

УДК 539.3

ЦИКЛИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ ЛОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКОЙ

Старовойтов Э.И.¹, Леоненко Д.В.², Плескачевский Ю.М.³

¹Белорусский государственный университет транспорта,
Беларусь, Гомель, edstar0@yandex.by

²Белорусский государственный университет транспорта,
Беларусь, Гомель, leoden@tut.by

³НАН Беларуси, Минск, pleskym@mail.ru

THE CICLIC DEFORMATION OF THE THREE-LAYER ROD BY LOCAL SURFACE LOAD

Starovoitov E.I.¹, Leonenko D.V.², Pleskatshevsky Yu.M.³

¹Belarusian State University of Transport, Belarus, Gomel, edstar0@yandex.by

²Belarusian State University of Transport, Belarus, Gomel, leoden@tut.by

³NAS of Belarus, Minsk, pleskym@mail.ru

Аннотация. В рамках теории малых упругопластических деформаций рассмотрен один класс простых переменных локальных нагружений трехслойных стержней прямоугольного поперечного сечения с упругопластическими несущими слоями и физически нелинейно-упругим наполнителем, для которого указана возможность построения решения краевой задачи при повторном и циклическом нагружении, если известно решение при нагружении из естественного состояния (гипотеза Москвитина). Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета стержня приняты гипотезы ломаной нормали. Уравнения равновесия получены с помощью вариационного метода Лагранжа, учтена работа наполнителя в тангенциальном направлении. Аналитические решения задач теории малых упругопластических деформаций при прямом, обратном и циклическом нагружениях получены методом упругих решений Ильюшина. Проведен численный анализ решений.

Ключевые слова: циклическое локальное нагружение, пластичность, трехслойный стержень.

Abstract. Elastoplastic within the framework of the theory of small elastoplastic deformations considered one class of simple variables local loading of sandwich bars rectangular transverse-cross section with elastoplastic bearing layers and physically nonlinear elastic fillers, for which indicated the possibility of constructing a solution of the boundary value problem under repeated loading, if you know the solution during loading from the natural, consisting of (hypothesis of Moskvitin). To describe the kinematics of asymmetrical thickness rod package adopted by the broken normal hypothesis. The equilibrium equations are derived using the Variational method of Lagrange, take into account the work of the filler in the tangential direction. Analytic solutions of problems of the theory of small elastic deformations during the forward and backward on-laden obtained by the method of elastic solutions of Ilyushin. The numerical analysis of the solutions is given.

Keywords: second local loading, plasticity, three-layer beam.

Введение. В авиастроении, ракетостроении, транспортном и атомном машиностроении, в добыче и транспортировке энергоносителей широкое

применение находят трехслойные элементы конструкций. Они обеспечивают надежную работу конструкции в неблагоприятных условиях окружающей среды, служат для создания конструкции, сочетающие высокую прочность и жесткость с относительно малой массой.

На сегодняшний день создание общей теории квазистатического деформирования трехслойных элементов конструкций еще не завершено и интенсивно продолжается. В первую очередь это связано с необходимостью расчетов при физически нелинейном поведении материалов слоев в сложных условиях эксплуатации, в том числе при переменных нагрузках.

В монографиях [1–4] приведены различные математические модели слоистых элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, включая деформирование на упругом основании, изложены методы их расчета. В статьях [5, 6] рассмотрено деформирование сэндвич-балок и пластин с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев. Работы [7–13] посвящены исследованию динамического поведения слоистых элементов конструкций при непрерывных и локальных нагрузках и содержат постановки краевых задач для физически нелинейных, в том числе упругопластических, однородных элементов конструкций. Решение краевых задач о деформировании трехслойных упругопластических стержней и пластин в температурном поле при однократных непрерывных нагрузках проведено в [14–17]. Исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях посвящена статья [18]. Следует отметить, что деформирование упругопластических трехслойных элементов конструкций при локальных циклических нагрузках ранее не проводилось.

Здесь, в рамках теории малых упругопластических деформаций [19, 20], построено решение краевой задачи о повторных и циклических знакопеременных локальных нагружениях трехслойных стержней прямоугольного поперечного сечения с упругопластическими несущими слоями и физически нелинейно-упругим заполнителем. Численные результаты получены для металлополимерного стержня, находящегося под действием локальной прямоугольной (равномерно распределенной внутри интервала) нагрузки.

Нагружение из естественного состояния. Под циклическим (или переменным) деформированием упругопластических тел будем понимать такие изменения во времени внешних нагрузок, при которых во всем теле происходит чередование нагружения и разгрузки. Рассматривается деформирование несимметричного по толщине трехслойного стержня, несущие слои которого выполнены из упругопластического материала, а несжимаемый по толщине заполнитель – нелинейно-упругий. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1). Для тонких несущих слоев 1, 2 справедливы гипотезы Бернулли, в жестком несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол $\psi'(x)$.

На внешний слой стержня действует поверхностные силовые нагрузки $q'(x)$ и $p'(x)$, при этом соответствующие траектории нагружения относятся к классу простых [19], через $w'(x)$ и $u'(x)$ обозначены прогиб и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя (штрих вверх здесь и в дальнейшем соответствует нагружению из естественного состояния). На торцах предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев, на границах слоев – склейки. С помощью введенных гипотез, продольные перемещения в слоях $u'^{(k)}$ выражаются через три искомые функции $u'(x)$, $\psi'(x)$ и $w'(x)$:

$$\begin{aligned} u'^{(1)} &= u' + c\psi' - zw'_{,x} \quad (c \leq z \leq c + h_1), \quad u'^{(3)} = u' + z\psi' - zw'_{,x} \quad (-c \leq z \leq c), \\ u'^{(2)} &= u' - c\psi' - zw'_{,x} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (1)$$

где z – координата рассматриваемого волокна; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате; $h_1, h_2, h_3 = 2c$ – толщины слоев; верхний индекс k – номер слоя.

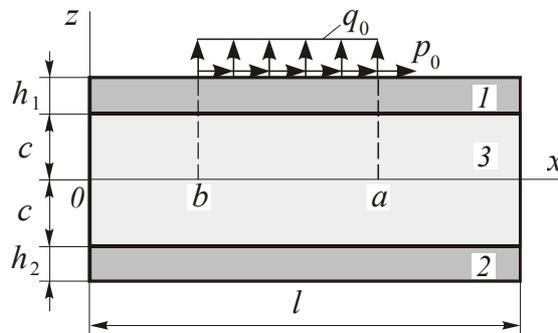


Рис. 1.

Деформации в стержне следуют из перемещений (1) и соотношений Коши [3]. Введем обобщенные внутренние усилия в стержне:

$$N' = \sum_{k=1}^3 N'^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_h \sigma'_{xx}{}^{(k)} dz, \quad M' = \sum_{k=1}^3 M'^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \int_h \sigma'_{xx}{}^{(k)} z dz, \quad Q' = \int_h \sigma'_{xz}{}^{(3)} dz, \quad (2)$$

где $\sigma'_{ij}{}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений в k -м слое на первом полуцикле нагружения.

