УДК 550.837

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ВТОРОГО РОДА, ПОРОЖДАЕМОГО ПЛОСКИМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ УПРУГИМИ ВОЛНАМИ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Кочкурова А.С.[1], Московский И.Г.[2]
[1]Саратовский государственный университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, nas547@yandex.ru
[2]Саратовский государственный университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов, mosig@mail.ru

MATHEMATICAL MODELLING OF THE SECOND-TYPE SEISMOELECTRIC EFFECT GENERATED BY PLANE TRANSVERSAL ELASTIC WAVES WITHIN TWO-LAYER EARTH

Kochkurova A.S.[1], Moskowsky I.G.[2]
[1]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, nas547@yandex.ru
[2]Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Russia, Saratov, mosig@mail.ru

Аннотация. В рамках низкочастотной модели сейсмоэлектрического эффекта второго рода получено аналитическое решения для упругого и электромагнитного полей этого эффекта при возбуждении в двухслойной среде со вторым влагонасыщенным слоем плоских поперечных упругих волн. На основе полученного решения проведены расчеты и анализ компонент полей при импульсном возбуждении упругих колебаний.

Ключевые слова: сейсмоэлектрический эффект второго рода; влагонасыщенные горные породы; плоские поперечные упругие волны; электромагнитные поля; аналитические решения.

Abstract. Within a low-frequency model of the second-type seismoelectrical effect, an analytical solution has been obtained for the elastic and electromagnetic fields from that effect, with plane transversal elastic waves being excited in the two-layer earth with the second water-saturated layer. The solution thus obtained was used as the basis for calculating and analyzing the field components at impulse excitation of elastic oscillations.

Key words: second-type seismoelectric effect; water saturated rocks; plane transversal elastic waves; electromagnetic fields; analytical solutions.

Введение

Аналитические решения электродинамических задач [1-4] применяются в электроразведке при интерпретации полевых данных [4-6], а также при тестировании компьютерных программ численного решения задач геоэлектрики. Актуальным направлением в электроразведке является изучение сейсмоэлектрических явлений в геологической среде [4, 7-10], и в частности,

сейсмоэлектрического эффекта второго рода (СЭЭ). Математические модели СЭЭ [11, 12], основанные на высокочастотном приближении, применяемые для математического моделирования скважинных измерений, сводят определение упругих и электромагнитных полей этого эффекта к решению самосогласованной задачи, учитывающей взаимное влияние полей. Решение такой задачи возможно только численными методами. Низкочастотная математическая модель СЭЭ, предложенная в работах [7, 8] и используемая для моделирования сейсмоэлектрических полей при наземных измерениях, основана на последовательном решении задач: теории упругости в сплошной среде; флюидодинамики в пористой влагонасыщенной проницаемой среде и электрокинетики (нахождение тока, возникающего при движении минерализованной жидкости в пористой среде); электродинамики (нахождение электромагнитного поля, возбуждаемого электрокинетическим током). Эта модель допускает получение аналитических решений для упругих и электромагнитных полей СЭЭ для ряда простых моделей сред [8, 10]. Магнитоупругие волновые эффекты исследовались в [15, 16]. В случае двумерной вязко-упругой среды аналитические решения в виде ударно-волновых профилей построены в [17]. В последние годы заметен прогресс в развитии аналитических методов исследования нелинейных задач. Например, в [18, 19] предложены новые процедуры для построения точных решений нелинейных квазигиперболических уравнений волновой динамики.

В данной статье в рамках низкочастотной модели СЭЭ получено новое аналитическое решение для упругих и электромагнитных полей этого эффекта при возбуждении в двуслойной среде со вторым влагонасыщенным слоем плоских поперечных упругих волн. На основе полученного решения проведены расчеты и анализ компонент упругого и электромагнитного полей при импульсном возбуждении упругих колебаний.

