УДК 534.1:517.957

# УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ 5-Й СТЕПЕНИ

Землянухин А.И.[1], Бочкарев А.В.[2], Блинков Ю.А.[3], Ковалева И.А.[4], Блинкова А.Ю.[5]
[1,2,4,5] Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А., Россия, Саратов,
[3] Национальный исследовательский Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Россия, Саратов,
[1]zemlyanukhinai@sstu.ru, [2]ab2009sar@list.ru

# SOLITARY WAVES OF THE 4-TH ORDER QUASI-HYPERBOLIC EQUATION WITH NONLINEARITY OF 5-TH DEGREE

Zemlyanukhin A.I.[1], Bochkarev A.V.[2], Blinkov Yu.A[3], Kovaleva I.A.[4], Blinkova A.Yu.[5]
[1,2,4,5]Yuri Gagarin state technical university of Saratov, Russia, Saratov,
[3]National research state university of Saratov, Russia, Saratov
[1]zemlyanukhinai@sstu.ru, [2]ab2009sar@list.ru

**Аннотация.** Рассмотрено уравнение 4-го порядка, описывающее распространение осесимметричных изгибно-продольных волн в цилиндрической оболочке, взаимодействующей с внешней нелинейно-упругой средой. Зависимость напряжение – деформация среды представляется полиномом пятого порядка. Показано, что исходное уравнения при некоторых условиях на коэффициенты сводится к обобщенному уравнению Дуффинга, для которого с использованием метода геометрического ряда получено точное уединенно-волновое решение. Найдены условия, при которых это решение выражается через квадратный корень из гиперболических секанса или тангенса.

Ключевые слова: точные уединенно-волновые решения, цилиндрическая оболочка, изгибно-продольные волны

**Abstract.** The 4th-order equation describing the propagation of axially symmetric bending-longitudinal waves in a cylindrical shell interacting with an external nonlinear elastic medium is considered. The dependence of the stress – strain environment is represented by 5th-order polynomial. It is shown that under some conditions on the coefficients the initial equation is reduced to a generalized Duffing equation, for which exact solitary-wave solution using the geometric series method is obtained. Ehe conditions under which this solution is expressed via the square root of hyperbolic secant or hyperbolic tangent is found.

Keywords: exact solitary-wave solutions, cylindrical shell, bending-longitudinal waves

Теория оболочек является достаточно развитым разделом механики деформируемого твердого тела. Повышенный интерес к выводу уравнений, адекватно описывающих поведение оболочек, а также разработке методов решения этих уравнений связан с исследованием вещества на микроуровне. В частности, изучение процессов распространения волн в цилиндрических оболочках вызвано потребностью адекватного описания динамических процессов в углеродных нанотрубках [1, 2].

В [3] выведено уравнение, моделирующее распространение осесимметричных продольно-изгибных волн в бесконечной цилиндрической оболочке, взаимодействующей с нелинейно-упругой внешней средой:

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4}+a_1\frac{d^2 w}{d\xi^2}+a_2\frac{d^2\left(w^3\right)}{d\xi^2}+a_3 w+a_4 w^3=0, \qquad (1)$$

где $w=w(\xi)$ – нормальная компонента перемещения срединной поверхности оболочки, $\xi=x-Vt$ – бегущая координата, $x$ – продольная координата, $V$ – постоянная скорость волны, $a_1,...,a_4$ – постоянные коэффициенты, зависящие от упругих параметров материала оболочки и окружающей ее среды.

Для описания нелинейной диаграммы деформирования упругой среды предложено немало моделей. В [3] для этого использовалась зависимость, представленная полиномом третьей степени по нечетным степеням прогиба $w$, вследствие чего в уравнении (1) появились нелинейные члены, содержащие функцию $w^3$ и ее вторую производную по $\xi$.

В настоящей работе нелинейная упругость внешней среды определяется полиномом пятой степени по нечетным степеням прогиба. Уравнение (1) при этом преобразуется к виду

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4}+c_1\frac{d^2 w}{d\xi^2}+c_2 w+c_3 w^3+c_4 w^5+c_5\frac{d^2\left(w^3\right)}{d\xi^2}+c_6\frac{d^2\left(w^5\right)}{d\xi^2}=0, \qquad (2)$$

включающему дополнительные слагаемые с функцией $w^5$ и ее производной.