В несущих слоях используются физические соотношения теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [19]:

$$\begin{aligned} s'_{ij}{}^{(k)} &= 2G_k f'^{(k)}(\epsilon'_u{}^{(k)}) \mathfrak{A}'_{ij}{}^{(k)}, \\ \sigma'{}^{(k)} &= 3K_k \epsilon'{}^{(k)} \quad (k=1, 2; i, j=x, y, z). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $s'_{ij}{}^{(k)}$, $\mathfrak{A}'_{ij}{}^{(k)}$ – девиаторы напряжений и деформаций; $\sigma'{}^{(k)}$, $\epsilon'{}^{(k)}$ – шаровые части тензоров напряжений и деформаций; G_k, K_k – модули сдвига и объемного деформирования материалов слоев;

$$f'^{(k)}(\epsilon'_u{}^{(k)}) = \begin{cases} 1, & \epsilon'_u{}^{(k)} \leq \epsilon'_y{}^{(k)}, \\ 1 - \omega'^{(k)}(\epsilon'_u{}^{(k)}), & \epsilon'_u{}^{(k)} > \epsilon'_y{}^{(k)}, \end{cases}$$

$\omega'^{(k)}$ – функция пластичности Ильюшина материалов несущих слоев при нагружении из естественного состояния, например, для металлов ее можно принять в виде:

$$\omega'^{(k)}(\varepsilon'_u) = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u \leq \varepsilon_y; \\ A_0 \left(1 - \frac{\varepsilon'_y}{\varepsilon'_u}\right)^{\alpha_0}, & \varepsilon_u \geq \varepsilon_y, \end{cases} \quad (4)$$

$\varepsilon_u'^{(k)}$ – интенсивность деформаций; $\varepsilon_y'^{(k)}$ – деформационный предел текучести материала; A_0, α_0 – экспериментальные константы материала, значения которых для некоторых материалов приведены в [3].

Для физически нелинейного заполнителя вводятся подобные уравнения состояния:

$$s'_{ij}{}^{(3)} = 2G_k(1 - \omega'^{(3)}(\varepsilon_u'^{(3)}))\varepsilon'_{ij}{}^{(3)}, \quad \sigma'^{(3)} = 3K_k\varepsilon'^{(3)} \quad (i, j = x, y, z), \quad (5)$$

где $\omega'^{(3)}(\varepsilon_u'^{(3)})$ – универсальная функция физической нелинейности заполнителя типа (4).

Компоненты тензора напряжений в слоях, используя (3), (5) представим через девиатор и шаровую часть тензора деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx}{}^{(k)} &= s'_{xx}{}^{(k)} + \sigma'^{(k)} = 2G_k\varepsilon'_{xx}{}^{(k)} + 3K_k\varepsilon'^{(k)} - 2G_k\varepsilon'_{xx}{}^{(k)}\omega'^{(k)}, \\ \sigma'_{xz}{}^{(3)} &= s'_{xz}{}^{(3)} = 2G_3\varepsilon'_{xz}{}^{(3)} - 2G_3\varepsilon'_{xz}{}^{(3)}\omega'^{(3)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Выделим в компонентах тензора напряжений (6) упругие (индекс «e») и неупругие (индекс « ω ») слагаемые:

$$\sigma'_{xx}{}^{(k)} = \sigma'_{xx}{}^{(k)e} - \sigma'_{xx}{}^{(k)\omega}, \quad \sigma'_{xz}{}^{(3)} = \sigma'_{xz}{}^{(3)e} - \sigma'_{xz}{}^{(3)\omega}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx}{}^{(k)e} &= 2G_k\varepsilon'_{xx}{}^{(k)} + 3K_k\varepsilon'^{(k)}, \quad \sigma'_{xx}{}^{(k)\omega} = 2G_k\varepsilon'_{xx}{}^{(k)}\omega'^{(k)}, \\ \sigma'_{xz}{}^{(3)e} &= 2G_3\varepsilon'_{xz}{}^{(3)}, \quad \sigma'_{xz}{}^{(3)\omega} = 2G_3\varepsilon'_{xz}{}^{(3)}\omega'^{(3)}. \end{aligned}$$

Проведя подобную операцию с внутренними усилиями (2), получим:

$$N'^{(k)} = N'^{(k)e} - N'^{(k)\omega}, \quad M'^{(k)} = M'^{(k)e} - M'^{(k)\omega}, \quad Q'^{(3)} = Q'^{(3)e} - Q'^{(3)\omega}. \quad (8)$$

Упругие (индекс «e») и неупругие (индекс « ω ») составляющие в (8) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} N'^{(k)e} &= b_0 \int_{h_k} \sigma'_{xx}{}^{(k)e} dz, \quad N'^{(k)\omega} = b_0 \int_{h_k} \sigma'_{xx}{}^{(k)\omega} dz, \quad M'^{(k)e} = b_0 \int_{h_k} \sigma'_{xx}{}^{(k)e} z dz, \\ M'^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma'_{xx}{}^{(k)\omega} z dz, \quad Q'^{(3)e} = b_0 \int_{-c}^c \sigma'_{xz}{}^{(3)e} dz, \quad Q'^{(3)\omega} = b_0 \int_{-c}^c \sigma'_{xz}{}^{(3)\omega} dz. \end{aligned} \quad (9)$$

Система дифференциальных уравнений равновесия стержня для определения искомых перемещений получена в [3] с помощью метода Лагранжа. В нашем случае она будет

$$\begin{aligned} a_1 u'_{,xx} + a_6 \psi'_{,xx} - a_7 w'_{,xxx} &= -p' + p'_\omega, \\ a_6 u'_{,xx} + a_2 \psi'_{,xx} - a_3 w'_{,xxx} - a_5 \psi' &= h'_\omega, \\ a_7 u'_{,xxx} + a_3 \psi'_{,xxx} - a_4 w'_{,xxx} &= -q' + q'_\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь коэффициенты

$$\begin{aligned}
 a_1 &= K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + 2K_3^+ c ; \quad a_2 = c^2 \left[K_1^+ h_1 + K_2^+ h_2 + \frac{2}{3} K_3^+ c \right] ; \\
 a_3 &= c \left[K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^2 \right] ; \\
 a_4 &= K_1^+ h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + K_2^+ h_2 \left(c + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} K_3^+ c^3 ; \quad a_5 = 2G_3 c ; \\
 a_6 &= c \left[K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2 \right] ; \quad a_7 = K_1^+ h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) - K_2^+ h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) ;
 \end{aligned}$$