1. Низкочастотная математическая модель сейсмоэлектрического эффекта второго рода

Согласно [7, 8], задача расчета компонент электромагнитного поля СЭЭ в низкочастотном приближении распадается на три последовательно решаемые подзадачи.

На первом этапе решается задача теории упругости сплошных сред для эффективных параметров пористой флюидонасыщенной среды Гассмана [13], которой является горная порода, состоящая из твердой фазы (скелета) и пор, заполненных электролитом. Эффективные параметры среды определяются по формулам:

$$\rho = m_0\rho^f + (1-m_0)\rho^s, \quad K = K^s\,\frac{m_0K^s\overline{K} - (1+m_0)K^f\overline{K} + K^fK^s}{m_0K^{s\,2}\overline{K} + (1-m_0)K^fK^s - K^f\overline{K}}, \quad \mu = \overline{\mu},$$

где ρ, K и μ – эффективные плотность, модули всестороннего сжатия и сдвига, соответственно; ρ^s, K^s – плотность и модуль всестороннего сжатия твердой матрицы; ρ^f, K^f – плотность и модуль всестороннего сжатия

электролита; m_0 – пористость породы; $\overline{K}$, $\overline{\mu}$ – модули всестороннего сжатия и сдвига скелета породы (т.е. сухой горной породы, поры которой заполнены, например, газом).

Вектор смещения $\mathbf{u}^s$ в твердой матрице влагонасыщенного пласта для гармонически изменяющихся полей (фактор изменения во времени $e^{-i\omega t}$) определяется из уравнения Ламе:

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}^s - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}^s + \rho\omega^2\mathbf{u}^s + \rho\mathbf{F} = 0, \qquad (1)$$

где $\lambda = K - (2/3)\mu$ и μ – параметры Ламе (μ совпадает с модулем сдвига), а $\mathbf{F}$ – вектор плотности внешних объемных сил. Уравнение (1) дополняется условиями сопряжения на поверхностях раздела слоев, обеспечивающими жесткость сцепления между слоями и равенство приложенных к границе сил.

Поглощение в среде будет учитываться с помощью модели Кельвина-Фойгта, т.е. при монохроматическом возбуждении упругих волн с круговой частотой ω параметры Ламе λ и μ – комплексные величины: $\lambda = \lambda' - i\omega\lambda''$, $\mu = \mu' - i\omega\mu''$, где λ', λ'', μ', μ'' – действительные.

Задавая обычное на дневной поверхности краевое условие и условие на бесконечности, получается полная формулировка упругой задачи для горизонтально-слоистой среды, позволяющую найти вектор смещения твердой фазы $\mathbf{u}^s$.

На втором этапе используя результаты работы [14], находится решение задачи флюидодинамики в пористой среде:

$$\mathbf{v}^f = -\frac{1}{a}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{b}{a}\mathbf{v}^s, \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}^f = -i\omega c p + d\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^s, \qquad (3)$$

где $\mathbf{v}^s$, $\mathbf{v}^f$ – скорости смещения твердой и жидкой фаз; p – поровое давление в жидкости. Промежуточные параметры a, b, c, d определяются равенствами

$$a = \frac{\eta m_0}{k} - i\omega\rho^f, \quad b = \frac{\eta m_0}{k},$$

$$c = \frac{1}{m_0 K^s}\left[\frac{\overline{K}}{K^s} - (1 - m_0) - m_0\frac{K^s}{K^f}\right], \quad d = \frac{1}{m_0}\left[\frac{\overline{K}}{K^s} - (1 - m_0)\right],$$

где k – проницаемость среды, η – динамическая вязкость жидкости.

Исключая из уравнений (2) и (3) скорость $\mathbf{v}^f$, получаем скалярное уравнение относительно p:

$$\Delta p + \chi^2 p = A\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}^s, \qquad (4)$$

где $\chi^2 = -i\omega c a$, $A = b - ad$.