Уравнение (2) относится к неинтегрируемым и содержит члены с нелинейностями и производными высоких порядков. Анализ доминантных членов показывает [4], что решение уравнения (2) имеет полюс дробного порядка, равного ½. Найти точное решение этого уравнения непросто даже с использованием современных методов компьютерной математики.

Заметим, что уравнение (2) допускает факторизацию и редуцируется к обобщенному уравнению Дуффинга

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2}+b_2 w+b_3 w^3+b_4 w^5=0, \qquad (3)$$

где

$$b_1=\frac{c_4}{c_6},\quad b_2=\frac{c_1 c_6-c_4}{c_6},\quad b_3=c_5,\quad b_4=c_6, \qquad (4)$$

при условиях на коэффициенты исходного уравнения:

$$c_3 c_6=c_4 c_5,\quad c_2 c_6^2=c_4\left(c_1 c_6-c_4\right). \qquad (5)$$

Чтобы показать это, достаточно потребовать совпадения левой части уравнения (2) и выражения

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+b_1\right)\left(\frac{d^2 w}{d\xi^2}+b_2 w+b_3 w^3+b_4 w^5\right), \qquad (6)$$

после чего приравнять коэффициенты при подобных слагаемых в левой и правой частях полученного равенства. Указанное совпадение достигается при выполнении условий (4), (5) и

$$b_1 = \frac{c_4}{c_6}.$$

Для нахождения точных уединенно-волновых решений уравнения (3) воспользуемся методом геометрического ряда, предложенным и развитым в статьях [5-8].

Будем искать решение в форме

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\xi), \tag{7}$$

где $w_k(\xi)$ – неизвестные функции, $\varepsilon$ – формальный параметр. Подставляя (7) в (3) и группируя по степеням $\varepsilon$, получим бесконечную систему уравнений для определения функций $w_k(\xi)$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^1: \quad \frac{d^2}{d\xi^2} w_1 + b_2 w_1 = 0,\\
&\varepsilon^2: \quad \frac{d^2}{d\xi^2} w_2 + b_2 w_2 = 0,\\
&\varepsilon^3: \quad \frac{d^2}{d\xi^2} w_3 + b_2 w_3 = -b_3 w_1^3,\\
&\varepsilon^4: \quad \frac{d^2}{d\xi^2} w_4 + b_2 w_4 = -3b_3 w_1^2 w_2,\\
&\varepsilon^5: \quad \frac{d^2}{d\xi^2} w_5 + b_2 w_5 = -b_4 w_1^5 - 3b_3\left(w_1^2 w_3 + w_1 w_2^2\right),\\
&\qquad\qquad \ldots
\end{aligned} \tag{8}$$

Первое уравнение системы (8) имеет частное решение

$$w_1 = \mathrm{e}^{\xi} \tag{9}$$

при условии

$$b_2 = -1. \tag{10}$$

Если в качестве решения второго уравнения (8) принять $w_2 = 0$, то частное решение каждого из последующих уравнений этой системы можно представить в виде $w_n = K_n w_1^n$. Последовательно определяя коэффициенты $K_n$, $n = 3, 4, 5, \ldots$ и вводя обозначение

$$y = \varepsilon\,\mathrm{e}^{\xi}, \tag{11}$$

разложению (7) можно придать форму степенного ряда

$$w = y - \frac{1}{8}b_3 y^3 + \left(\frac{1}{64}b_3^2 - \frac{1}{24}b_4\right)y^5 - \frac{1}{64}b_3\left(\frac{1}{8}b_3^2 - b_4\right)y^7 + \ldots$$
$$+\left(\frac{1}{4096}b_3^4 - \frac{1}{256}b_3^2 b_4 + \frac{1}{384}b_4^2\right)y^9 - \ldots, \tag{12}$$