величины $p'_\omega, h'_\omega, q'_\omega$ учитывают физическую нелинейность материалов слоев и вычисляются по формулам, следующим из (7) и (9):

$$p'_\omega = \frac{1}{b_0} N'_{,x}{}^\omega, \quad h'_\omega = \frac{1}{b_0} (H'_{,xx}{}^\omega - Q'^\omega), \quad q'_\omega = \frac{1}{b_0} M'_{,xxx}{}^\omega, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 N'^\omega &= \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} dz, \quad M'^\omega = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 G_k \int_{h_k} \omega'_k \varepsilon'_{xx}{}^{(k)} z dz, \quad Q'^\omega = 2b_0 G_3 \int_{-c}^c \omega'_3 \psi' dz, \\
 H'^\omega &= c(N'^{(1)\omega} - N'^{(2)\omega}) + M'^{(3)\omega}.
 \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений (10) существенно нелинейная. Поэтому рассмотрим возможность применения метода «упругих» решений Ильюшина к решению данной задачи. Предположим, что в (10), (11) содержится малый параметр, например, все $\omega_k < 1$. Тогда применим метод итераций, основанный на методе упругих решений, при котором для любого n -го приближения система уравнений (10) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
 a_1 u'_{,xx}{}^{(n)} + a_6 \psi'_{,xx}{}^{(n)} - a_7 w'_{,xxx}{}^{(n)} &= -p' + p'^{(n-1)}, \\
 a_6 u'_{,xx}{}^{(n)} + a_2 \psi'_{,xx}{}^{(n)} - a_3 w'_{,xxx}{}^{(n)} - a_5 \psi'{}^{(n)} &= h'^{(n-1)}, \\
 a_7 u'_{,xxx}{}^{(n)} + a_3 \psi'_{,xxx}{}^{(n)} - a_4 w'_{,xxx}{}^{(n)} &= -q' + q'^{(n-1)}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Величины $p'^{(n-1)}, h'^{(n-1)}, q'^{(n-1)}$, соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения и носят название дополнительных «внешних» нагрузок. Они служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев:

$$\begin{aligned}
 p'^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} N'^{\omega(n-1)}, \quad h'^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H'^{\omega(n-1)} - Q'^{\omega(n-1)}), \quad q'^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} M'^{\omega(n-1)}, \\
 N'^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 N'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega'^{(k)} (\varepsilon'_u{}^{(k)(n-1)}) \varepsilon'_{xx}{}^{(k)(n-1)} dz, \\
 M'^{\omega(n-1)} &= \sum_{k=1}^3 M'^{(k)(n-1)} = \frac{4}{3} b_0 \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} G_k \omega'^{(k)} (\varepsilon'_u{}^{(k)(n-1)}) \varepsilon'_{xx}{}^{(k)(n-1)} z dz, \\
 H'^{\omega(n-1)} &= c(N'^{(1)\omega(n-1)} - N'^{(2)\omega(n-1)}) + M'^{(3)\omega(n-1)},
 \end{aligned}$$

$$Q^{\omega(n-1)} = 2b_0 \int_{-c}^c G_3 \omega'^{(3)} (\varepsilon_u'^{(3)(n-1)}) \Psi'^{(n-1)} dz. \quad (13)$$

Применение метода упругих решений позволяет на каждом шаге приближения рассматриваемую задачу сводить к линейной задаче теории упругости с дополнительными «внешними» нагрузками.

Рассмотрим изгиб трехслойного упругопластического стержня локальной поперечной прямоугольной поверхностной нагрузкой (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} q'(x) &= q_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)), \\ p'(x) &= p_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)), \end{aligned} \quad (14)$$

где $H_0(x)$ – функция Хевисайда.

Решение системы уравнений (12) при нагрузке (14) можно выписать, базируясь на известном решении задачи теории упругости [3]. В нашем случае оно имеет следующий рекуррентный вид:

$$\begin{aligned} \Psi'^{(n)}(x) &= C_2'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3'^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta^2} \left[\gamma_2 p_0 ((\operatorname{ch}(\beta x - a\beta) - 1) H_0(a-x) - \right. \\ &\quad \left. - (\operatorname{ch}(\beta x - b\beta) - 1) H_0(b-x)) - \frac{\gamma_1 q_0}{\beta} ((\beta x - \beta a - \operatorname{sh}(\beta x - \beta a)) H_0(a-x) - \right. \\ &\quad \left. - (\beta x - \beta b - \operatorname{sh}(\beta x - \beta b)) H_0(b-x)) - \gamma_1 C_1'^{(n)} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g_{\omega 1}'^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g_{\omega 1}'^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u'^{(n)}(x) &= \gamma_3 \Psi'^{(n)} + \frac{1}{\alpha_2} \left[a_4 L_2^{-1} (p_{\omega}'^{(n-1)}) - a_4 (p_0 (H_2(a-x) - H_2(b-x)) - \right. \\ &\quad \left. - a_7 q_0 (H_3(a-x) - H_3(b-x)) - L_3^{-1} (q_{\omega}'^{(n-1)}) + \frac{a_7}{2} C_1'^{(n)} x^2 \right] + C_7'^{(n)} x + C_8'^{(n)}, \\ w'^{(n)}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \Psi'^{(n)} dx + a_7 (p_0 (H_3(a-x) - H_3(b-x)) + L_3^{-1} (p_{\omega}'^{(n-1)})) + \right. \\ &\quad \left. + a_1 (q_0 (H_4(a-x) - H_4(b-x)) - L_4^{-1} (q_{\omega}'^{(n-1)})) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_1 C_1'^{(n)}}{6} x^3 \right] + \frac{C_4'^{(n)}}{2} x^2 + C_5'^{(n)} x + C_6'^{(n)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь введена функция

$$g_{\omega 1}'^{(n)}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_{\omega}'^{(n-1)} - \gamma_2 p_{\omega}'^{(n-1)} - \gamma_1 \left(\int q_{\omega}'^{(n-1)} dx + C_1'^{(n)} \right);$$

коэффициенты и линейные операторы

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{a_1 a_5 \alpha_2}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_1 = \frac{a_1 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_2 = \frac{a_6 \alpha_2 - a_7 \alpha_1}{\alpha_2 \alpha_3 - \alpha_1^2}, \quad \gamma_3 = \frac{a_3 a_7 - a_4 a_6}{\alpha_2}, \\ \alpha_1 &= a_1 a_3 - a_6 a_7, \quad \alpha_2 = a_1 a_4 - a_7^2, \quad \alpha_3 = a_1 a_2 - a_6^2; \\ L_2^{-1}(g) &\equiv \iint g dx dx; \quad L_3^{-1}(g) \equiv \iiint g dx dx dx; \quad L_4^{-1}(g) \equiv \iiint \int g dx dx dx dx. \end{aligned}$$