Уравнение (4) для влагонасыщенного слоя дополняется краевыми условиями на границах пласта, допускающих свободное истечение жидкости (например, на дневной поверхности):

$$p = 0,$$

и непроницаемых для жидкости:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = b v_n^s,$$

где v_n^s – компонента скорости $\mathbf{v}^s$ перпендикулярная к границе пласта. Дополняя эти условия условием на бесконечности: $p \to 0$, получается полная формулировка скалярной задачи для давления в жидкости. Определив поровое давление p, из соотношения (2) можно найти скорость движения жидкости $\mathbf{v}^f$. Тогда плотность электрокинетического тока $\mathbf{j}$, порождающего СЭЭ может быть найдена из равенства

$$\mathbf{j} = -Q\theta(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s),$$

где Q – поверхностная плотность электрического заряда, адсорбированного на поверхности твердой матрицы, $\theta = S_w / V$ – удельная поверхность пор; S_w – площадь поверхности, отделяющей твердую матрицу от флюида в объеме V.

На последнем этапе определяются электромагнитные поля, возбуждаемые электрокинетическим током $\mathbf{j}$, из решения системы уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{j}, \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}, \tag{6}$$

с известными условиями сопряжения на поверхностях раздела сред с различными физическими свойствами и условиями в бесконечности. В уравнениях (5) и (6) $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ – напряженности электрического и магнитного полей, σ – электропроводность среды, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

2. Упругое и электромагнитное поле сейсмоэлектрического эффекта второго рода при возбуждении плоских поперечных упругих волн в двухслойной среде

Рассмотрим двухслойную модель среды (рис. 1) у которой первый слой – порода без влаги, второй слой (нижнее полупространство) – пористая влагонасыщенная среда. Верхнее полупространство – воздух. Параметры характеризующие такую модель среды приводятся в таблице 1.

