не будет иметь значения, каким законом аппроксимировать исследуемую случайную величину. Исходя из этого, можно сделать вывод о том, что с точки зрения количества слагаемых бета-распределение будет предпочтительнее нормального закона.

На рис. 6 представлена динамика увеличения погрешности аппроксимации итоговой случайной величины нормальным законом и законом бета в зависимости от увеличения асимметрии каждого слагаемого.

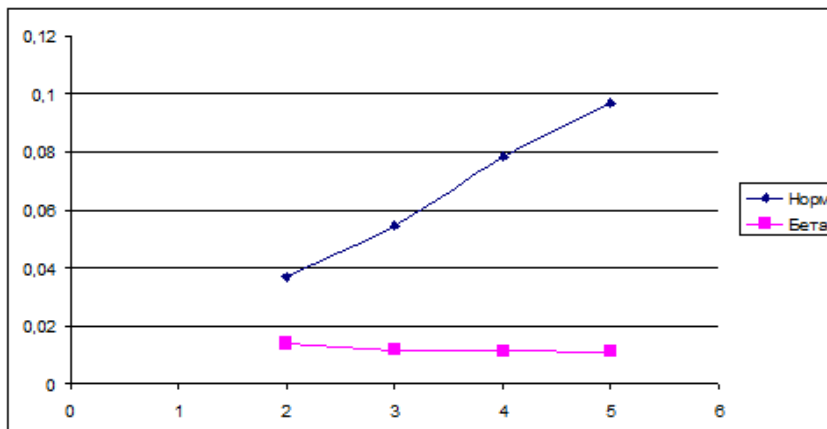


Рис. 6. Изменение погрешностей аппроксимаций при увеличении асимметрии величин

Как видно из данного рисунка, погрешность аппроксимации нормальным законом распределения линейно возрастает при увеличении асимметрии, погрешность законом бета незначительно уменьшается.

Таким образом, можно сделать вывод, что с точки зрения асимметрии бета – распределение является лучшей аппроксимацией суммы бета-величин, чем нормальный закон распределения.

Рассмотрим, как влияет величина интервала на итоговую погрешность. Без ограничения общности, рассмотрим критический путь, состоящий из четырех работ. Зафиксируем соответствующие 3 случайные величины, стоящие на критическом пути, и будем последовательно увеличивать интервал изменения четвертой. Изменение погрешностей аппроксимаций представлено на рис. 7.

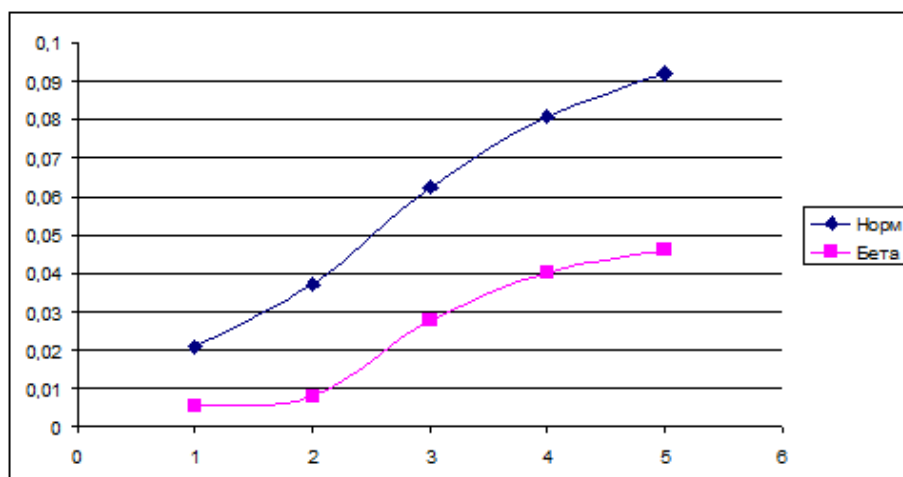


Рис. 7. Изменение погрешностей при изменении интервалов распределения случайных величин

Как видно из данных графиков, обе аппроксимации чувствительны к случаям, когда разные бета-величины распределены на разных интервалах. Однако, увеличение погрешности нормального распределения происходит быстрее. Кроме того, сама погрешность нормального закона изначально больше погрешности бета-распределения. В связи с этим, и для данного случая бета-распределение является наилучшей аппроксимацией плотности распределения суммы бета-величин.

Приведем усредненную погрешность на основании серии проведенных экспериментов.

Таблица

Средние значения погрешностей аппроксимации искомого закона распределения нормальным законом и законом бета

Количество случайных величин	Средняя погрешность нормального закона	Средняя погрешность закона бета
2	0,1273	0,0401
3	0,090859	0,037323
4	0,077876	0,036004
5	0,0492	0,014428

Таким образом, на основании экспериментального анализа можно сделать вывод о целесообразности применения закона бета в качестве аппроксимации длительности обслуживания в любых условиях.

Выводы

1. Исследование специфики функционирования многостадийных обслуживающих комплексов со стохастическими параметрами позволило определить основные особенности для экспериментального анализа таких систем.

2. Анализ применимости существующих систем имитационного

моделирования для экспериментального анализа обусловил необходимость разработки собственного приложения.

3. Экспериментально была показана недопустимая погрешность аппроксимации длительности обслуживания нормальным законом распределения в большинстве случаев; были выявлены случаи, являющиеся исключением (когда данная погрешность являлась приемлемой).

4. На основании серии проведенных экспериментов была обоснована гипотеза о целесообразности использования распределения бета в качестве аппроксимации длительности обслуживания заявки.

Литература

1. Ахьюджа Х. Сетевые методы управления в проектировании и производстве. Пер. с англ. /Под. ред. В. Н. Калашникова. М.: Наука, 1979. – 640 с.
2. Голенко Д.И. Статистические методы сетевого планирования и управления. М.: Наука, 1968. – 400с.
3. Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. - 6-е изд. стер. - М.: Высш. шк., 1999.— 576 с.
4. Сирота А.А. Компьютерное моделирование сложных систем/ А.А. Сирота; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2006. – 248с.
5. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем – М.: Высшая школа, 2001. – 275с.
6. Баженов Р.И., Лопатин Д.К. Об имитационном моделировании экономических процессов средствами специализированной программной среды // Молодой ученый. 2014. № 4. С. 88-92.
7. Титоренко М.В., Баженов Р.И. Об имитационном моделировании систем массового обслуживания в среде GPSS // Nauka-Rastudent.ru. 2014. № 11 (11). С. 38.
8. Олейникова С. А. Особенности системы имитационного моделирования для задач управления проектами со случайной длительностью выполнения работ // Кибернетика и программирование, 2015. № 2. С.68-77. DOI: 10.7256/2306-4196.2015.2.14509.
9. Олейникова С. А. Структура программного комплекса для реализации одной системы имитационного моделирования // Международна научна школа «Парадигма». Т.2: Информационни технологии: сборник научни стати. – Варна: ЦНИИ «Парадигма». 2015. С.177-184.
10. Олейникова С. А. Вычислительный эксперимент для анализа закона распределения случайной величины, описывающей длительность проекта в задачах сетевого планирования и управления // Экономика и менеджмент систем управления. – 2013. - № 3(9). – С. 91-97.