Константы интегрирования $C_1^{(n)}, \dots, C_8^{(n)}$ на каждом шаге приближения следуют из условий закрепления стержня. При жестком защемлении левого конца стержня и свободном правом торце должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad w = w_{,x} = u = \psi = 0; \\ x = l: \quad \psi = N = M = M_{,x} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Удовлетворяя решением (15) граничные условия (16) получим:

$$\begin{aligned} C_1^{(n)} &= \int q_{\omega}^{(n-1)} dx \Big|_{x=l}, \\ C_2^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \left[\frac{\text{ch}(\beta l)}{\text{sh}(\beta l)} \left(\int g_{\omega 1}^{\prime(n)} \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=l} - \int g_{\omega 1}^{\prime(n)} \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\gamma_2 p_0}{\beta} (\text{ch}(\beta b) - \text{ch}(\beta a)) + \frac{\gamma_1 q_0}{\beta^2} (a\beta - b\beta + \text{sh}(\beta b) - \text{sh}(\beta a)) + \frac{\gamma_1 C_1'}{\beta} (1 - \text{ch}(\beta l)) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \int g_{\omega 1}^{\prime(n)} \text{ch}(\beta x) dx \Big|_{x=l} + \gamma_1 C_1' \frac{\text{sh}(\beta l)}{\beta} \right], \\ C_3^{(n)} &= \frac{1}{\beta} \int g_{\omega 1}^{\prime(n)}(x) \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} + \\ &\quad + \frac{1}{\beta^2} \left(\gamma_2 p_0 (\text{ch}(\beta b) - \text{ch}(\beta a)) - \frac{1}{\beta} \gamma_1 q_0 (a\beta - b\beta + \text{sh}(\beta b) - \text{sh}(\beta a)) + \gamma_1 C_1' \right), \\ C_4^{(n)} &= -\frac{a_7}{\alpha_2} \int p_{\omega}^{\prime(n-1)} dx \Big|_{x=l} + \frac{a_1}{\alpha_2} L_2^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)}) \Big|_{x=l} - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1^{(n)} l, \\ C_5^{(n)} &= \frac{1}{\alpha_2} \left(a_7 \left(p_0 \frac{a^2 - b^2}{2} - L_2^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} + a_1 \left(q_0 \frac{a^3 - b^3}{6} - L_3^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} \right), \\ C_6^{(n)} &= \frac{1}{\alpha_2} \left(a_7 \left(p_0 \frac{b^3 - a^3}{6} - L_3^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} \right) - a_1 \left(q_0 \frac{a^4 - b^4}{24} - L_4^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)}) \Big|_{x=0} \right) - \\ &\quad - \alpha_1 \int \psi^{\prime(n)} dx \Big|_{x=0}, \\ C_7^{(n)} &= -\frac{1}{\alpha_2} \left[a_4 \int p_{\omega}^{\prime(n-1)} dx \Big|_{x=l} - a_7 (L_2^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)}) \Big|_{x=l} + C_1^{(n)} l) \right], \\ C_8^{(n)} &= \frac{1}{\alpha_2} \left(a_4 \left(p_0 \frac{a^2 - b^2}{2} - L_2^{-1}(p_{\omega}^{\prime(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} - a_7 \left(q_0 \frac{b^3 - a^3}{6} - L_3^{-1}(q_{\omega}^{\prime(n-1)}) \right) \Big|_{x=0} \right). \quad (17) \end{aligned}$$

На первом шаге приближения ($n = 1$) из соотношений (15) следует решение линейной задачи теории упругости.

Повторное знакопеременное нагружение. Пусть, начиная с момента $t = t_1$, осуществляется упругая разгрузка (в рамках гипотез Москвитина [19]) и повторное квазистатическое нагружение усилиями обратного знака, изменяющимся по тому же закону, что и при нагружении из естественного состояния (14):

$$q''(x) = -q_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)),$$

$$p''(x) = -p_0(H_0(a-x) - H_0(b-x)). \quad (18)$$

Усилия (18) создадут в k -м слое стержня поле перемещений u'' , ψ'' , w'' , деформации $\varepsilon_x^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$, ψ'' и напряжения $\sigma_x^{(k)}$, $s_x^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$. Сложность нахождения параметров соответствующего напряженно-деформированного состояния заключается в зависимости искомого решения от точки разгрузки $(\varepsilon'_{u1}, \sigma'_{u1})$, т. к. в каждой точке несущих слоев стержня, которая деформировалась пластически, изменяется предел текучести по деформациям. Это вызывает изменение физических уравнений состояния (3). В нелинейно упругом заполнителе уравнения состояния (5) остаются прежними, т. к. там пластических деформаций не возникает. В результате в каждой точке необходимо ставить свою краевую задачу и получать свое решение. Рассмотрим одну возможность избегания этих трудностей.

Введем разности для всех величин напряженно-деформированного состояния и нагрузки, в которых величины с одним штрихом – напряжения, деформации, внешние нагрузки и перемещения в стержне перед разгрузкой, двумя штрихами помечены аналогичные параметры в процессе второго полуцикла:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)*} &= \sigma_x^{(k)} - \sigma_x^{(k)'}, & s_x^{(k)*} &= s_x^{(k)} - s_x^{(k)'}, & \sigma^{(k)*} &= \sigma^{(k)} - \sigma^{(k)'}, \\ \sigma_{xz}^{(3)*} &= \sigma_{xz}^{(3)} - \sigma_{xz}^{(3)'}, & \varepsilon_x^{(k)*} &= \varepsilon_x^{(k)} - \varepsilon_x^{(k)'}, & \varepsilon^{(k)*} &= \varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k)'}, \\ u^* &= u' - u'', & \psi^* &= \psi' - \psi'', & w^* &= w' - w'', & q^* &= q' - q'', & p^* &= p' - p''. \end{aligned} \quad (19)$$

В силу линейности связи деформаций с перемещениями в слоях стержня подобные соотношения будут справедливы и для величин со звездочками.

Для напряжений и деформаций в (19), отмеченных звездочками, для материала несущих слоев примем физические уравнения состояния типа (3), (5):

$$\begin{aligned} s_x^{(k)*} &= 2G_k f^{(k)*} \varepsilon_x^{(k)*}, & \sigma^{(k)*} &= 3K_k \varepsilon^{(k)*} \quad (k=1, 2, 3), \\ s_{xz}^{(3)*} &= 2G_3 f^{(3)*} \varepsilon_{xz}^{(3)*}. \end{aligned} \quad (20)$$

Соответствующие универсальные функции пластичности $f^{(k)*}$ в (20) для материалов несущих слоев согласно гипотезе Москвитина [18, 20] полагаем выраженными через функции пластичности при нагружении из естественного состояния:

$$\begin{aligned} f^{(k)*}(\varepsilon_u^{(k)}) &= \begin{cases} 1, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_y^{(k)*}, \\ 1 - \omega^{(k)*}, & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_y^{(k)*}, \end{cases} \\ \omega^{(k)*} &= \omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)*}, \varepsilon_y^{(k)*}, d_m^*). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь d_m^* – экспериментальные параметры материала, входящие в аппроксимационную формулу функции нелинейности, например, для сплава Д16Т по аналогии с (4) принимаем:

$$\omega^{(k)*} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_u^{(k)*} \leq \varepsilon_y^{(k)*}, \\ A_k^* \left(1 - \frac{\varepsilon_y^{(k)*}}{\varepsilon_u^{(k)*}} \right)^{\alpha_k^*}, & \varepsilon_u^{(k)*} > \varepsilon_y^{(k)*}, \end{cases}$$

где $A_k^* = 0,924$, $\alpha_k^* = 2,27$, $\varepsilon_y^{(k)*} = \alpha_2^{(k)} \varepsilon_y^{(k)}(T_1)$, $\alpha_2^{(k)} = 2,02$ [3], причем случай $\alpha_2^{(k)} > 2$ соответствует циклически упрочняющемуся материалу, $\alpha_2^{(k)} < 2$ – разупрочняющемуся, $\alpha_2^{(k)} = 2$ – для циклически идеального материала (нижний индекс «2» обозначает второй полцикл).