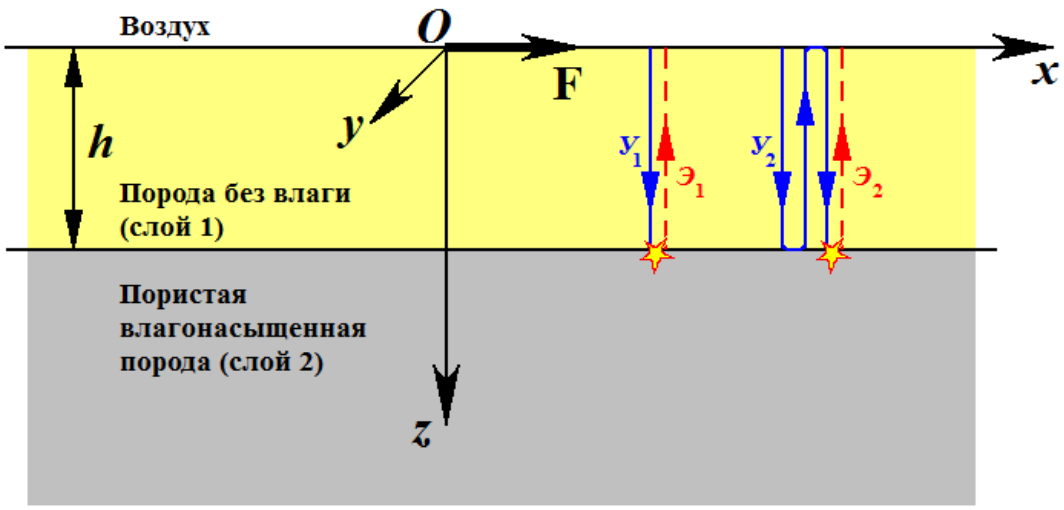

Рис. 1. Двухслойная среда

Таблица 1

Параметры модели

Параметр	Единицы измерения	Значения параметра в расчетах
Первый слой (порода без влаги)		
h – толщина слоя	м	10-50
ρ_1 – плотность породы	кг/м^3	2500
μ_1' – модуль сдвига (действительная часть)	Па	10^{10}
μ_1'' – модуль сдвига (мнимая часть)	Па·с	10^4
σ_1 – электропроводность	См/м	10^{-3}
P_0 – амплитуда силы, действующей на единицу поверхности $z=0$	Н/м^2	2000
Второй слой (пористая влагонасыщенная порода)		
ρ^s – плотность скелета породы	кг/м^3	2700
ρ^f – плотность поровой жидкости	кг/м^3	1000
μ_2' – модуль сдвига (действительная часть)	Па	$5\cdot10^9$
μ_2'' – модуль сдвига (мнимая часть)	Па·с	10^4
m_0 – пористость		0,05
k – проницаемость	м^2	10^{-9}
η – динамическая вязкость поровой жидкости	Па·с	10^{-3}
θ – удельная поверхность пор	м$^{-1}$	1
Q – поверхностная плотность адсорбированного заряда	Кл/м^2	1
σ^s – электропроводность скелета породы	См/м	0,01
σ^f – электропроводность поровой жидкости	См/м	1

Пусть в двуслойной среде (рис. 1) возбуждается монохроматическая плоская поперечная упругая волна с круговой частотой ω вектором $\mathbf{F}$ внешних объемных сил

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_x P_0 \delta(z) e^{-i\omega t},$$

где $\mathbf{e}_x$ – единичный орт, направленный вдоль оси Ox, $\delta(z)$ – функция Дирака, t – время.

Комплексная амплитуда $\mathbf{u}$ вектора смещения имеет лишь компоненту u_x, равную в первом слое ($0 \le z \le h$):

$$u_x = u_0 e^{ik_s^{(1)} z} \frac{1 + R_{1,2} e^{2ik_s^{(1)}(h-z)}}{1 - R_{1,2} e^{2ik_s^{(1)} h}}, \qquad (7)$$

где $u_0 = \dfrac{iP_0}{\omega\sqrt{\rho_1\mu_1}}$; $R_{1,2} = \dfrac{\sqrt{\rho_1\mu_1} - \sqrt{\rho_2\mu_2}}{\sqrt{\rho_1\mu_1} + \sqrt{\rho_2\mu_2}}$; $\rho_2 = m_0\rho^f + (1-m_0)\rho^s$ – эффективная плотность пористой влагонасыщенной породы; $k_s^{(1)} = \omega\sqrt{\rho_1/\mu_1}$ – волновое число поперечной волны в первом слое ($\operatorname{Im} k_s^{(1)} > 0$); $\mu_j = \mu'_j - i\omega\mu''_j$ ($j = 1,2$).

В этом случае нетрудно показать, что будут возбуждаться только тангенциальные компоненты E_x и H_y электромагнитного поля, определяемые в первом слое ($0 \le z \le h$) выражениями:

$$E_x = \frac{-i\omega^3\mu_0\rho^f k_э u_0 T_{1,2} e^{ik_s^{(1)}h}}{a(k_s^{(2)} + k_e^{(2)})(k_e^{(2)}\cos k_e^{(1)}h - ik_e^{(1)}\sin k_e^{(1)}h)(1 - R_{1,2}e^{2ik_s^{(1)}h})}\cos k_e^{(1)}z,$$

и (8)

$$H_y = \frac{k_e^{(1)}\omega^2\rho^f k_э u_0 T_{1,2} e^{ik_s^{(1)}h}}{a(k_s^{(2)} + k_e^{(2)})(k_e^{(2)}\cos k_e^{(1)}h - ik_e^{(1)}\sin k_e^{(1)}h)(1 - R_{1,2}e^{2ik_s^{(1)}h})}\sin k_e^{(1)}z,$$

где $k_э = Q\theta$; $T_{1,2} = \dfrac{2\sqrt{\rho_1\mu_1}}{\sqrt{\rho_1\mu_1} + \sqrt{\rho_2\mu_2}}$; $a = \dfrac{\eta m_0}{k} - i\omega\rho^f$; $k_e^{(j)} = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_j}$ – волновое число электромагнитного поля в j-ом слое ($j = 1,2$), $\operatorname{Im} k_e^{(j)} > 0$; $\sigma_2 = m_0\sigma^f + (1-m_0)\sigma^s$ – эффективная электропроводность пористой влагонасыщенной породы.