Ряду (12) соответствует решение с полюсом порядка ½. Для перехода к полюсу целого порядка возведем ряд (12) в квадрат, после чего произведем замену

$$y^2 = z. \tag{13}$$

Полученный в результате степенной ряд

$$w^2 = z - \frac{1}{4}b_3 z^2 + \left(\frac{3}{64}b_3^2 - \frac{1}{12}b_4\right)z^3 - \frac{1}{384}b_3\left(3b_3^2 - 16b_4\right)z^4 + \ldots$$
$$+\left(\frac{5}{4096}b_3^4 - \frac{5}{384}b_3^2 b_4 + \frac{1}{144}b_4^2\right)z^5 - \ldots, \tag{14}$$

соответствует функции с полюсом 1-го порядка и является геометрическим: все диагональные аппроксиманты Паде $[Q/Q]$ для этого ряда, начиная с $Q = 2$, совпадают между собой [7] и равны

$$\frac{192z}{192 + 48b_3 z + \left(3b_3^2 + 16b_4\right)z^2}. \tag{15}$$

Выражение (15) представляет точную сумму ряда (14). Выполняя над этим выражением обратные преобразования, то есть извлекая квадратный корень, заменяя $z$ на $y^2$ в соответствии с (13) и подставляя (11), получим

$$w = \pm\frac{8\sqrt{3}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{\xi}}{\sqrt{192 + 48b_3\varepsilon^2\,\mathrm{e}^{2\xi} + \left(3b_3^2 + 16b_4\right)\varepsilon^4\,\mathrm{e}^{4\xi}}}, \tag{16}$$

где знак перед дробью выбирается совпадающим со знаком $\varepsilon$.

Выражение (16) является точным уединенно-волновым решением уравнения (3), в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в уравнение. При выполнении условий (4), (5) данное выражение также является точным решением исходного уравнения (2).

Подкоренное выражение в (16) представляется квадратным трехчленом

$$A\left(\mathrm{e}^{2\xi}\right)^2 + B\,\mathrm{e}^{2\xi} + C, \tag{17}$$

где

$$A = \left(3b_3^2 + 16b_4\right)\varepsilon^4, \quad B = 48b_3\varepsilon^2, \quad C = 192.$$

Решение (16) является вещественным и ограниченным в двух случаях. В первом случае корни трехчлена (17) являются комплексными, что выполняется при $B^2 - 4AC < 0$. Во втором случае оба корня вещественные отрицательные, что соблюдается при условиях $B^2 - 4AC \geq 0$, $\left(-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}\right)\big/(2A) < 0$.

Заметим, что при $b_3 = 0$ решение (16) может быть выражено через квадратный корень из гиперболического секанса, а при $3b_3^2 + 16b_4 = 0$ – через квадратный корень из гиперболического тангенса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00176-а).

## Список литературы


1. Lim C.W., Yang Y. Wave propagation in carbon nanotubes: nonlocal elasticity induced stiffness and velocity enhancement effects // J. Mech. Mater. Struct. 2010, № 5, p. 459–476. http://dx.doi.org/10.2140/jomms.2010.5.459
2. Muc A., Banas A., Chwal M. Free vibrations of carbon nanotubes with defects // Mech. and Mechan. Eng. 2013, Vol. 17, p. 157–166.
3. Zemlyanukhin A.I., Bochkarev A.V., Mogilevich L.I., Tindova E.G. Axisymmetric Longitudinal-Bending Waves in a Cylindrical Shell Interacting with a Nonlinear Elastic Medium // Modelling and Simulation in Engineering. 2016, Vol. 2016, Article ID 6596231, 7 p.
4. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. Долгопрудный: Изд. дом “Интеллект”, 2010. 368 с.
5. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 2. с. 182-191. http://dx.doi.org/10.7242/1999-6691/2016.9.2.16
6. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби, метод возмущений и точные решения нелинейных эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24, № 4. с. 71-85. http://dx.doi.org/10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85
7. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Точное уединенно-волновое решение обобщенного уравнения Гарднера-Бюргерса // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. №1. http://mathmod.esrae.ru/1-1
8. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби и точное решение уравнения Калоджеро-Дегаспериса-Фокаса // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2016. №1. http://mathmod.esrae.ru/1-7