Введем для величин со звездочками величины внутренних усилий, и представим их в виде суммы упругих и неупругих составляющих. Для этого в формулах (2), (6)–(9) нужно формально штрих вверху заменить звездочкой. В результате, с помощью вариационного принципа, придем к системе уравнений равновесия относительно перемещений со звездочками типа (10), которая в рекуррентном виде будет

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx}^{(n)*} + a_6 \psi_{,xx}^{(n)*} - a_7 w_{,xxx}^{(n)*} &= p_{\omega}^{(n-1)*}, \\ a_6 u_{,xx}^{(n)*} + a_2 \psi_{,xx}^{(n)*} - a_3 w_{,xxx}^{(n)*} - a_5 \psi^{(n)*} &= h_{\omega}^{(n-1)*}, \\ a_7 u_{,xxx}^{(n)*} + a_3 \psi_{,xxx}^{(n)*} - a_4 w'_{,xxxx}^{(n)*} &= -q^* + q_{\omega}^{(n-1)*}. \end{aligned} \quad (22)$$

Величины $p_{\omega}^{(n-1)*}$, $h_{\omega}^{(n-1)*}$, $q_{\omega}^{(n-1)*}$ служат поправками на пластичность и физическую нелинейность материалов слоев. Они на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения по формулам типа (13) с учетом соотношений (21).

В силу линейности соотношений (19) решения системы (22) должны удовлетворять граничным условиям типа (16). Поэтому, при построении аналитического итерационного решения краевой задачи воспользуемся решением (15). В результате, для перемещений со звездочками будут справедливы итерационные выражения

$$\begin{aligned} \psi^{(n)*}(x) &= C_2^{(n)*} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(n)*} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta^2} \left[\gamma_2 p_0^* ((\operatorname{ch}(\beta x - a\beta) - 1) H_0(a-x) - \right. \\ &\quad \left. - (\operatorname{ch}(\beta x - b\beta) - 1) H_0(b-x)) - \frac{\gamma_1 q_0^*}{\beta} ((\beta x - \beta a - \operatorname{sh}(\beta x - \beta a)) H_0(a-x) - \right. \\ &\quad \left. - (\beta x - \beta b - \operatorname{sh}(\beta x - \beta b)) H_0(b-x)) - \gamma_1 C_1^{(n)*} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(n)*} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(n)*} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\ u^{(n)*}(x) &= \gamma_3 \psi^{(n)*} + \frac{1}{\alpha_2} \left[a_4 L_2^{-1} (p_{\omega}^{(n-1)*}) - a_4 (p_0^* (H_2(a-x) - H_2(b-x)) - \right. \\ &\quad \left. - a_7 q_0^* (H_3(a-x) - H_3(b-x)) - L_3^{-1} (q_{\omega}^{(n-1)*}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(n)*} x^2 \right] + C_7^{(n)*} x + C_8^{(n)*}, \\ w^{(n)*}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi^{(n)*} dx + a_7 (p_0^* (H_3(a-x) - H_3(b-x)) + L_3^{-1} (p_{\omega}^{(n-1)*})) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_1 \left(q_0^* (H_4(a-x) - H_4(b-x)) - L_4^{-1} (q_\omega^{(n-1)*}) \right) + \\
& \left. + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(n)*} x^3 \right] + \frac{1}{2} C_4^{(n)*} x^2 + C_5^{(n)*} x + C_6^{(n)*}, \tag{23}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
g_{\omega 1}^{(n)*}(x) &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_\omega^{(n-1)*} - \gamma_2 p_\omega^{(n-1)*} - \gamma_1 \left(\int q_\omega^{(n-1)*} dx + C_1^{(n)*} \right), \\
\int \psi^{(n)*} dx \Big|_{x=0} &= \frac{C_2^{(n)*}}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\gamma_2 p_0^*}{\beta} (\operatorname{sh}(\beta b) - \operatorname{sh}(\beta a)) + \frac{\gamma_1 q_0^*}{\beta^2} ((\operatorname{ch}(\beta a) - \operatorname{ch}(\beta b))) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \gamma_1 q_0^* (a^2 - b^2) \right] + \frac{1}{\beta} \int (\operatorname{sh}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(n)} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(n)} \operatorname{sh}(\beta x) dx) dx \Big|_{x=0}.
\end{aligned}$$

Подставляя решение (23) в граничные условия типа (16), получим для констант интегрирования $C_1^{(n)*}, \dots, C_8^{(n)*}$ выражения, совпадающие с (17), если в последних штрих заменить звездочкой. Следовательно, формулы (23) дают в итерациях аналитическое решение краевой задачи в перемещениях для величин со звездочками при повторном локальном знакопеременном нагружении консольного трехслойного стержня.

После этого параметры напряженно-деформированного состояния на втором полуцикле нагружения получим из соотношений (19):

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{n(k)}(x, z) &= \sigma_x^{(k)}(x, z) - \sigma_x^{(k)*}(x, z), \quad \sigma_{xz}^{n(3)}(x, z) = \sigma_{xz}^{(3)}(x, z) - \sigma_{xz}^{(3)*}(x, z), \\
\varepsilon_x^{n(k)}(x, z) &= \varepsilon_x^{(k)}(x, z) - \varepsilon_x^{(k)*}(x, z), \quad u''(x) = u'(x) - u^*(x), \\
\psi''(x) &= \psi'(x) - \psi^*(x), \quad w''(x) = w'(x) - w^*(x), \tag{24}
\end{aligned}$$

где величины с одним штрихом – напряжения, деформации и перемещения в трехслойном стержне перед разгрузкой.

Циклическое знакопеременное нагружение. Пусть, после $m - 1$ знакопеременных полуциклов нагружений, начиная с момента t_{m-1} , осуществляется мгновенная разгрузка и новое нагружение усилиями обратного знака $p^{(m)}, q^{(m)}$:

$$\begin{aligned}
q^{(m)}(x) &= (-1)^{(m-1)} q_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)), \\
p^{(m)}(x) &= (-1)^{(m-1)} p_0 (H_0(a-x) - H_0(b-x)). \tag{25}
\end{aligned}$$

Эти усилия создадут в k -м слое стержня поле перемещений $u^{(m)}, \psi^{(m)}, w^{(m)}$. Как и ранее, ведем для всех величин напряженно-деформированного состояния и нагрузки разности (19), в которых величины с индексом $(m - 1)$ – напряжения, деформации, перемещения и нагрузки в стержне перед разгрузкой, индексом m обозначены аналогичные параметры в процессе m -го полуцикла.