Из выражений (8) следует, что электромагнитное поле СЭЭ в рассматриваемой модели представлено только быстрой волной с волновым числом $k_e^{(1)}$, порожденной на поверхности раздела первого и второго слоев среды.

С помощью аналитических решений (7) и (8) для двуслойной среды с параметрами, значения которых приведены в таблице 1, на дневной поверхности ($z = 0$) рассчитаны компонента v_x скорости смещения частиц породы первого слоя и компонента E_x напряженности электрического поля во временной области для импульса

$$f(t) = -2\alpha(t - t_0)e^{-\alpha^2(t-t_0)^2},$$

где $t_0 = 0{,}01$ с; $\alpha = \pi\sqrt{2}\nu_{\max}$, $\nu_{\max} = 100$ Гц – частота максимума в спектре сигнала $f(t)$.

На сейсмограмме (рис. 2) изображены графики зависимости от времени t компоненты v_x скорости смещения для пяти значений толщины первого слоя h. Годограф 0-0 соответствует сигналу на источнике плоских поперечных волн; годограф 1-1 соответствует волнам, отраженным от границы между первым и вторым слоем; годограф 2-2 – кратным отраженным волнам.

На электрограмме (рис. 3) изображены графики зависимости от времени t компоненты E_x напряженности электрического поля для пяти значений толщины первого слоя h. На этой электрограмме можно выделить два

годографа: годограф 1-1 соответствует быстрым электромагнитным волнам ($Э_1$, рис. 1), возбуждаемым в момент первого достижения упругими колебаниями кровли влагонасыщенного пласта ($У_1$, рис. 1); годограф 2-2 соответствует быстрым электромагнитным волнам ($Э_2$, рис. 1), порожденным кратными отраженными упругими волнами ($У_2$, рис. 1).