Как и ранее, ведем для всех величин напряженно-деформированного состояния и нагрузки разности, в которых величины с индексом $(m - 1)$ – напряжения, деформации, перемещения и нагрузки в стержне перед разгрузкой, индексом m обозначены аналогичные параметры в процессе m -го полуцикла:

$$\sigma_x^{(m,k)*} = (-1)^n (\sigma_x^{(m-1,k)} - \sigma_x^{(m,k)}), \quad \varepsilon_x^{(m,k)*} = (-1)^n (\varepsilon_x^{(m-1,k)} - \varepsilon_x^{(m,k)}),$$

$$\begin{aligned}
u^{(m)*} &= (-1)^n (u^{(m-1)} - u^{(m)}), \quad \psi^{(m)*} = (-1)^n (\psi^{(m-1)} - \psi^{(m)}), \\
w^{(m)*} &= (-1)^n (w^{(m-1)} - w^{(m)}), \\
q^{(m)*} &= (-1)^n (q^{(m-1)} - q^{(m)}), \quad p^{(m)*} = (-1)^n (p^{(m-1)} - p^{(m)}).
\end{aligned}$$

Соотношения (20), связывающие деформации и напряжения со звездочками, будут справедливы и здесь. Универсальные функции нелинейности в несущих слоях на m -ном полуцикле предполагаем выраженными через функции пластичности при нагружении из естественного состояния формулами (21). Физическая нелинейность заполнителя при m -м знакопеременном нагружении по прежнему описывается соотношениями (3). С учетом нагрузок (25), искомые функции $u^{(m,n)*}$, $\psi^{(m,n)*}$, $w^{(m,n)*}$ будут удовлетворять уравнениям равновесия типа (22), в которых величины $p_{\omega}^{(m,n-1)*}$, $h_{\omega}^{(m,n-1)*}$, $q_{\omega}^{(m,n-1)*}$, соответствующие неупругим составляющим, на первом шаге ($n = 1$) принимаются равными нулю, а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущего приближения. Граничные условия при консольной заделке левого торца стержня для величин со звездочками будут (16).

В этом случае, рассматриваемая краевая задача для величин со звездочками с точностью до обозначений совпадает с краевой задачей при повторном локальном знакопеременном нагружении. Поэтому ее рекуррентное аналитическое решение будет

$$\begin{aligned}
\psi^{(m,n)*}(x) &= C_2^{(m,n)*} \operatorname{sh}(\beta x) + C_3^{(m,n)*} \operatorname{ch}(\beta x) + \frac{1}{\beta^2} \left[\gamma_2 p_0^{(m)*} ((\operatorname{ch}(\beta x - a\beta) - 1)H_0(a-x) - \right. \\
&\quad \left. - (\operatorname{ch}(\beta x - b\beta) - 1)H_0(b-x)) - \frac{\gamma_1 q_0^{(m)*}}{\beta} ((\beta x - \beta a - \operatorname{sh}(\beta x - \beta a))H_0(a-x) - \right. \\
&\quad \left. - (\beta x - \beta b - \operatorname{sh}(\beta x - \beta b))H_0(b-x)) - \gamma_1 C_1^{(m,n)*} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{\beta} \left[\operatorname{sh}(\beta x) \int_{\omega_1}^{(m,n)*} \operatorname{ch}(\beta x) dx - \operatorname{ch}(\beta x) \int_{\omega_1}^{(m,n)*} \operatorname{sh}(\beta x) dx \right], \\
u^{(m,n)*}(x) &= \gamma_3 \psi^{(m,n)*} + \frac{1}{\alpha_2} \left[a_4 L_2^{-1} (p_{\omega}^{(m,n-1)*}) - a_4 (p_0^{(m)*} (H_2(a-x) - H_2(b-x)) - \right. \\
&\quad \left. - a_7 q_0^{(m)*} (H_3(a-x) - H_3(b-x)) - L_3^{-1} (q_{\omega}^{(m,n-1)*}) + \frac{a_7}{2} C_1^{(m,n)*} x^2 \right] + C_7^{(m,n)*} x + C_8^{(m,n)*}, \\
w^{(m,n)*}(x) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[\alpha_1 \int \psi^{(m,n)*} dx + a_7 (p_0^{(m)*} (H_3(a-x) - H_3(b-x)) + L_3^{-1} (p_{\omega}^{(m,n-1)*})) \right] + \\
&\quad + a_1 (q_0^{(m)*} (H_4(a-x) - H_4(b-x)) - L_4^{-1} (q_{\omega}^{(m,n-1)*})) + \\
&\quad + \frac{1}{6} a_1 C_1^{(m,n)*} x^3 \left] + \frac{1}{2} C_4^{(m,n)*} x^2 + C_5^{(m,n)*} x + C_6^{(m,n)*}. \tag{26}
\end{aligned}$$

Здесь подынтегральная функция

$$g_{\omega 1}^{(m,n)*}(x) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \gamma_1 h_{\omega}^{(m,n-1)*} - \gamma_2 p_{\omega}^{(m,n-1)*} - \gamma_1 \left(\int q_{\omega}^{(m,n-1)*} dx + C_1^{(m,n)*} \right),$$

величины $p_{\omega}^{(m,n-1)*}$, $h_{\omega}^{(m,n-1)*}$, $q_{\omega}^{(m,n-1)*}$ соответствуют неупругим составляющим и вычисляются по формулам типа (13);

$$\int \Psi^{(m,n)*} dx \Big|_{x=0} = \frac{C_2^{(m,n)*}}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \left[\frac{\gamma_2 p_0^*}{\beta} (\text{sh}(\beta b) - \text{sh}(\beta a)) + \frac{\gamma_1 q_0^*}{\beta^2} ((\text{ch}(\beta a) - \text{ch}(\beta b))) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \gamma_1 q_0^* (a^2 - b^2) \right] + \frac{1}{\beta} \int \text{sh}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(m,n)*} \text{ch}(\beta x) dx - \text{ch}(\beta x) \int g_{\omega 1}^{(m,n)*} \text{sh}(\beta x) dx dx \Big|_{x=0}.$$

Удовлетворяя решением (26) граничные условия для консоли (16), получим следующие константы интегрирования:

$$C_1^{(m,n)*} = L_1^{-1}(q_{\omega}^{(m,n-1)*}) \Big|_{x=l},$$

$$C_2^{(m,n)*} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\text{ch}(\beta l)}{\text{sh}(\beta l)} \left(\int g_{\omega 1}^{(m,n)*} \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=l} - \int g_{\omega 1}^{(m,n)*} \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\gamma_2 p_0^{(m)*}}{\beta} (\text{ch}(\beta b) - \text{ch}(\beta a)) + \frac{\gamma_1 q_0^{(m)*}}{\beta^2} (a\beta - b\beta + \text{sh}(\beta b) - \text{sh}(\beta a)) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\gamma_1 C_1^{(m,n)*}}{\beta} (1 - \text{ch}(\beta l)) \right) - \int g^{(m,n)*} \text{ch}(\beta x) dx \Big|_{x=l} + \gamma_1 C_1^{(m,n)*} \frac{\text{sh}(\beta l)}{\beta} \right],$$

$$C_3^{(m,n)*} = \frac{1}{\beta} \int g_{\omega 1}^{(m,n)*}(x) \text{sh}(\beta x) dx \Big|_{x=0} + \\ + \frac{1}{\beta^2} \left(\gamma_2 p_0^{(m)*} (\text{ch}(\beta b) - \text{ch}(\beta a)) - \frac{1}{\beta} \gamma_1 q_0^{(m)*} (a\beta - b\beta + \text{sh}(\beta b) - \text{sh}(\beta a)) + \gamma_1 C_1^{(m,n)*} \right),$$

$$C_4^{(m,n)*} = -\frac{a_7}{\alpha_2} L_1^{-1} \left(p_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \Big|_{x=l} + \frac{a_1}{\alpha_2} L_2^{-1} \left(q_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \Big|_{x=l} - \frac{a_1}{\alpha_2} C_1^{(m,n)*} l,$$

$$C_5^{(m,n)*} = \frac{a_7}{\alpha_2} \left(p_0^{(m)*} \frac{a^2 - b^2}{2} - L_2^{-1} \left(p_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \right) \Big|_{x=0} + \frac{a_1}{\alpha_2} \left(q_0^{(m)*} \frac{a^3 - b^3}{6} - L_3^{-1} \left(q_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \right) \Big|_{x=0},$$

$$C_6^{(m,n)*} = \frac{a_7}{\alpha_2} \left(p_0^{(m)*} \frac{b^3 - a^3}{6} - L_3^{-1} \left(p_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \right) \Big|_{x=0} - \\ - \frac{a_1}{\alpha_2} \left(q_0^{(m)*} \frac{a^4 - b^4}{24} - L_4^{-1} \left(q_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \Big|_{x=0} \right) - \alpha_1 \int \Psi^{(m,n)*} dx \Big|_{x=0},$$

$$C_7^{(m,n)*} = -\frac{1}{\alpha_2} \left[a_4 L_1^{-1} \left(p_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \Big|_{x=l} - a_7 \left(L_2^{-1} \left(p_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \Big|_{x=l} + C_1^{(m,n)*} l \right) \right], \quad (27)$$

$$C_8^{(m,n)*} = \frac{a_4}{\alpha_2} \left(p_0^{(m)*} \frac{a^2 - b^2}{2} - L_2^{-1} \left(p_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \Big|_{x=0} \right) - \frac{a_7}{\alpha_2} \left(q_0^{(m)*} \frac{b^3 - a^3}{6} - L_3^{-1} \left(q_{\omega}^{(m,n-1)*} \right) \Big|_{x=0} \right).$$

Следовательно, полученные аналитические формулы (26)–(27) дают решение краевой задачи для величин со звездочками на m -м полуцикле

локального знакопеременного нагружения консольного трехслойного стержня. Искомые перемещения получим из соотношений типа (24).

Численные результаты. При численной реализации решения принимались относительные толщины слоев $h_1 = 0,02$, $h_2 = 0,04$, $c = 0,09$. Нагрузка, интенсивность которой $q_0 = -3,5$ МПа ($p_0 = 0$), равномерно распределена на отрезке $[0, b]$. Материалы слоев: сплав Д16Т–фторопласт-4–Д16Т, механические параметры материалов взяты в [3].

Теоретически сходимость метода упругих решений доказана при весьма общих предположениях [2]. В нашем случае численные результаты подтвердили практическую сходимость метода итераций. За искомое решение принято 8-е приближение, которое отличается от предыдущего менее чем на 1 %.

На рис. 2, *а*, *б* показано изменение прогиба и сдвига в заполнителе по оси трехслойного стержня в зависимости от длины пятна нагрузки (без штриха упругий стержень, со штрихом – упругопластический): $1 - a = 0,50l$, $2 - a = 0,75l$, $3 - a = l$. При $a = 0,5l$ области пластического деформирования малы и упругопластический прогиб увеличивается на 3–4 %; при $a = 0,75l$ рост составляет 6–7 %, если нагрузка действует по всей поверхности стержня ($a = l$), то рост до 15 %. Для сдвигов соответствующие увеличения следующие: 5 %, 9–10 %; 18–19 %.

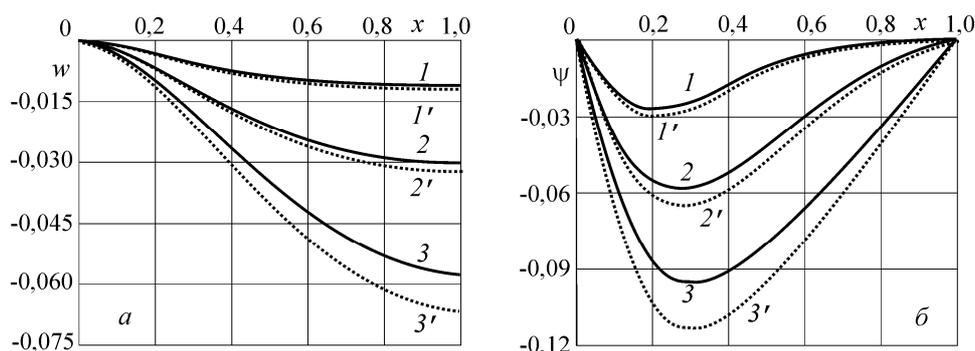


Рис. 2

Рис. 3, *а*, *б* иллюстрирует распределение областей физической нелинейности материалов слоев в продольном сечении стержня (серая заливка) при $a = 0,75l$ и $a = l$ соответственно. Как и следовало ожидать, области нелинейности во втором случае существенно возрастают.

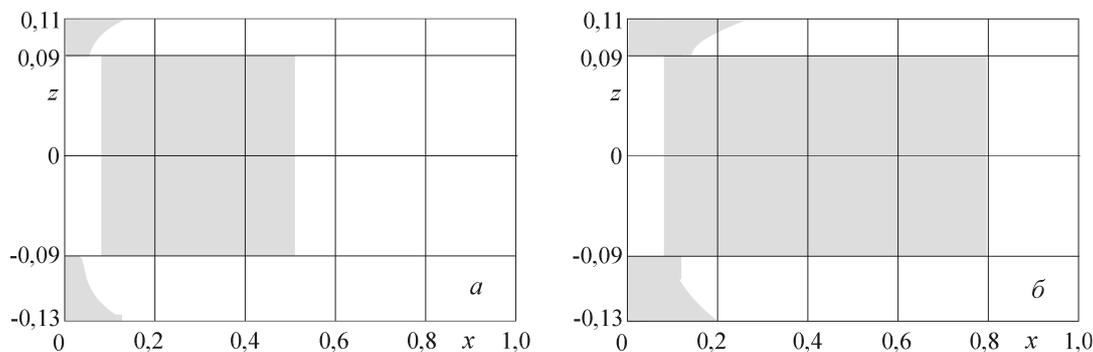


Рис. 3

На рис. 4 показано изменение сдвига в заполнителе и прогиба по оси трехслойного стержня единичной длины в зависимости от длины участка, на котором действует распределенная нагрузка (без штриха – упругий стержень, один штрих – упругопластический, два штриха – переменное нагружение, индекс X – десятый полуцикл): $1 - b = 0,75$, $2 - b = 1$. Экстремумы перемещений при повторном нагружении в случае меньшей площади нагрузки уменьшаются в меньшей степени, чем с нагрузкой по всей поверхности стержня. Это объясняется меньшей областью пластических деформаций и, вследствие этого, уменьшением циклического упрочнения материала несущих слоев. На 10-м полуцикле экстремумы уменьшаются на 3 и 5 % соответственно относительно кривых при нагружении из естественного состояния.