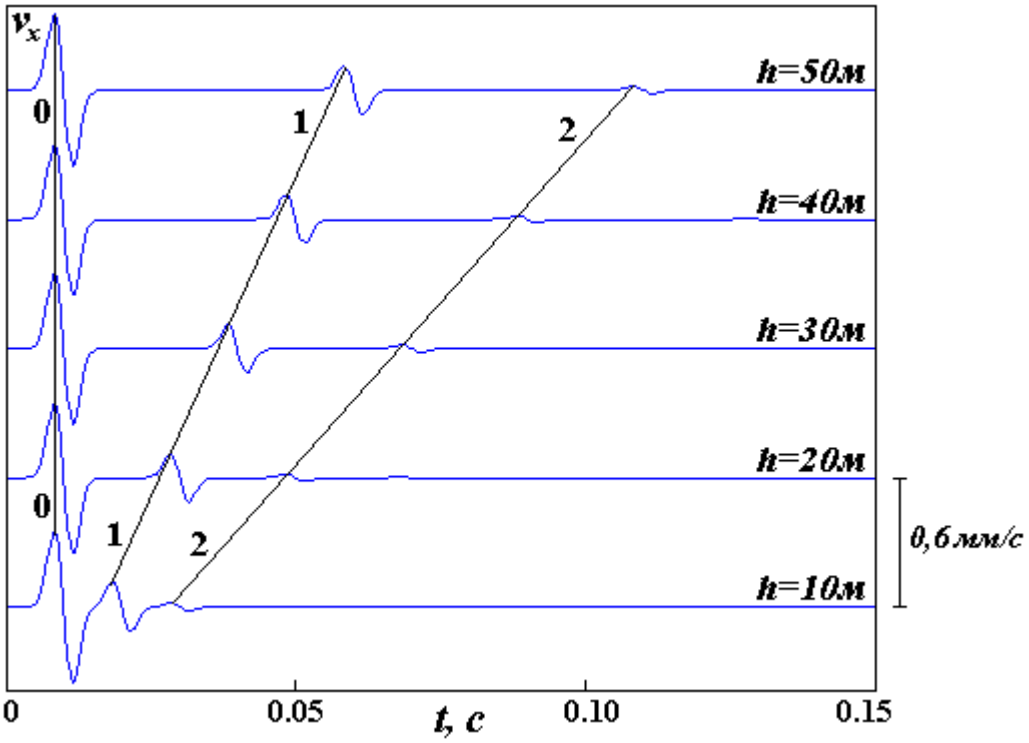

Рис. 2. Сейсмограмма

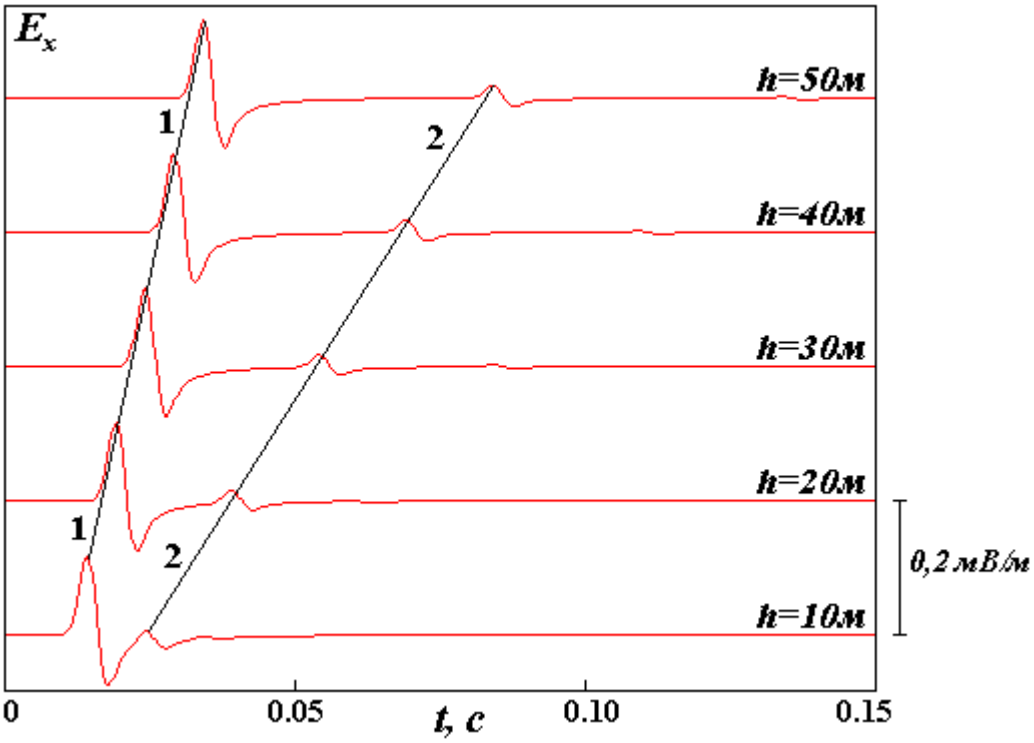

Рис. 3. Электрограмма

Выводы

1. Для низкочастотного приближения задачи о СЭЭ получено аналитическое решение для двухслойной среды с вторым влагонасыщенным слоем при возбуждении в ней плоских поперечных упругих волн.

2. Расчеты на основе полученного решения показывают наличие на электрограммах быстрых электромагнитных волн СЭЭ, возбуждаемых по достижению кровли водонасыщенного пласта как первичной падающей упругой волной, так и кратными отраженными волнами. Наличие на электрограммах быстрых волн порожденных кратными отражениями может осложнить интерпретацию измеренных данных, так как эти колебания могут быть проинтерпретированы, как быстрые волны, возбуждаемые на подошве влагонасыщенного слоя.

3. На основании полученных результатов рекомендуется использовать полученное аналитическое решение для разработки и тестирования новых методик интерпретации данных измерений упругих и электромагнитных полей СЭЭ, для решения задач инженерной геологии.

Литература

1. Светов Б.С., Губатенко В.П. Аналитические решения электродинамических задач. М.: Наука, 1988. 344 с.
2. Губатенко В.П., Московский И.Г. Аналитические решения трехмерных задач геоэлектрики // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Науки о Земле. 2012. Т. 12. Вып. 2. С. 62-68.
3. Московский И.Г., Губатенко В.П. Некоторые примеры аналитических решений трехмерных задач геоэлектрики для монохроматического электромагнитного поля // Недра Поволжья и Прикаспия, вып. 74, 2013. С. 66-71.
4. Светов Б.С. Основы геоэлектрики. М.: Издательство ЛКИ, 2008. 656 с.
5. Московский И.Г. Применение нейросетевого подхода при интерпретации данных МТЗ в трехслойной среде с частотной дисперсией электропроводности второго слоя // Проблемы прочности элементов конструкций под действием нагрузок и рабочих сред: Сб. науч. тр. Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 2014. С. 116-121.
6. Московский И.Г., Балабан О.М., Федорова О.С., Кочетков А.В. Применение нейронных сетей при интерпретации данных электромагнитных зондирований вертикально-трещиноватых сред // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 7, №1 (2015) http://naukovedenie.ru/PDF/05TVN115.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/05TVN115
7. Светов Б.С., Губатенко В.П. Электромагнитное поле механо-электрического происхождения в пористых влагонасыщенных горных породах. I. Постановка задачи // Физика Земли. 1999. №10. С. 67-73.
8. Губатенко В.П., Светов Б.С., Московский И.Г. Электромагнитное поле механо-электрического происхождения в пористых влагонасыщенных

горных породах. II. Расчеты в горизонтально-слоистых средах // Физика Земли. 2002. № 2. С. 34-50.
9. Московский И.Г., Московский Г.А. Кинематика электромагнитных волн сейсмоэлектрического эффекта второго рода в двухслойной среде // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Науки о Земле. 2009. Т. 9. Вып. 2. С. 36-39.
10. Московский И.Г., Балабан О.М., Федорова О.С., Кочетков А.В. Математическое моделирование сейсмоэлектрического эффекта второго рода, порождаемого плоскими упругими волнами в пористых влагонасыщенных средах // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 7, №1 (2015) http://naukovedenie.ru/PDF/04TVN115.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/04TVN115
11. Pride S.R. Governing equations for the coupled electromagnetics and acoustics of porous media // Phys. Review. B., 1994, V. 50, P. 15678 – 15696.
12. Haartsen M.W., Pride S.R. Electroseismic waves from point sources in layered media // J. Geophysical Res., 1996, V. 102, P. 24745 – 24769.
13. Уайт Дж. Э. Возбуждение и распространение сейсмических волн. М.: Недра, 1986. 261 с.
14. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика. М.: Недра, 1996. 447 с.
15. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Мальханов А.О. Нелинейные локализованные продольные волны в пластине, взаимодействующей с магнитным полем // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. № 4. С. 5-15.
16. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М. Нелинейные продольные магнитоупругие волны в стержне // Нелинейный мир. 2009. Т. 7. № 7. С.533-540.
17. Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // Акустический журнал. 2000. Т. 46. № 1. С. 116.
18. Бочкарев А.В., Землянухин А.И. Точное уединенно-волновое решение обобщенного уравнения гарднера-бюргерса // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 4-10.
19. Бочкарев А.В., Землянухин А.И. Непрерывные дроби и точное решение уравнения калоджеро-дегаспериса-фокаса // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. № 1. С. 44-48.