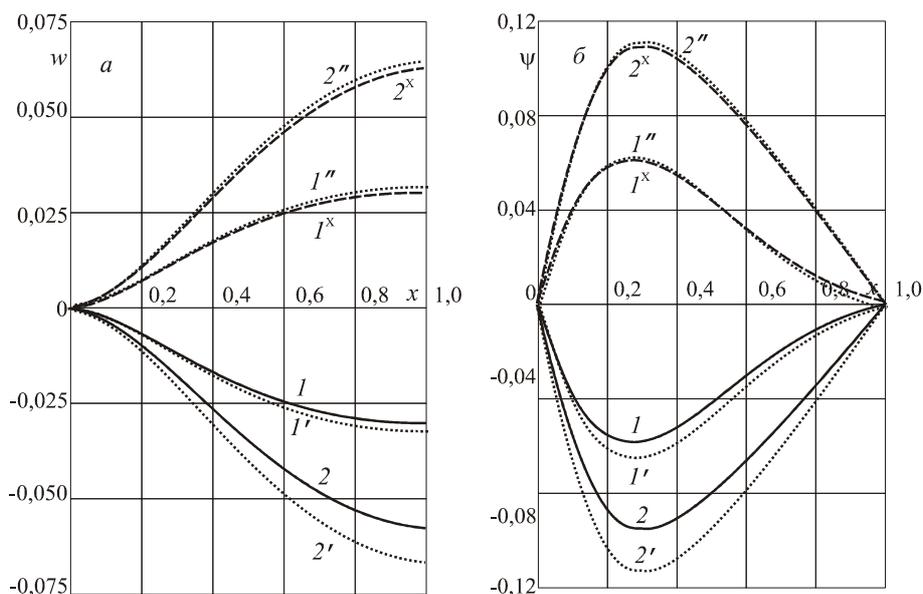


Рис. 4

Распределение нормальных напряжений σ_{xx} по сечению в заделке ($x = 0$) консольного стержня иллюстрирует рис. 5 (без штриха упругий стержень, один штрих – упругопластический, два штриха – переменное нагружение): $1 - b = 0,75$, $2 - b = 1$.

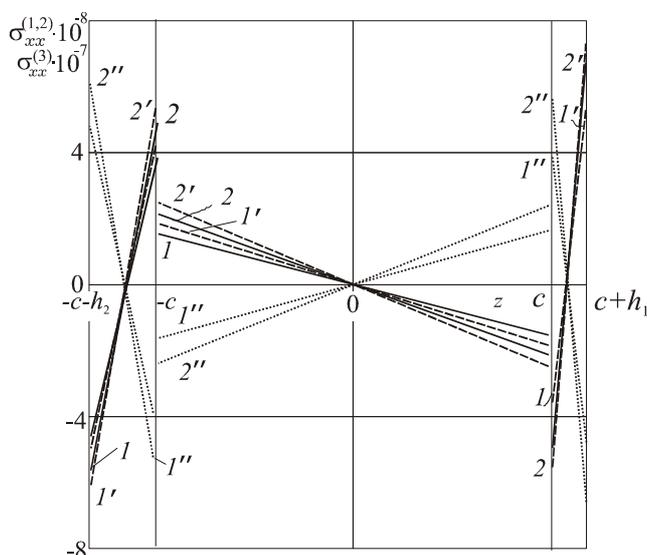


Рис. 5

Здесь напряжения в несущих слоях отличаются на 5–6 %, что объясняется различной толщиной слоев. Учет физической нелинейности приводит к увеличению максимальных напряжений во внешних слоях на 5 %, в заполнителе – на 14 %.

Выводы. Предложенная методика позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние трехслойного упругопластического стержня при однократных, повторных и циклических локальных прямоугольных нагрузках. При этом решение новой краевой задачи строится по известному решению соответствующей задачи о нагружении из естественного состояния.

Работа выполнена в Московском авиационном институте при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00091).

Литература

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 416 с.
4. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. 560 с.
5. Hohe J., Becker W. An energetic homogenization procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores. Composites Part b-Engineering. 2001. Vol. 32, N 3. P. 185–197.
6. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. The oblique impact response of composite sandwich plates // Composite Structures. 2015. N 133. P. 1127–1136.
7. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 91–98.
8. Могилевич Л.И., Попов В.С., Старовойтов Э.И. Гидроупругость виброопоры с трехслойной круглой упругой пластиной с несжимаемым заполнителем // Наука и техника транспорта. 2006. № 2. С. 56–63.
9. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskiy D.V. Resonance vibrations of circular composite plates on an elastic foundation // Mechanics of Composite Materials. 2015. Vol. 51, No. 5. P. 561–570.
10. Starovoitov E.I., Kubenko V.D., Tarlakovskii D.V. Vibrations of circular sandwich plates connected with an elastic foundation // Russian Aeronautics. 2009. Vol. 52, No. 2. P. 151–157.
11. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Rabinskiy L.N. Natural Vibrations of a Composite Cylindrical Shells with an Elastic Filler // Composites: Mechanics, Computations, Applications. 2016. Vol. 7, № 2. P. 118–132.

12. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Thermal impact a circular sandwich plate on an elastic foundation // *Mechanics of Solids*. 2012. Vol. 47, № 1. P. 111–118.
13. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium // *Mechanics of Solids*. – 2015. Vol. 50, No. 3. PP. 359–366.
14. Starovoitov É.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovsky D.V. Deformation of a Step Composite Beam in a Temperature Field // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2015. Vol. 88, №4. P. 1023–1029.
15. Леоненко Д.В., Старовойтов Э.И. Термопластическое деформирование круговых трехслойных пластин на упругом основании // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2009. № 5, С. 106–119.
16. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base // *Mechanics of Solids*. 2009. Vol. 44, № 5. P. 744–755.
17. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation // *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46, № 2. P. 291–298.
18. Москвитин В.В., Старовойтов Э.И. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. 1986. № 1. С. 116–121.
19. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
20. Москвитин В.В. Циклическое нагружение элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.